الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية

People's Democratic Republic of Algeria

Ministry of Higher Education and Scientific Research
University of Algiers 3
Faculty of Economics, Commercials
and Management Sciences
Department of Economics Sciences

وزارة التعليم العالي والبحث العلمي
جامعة الجزائر 3
كلية العلوم الاقتصادية والعلوم
التجارية وعلوم التسيير
قسم العلوم الاقتصادية

دروس في مقياس رياضيات 2
للسنة الأولى جذع مشترك

من إعداد الأستاذ: المدهون حسن.

السنة الجامعية:

2022 /2021

الفهرس..**1**

تمهيد

باسم الله الرحمن الرحيم والصلاة والسلام على رسوله الكريم، وعلى آله وصحبه الطيبين الطاهرين.

أما بعد:

هذه المطبوعة هي عبارة عن محاضرات في مقياس الرياضيات 2 والتي تتضمن دروسا في الجبر الرياضي حسب البرنامج الوزاري الجديد في مقياس الرياضيات 2، والموجه لطلبة السنة الأولى كلية العلوم الاقتصادية، العلوم التجارية وعلوم التسيير، وقد تم كتابة هذه المحاضرات بصورة بسيطة وبطريقة تلائم مستوى طلبة هذه الكلية، حيث تم التركيز على تبسيط المفاهيم بأمثلة متعددة وتمارين محلولة وأخرى مقترحة للحل، حتى يتمكن الطالب من التمرن عليها وإنماء قدراته.

كما ننبه طلبتنا الأعزاء أن مفاهيم مقياس الرياضيات 2 هي إحدى الوسائل الهامة في الاقتصاد ولها العديد من التطبيقات في عدة تخصصات التابعة للعلوم الاقتصادية، العلوم التجارية وعلوم التسيير والتي سيتطرق إليها الطالب في السداسيات المقبلة. فالرياضيات هي الادارة الاولى والأخيرة في حل جميع المشكلات الاقتصادية المعقدة، فلابد على طلبتنا في كلية العلوم الاقتصادية، العلوم التجارية وعلوم التسيير أن يكونوا ملمين ببعض من علوم الرياضيات كالتحليل الرياضي والجبر الخطي، إذ نجد غالبا أن الطلبة المتوفقين في الاقتصاد هم الطلبة المتمكنين من علوم الرياضيات.

ونظرا للحجم الساعي المخصص لمقياس الرياضيات 2، فلقد ركزنا على تقديم مفاهيم هذا المقياس وتصميم محاضراته دون التطرق والخوض في البراهين لتتناسب مع التوزيع الوزاري الجديد الذي جعل هذا المقياس يقدم خلال سداسي واحد، أي ما يعادل 14 محاضرة.

كما ننوه لطلبتنا الأعزاء أنه تم أيضا التطرق إلى بعض المحاور والجوانب التي لها صلة بمحاور المقرر أو توسعة فيه، ففي الأخير هذه المطبوعة التي تعد ثمرة تجربتنا في تدريس مقياس الرياضيات 2 لعدة سنوات بكلية العلوم الاقتصادية والعلوم التجارية وعلوم التسيير بجامعة الجزائر 3 ليست من إبداعنا وإنما هي دروس مستوحاة من مراجع جمعناها وعرضناها بأسلوب رأيناه الأنسب لمستوى طلبتنا في الكلية.

في الأخير، نرجو أن يستفيد طلابنا من هذه الدروس وأن يجدوا فيها ما ينفعهم، كما نعدهم أن نسعى إلى تحديث محتويات هذه المطبوعة كلما توفر الجهد والوقت لذلك.

الفصل الأول: البنى الجبرية

1. العمليات الداخلية.

لتكن E مجموعة غير خالية. نسمي عملية داخلية في E أو قانونا داخليا في E : كل تطبيق f معرفا من الجداء الديكارتي $E \times E$ نحو E كما يلي:

$$f: E \times E \to E$$

$$(x,y) \to z = f(x, y)$$

ونرمز للعمليات الداخلية بـ: * ، Δ ، T... الخ.

وسنصطلح على الكتابة: $z = x\, T\, y$ بدلا من أن نكتب: $z = T(x,y)$.

ملاحظة: يمكننا أن نلاحظ أنه يمكن صياغة تعريف العملية الداخلية بالطريقة التالية:

$\forall x, y \in E : x * y \in E$ (* عملية داخلية في E).

أمثلة:

1. $E = IR$, $x * y = x^2 + y^2$

نلاحظ أن * عملية داخلية في IR لأنه:

$\forall x, y \in IR :$ $\quad x^2 + y^2 \in IR$

2. $E = IN$, $x * y = x - y$

* ليست عملية داخلية في IN لأنه على سبيل المثال: $3 - 4 = -1 \notin IN$

3. نرمز بـ P(A) إلى مجموعة أجزاء المجموعة A.

لتكن $E = P(A)$ حيث: $A \neq \emptyset$، ونعرف العملية * على P(A) كما يلي:

$B * C = B \cup C$, $\quad B, C \in E$

فنلاحظ أن * تعرف عملية داخلية على P(A)، لأن اتحاد أي عنصرين من P(A) هو عنصر من P(A).

2. خواص العملية الداخلية.

*** التجميع:**

لتكن E مجموعة غير خالية مزودة بالعملية الداخلية*. نقول أن العملية * تجميعية في E إذا وفقط إذا تحقق:

$$\forall (x,y,z) \in \boldsymbol{E^3}: \boldsymbol{x * (y * z) = (x * y) * z}$$

مثلا:

1. في **IR** الجمع تجميعي، الضرب تجميعي.

2. في IR العملية**:** $x * y = x^2 + y^2$

ليست تجميعية لأنه على سبيل المثال، بأخذ**:** $x = 1 , y = 2 , z= 3$

$(1*2)*3 = (1^2+2^2) *3 = 5*3 = 5^2+3^2 = 34.$

$1* (2*3) = 1* (2^2+3^2) = 1 * (13) = 1^2+13^2 = 170.$

*** التبديل:**
لتكن **E** مجموعة غير خالية مزودة بالعملية الداخلية*. نقول أن العملية * **تبديلية** في **E** إذا وفقط إذا تحقق:

$$\forall (x,y) \in E^2 : \quad x * y = y * x$$

أمثلة:

1. الجمع في **IR** تبديلي.
2. الطرح في**IR** ليس تبديلي.
3. التقاطع والاتحاد في **P (E)** تبديليان .

*** العنصر الحيادي:**

لتكن **E** مجموعة غير خالية مزودة بالعملية الداخلية*. وليكن $e \in E$

نقول عن e أنه عنصر حيادي بالنسبة للعملية الداخلية * في **E** إذا وفقط إذا تحقق:

$$\forall x \in E : x*e = e*x=x.$$

أمثلة:

1. 0 هو عنصر حياد بالنسبة للجمع في **IR**.
2. 1 هو عنصر حيادي بالنسبة للضرب في **IR**.

*** العنصر النظير:**

لتكن E مجموعة غير خالية مزودة بالعملية الداخلية*. وتقبل عنصرا حياديا e.

نقول أن: $x \in E$ يقبل عنصرا نظيرا نرمز له بـx' بالنسبة للعملية * في E إذا وفقط إذا تحقق:

$$x*x' = x'*x = e$$

أمثلة:

1. في IR، لكل عنصر $x \in IR$ نظيرا في IR هو $x' = -x$ بالنسبة لعملية الجمع.
2. في IR، لكل عنصر $x \in IR^*$ نظيرا بالنسبة لعملية الضرب في IR^* وهو $x' = \frac{1}{x}$.
3. في IN، 4 ليس له نظير في IN بالنسبة للعملية الداخلية +.

<u>قضية 1</u>: لتكن E مجموعة غير خالية مزودة بالعملية الداخلية *، العنصر الحيادي e إذا وجد فهو وحيد.

<u>قضية 2</u>: لتكن E مجموعة غير خالية مزودة بالعملية الداخلية *، و كانت * تجميعية في E فإذا كان لعنصر ما نظيرا فإن هذا النظير وحيد.

*** التوزيع:**

لتكن E مجموعة غير خالية، ولتكن T و* عمليتان داخليتان في E. نقول أن * توزيعية على T إذا:

$$\forall (x,y,z) \in E^3 : \qquad x * (yTz) = (x*y)\ T\ (x*z)$$

وتحقق أيضا:

$$\forall (x,y,z) \in E^3 : \qquad (xTy) * z = (x*z)\ T\ (y*z)$$

3. الزمرة.

لتكن G مجموعة غير خالية و * عملية داخلية في G. نقول عن (G, *) إنها زمرة إذا وفقط إذا تحقق:

1. تجميعية.
2. تقبل عنصرا حياديا $e \in G$.
3. كل عنصر $x \in G$ يقبل نظيرا x' بالنسبة إلى *، أي :

$$\forall x \in G,\ \exists x' \in G : \qquad x*x' = x'*x = e$$

حيث e هو العنصر الحيادي بالنسبة إلى العملية *.

زيادة على هذا، إذا كانت العملية * تبديلية، أي:

$$\forall (x,y) \in G^2: \qquad x * y = y * x.$$

فإننا نقول عن (G, *) إنها زمرة تبديلية أو آبلية.

أمثلة:

1. (IN, +) ليست زمرة لأن + ليست داخلية في IN.
2. (ℤ,+)، (ℚ,+) ، (IR,+) ، (ℂ,+) زمر تبديلية.

4. الزمرة الجزئية.

لتكن (G,*) **زمرة.** $H \neq \emptyset$. نقول عن (H, *) إنها زمرة جزئية من G إذا:

1. $e \in H$، حيث e هو العنصر الحيادي بالنسبة للعملية * في G.
2. $\forall x, y \in H : x * y \in H$ *(أي* * داخلية في H).*
3. $\forall x \in H : x' \in H$ ، حيث x' العنصر النظير لـ x بالنسبة للعملية *

ونكتب: $H \leq G$

تمرين: نعتبر الزمرة التبديلية (IR^3, +) ونعرف المجموعة:

$$\{H = (x, y, z) \in IR^3 / x - y + 2z = 0\}$$

بين أن (H, *) زمرة جزئية من (IR^3 , +)

الحل:

1. لدينا (0,0,0) العنصر الحيادي بالنسبة للقانون + وينتمي إلى H

لأن: $0 - 0 + 2.0 = 0$

مما يعني أن: $H \neq \emptyset$ و $e = 0_{IR^3} \in H$

2. بالنسبة للشرط الثاني، نأخذ: $X = (x_1, x_2, x_3)$ $Y = (y_1, y_2, y_3) \in H$

عندئذ، يكون لدينا: $x_1 - x_2 + 2x_3 = 0$ و $y_1 - y_2 + 2y_3 = 0$

ومنه، بالجمع نجد: $(x_1 + x_2) - (y_1 + y_2) + 2(z_1 + z_2) = 0$

أي أن: $\forall X, Y \in H, X + Y \in H$

3. **العنصر النظير**: ليكن $X = (x_1, x_2, x_3) \in H$

أي: $x_1 + x_2 - 2x_3 = 0$

ومنه**:** $(- x_1) + (- x_2) - (- 2x_3) = 0$

أي أن***:*** $X' = -X = (-x_1, -x_2, -x_3) \in H$

إذن***:*** $(IR^3, +)$ زمرة تبديلية.

تعريف آخر للزمرة الجزئية:

لتكن $(G,*)$ زمرة و $H \supseteq G$ غير خالية. H زمرة جزئية من G إذا وفقط إذا تحقق:

$$\begin{cases} H \neq \emptyset \\ \forall x, y \in H: \quad x * y^{-1} \in H \end{cases}$$

حيث: y' هو نظير y بالنسبة إلى $*$.

5. الحلقة: عموميات وتعاريف.

تعريف:

لتكن A مجموعة مزودة بقانون أول نرمز له كالجمع + وقانون ثاني نرمز له كالضرب ×.

نقول عن $(A, +, \times)$ أنها حلقة إذا وفقط إذا:

1. $(A, +)$ زمرة تبديلية.
2. العملية × تقبل عنصرا حياديا نرمز له بـ 1_A.
3. العملية × توزيعية على الجمع +.

إضافة إلى ذلك، إذا كانت العملية × تبديلية، نقول أن الحلقة $(A, +, \times)$ تبديلية.

نرمز للعنصر الحيادي بالنسبة إلى الجمع + بالرمز 0_A.

أمثلة عامة:

$(\mathbb{Z}, +, \times)$ ، $(\mathbb{Q}, +, \times)$، $(IR, +, \times)$، $(\mathbb{C}, +, \times)$، $\left(\frac{Z}{nZ}, +, \times\right)$ كلها حلقات تبديلية.

الفصل الثاني: بنية الفضاءات الشعاعية.

1. تعريف الفضاء الشعاعي.

ليكن IK حقل تبديلي. نسمي فضاء شعاعيا على IK أو IK –فضاء شعاعي: كل مجموعة غير خالية **E** مزودة بقانونين: أحدهما داخلي ويرمز له ب +، والآخر خارجي ويرمز له بـ -. يربط كل زوج (λ , x) من **K × E** بعنصر من **E** يرمز له بـ **xλ .** ويحقق:

1. **(E,+)** زمرة تبديلية.
2. $\forall \lambda \in IK ;\ \forall x, y \in E : \lambda. (x +y) = \lambda. x + \lambda.y$
3. $\forall \lambda, \mu \in IK ;\ \forall x \in E : (\lambda+\mu).x= \lambda.x +\mu .x$
4. $\forall \lambda, \mu \in IK ;\ \forall x \in E : (\lambda\mu).x = \lambda. (\mu.x)$ **.**
5. $\forall x \in E : 1. x = x$

مثال: ليكن IK حقل تبديلي، ونعتبر:

$$E = IK^n =\left\{ (x_1, x_2, \dots, x_n) , x_i \in IK,\ 1 \leq i \leq n.\right\}$$

نعرف في IK^n الجمع كما يلي:

$$X = (x_1, x_2, \dots,x_n) , Y = (y_1, y_2, \dots,y_n) : X+Y= (x_1+y_1, x_2+y_2, \dots x_n+y_n).$$

والقانون الخارجي كما يلي:

$$IK\times E \to E$$
$$(\lambda, X) \mapsto \lambda. (x_1, x_2, \dots, x_n) = (\lambda x_1, \lambda x_2, \dots, \lambda x_n)$$

تأكد أن E فضاء شعاعي على الحقل التبديلي IK.

2. الجملة المولدة في فضاء شعاعي.

ليكن E فضاء شعاعي على حقل تبديلي IK و $G = \{g_1, g_2, \dots, g_n\}$ جملة أشعة في E

نقول عن G أنها جملة مولدة لـ E إذا وفقط إذا تحقق ما يلي:

$$\forall x \in E, \exists (\alpha_1, \alpha_2, \dots \alpha_n) \in IK^n : x = \sum_{i=1}^{n} \alpha i\ gi = \alpha_1 g_1 + \alpha_2 g_2 + \dots + \alpha_n g_n$$

$\sum_{i=1}^{n} \alpha i\ gi$ نسميها تركيبة خطية أو عبارة خطية أو مزج خطي لعناصر G، بمعاملات أو سلميات $\alpha_1, \alpha_2, \dots \alpha_n$ من IK ونكتب:

$$E = \langle G \rangle = \langle g_1, \dots, g_n\rangle$$

إذن: G مولدة للفضاء E إذا وفقط إذا كان كل عنصر x من E يكتب على شكل عبارة خطية لعناصر من G بمعاملات من IK.

مثال: IK = IR ، $E = IR^3$. لدينا:

$\forall X = (x_1, x_2, x_3) \in IR^3 : X = x_1\,(1,0,0) + x_2\,(0,1,0) + x_3\,(0,0,1)$

$= x_1 e_1 + x_2 e_2 + x_3 e_3$

حيث: $e_1 = (1,0,0)\,,\ e_2 = (0,1,0)\,,\ e_3 = (0,0,1)$

إذن: $\{\boldsymbol{e_1}, \boldsymbol{e_2}, \boldsymbol{e_3}\}$ جملة مولدة لـ IR^3.

تمرين:

نعتبر الفضاء الشعاعي $E = IR^3$ على الحقل IR. بيّن أن الجملة $G = \{g_1, g_2, g_3\}$ حيث:

$g_1 = e_1, \quad g_2 = e_1 + e_2, \quad g_3 = e_1 + e_2 + e_3$

هي جملة مولدة لـ IR^3 حيث: e_1، e_2، e_3 هي الأشعة المعطاة في المثال السابق.

نفس السؤال بالنسبة للجملة $G = \{g'_1, g'_2, g'_3\}$ **حيث:**

$g'_1 = e_1, \quad g'_2 = e_1 - 2e_2, \quad g'_3 = e_1 - e_2 - 3e_3.$

الحل:

لدينا: $e_1 = (1,0,0)\,,\ e_2 = (1,1,0)\,,\ e_3 = (1,1,1)$

لإثبات أن $IR^3 = <g_1, g_2, g_3>$ ، نعتبر $X = (x, y, z)$ كيفيا من IR^3 ونبحث عن $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \in IR$ بحيث:

$(x, y, z) = \alpha_1 g_1 + \alpha_2 g_2 + \alpha_3 g_3$

أي:

$$\begin{cases} x = \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha \\ y = \alpha_2 + \alpha_3 \\ z = \alpha_3 \end{cases}$$

بحل هذه الجملة نجد: $\alpha_1 = x - y + 2z \quad , \alpha_2 = y - z \quad , \ \alpha_3 = z$

ومنه: $IR^3 = <g_1, g_2, g_3>$.

3. الجملة المستقلة خطيا في فضاء شعاعي.

ليكن E فضاء شعاعيا على حقل تبديلي IK و $L = \{\boldsymbol{v_1}, \boldsymbol{v_2}, \dots, \boldsymbol{v}_n\}$ جملة أشعة في E.

نقول عن L أنها جملة مستقلة خطيا في E إذا وفقط إذا تحقق الاستلزام التالي:

$\forall (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n) \in IK^n : \alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \dots + \alpha_n v_n = 0_E \Rightarrow \alpha_1 = \alpha_2 = \dots = \alpha_n = 0_k$

مثال:

نعتبر الفضاء الشعاعي IR^3 على الحقل IR ونعتبر الجملة:

$$L = \{v_1 = (1,0,0), v_2 = (0,1,2), v_3 = (0,0,3)\}$$

لندرس الاستقلال الخطي للجملة L.

لتكن $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \in IR$ لدينا: $\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \alpha_3 v_3 = (0,0,0) \Rightarrow \begin{cases} \alpha_1 = 0 \\ \alpha_3 = 0 \\ 2\alpha_2 + 3\alpha_3 = 0 \end{cases}$

أي: $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = 0$

ومنه، الجملة L مستقلة خطيا.

4. الجملة المرتبطة خطيا.

كل جملة في E ليست مستقلة خطيا، نقول عنها أنها مرتبطة خطيا.

مثال: نعتبر الفضاء الشعاعي IR^3 على الحقل IR ، ونعتبر الجملة:

$$G = \{g_1 = (0,1,2), g_2 = (-1,0,1), g_3 = (-1,1,3)\}$$

هل L مستقلة أم مرتبطة خطيا؟

الحل:

لدينا: $g_3 = g_1 + g_2$ ، إذن G مرتبطة خطيا، وهذه العلاقة تسمى علاقة الارتباط الخطي.

5. تعريف الأساس- بعد الفضاء الشعاعي.

1.5. تعريف الأساس:

ليكن E فضاء شعاعيا على حقل تبديلي IK و $\boldsymbol{B} = \{\boldsymbol{v_1}, \boldsymbol{v_2}, \dots, \boldsymbol{v_n}\}$ جملة أشعة في E.

نقول عن الجملة B أنها أساس لـ E إذا وفقط إذا كانت:

B جملة أشعة مولدة لـ E ومستقلة خطيا.

2.5. بعد الفضاء الشعاعي:

ليكن E فضاء شعاعي على الحقل التبديلي K يتمتع بأساس معين B، نعلم أن E يقبل ما لانهاية من الأسس لها نفس العدد الأصلي، هذا العدد الأصلي نسميه بعد الفضاء E، ونرمز له بالرمز:

"$\dim_k E$ "

مثال:

IR^3 أساسه القانوني هو $\{\boldsymbol{e_1}, \boldsymbol{e_2}, \boldsymbol{e_3}\}$ إذن $\dim_{Ik} IR^3 = 3$.

IR^n أساسه القانوني هو$\{\boldsymbol{e_1}, \boldsymbol{e_2}, \dots, \boldsymbol{e_n}\}$ ، إذن $\dim_{Ik} IR^n = n$.

6. الفضاء الشعاعي الجزئي.

ليكن E فضاء شعاعي على الحقل التبديلي IK و $E \supseteq F$. نقول عن F إنه فضاء شعاعي جزئي من E على الحقل التبديلي IK إذا وفقط إذا تحقق أحد التعريفين التاليين:

تعريف 1:

$F \neq \emptyset$

$$\forall x, y \in F: x + y \in F$$

$$\forall \alpha \in IK, \forall x \in F: \alpha x \in F$$

تعريف 2:

$F \neq \emptyset$

$$\forall \alpha, \beta \in IK, \qquad \forall x, y \in F: \alpha x + \beta y \in F$$

تمرين:

نعتبر الفضاء الشعاعي IR^4 على IR ونعتبر المجموعة:

$F = \{(x, y, z, t) \in IR^4 : x + y + z = 0.\}$

1. بين أن F فضاء شعاعي جزئي من IR^4.
2. عيّن أساسا لـ F.
3. احسب dim F.

الحل: باستعمال التعريف 2، يمكن استنتاج ما يلي:

أولا، لدينا $F \neq \emptyset$ **لأن** $(0,0,0) \in F$

ثانيا، ليكن $\alpha, \beta \in IR$ وليكن:

$X = (x, y, z, t)$, $Y = (x', y', z', t') \in IR^4$.

لدينا: $\alpha X + \beta Y = (\alpha x + \beta x', \quad \alpha y + \beta y', \quad \alpha z + \beta z', \quad \alpha t + \beta t')$

بما أن:

$(\alpha x + \beta x') + (\alpha y + \beta y') + (\alpha z + \beta z') + (\alpha t + \beta t')$

$= \alpha(x + y + z) + \beta(x' + y' + z') = 0$

لأن: $(x, y, z, t)\ ,\ (x', y', z', t') \in F$

ومنه، F فضاء شعاعي جزئي من IR^4.

ليكن $X = (x, y, z, t) \in IR^4$، من أجل $x \in F$ لدينا: $z = -x - y$

أي: $X = (x, y, -x-y, t) = x(1,0,-1,0) + y(0,1,-1,0) + t(0,0,0,1)$

أي أن: $F = \langle (1,0,-1,0)\ ,\ (0,1,-1,0)\ ,\ (0,0,0,1) \rangle$

وبعد إثبات أن هذه الأشعة مستقلة خطيا، نقول أنها تشكل أساسا لـ F، وبالتالي $\dim_{IK} IR^3 = 3$

ملاحظات:

ليكن E فضاء شعاعي على الحقل التبديلي IK. مع E ذو بعد منته عندئذ:

1. مهما يكن F فضاء جزئي من E فإن: $\dim_{IK} F \leq \dim_{IK} E$.
2. $\dim < 0 > = 0$ و $\forall \boldsymbol{v} \in \boldsymbol{E}^* : \dim < v > = 1$
3. مهما تكن B جملة أشعة في E فإن:

(B مستقلة خطيا و$\text{card } B = \dim E$) $\Leftrightarrow$ (B أساس لـ E).

(B مولدة خطيا و$\text{card } B = \dim E$) $\Leftrightarrow$ (B أساس لـ E).

مثال: $B = \{(2,1,1), (1,2,1), (1,1,2)\}$ أساس لـ IR^3 لأنه يمكن التأكد من أن الجملة B مستقلة خطيا، ولدينا $\text{card}B = 3 = \dim IR^3$. إذن B أساس لـ IR^3.

7. مجموع فضاءين شعاعيين.

ليكن F_1, F_2 فضاءين شعاعيين جزئيين من الفضاء الشعاعي E على الحقل التبديلي IK.

نعرف مجموع الفضاءين $F_1 + F_2$ بـ:

$$F1 + F2 = \{x \in E \ /\ \exists x_1 \in F_1\ ,\ \exists x_2 \in F_2 : x = x_1 + x_2\}.$$

8. مرتبة جملة.

لتكن $S = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ جملة أشعة من الفضاء الشعاعي E.

نسمي مرتبة الجملة S أكبر عدد من الأشعة المستقلة خطيا من S، ونرمز له بـ $r(S)$.

لدينا دوما: $r(S) \leq \dim E$

مثال:

أوجد مرتبة الجملة $S = \{(1,1,1)(1,2,3)(4,5,6)(7,8,9)\}$

الحل:

إذا أمكننا إثبات أن S جملة أشعة مستقلة خطيا، نقول أن مرتبة S هي 4 أي: $r(S) = 4$.

تمرين تطبيقي:

نعتبر الفضاء الشعاعي $IR_3\,[x]$ فضاء كثيرات الحدود من الدرجة أصغر أو تساوي 3. والمعرف كما يلي:

$$IR_3\,[\boldsymbol{x}] =\{\, a_0 + a_1 x + a_2\, x^2 + a_3\, x^3, \quad a_0, a_1, a_2, a_3 \in R \,\}$$

1. أثبت أن الجملة $\{1, x, x^2, x^3\}$ مستقلة خطيا $IR_3\,[x]$.
2. استنتج أساسا للفضاء $IR_3\,[x]$.
3. استنتج بعدا للفضاء $IR_3\,[x]$.

الفصل الثالث: التطبيقات الخطية.

1. التطبيق الخطي.

فيما يلي، نفرض أن E و F فضاءين شعاعيين على نفس الجسم IK (IR أو $\mathbb{C}$).

تعريف 1:

ليكن f تطبيق من E في F. نقول أن f هو تطبيق خطي من E في F إذا تحقق ما يلي:

1) $\forall x, y \in E$ $\quad f(x+y) = f(x) + f(y)$.

2) $\forall x \in E, \forall \lambda \in IK$ $\quad f(\lambda x) = \lambda f(x)$

ملاحظة:

ليكن f تطبيق خطي من E في F. لدينا:

$f(0_E) = 0_F$.

$\forall x \in E$, $\quad f(-x) = -f(x)$

مثال:

$$f : IR^2 \to IR^3$$

$$(x,y) \mapsto f(x,y) = (x+y, x-y, y).$$

أثبت أن f تطبيق خطي.

f تطبيق خطي:

لنضع $X = (x, y)$, $Y = (u, v)$

لدينا:

1. $f(X+Y) = f((x,y) + (u, v))$

$= f((x+u, y+v))$

$= (x+u+y+v, x-y+u-v, y+v)$

$= (x+y, x-y, y) + (u+v, u-v, v)$

$= f(x,y) + f(u,v)$

$= f(X) + f(Y)$.

2. $f(\lambda X) = f(\lambda (x, y))$

$= f(\lambda x, \lambda y)$

$= (\lambda x + \lambda y,\ \lambda x - \lambda y, \lambda y)$

$= \lambda\ (x + y, x - y, y)$

$= \lambda f\ (x, y) = \lambda\ f(X)$

قضية 1:

يكون f تطبيق خطي من E في F إذا وفقط إذا كان:

$\forall x, y \in E \quad , \forall \alpha, \beta \in IK, \qquad f(\alpha x + \beta y) = \alpha f(x) + \beta f(y).$

2. تركيب تطبيقين خطيين.

نظرية 1:

لتكن F, E و G ثلاث فضاءات شعاعية على نفس الجسم IK.

إذا كان f تطبيقا خطيا من E في F و g تطبيقا خطيا من F في G، فإن التطبيق المركب

$g \circ f$ هو تطبيق خطي من E في G.

مثال: ليكن E فضاء شعاعي ذو بعد منته على IK والعائلة $\{u_1, u_2, \dots, u_n\}$ أساسا لـ E.

و $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ سلّميات من IK. التطبيق f المعرف كما يلي:

$f : E \to IK$

$x = \lambda_1 u_1 + \dots + \lambda_n u_n \mapsto f(x) = \alpha_1 \lambda_1 + \dots + \alpha_n \lambda_n$

حيث: $\lambda_i \in IK$ هو تطبيق خطي يقال عنه شكل خطي.

3. نواة وصورة تطبيق خطي.

ليكن E و F فضاءين شعاعيين على نفس الجسم IK. و f تطبيق خطي من E في F.

تعريف 2:

نسمي مجموعة الأشعة x من **E** حيث: $f(x) = 0$ بنواة التطبيق f ونرمز لها بالرمز $\mathbf{Ker}\ f$ ونكتب:

$Ker\, f = \{x \in E \ /\ f(x) = 0\} = f^{-1}(\{0\})$

تعريف 3:

نسمي مجموعة الأشعة $f(x)$ حيث $x \in E$ بصورة التطبيق f ونرمز لها بالرمز $Im\, f$ ونكتب:

$Im\, f = \{ y \in F , \exists x \in E / f(x) = y = f(E) \}$

قضية 2:

1. $Ker\, f$ فضاء شعاعي جزئي من E.
2. $Im\, f$ فضاء شعاعي جزئي من F.

مثال:

ليكن E فضاء شعاعي على IK و f_k التطبيق الخطي المعرف في المثال 1 السابق:

$f_k : E \to E$

$x \mapsto f_k(x) = kx \quad (k \in IK)$

إذا كان $k=0$ ، f_k هو التطبيق المعدوم، و $\ker f_0 = E$ ، $Im f_0 = \{0\}$

إذا كان $k \neq 0$ ، f_k هو تطبيق تقابلي، و $\ker f_0 = 0$ ، $Im f_k = \{E\}$

مثال:

$f : IR^2 \to IR^3$

$(x,y) \mapsto f_k(x,y) = (x, x, -x)$

f تطبيق خطي، ولدينا:

$Im f = \{Y \in IR^3 , \exists X \in IR^2 \quad / f(x) = Y\}$

$= \{Y \in IR^3 , \exists X \in IR \quad / (x, x, -x) = Y\}$

$= \{Y \in IR^3 , \exists X \in IR \quad / x(1, 1, -1) = Y\}$

$= \{x(1,1,-1) \quad / x \in IR\}$

$= vec\{(1,1,-1)\}$

$Ker f = \{X = (x_1, x_2) \in IR^2 \quad / f(X) = (0,0,0)\}$
$= \{(x_1, x_2) \in IR^2 \quad / (x_1, x_1, -x_1) = (0,0,0)\}$
$= \{(0, x_2) \quad , \quad x_2 \in IR\}$
$= \{x_2(0,1) \quad , \quad x_2 \in IR\}$

$= vec\{(0,1\}$

قضية 3:

1. f تطبيق غامر $\operatorname{Im} f = F$.
2. f تطبيق متباين $\operatorname{Ker} f = \{0\}$

مثال:

$f : IR^2 \to IR^3$

$(x,y) \mapsto f(x,y) = (x, x, y)$

التطبيق الخطي f متباين لأن:

$\operatorname{Ker} f = \{(x,y) \in IR^2 \ / \ f(x,y) = (0,0,0)\}$

$=\{(x_1 1, x_2) \in IR^2 \ / (x,x,y) = (0,0,0)\}$

$= \{(0,0)\}$

لكن f ليس غامر لأن $(1,2,3) \in IR^3$ و $(1,2,3) \notin \operatorname{Im} f$ أي: $\operatorname{Im} f \neq IR^3$

4. رتبة تطبيق خطي.

فيما يلي، نفرض أن E و F فضاءين شعاعيين ببعد منته على نفسالجسم IK ، و f تطبيق خطي من E في F.

تعريف 4 :

نسمي بعد f (E) برتبة f (Rang) ، وندل عليها بالرمز rg (f) ونكتب:

$Rg(f) = \dim \operatorname{Im} f$

نظرية 2 :

$Rg(f) = \dim \operatorname{Im} f = \dim E - \dim \operatorname{Ker} f$

نتيجة 2:

$Rg(f) \leq \dim E$ و $rg(f) \leq \dim F$

f تطبيقغامر $\leftrightarrow \dim F = rg(f)$

f تطبيق متباين $\leftrightarrow rg(f) = \dim E$

نظرية 3:

ليكن $dim\ \ E = n$ و f تطبيق خطي من $\boldsymbol{E}$ نحو $\boldsymbol{E}$: القضايا التالية متكافئة:

1. f متباين.
2. f غامر.
3. f تقابلي (تشاكل).
4. $\mathrm{rg}\ (f) = n$
5. صورة أساس في E بالتطبيق f هي أيضا أساس في E.

الفصل الرابع: المصفوفات.

تمهيد

تعتمد الرياضيات في كثير من الأحيان على الاختصار، ومن صور الاختصار: المصفوفات. ففي حياتنا اليومية، نتعامل مع الكثير من الجداول البيانية المبوبة، فمثلا توزع طلبة الفصل الأول في كليات جامعة الجزائر 3 –- لعام 2012/2011على الشكل التالي:

السنة / الكلية	الأولى	الثانية	الثالثة	الرابعة
العلوم الاقتصادية والتجارية وعلوم التسيير	9512	8220	5612	4304
العلوم السياسية	6606	5155	5120	4702
علوم الرياضة	1218	1102	1095	1003

يمكن اختصار هذا الجدول في ثلاثة خطوط أفقية نسميها الأسطر وأربعة خطوط عمودية نسميها الأعمدة، فينتج الشكل التالي الذي نسميه مصفوفة

$$\begin{pmatrix} 4304 & 5612 & 8220 & 9512 \\ 4702 & 5120 & 5155 & 6606 \\ 1003 & 1095 & 1102 & 1218 \end{pmatrix}$$

1. مفاهيم عامة حول المصفوفات.

فيما يلي نفرض أن E و F فضاءين شعاعيين ببعد منته على نفس الجسم IK (IR أو$\mathbb{C}$)، حيث $\dim E = n$ و $\dim F = m$ و $B_E = \{e_1, e_2, \dots e_n\}$ أساسا لـ E، و B_F $\{f_1, f_2, \dots f_m\}$ أساسا لـ F.

*** المصفوفة المرفقة لتطبيق خطي:**

ليكن f تطبيق خطي من E في F. الأشعة $f(e_1)$, $f(e_2), \dots, f(e_n)$ تنتمي إلىF وبالتالي تكتب بصورة وحيدة على شكل مزج خطي للأشعة $f_1, f_2, \dots, f_m$ كما يلي:

$$f(e_j) = a_{1j}f_1 + a_{2j}f_2 + \cdots + a_{ij}f_i + .. + a_{mj}f_m$$

حيث: $a_{ij} \in IK \quad j = 1..n, \quad i = 1..m$

الجدول التالي:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2j} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{ij} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mj} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

يسمى المصفوفة المرافقة للتطبيق f بالنسبة لـ B_E و B_F، حيث يتألف العمود الأول من مركبات $f(e_1)$ وفق الأساس $B_f, = \{f_1, f_2, \dots f_m\}$ ويتألف العمود الثاني من مركبات $f(e_2)$ ...، ويتألف العمود الذي رتبته j من مركبات $f(e_j)$ وفق الأساس. $B_f = \{f_1, f_2, \dots f_m\}$ وهذه المصفوفة نرمز لها بـ $(a_{ij})_{\substack{1\le i\le m \\ 1\le j\le n}}$ حيث: a_{ij} السلمي الموجود في السطر i والعمود j.

ملاحظة:

المصفوفة المرفقة تتعلق بأساسي E و F، وعدد أسطرها مساوي لبعد مجموعة وصول التطبيق الخطي وعدد أعمدتها مساوي لبعد مجموعة بدنه.

مثال:

ليكن f تطبيق خطي من IR^3 في IR^2 معرّف كما يلي:

$f: IR^3 \rightarrow IR^2$

$(x,y,z) \mapsto f(x,y,z) = (x+y, \ x+z)$

الحالة 1: نزود IR^3 بأساسه القانوني $\{e_1, e_2, e_3\}$ و IR^2 بأساسه القانوني $\{f_1, f_2,\}$، لدينا:

$f(e_1) = f(1,0,0) = (1,1) = f_1 + f_2.$

$f(e_2) = f(0,1,0) = (1,0) = f_1 .$

$f(e_3) = f(0,0,1) = (0,1) = f_2.$

المصفوفة المرافقة للتطبيق f بالنسبة للأساسين المذكورين هي: $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

الحالة 2: نزوّد IR^3 بأساسه القانوني $\{e_1, e_2, e_3\}$ و IR^2 بالأساس $\{f'_1, f'_2\}$، حيث:

$f'_2 = (1,0) = f_1$ و $f'_1 = (0,1) = f_2$

فيكون لدينا:

$f(e_1) = f(1,0,0) = (1,1) = f'_1 + f'_2.$

$f(e_2) = f(0,1,0) = (1,0) = f'_2 .$

$f(e_3) = f(0,0,1) = (0,1) = f'_1$.

المصفوفة المرافقة للتطبيق f بالنسبة للأساسين $\{e_1, e_2, e_3\}$ و $\{f'_1, f'_2\}$ هي:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

نلاحظ أن تغيير ترتيب أشعة الأساس يغير المصفوفة.

الحالة 3:

نزود IR^3 بالأساس $\{e'_1, e'_2, e'_3\}$ حيث: $e'_1 = (1,1,0)$, $e'_2 = (1,0,1)$, $e'_3 = (0,1,1)$

و IR^2 بأساسه القانوني $\{f_1, f_2\}$، لدينا:

$f(e'_1) = f(1,1,0) = (2,1) = 2f_1 + f_2$.

$f(e'_2) = f(1,0,1) = (1,2) = f_1 + 2f_2$.

$f(e'_3) = f(0,1,1) = (1,1) = f_1 + f_2$.

المصفوفة المرافقة للتطبيق f بالنسبة للأساسين $\{e'_1, e'_2, e'_3\}$ و $\{f_1, f_2\}$ هي:

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

الفضاء الشعاعي: $M_{m,n}$ (IK): يرمز إلى مجموعة المصفوفات ذات m سطر و n عمود

و **الفضاء الشعاعي:** $L_{IK}(E,F)$ يرمز به إلى مجموعة التطبيقات الخطية من E نحو F .

ولنرمز بالرمز Ψ العلاقة التي تربط كل تطبيق خطي بالمصفوفة المرافقة و Φ علاقتها العكسية

2. العمليات الأساسية على المصفوفات.

* تساوي مصفوفتين:

لتكن $A, B \in M_{m,n}(IK)$ حيث $A = (a_{ij})_{\substack{1\le i\le m\\1\le j\le n}}$ و $B = (b_{ij})_{\substack{1\le i\le m\\1\le j\le n}}$

$$\boxed{A = B \Leftrightarrow a_{ij} = b_{ij}\ \forall i = 1 \dots m, \forall j = 1 \dots n.}$$

***جمع المصفوفات:**

لتكن $A, B \in M_{m,n}(IK)$ حيث $A = (a_{ij})_{\substack{1\le i\le m\\1\le j\le n}}$ و $B = (b_{ij})_{\substack{1\le i\le m\\1\le j\le n}}$

لنفرض $f = \Phi(A)$ و $g = \Phi(B)$. العنصرين الموافقين من $L_{IK}(E,F)$، فنحن نعلم أن $f+g$ تطبيق خطي، وبالتالي توجد مصفوفة C حيث: $C = \Psi(f+g)$.

ولدينا: $f(e_j) = \sum_{i=1}^{m} a_{ij} f_i$ و $g(e_j) = \sum_{i=1}^{m} b_{ij} f_i$

ومنه: $(f+g)\ (e_j) = \sum_{i=1}^{m}(a_{ij}+b_{ij})f_i$

لنجد: $C = A + B$ مع $C_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$.

بالتعريف:

$$\boxed{C = A + B \quad / \quad c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}}$$

مثال:

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & -2 \\ 0 & -1 & 4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 & 1 & 7 \\ 0 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 7 \\ 1 & 2 & 1 \\ 6 & 2 & -4 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

*** ضرب مصفوفة بسلمّي:**

لتكن $A \in M_{m,n}\ (IK)$ حيث $A = (a_{ij})_{\substack{1\le i\le m \\ 1\le j\le n}}$ و $\lambda \in IK$

لنفرض $f = \Phi\ (A)$ العنصر الموافق من $L_{IK}\ (E,F)$ لـ A.

لدينا: $f(e_j) = \sum_{i=1}^{m} a_{ij}f_i \Rightarrow \lambda\, f(e_j) = \sum_{i=1}^{m} \lambda a_{ij}f_i$

وبالتالي: $\lambda A = (\lambda a_{ij})_{\substack{1\le i\le m \\ 1\le j\le n}}$

$$\boxed{\begin{aligned} \lambda A &= \lambda(a_{ij})_{\substack{1\le i\le m \\ 1\le j\le n}} \\ &= (\lambda a_{ij})_{\substack{1\le i\le m \\ 1\le j\le n}} \end{aligned}}$$

مثال:

$$\lambda A = -3A = \begin{pmatrix} -6 & -3 \\ -3 & 3 \\ 0 & -12 \end{pmatrix} \quad , \quad \lambda = -3 \ , \quad A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -1 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$$

نتيجة 1:

المجموعة $(M_{m,n}\ (IK),+,.)$ هي فضاء شعاعي على IK وعنصره الحيادي هي المصفوفة المعدومة أي المصفوفة التي جميع معاملاتها معدومة، :

$$A = 0 \Leftrightarrow a_{ij} = 0\ \forall i = 1..m \ \ ,\forall j = 1..n$$

*** جداء المصفوفات:**

لتكن F, E و G ثلاثة فضاءات شعاعية ببعد منته على IK.

نعلم أنه إذا كان f تطبيقا خطيا من F في G و g تطبيقا خطيا من E في F، فإن التطبيق المركب $f \circ g$ هو تطبيق خطي من E في G.

باختيار $B_E = \{e_1, e_2, \dots e_n\}$ أساسا لـ E

$B_F = \{f_1, f_2, \dots f_m\}$ أساسا لـ F

$B_G = \{g_1, g_2, \dots g_r\}$ أساسا لـ E

يمكننا كتابة B, A و C المصفوفات المشاركة لـ g, f و $f \circ g$ على الترتيب.

نلاحظ أن $A \in M_{r,m}(IK)$ ، $B \in M_{m,n}(IK)$ و $C \in M_{r,n}(IK)$

ومنه: $A = (a_{ij})_{\substack{1\le i\le r\\ 1\le j\le m}}$ ، $B = (b_{ij})_{\substack{1\le i\le m\\ 1\le j\le n}}$ و $C = (\boldsymbol{c_{ij}})_{\substack{\boldsymbol{1\le i\le r}\\ \boldsymbol{1\le j\le n}}}$

لكي نحصل على العمود j من C، نحسب $f \circ g(e_j)$

$$f \circ g(e_j) = f\left(\sum_{k=1}^{m} b_{kj} f_k\right) = \sum_{k=1}^{m} b_{kj} f(f_k)$$

$$= \sum_{k=1}^{m} b_{kj}\left(\sum_{i=1}^{n} a_{ik}\, g_i\right) = \sum_{i=1}^{n} (a_{ik} b_{kj}) g_i$$

أي المركبة i للشعاع $f \circ g(e_j)$ هي $\sum_{k=1}^{m} a_{ik} b_{kj}$ معنى ذلك: $c_{ij} = \sum_{k=1}^{m} a_{ik} b_{kj}$

بالتعريف، جداء المصفوفة A المشاركة لـ f بالمصفوفة B المشاركة لـ g هي C المصفوفة المشاركة لـ $f \circ g$ ، ونكتب: C =AB.

إذا كان $A = (a_{ij})_{\substack{1\le i\le r\\ 1\le j\le m}}$ و $B = (b_{ij})_{\substack{1\le i\le m\\ 1\le j\le n}}$ فإن : $C = AB = (c_{ij})_{\substack{1\le i\le r\\ 1\le j\le n}}$ / $c_{ij} = \sum_{k=1}^{m} a_{ik} b_{kj}$

مثال1: في حالة $m = 3\ ,\ r = 4,\ \ n = 2$:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \\ b_{31} & b_{32} \end{pmatrix}$$

$$AB = \begin{pmatrix} a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21} + a_{13}b_{31} & a_{11}b_{12} + a_{12}b_{22} + a_{13}b_{32} \\ a_{21}b_{11} + a_{22}b_{21} + a_{13}b_{31} & a_{21}b_{12} + a_{22}b_{22} + a_{23}b_{32} \\ a_{31}b_{11} + a_{32}b_{21} + a_{33}b_{31} & a_{31}b_{12} + a_{32}b_{22} + a_{23}b_{32} \\ a_{41}b_{11} + a_{42}b_{21} + a_{43}b_{31} & a_{41}b_{12} + a_{42}b_{22} + a_{23}b_{32} \end{pmatrix}$$

ويمكن إجراء عمليا، الجداء على الشكل المبين في المثال التالي:

مثال 2:

$$A=\begin{pmatrix}1&0&-5\\7&-1&8\\4&1&9\\2&-3&6\end{pmatrix}\quad,\quad B=\begin{pmatrix}2&4\\1&0\\3&-1\end{pmatrix}$$

1×2+0×1+ (-5) × 3 = - 13

1×4+0×0+ (-5) × (-1) = 9

7×4+ (-1)0×0+(8) × (-1) = 20

7×2+ (-1)×1+(8) × 3= 37

4×4+ 1×0+9× (-1) = 7

$$AB=\begin{pmatrix}-13&9\\37&20\\36&7\\11&-14\end{pmatrix}$$

(-2) × 2 + (-3) × 1 + 6 ×3 = 11

(-2) ×4+ (-3)×0+6× (-1) = -14

4×4+ 1×1 +9×3= 36

ملاحظة: حتى تكون المصفوفة AB معرفة، يلزم أن يكون عدد أعمدة المصفوفة Aمساوٍ لعدد أسطر المصفوفة B، والمصفوفة AB في حالة وجودها، عدد أسطرها مساو لعدد أسطر A، وعدد أعمدتها مساوٍ لعدد أعمدة B.

الترميز المصفوفاتي لتطبيق خطي:

ليكن E و F فضاءين شعاعيين ببعد منته على نفس الجسم IK(IR أو ℂ)، حيث: $\dim E = n$ و $\dim F = m$ و $B_E = \{e_1, e_2, \dots e_n\}$ أساسا لـ E، و$B_F = \{f_1, f_2, \dots f_m\}$ أساسا لـF.

إذا فرضنا X من E أي: $X = x_1e_1 + x_2e_2 + \dots + x_ne_n$ وأرفقنا هذا الشعاع بمصفوفة ذات عمود واحد و n سطر وهي: $X=\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\\vdots\\x_n\end{pmatrix}$

وبالمثل يمكن إرفاق أي شعاع y من F وليكن: $Y = y_1f_1 + f_2e_2 + \dots + f_me_m$ (1)

بالمصفوفة العمودية $Y=\begin{pmatrix}y_1\\y_2\\\vdots\\y_m\end{pmatrix}$

لتكن Aالمصفوفة المرفقة للتطبيق الخطي f بالنسبة لـ B_E و B_F أي أن $A = (a_{ij})_{\substack{1\le i\le m \\ 1\le j\le n}}$

فإذا فرضنا $Y = f(X)$، فنحن نعلم أن:

$$f(e_j) = a_{1j}f_1 + a_{2j}f_2 + \ldots + a_{ij}f_i + \ldots + a_{mj}f_m \quad .$$

وبالتالي $Y = f(X) = f(x_1e_1 + x_2e_2 + \ldots + x_ne_n)$

$$Y = x_1f(e_1) + x_2f(e_2) + \ldots + x_nf(e_n). \qquad (2)$$

بالمقارنة بين (1) و (2) نجد:

$$\begin{cases} y_1 = a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n \\ y_2 = a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n \\ \qquad\vdots \\ y_m = a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n \end{cases}$$

وتكتب العلاقات السابقة بالشكل التالي:

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

ونكتب اختصارا: $Y = AX$.

نتيجة 2:

العلاقة $Y = f(X)$ تكتب$Y=AX$ حيث A المصفوفة المرفقة للتطبيق الخطي f بالنسبة لـ B_E و B_F، X المصفوفة ذات العمود واحد المرفقة لـ X في B_E و Y المصفوفة ذات العمود واحد المرفقة لـ Y في B_F.

المصفوفات المربعة:

تعريف:

نسمي مصفوفة مربعة كل مصفوفة لها نفس عدد الأسطر وعدد الأعمدة، ويسمى هذا العدد درجة المصفوفة. ونرمز إلى مجموعة المصفوفات المربعة ذات الدرجة n بالرمز $M_n(IK)$.

ملاحظة:

$M_n(IK)$ فضاء شعاعي على IK ومتشاكل مع $L(E)$، بالإضافة إلى أن جداء مصفوفتين مربعتين من الدرجة n معرّف دوما، وهو مصفوفة مربعة درجتها n ومنه النظرية التالية.

نظرية:

نسمي **قطر** مصفوفة مربعة $A = (a_{ij})_{\substack{1\le i\le n \\ 1\le j\le n}}$ مجموعة العناصر

.$\{a_{11}, a_{22}, \dots a_{ij}, \dots, a_{nn}\}$

نسمي **مصفوفة واحدية** I_n المصفوفة التي عناصر قطرها تساوي 1، والعناصر المتبقية كلها معدومة.

$$I_n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & 0 & 1 & \cdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

المصفوفة I_n هي العنصر الحيادي بالنسبة لعملية الضرب في $M_n(IK)$

مصفوفات خاصة:

المصفوفة القطرية:

نقول عن مصفوفة مربعة $(a_{ij})_{\substack{1\le i\le n \\ 1\le j\le n}}$ أنها **مصفوفة قطرية** إذا كان: $a_{ij} = 0 \quad , \forall i \neq j$

ونرمز لها بالرمز $diag\ (a_{11}, a_{22}, \dots, a_{nn})$

(مصفوفة قطر كل عناصرها معدومة ماعدا عناصر قطرها).

مثال:

$$A = diag\left(2, -3, \sqrt{5}\right) = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{5} \end{pmatrix}$$

$$I_n = diag\ (1,1,1, \dots, 1) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & 0 & 1 & \cdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

المصفوفة المثلثية العلوية:

نقول عن مصفوفة مربعة $(a_{ij})_{\substack{1\le i\le n \\ 1\le j\le n}}$ أنها **مصفوفة مثلثية علوية** إذا كان $a_{ij} = 0 \quad , \forall i > j$.

المصفوفة المثلثية السفلية:

نقول عن مصفوفة مربعة $(a_{ij})_{\substack{1\le i\le n \\ 1\le j\le n}}$ أنها **مصفوفة مثلثية سفلية** إذا كان $a_{ij} = 0 \quad , \forall i < j$

مثال:

$A = \begin{pmatrix} 3 & 7 & 2 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ ، $B = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 10 \end{pmatrix}$

A مصفوفة مثلثية علوية   B مصفوفة مثلثية سفلية.

3. رتبة المصفوفات وحساب المقلوب.

*** رتبة مصفوفة:**

تعريف:

لتكن$\boldsymbol{A} \in M_{m,n}(IK)$ ، و f التطبيق الخطي المرفق لـ A.

رتبةf تسمى رتبة المصفوفة $\boldsymbol{A}$ ونكتب: $rg(A) = rg(f)$

وينتج أن رتبة A تساوي العدد الأعظمي للأشعة المستقلة خطيا، والتي يمكن استخراجها من أعمدة A.

قضية:

$$rg(A) \le \boldsymbol{inf}\ (\boldsymbol{m}, \boldsymbol{n})$$

*** المصفوفة العكوسة (القابلة للقلب):**

تعريف:

لتكن A مصفوفة مربعة من الدرجة n، نقول أن A عكوسة (أو قابلة للقلب) إذا وجدت مصفوفة مربعة B من نفس درجة المصفوفة A، بحيث يكون:

$AB = BA = I_n$

وتسمى المصفوفة B مقلوب A، ونرمز لها بالرمز A^{-1}.

قضية:

تكون المصفوفة المربعة A عكوسة إذا وفقط إذا كانت الأشعة المكونة لأعمدة A مستقلة خطيا.

نتيجة:

تكون المصفوفة المربعة A عكوسة إذا وفقط إذا كانت رتبة A تساويn $(rg(A) = n)$.

قضية:

إذا كانت B, A مصفوفتين مربعتين من الدرجة n قابلتين للقلب فإن المصفوفة AB قابلة للقلب ،

ولدينا: $(AB)^{-1} = B^{-1} A^{-1}$.

4. أثر ومنقولة مصفوفة.

* أثر مصفوفة:

تعريف:

نسي أثر مصفوفة مربعة $A = (a_{ij})_{\substack{1\le n,\\ j\le n}}$ ، مجموع عناصر قطرها ونرمز له بالرمز Tr (A)، ونكتب: $Tr\,(A) = \sum_{i=1}^{n} a_{ij}$

مثال:

$$Tr\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = a + d$$

$$Tr\begin{pmatrix} 5 & \sqrt{2} & -1 \\ -2 & 1-2i & 0 \\ 3 & 6 & \pi + 2i \end{pmatrix} = 6 + \pi$$

خواص:

1. أثر مصفوفة $Tr(A) : M_n(IK) \to IK$
2. $Tr(AB) = Tr\,(BA)$

* منقولة مصفوفة:

تعريف:

لتكن $\boldsymbol{A} \in M_{m,n}\ (IK)$ حيث $\boldsymbol{A} = (\boldsymbol{a_{ij}})_{\substack{1\le i\le m,\\ 1\le j\le n}}$، المصفوفة $B = (b_{ji})$ حيث $b_{ji} = a_{ij}$

(أي أن أسطر A هي أعمدة B) تسمى المصفوفة المنقولة للمصفوفة A، ونرمز لها بالرمز ${}^{t}A$.

مثال:

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 \\ 1 & -3 & 0 \\ 4 & 5 & 0 \\ -3 & -2 & 1 \end{pmatrix} \quad , \quad {}^{t}A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 4 & -3 \\ 0 & -3 & 5 & -2 \\ 2 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$${}^{t}\,diag\,(a_{11}, a_{22}, \dots, a_{nn}) = diag\,(a_{11}, a_{22}, \dots, a_{nn})$$

خواص المصفوفة المنقولة:

${}^{t}(A+B) = {}^{t}A + {}^{t}B$

${}^{t}(AB) = {}^{t}B + {}^{t}A$

${}^{t}({}^{t}A) = A$

$rg({}^{t}A) = rg(A).$

$Tr({}^{t}A) = Tr(A)$

وإذا كانت A عكوسة فإن:

${}^{t}(A^{-1}) = ({}^{t}A)^{-1}$

الفصل الخامس:المحددات.

1.تعريف المحدد.

فيما يلي الجسم IK هو IR أو C، و $E = IK^n$، حيث n عدد طبيعي أكبر من أو يساوي 1.

لتكن $A \in M_n(IK)$، من أجل $1 \leq i \leq n$ و $1 \leq j \leq n$ نرمز بـ A_{ij} إلى المصفوفة المربعة من الدرجة $(n-1)$ المحصل عليها من A بحذف السطر i والعمود j.

تعريف 1:

نعرّف بالتراجع على n التطبيق $A \in M_n(IK) \rightarrow \det(A) \in IK$ كما يلي:

من أجل $n=1$: $\det(a) = a$

من أجل $n > 1$:

$\det(A) = a_{11}\det(A_{11}) - a_{12}\det(A_{12}) + \ldots (-1)^{k+1} a_{1k}\det(A_{1k}) + \ldots + (-1)^{n+1} a_{1n}\det(A_{1n})$.

السلمي $\det(A)$ يسمى محدد المصفوفةA ونرمز له بالرمز:

$$\det(A) = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

مثال 1: محدد مصفوفة مربعة من الدرجة 2، $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$ هو:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}\det(a_{22}) - a_{21}\det(a_{12})$$

$$= a_{11}\det(a_{22}) - a_{21}a_{12}.$$

مثال 2: محدد مصفوفة مربعة من الدرجة3:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}\det(a_{11}) - a_{21}\det(A_{21}) + a_{13}\det(A_{13})$$

$$= a_{11}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{21} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}$$

$$= a_{11}(a_{22}a_{33} - a_{21}a_{31}) - a_{12}(a_{21}a_{33} - a_{23}a_{31}) + a_{13}(a_{21}a_{32} - a_{22}a_{31})$$

$$= a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32}$$

$$- a_{11}a_{21}a_{31} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{13}a_{22}a_{31}.$$

يمكن تلخيص استعمال الإشارة كما يلي: $\begin{vmatrix} + & - & + \\ - & + & - \\ + & - & + \end{vmatrix}$

هناك طريقة أخرى لحساب المحدد من الدرجة 3، تسمى طريقة Sarrus: نضع بعد المحدد عناصر العمود الأول ثم عناصر العمود الثاني، ونقم بالحساب كما هو في مبين في الشكل التالي:

$$\begin{array}{ccc|cc} + & + & + & - & - \quad - \\ a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{31} & a_{32} \end{array}$$

$-a_{13}a_{22}a_{31}$	$-a_{11}a_{23}a_{32}$	$-a_{12}a_{21}a_{32}$	$+a_{11}a_{22}a_{33}$	$+a_{12}a_{23}a_{31}$	$+a_{13}a_{21}a_{32}$

مثال 3:

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 & 3 \\ 2 & -1 & 0 & -2 \\ -1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -1 & 0 & -2 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} - 2\begin{vmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 2 & 1 & 3 \\ -1 & 0 & -2 \\ 1 & 0 & 2 \end{vmatrix}$$

$$= -\begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 0 & -2 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 0 & -2 \\ -1 & 1 \end{vmatrix}$$

$$= -2\left(2\begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ -1 & 1 \end{vmatrix}\right)$$

$$-2\begin{vmatrix} 0 & -2 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 0 & -2 \end{vmatrix}$$

$$= 2 - 2 - 2(-4 - 2 + 4) - (2 - 2)$$

$$= 4$$

مثال4: محدد مصفوفة قطرية:

$$\text{Det}\,(diag\,(a_{11}, a_{22}, \ldots, a_{nn})) = a_{11}\, a_{22} \ldots a_{nn}$$

محدد المصفوفة الواحدية:

$$In = diag\,(\underbrace{1, 1, 1, \ldots, 1}_{n}) \Rightarrow \det(In) = 1$$

2. خصائص أساسية للمحددات.

لتكن$A \in M_n\ (IK)$ نرمز بـ $C_1, C_2, \ldots, C_n$ أعمدة المصفوفة **A**.

قضية 1:

1. من أجل كل $\lambda \in IK$ و $1 \leq j \leq n$:

$\det(C_1, \ldots, \lambda C_j, \ldots, C_n) = \lambda \det(C_1, \ldots, C_j, \ldots, C_n)$

2. من أجل $1 \leq j \leq n$، إذا كان $C_j = C'_j + C''_j$ فإن:

$\det(C_1, \ldots, C'_j + C''_j, \ldots C_n) = \det(C_1, \ldots, C'_j, \ldots C_n$

$+ \det(C_1, \ldots + C''_j, \ldots C_n)$

3. إذا كان $C_i = C_j$ فإن $\det(C_1, \ldots, C_n) = 0$.

4. إذا كان$C_j = 0$ فإن $\det(C_1, \ldots, C_n) = 0$.

ملاحظة

1. نلاحظ من الخاصية (1) و (2) أن المحدد هو تطبيق خطي بالنسبة لكل عمود من المصفوفة.

2. لنضيف المزج الخطي $\sum_{k=2}^{n} \alpha_k C_k$ للعمود الأول C_1 وباستعمال خطية المحدد بالنسبة للعمود الأول نجد:

$\det(C_1 + \sum_{k=2}^{n} \alpha_k C_k, \ C_2, .., C_n) = \det(C_1, C_2, \ldots, C_n)$

$+ \det(\sum_{k=2}^{n} \alpha_k C_k, \ C_2, .., C_n)$

$= \det(C_1, C_2, \ldots, C_n)$

$+\sum_{k=2}^{n} \alpha_k C_k \det(C_k, C_2, \ldots, C_n)$

في كل عبارة $(C_k, C_2, \ldots, C_n)$، لدينا عمودين متساويين، لأن: $2 \leq k \leq n$

وبالتالي: $\det(C_k, C_2, \ldots, C_n) = 0 \qquad \forall k \geq 2$

ومنه:

$\det(C_1 + \sum_{k=2}^{n} \alpha_k C_k, \ C_2, .., C_n) = \det(C_1, C_2, \ldots, C_n)$

نظرية 1:

1. عند تبديل موضعي عمودي C_i و C_j نغير الإشارة، أي:

$\mathrm{Det}(C_1, \ldots, C_i, \ldots C_j, \ldots C_n) = -\det(C_1, \ldots, C_j, \ldots C_i, \ldots C_n)$

2. لا نغير المحدد بإضافة إلى أي عمود مزج خطي من الأعمدة الأخرى.

ملاحظة:

يمكن تلخيص الخاصية (1) و (2) من القضية 1، والخاصية (1) من النظرية 1 بالقول أن المحدد هو شكل متعدد الخطية ومتناوب.

محدد المصفوفة المنقولة:

نظرية 2:

$$A \in M_n(IK) \quad : \quad \det({}^tA) = \det(A)$$

ملاحظة هامة:

من هذه النظرية، نستنتج أن جميع الخواص التي تبرهن باستخدام الأعمدة يمكن إعادة صياغتها باستخدام الأسطر وخاصة في حساب المحدد.

3. قواعد أساسية في حساب المحددات.

1. لا نغير المحدد بإضافة إلى أي عمود مزجا خطيا للأعمدة المتبقية.
2. لا نغير المحدد بإضافة إلى أي سطر مزجا خطيا للأسطر المتبقية.
3. عندما نبادل بين موضعي عمودين (أو سطرين) نضرب المحدد في (1-).
4. يمكن حساب المحدد بالنشر وفق أي سطر، وذلك بالصيغة التالية:

$$\det(A) = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{i+j} \alpha_{ij} \det(A_{ij}), \qquad 1 \leq j \leq n$$

حيث A_{ij} المصفوفة المربعة من الدرجة (n-1) محصل عليها بحذف السطر (i) والعمود (j).

5. يمكن حساب المحدد بالنشر وفق أي عمود $1 \leq j \leq n$ وذلك بالصيغة التالية:

$$\det(A) = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+j} \alpha_{ij} \det(A_{ij})$$

6. إذا كان عمود (أو سطر) معدوما، فإن المحدد يساوي الصفر.
7. إذا كان عمودان أو (سطران) متساويين أو مرتبطين خطيا، فإن المحدد يساوي الصفر.
8. محدد مصفوفة مثلثية يساوي جداء عناصر قطرها.

ملاحظة:

لتسهيل حساب محدد، نعمل على إظهار اكبر عدد ممكن من الأصفار في نفس العمود أو السطر.

مثال 1:

بإعادة حساب المحدد المعطى في المثال 4 السابق، وذلك بالنشر وفق العمود الثالث، نجد:

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 & 3 \\ 2 & -1 & 0 & -2 \\ -1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & -1 & -2 \\ -1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & -1 & -2 \\ 0 & 1 & 2 \end{vmatrix}$$

$=(4 + 2 – 2 -2) – (-2 + 6 – 8 +2) = 4.$

مثال 2: احسب:

$$d = \begin{vmatrix} 5 & 4 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 1 & -2 \\ -5 & -7 & -3 & 9 \\ 1 & -2 & -1 & 4 \end{vmatrix}$$

$$d = \begin{vmatrix} 5 & 4 & 2 & 9 \\ 2 & 3 & 1 & 4 \\ -5 & -7 & -3 & -6 \\ 1 & -2 & -1 & 0 \end{vmatrix} \; 2C_2 + C_4 \;\rightarrow\; C_4$$

نضرب العمود الثاني بالعدد 2 ونضيف العمود الرابع ونكتب الناتج في العمود الرابع

$$= \begin{vmatrix} 5 & 4 & 7 & 9 \\ 2 & 3 & 3 & 4 \\ -5 & -7 & -8 & -6 \\ 1 & -2 & 0 & 0 \end{vmatrix} \; C_1 + C_3 \;\rightarrow\; C_3$$

نجمع العمود الأول والثالث ونعوض العمود الثالث بالناتج

$$= \begin{vmatrix} 5 & 14 & 7 & 9 \\ 2 & 7 & 3 & 4 \\ -5 & -17 & -8 & -6 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} \; 2C_1 + C_2 \;\rightarrow\; C_2$$

نضرب العمود الأول بالعدد 2، ونضيف العمود الثاني، ونكتب الناتج في العمود الثاني

$$= -\begin{vmatrix} 14 & 7 & 9 \\ 7 & 3 & 4 \\ -17 & -8 & -6 \end{vmatrix}$$

بالنشر وفق السطر الرابع

$$= -\begin{vmatrix} -2 & 7 & 9 \\ 0 & 3 & 4 \\ -4 & -8 & -5 \end{vmatrix} \; C_2 - C_1 + C_3 \;\rightarrow\; C_1$$

نطرح العمود الأول من العمود الثاني ونضيف العمود الثالث ونكتب الناتج في العمود الثاني

$$= \begin{vmatrix} -2 & 7 & 9 \\ 0 & 3 & 4 \\ 4 & 8 & 5 \end{vmatrix} \; (-1)L_3$$

نضرب السطر الثالث بالعدد (-1)

$$= \begin{vmatrix} -2 & 7 & 9 \\ 0 & 3 & 4 \\ 0 & 22 & 23 \end{vmatrix} \; 2L_1 + L_3 \;\rightarrow\; L_3$$

نضرب السطر الأول بالعدد 2 ونضيف السطر الثالث ونكتب الناتج في السطر الثالث

$$= -2 \left| \begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 22 & 23 \end{vmatrix} \right|$$

$= 38$

مثال 3: احسب $d = \begin{vmatrix} a+3 & -1 & 1 \\ 5 & a-3 & 1 \\ 6 & -6 & a+3 \end{vmatrix}$

$$d = \begin{vmatrix} a+3 & -1 & 1 \\ 5 & a-3 & 1 \\ 6 & -6 & a+3 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} a+2 & 0 & 1 \\ a+2 & a-2 & 1 \\ 0 & a-2 & a+4 \end{vmatrix} \quad C_1 + C_2 \ \to \ C_1$$

$$= (a+2)(a-2) \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & a+4 \end{vmatrix}$$

$$= (a+2)(a-2) \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & a+4 \end{vmatrix} \quad C_3 - C_1 \ \to \ C_3$$

$= (a+2)\,(a-2)\,(a+4)=(a^2 -4)\,(a+4)$.

محدد الجداء:

قضية 2:

من أجل$A, B \in M_n(IK)$ لدينا: $\det(AB) = \det(A)\det(B)$

قضية 3:

لتكن M مصفوفة مربعة من $M_{n+m}(IK)$ من الشكل $\begin{pmatrix} A & B \\ 0 & C \end{pmatrix}$ مع$A \in M_n(IK)$

$C \in M_m(IK)$ و 0 المصفوفة المعدومة من $M_{m,n}(IK)$ لدينا:

$$det\begin{pmatrix} A & B \\ 0 & C \end{pmatrix} = \det(A)\det(C)$$

مثال:

$$d = \begin{vmatrix} 2 & 5 & 1 & 0 & 0 \\ 4 & -3 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 14 & 7 & 0 & -1 & 2 \\ 1 & -5 & 6 & 2 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 5 & 1 \\ 4 & -3 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = (-26)(-5) = 130.$$

4. حساب مقلوب مصفوفة.

نعلم أن مصفوفة مربعة تكون عكوسة إذا وفقط إذا كانت أشعة أعمدتها مستقلة خطيا، فنستنتج من ذلك:

A عكوسة إذا وفقط إذا كان $\det A \neq 0$ إذا كانت A عكوسة فإن $\det(A^{-1}) = \frac{1}{\det A}$

نذكر أن A_{ij} المصفوفة المحصل عليها بحذف السطر i والعمود j للمصفوفة A. ونرمز بالرمز $Com\ (A)$ (Comatrice de A) للمصفوفة المربعة من الدرجة المعرفة بـ:

$Com\ (A) = (m_{ij})_{1\le i,j\le n}$ حيث : $m_{ij} = (-1)^{i+j} \det (A_{ij})$

نظرية 3:

إذا كانت A قابلة للقلب فإن: $A^{-1} = \frac{1}{det\ A}\ {}^{t}Com\ (A)\ \ /\ \ Com\ (A) = (-1)^{i+j}\ det\ \ (A_{ij})$

مثال 1: $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\ n = 2$

$$A^{-1} = \frac{1}{ab - bc}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}\ /\ ab - bc\ \neq 0$$

مثال 2: لنحسب مقلوب المصفوفة: $A = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 5 & 4 \\ -1 & 0 & 2 \end{vmatrix}$

$$\det A = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 5 & 4 \\ -1 & 0 & 2 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 4 \end{vmatrix} + 2\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 5 \end{vmatrix} = 9$$

$$Com(A) = \begin{pmatrix} \begin{vmatrix} 5 & 4 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 2 & 4 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 2 & 5 \\ -1 & 0 \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 0 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 4 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 5 \end{vmatrix} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 10 & -8 & 5 \\ -4 & 5 & -2 \\ -7 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A^{-1} = \frac{1}{det\ A}\ {}^{t}Com\ (A)\ = \frac{1}{9}\begin{pmatrix} 10 & -4 & -7 \\ -8 & 5 & 2 \\ 5 & -2 & 1 \end{pmatrix}$$

مثال 1:

لتكن$V_1(1,a,1)$, $V_2(-1,1,-1)$, $V_3(1,-1,a)$ من IR^3.

$$\det(V_1,V_2,V_3) = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ a & 1 & -1 \\ 1 & 1 & a \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & -1 & 1 \\ a+1 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & a \end{vmatrix} C_1 + C_2 \to C_1$$

$$= -(a+1)\begin{vmatrix} -1 & 1 \\ -1 & a \end{vmatrix} = (a+1)(a-1)$$

العائلة$\{V_1,V_2,V_3\}$ مستقلة خطيا إذا وفقط إذا كان$a \neq \mp 1$:

في حالة $a=1$: $V_2 = -V_3$ وفي حالة $a=-1$: $V_2 = -V_1$

5. رتبة جملة أشعة.

تعريف 4:

لتكن $V_1, V_2,.., V_m$ أشعة من E.

رتبة جملة هذه الأشعة هي العدد الأعظمي للأشعة المستقلة خطيا، والتي يمكن استخراجها من الجملة.

ملاحظة:

نرى أن هذه الرتبة هي أيضا بعد الفضاء الشعاعي الجزئي المولد بالأشعة $V_1, V_2,.., V_m$.

تعيين رتبة جملة أشعة:

نظرية 5:

إن رتبة جملة الأشعة $V_1, V_2,.., V_m$ تساوي اكبر درجة r للمحددات غير المنعدمة والتي يمكن استخراجها من المصفوفة التي أعمدتها الأشعة $V_1, V_2,.., V_m$، *وهذه الرتبة هي أيضا رتبة المصفوفة* $(V_1, V_2,.., V_m)$

قضية 4:

لتكن:

$$M = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nm} \end{pmatrix}, V_1 = \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{n1} \end{pmatrix}, V_2 = \begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \vdots \\ a_{n2} \end{pmatrix}, V_m = \begin{pmatrix} a_{1m} \\ a_{2m} \\ \vdots \\ a_{nm} \end{pmatrix}$$

فالشرط اللازم والكافي لتكون $V_1, V_2, .., V_m$ مستقلة خطيا هو أن نتمكن من أن نستخرج من المصفوفة M مصفوفة مربعة من الدرجة m محددها غير معدوم

مثال: نأخذ في IR^5 الأشعة:

$V_1\,(-4,1,1,1,1)$, $V_2\,(1,-4,1,1,1)$

$V_3\,(1,1,-4,1,1)$, $V_4\,(1,1,1,-4,1)$

نضع:

$$A = \begin{pmatrix} -4 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -4 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -4 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -4 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

نأخذ المحدد ذو الدرجة 4:

$$D = \begin{vmatrix} -4 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -4 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -4 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -4 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} -1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & -4 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & -4 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & -4 \end{vmatrix} C_1 + C_2 + C_3 + C_4 \to C_1$$

$$D = \begin{vmatrix} -1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -5 \end{vmatrix} = 125$$ بطرح السطر الأول

رتبة جملة الأشعة V_1, V_2, V_3, V_4 هي 4.

وهي كذلك رتبة المصفوفة A أي: $rg\,(A) = 4$.

6. حساب رتبة مصفوفة.

نتيجة 2:

رتبة مصفوفة M من $M_{n,m}$ (IK) هو أكبر درجة r لمصفوفة مربعة مستخرجة منها ومحددها غير معدوم.

طريقة عملية نسبيا: لتكن$M\in M_{n,m}$ (IK)

لحساب رتبة المصفوفة (أو رتبة جملة أشعة) وبملاحظة $1 \leq rg(M) \leq inf(m,n)$:

1. نقوم بحساب المحددات التي درجتها *inf (m,n)* إن وجد على الأقل محدد غير معدوم نتوقف عن الحساب، ونستنتج أن: *rg (M) = i,f (m,n)* .
2. إذا كانت كل المحددات من الدرجة *inf (m,n)* معدومة، نمر إلى المحددات من الدرجة *inf (m,n) -1* وهكذا.
3. نكرر العملية حتى نصل إلى محدد غير معدوم، نتوقف ونستنتج أن رتبة المصفوفة هي درجة هذا المحدد.

مثال: لتكن: $M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 5 \\ 2 & 1 & 7 \\ 3 & 4 & 18 \\ -1 & 5 & 14 \end{pmatrix}$

نلاحظ أن $1 \leq rg\ (M) \leq 3$. لحساب رتبة المصفوفة M، نقوم أولا بحساب محددات المصفوفات المربعة من الدرجة 3.

نأخذ الأسطر 1،2، و 3: $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 5 \\ 2 & 1 & 7 \\ 3 & 4 & 18 \end{pmatrix} = 0$

وبأخذ الأسطر 1، 2، و4، نجد: $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 5 \\ 2 & 1 & 7 \\ -1 & 5 & 14 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 5 \\ 2 & -1 & 7 \\ -1 & 6 & 14 \end{pmatrix}$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & -3 \\ -1 & 6 & 19 \end{pmatrix} = -1$$

هذا المحدد غير معدوم، وبالتالي *rg (M) = 3* .

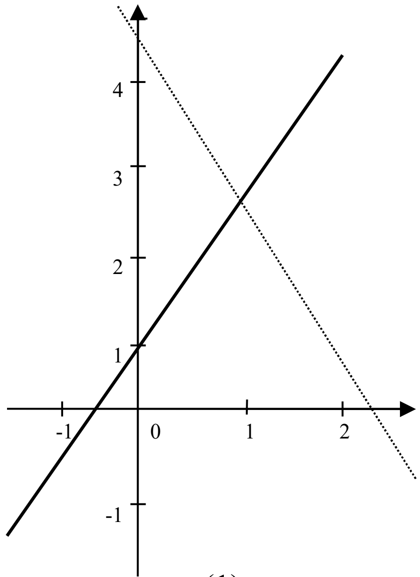
من الأفضل استعمال العمليات على الأسطر أو الأعمدة كما هو معروض في طريقة غوص لحل الجمل

الفصل السادس: حل جملة معادلات خطية.

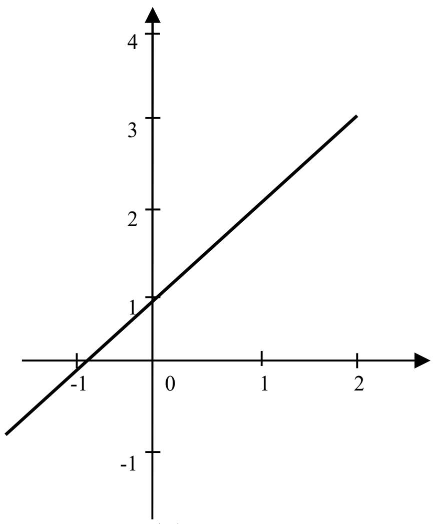
نذكر أن جملة معادلتين خطية ذات مجهولين هي كل جملة من الشكل:

$$\begin{cases} ax + by + c = 0 \\ a'x + b'y + c' = 0 \end{cases} \text{ أو } \begin{cases} ax + by = c \\ a'x + b'y = c' \end{cases}$$

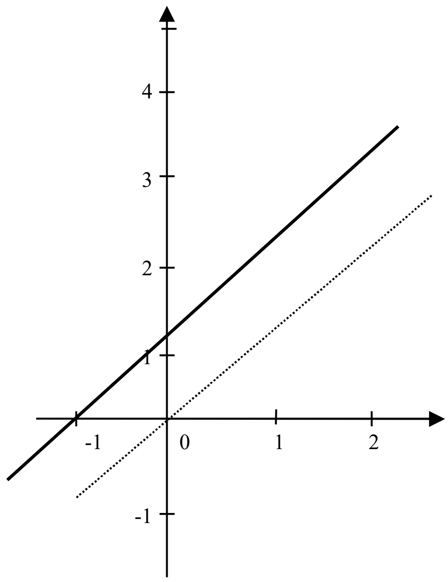
حيث: a, a', b, b', c, c' أعداد حقيقية معطاة. نلاحظ أن كل معادلة من المعادلتين هي معادلة لمستقيم في مستوي مزود بمعلم، هناك ثلاثة حالات ممكنة:



(1)



(2)



(3)

(1) وجود حل وحيد (نقطة تقاطع المستقيمين).

(2) وجود ما لا نهاية من الحلول (مجموعة نقط أحد المستقيمين المتطابقين).

(3) لا يوجد حلول (مستقيمين متوازيين وغير متطابقين).

وعموما، فإن مجموعة الحلول هي إما تتكون من عنصر واحد (حلا وحيدا)، إما مجموعة غير منتهية (ما لا نهاية من الحلول)، وإما مجموعة خالية (لا يوجد حلول).

1. تعريفات مختلفة.

ليكن **IK** حقلا تبديليا، ولنأخذ جملة المعادلات الخطية التي عددها n والحاوية على m مجهولا:

$$(S) = \begin{cases} a_{11}x_1 + \cdots + a_{1m}x_m = b_1 \\ \vdots \\ a_{n1}x_1 + \cdots + a_{nm}x_m = b_n \end{cases}$$

إن المقادير a_{ij}, b_i هي عناصر في IK (IR أو C).

تعريف 1:

نسمي حلا للجملة (S) كل مرتب $(y_1,\dots,y_m)$ من IK^m بحيث يكون:

$$\begin{cases} a_{11}y_1 + \cdots + a_{1m}y_m = b_1 \\ \vdots \\ a_{m1}y_1 + \cdots + a_{nm}y_m = b_n \end{cases}$$

ملاحظة:

يمكن صياغة الجملة (S) بأشكال مختلفة.

نأخذ في IK^n المزود بالأساس النظامي $\{e_1, \dots, e_n\}$ ، الأشعة $v_j = a_{1j}e_1+\dots+a_{nj}e_n$

$b= b_1e_1+\dots+b_ne_n$. فنكتب الجملة (S) بالشكل: $(V) \quad x_1v_1+\dots+x_mv_m = b$

وتبين هذه الصياغة أن حل الجملة (S) يعود إلى كتابة b بشكل مزج خطي للأشعة $v_1, \dots, v_m$.

وليكن IK^m مزودا بأساسه النظامي $\{f_1, \dots, f_m\}$، نأخذ التطبيق الخطي u لـ IK^m في IK^n بحيث يكون: $u(f_j)=v_j$

فنكتب الجملة (S) بالشكل: $u(x) = b \qquad (F)$

حيث: $x = x_1f_1+\dots+x_mf_m$

وإذا أخذنا المصفوفة A المشاركة للتطبيق الخطي u لـ IK^m في IK^n المزودين بأساسيهما النظاميين وفرضنا x المصفوفة العمودية المشاركة لـ x في IK^m وكان B المصفوفة العمودية المشاركة لـ b في IK^n فإن الجملة (S) تكتب $AX = B$ (M)

دراسة الحلول:

تسمى (V) بالصيغة الشعاعية للجملة (S) كما تسمى (F) بالصيغة التابعية، والصيغة (M) هي الصيغة المصفوفية.

وتمكننا هذه الصيغ من دراسة وجود حلول للجملة (S) ودراسة خواص هذه الحلول.

فإذا كان $y = (y_1, \dots, y_m)$ حلا للجملة، فإن $u(y) = b$

ومنه: $u(x) = b \Leftrightarrow u(x - y) = 0$

ويعود البحث عن باقي الحلول إلى تعيين الأشعة z من IK^m بحيث يكون $u(z) = 0$ أي أن الأمر يعود إلى إيجاد نواة التطبيق الخطي u. ونرى أنه إذا وضعنا $Z = z_1e_1+\dots+z_me_m$ فإن الجملة الخطية الموافقة للمعادلة $u(z) = 0$ تكون:

$$(S') = \begin{cases} \{a_{11}z_1 + \cdots + a_{1m}z_m = 0 \\ \qquad\qquad \vdots \\ \{a_{n1}z_1 + \cdots + a_{nm}z_m = 0 \end{cases}$$

تعريف 2:

نسمي الجملة(S') بالجملة المتجانسة المشاركة (أو المرافقة) للجملة ( ). ولما كانت نواة التطبيق الخطي فضاء شعاعيا جزئيا من IK^m فإن مجموعة حلول(S) – إذا لم تكن مجموعة خالي- هي فضاء جزئي تآلفي منIK^m ومن الشكل: $y+ Ker\ u$

تعريف 3:

إذا كان عدد معادلات الجملة (S) مساويا لعدد المجاهيل، فإن المصفوفة المشاركة A تكون مصفوفة مربعة ومحددها يسمى محدد الجملة.

2. جملة كرامر « Cramer» .

تعريف 4:

يقال عن جملة معادلات خطية أنها جملة كرامر إذا كان عدد المعادلات مساويا لعدد المجاهيل، ومحدد مصفوفة الجملة غير معدوم.

نظرية 1:

لجملة كرامر حل وحيد.

ملاحظة:

إذا أخذنا جملة خطية متجانسة، أي إذا كان الشعاع $\boldsymbol{b}$ منعدما، فيوجد حل واضح هو الشعاع المعدوم، ويسمى هذا الحل بالحل البديهي.

فإذا كان لدينا جمل كرامر متجانسة، فلا يكون لها حل سوى الحل البديهي، وذلك بسبب وحدانية حل كرامر.

نظرية 2:

إذا كان لدينا جملة معادلات خطية متجانسة ذات n معادلة و n مجهولا فإنه يكون لهذه الجملة حلا غير الحل البديهي إذا وفقط إذا انعدم محدد الجملة.

3. الدراسة العامة لجملة المعادلات الخطية.

حساب الحل في جملة كرامر:

لنأخذ جملة كرامر من المرتبة n:

$$(S)\begin{cases}\{a_{11}x_1+\cdots+a_{1n}x_n &= b_1\\ \vdots \quad\quad\quad \vdots & \vdots\\ \{a_{n1}x_1+\cdots+a_{nn}x_n &= b_n\end{cases}$$

نكتب هذه الجملة بالشكل الشعاعي: $x_1v_1+\ldots+x_nv_n = b$

ونعلم أن: $det\ (v_1,\ldots,v_n)\neq 0$ لأنه محدد المصفوفة A.

إذا كان $y=(y_1,\ldots,y_n)$ حلا للجملة (S) فإن:

$$y_1v_1+\ldots+y_nv_n = b$$

نأخذ المحدد $det\,(b,v_2,\ldots,v_n)$، فحسب الخاصية الخطية يكون:

$$det\,(y_1v_1+\ldots+y_nv_n\,,\,v_2,\ldots v_n) = y_1\,det\,(v_1,\ldots,v_n)$$

ونكتب بصورة عامة:

$$y_j = \frac{det\,(v_1,\ldots,v_{j-1},b,v_{j+1},\ldots,v_n)}{det\,(v_1,\ldots,v_n)}$$

وهي دساتير كرامر: نحصل على y_j بأن نقسم على محدد الجملة، محدد المصفوفة الناتج عن المصفوفة A باستبدال العمود الذي ترتيبه j بالشعاع b (أي الطرف الثاني من الجملة).

مثال: لتكن الجملة

$$\begin{cases} x+y+z=1 \\ 2x+5y-3z=0 \\ 3x-2y+az=-1 \end{cases}$$

وهي جملة ثلاث معادلات خطية بثلاث مجاهيل.

محدد الجملة هو:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 5 & -3 \\ 3 & -2 & a \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & -5 \\ 3 & -5 & a-3 \end{vmatrix} = 3(a-3)-25 = 3a-34$$

إذا كان $a \neq \frac{34}{3}$ فإن جملة المعادلات هي جملة كرامر وحلها:

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 5 & -3 \\ -1 & -2 & a \end{vmatrix}}{3a-34} = \frac{5a+2}{3a-34}$$

$$y = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & -3 \\ 3 & -1 & a \end{vmatrix}}{3a-34} = \frac{-2a-14}{3a-34}$$

$$z = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 5 & 0 \\ 3 & -2 & -1 \end{vmatrix}}{3a-34} = \frac{-22}{3a-34}$$

من أجل $a = \frac{34}{3}$ لا تكون جملة المعادلات جملة كرامر.

لندرس الجملة مباشرة:

باستخدام الرمز الشعاعي، نرى أن حل الجملة يعود إلى كتابة الشعاع $b=(1,0,-1)$ من IR^3 بشكل مزج خطي للأشعة $v_1=(1,2,3)$, $v_2(1,5,-2)$, $v_3(1,-3,\frac{34}{3})$ ، وهذه الأشعة مرتبطة خطيا.

نرى أن المحدد المستخرج:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 5 \end{vmatrix} = 3 \neq 0$$

فالشعاعان v_1, v_2 مستقلان خطيا والفضاء الشعاعي الجزئي من IR^3 المولد بالأشعة v_1,v_2,v_3 يقبل $\{v_1, v_2\}$ أساسا. ولمعرفة فيما إذا كان b ينتمي لهذا الفضاء الجزئي، يكفي أن نحسب محدد $v_1, x_2,$ b:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 5 & 0 \\ 3 & -2 & -1 \end{vmatrix} = -22$$

فلا يمكن كتابة b بشكل مزج خطي للشعاعين v_1, v_2 أي أن b لا تنتمي إلى الفضاء الشعاعي الجزئي المولد بالأشعة v_1, v_2, v_3 وليس للجملة حل.

أو بطريقة أخرى:

من المعادلة الأولى نجد: $x=1-y-z$ وبتعويض هذه العبارة في المعادلتين الثانية والثالثة وبعد التبسيط نجد:

$$\begin{cases} 3y-5z=2 \\ 3y-5z=\dfrac{12}{5} \end{cases}$$

وهذا مستحيل، وبالتالي الجملة لا تقبل حلولا.

مثال: لندرس الجملة:

$$\begin{cases} 2x+3y+z+2t=3 \\ 4x+6y+3z+4t=5 \\ 8x+12y+7z+at=9 \end{cases}$$

إنها جملة ثلاث معادلات ذات أربعة مجاهيل بسلميات حقيقية.

مصفوفة الجملة هي:

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 & 2 \\ 4 & 6 & 3 & 4 \\ 8 & 12 & 7 & a \end{pmatrix}$$

لنحسب المحددات من الرتبة 3 المستخرجة من المصفوفة:

$$\begin{vmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 4 & 6 & 3 \\ 8 & 12 & 7 \end{vmatrix} = 0 \qquad \begin{vmatrix} 2 & 3 & 2 \\ 4 & 6 & 4 \\ 8 & 12 & a \end{vmatrix} = 0$$

$$\begin{vmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 4 & 6 & 4 \\ \mathrm{a} & 12 & 7 \end{vmatrix} = 3(\mathrm{a}-8) \qquad \begin{vmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 4 & 4 & 3 \\ 8 & a & 7 \end{vmatrix} = -2\,(a-8)$$

إذا كان $a \neq 8$ فإن الجملة من المرتبة 3 وتكون المجاهيل الرئيسية y,z,t أو x,z,t. نكتب جملة المعادلات بالشكل:

$$\begin{cases} 2x + z + 4t = 3 - 3y \\ 4x + 3z + 4t = 5 - 6y \\ 8x + 7z + at = 9 - 12y \end{cases}$$

ويمكن للمجهول y أن يأخذ قيمة اختيارية وعندئذ:

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 3-3y & 1 & 2 \\ 5-6y & 3 & 4 \\ 9-12y & 7 & a \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 4 & 3 & 4 \\ 8 & 7 & a \end{vmatrix}} = \frac{4(a-8) - 3y(a-8)}{2(a-8)} = \frac{4-3y}{2}$$

$$z = \frac{\begin{vmatrix} 2 & 3-3y & 2 \\ 4 & 5-6y & 4 \\ 8 & 9-12y & a \end{vmatrix}}{2(a-8)} = -1, t = \frac{2(-4+3y)}{2(a-8)} = \frac{3y-4}{a-8}$$

إذا كان $a=8$ فإن رتبة الجمل تكون اصغر تماما من 3.

ونرى أنه يمكننا أن نستخرج من مصفوفة الجملة محددا غير منعدم من المرتبة 2، فنجد مثلا:

$$\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 6 & 3 \end{vmatrix} = 3.$$

فرتبة الجملة تساوي 2، ويمكن أخذ y, z كمجهولين رئيسيين، نتحقق بسهولة من أن جميع المحددات المميزة منعدمة، فجملة المعادلات تكافئ:

$$\begin{cases} 3y + z = 3 - 2x - 2t \\ 6y + 3z = 5 - 4x - 4t \end{cases}$$

ومنهما:

$$\begin{cases} z = -1 \\ y = \dfrac{1}{3}(4 - 2x - 2t) \end{cases}$$

مثال: لتكن الجملة:

$$(S)\begin{cases} 2x + 3y = 7 \\ 3x - y = 5 \\ x - 5y = -11 \end{cases}$$

إنها جملة ثلاث معادلات ذات مجهولين. وبالتالي ليست لكرامر ورتبتها أقل من أو يساوي 2.

لنأخذ $M = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$ مصفوفة مستخرجة من المصفوفة المرافقة للجملة، والتي رتبتها 2. الجملة المرافقة للمصفوفة M هي:

$$\begin{cases} 2x + 3y = 7 \\ 3x - y = 5 \end{cases}$$

وهي جملة كرامر وحلها هو *(x,y) = (2,1)*. لكن هذا الحل لا يحقق المعادلة *x-5y= -11*، وبالتالي الجملة (S) لا تقبل حلا.

مثال: لنحلّ الجملة:

$$\begin{cases} 3x + 2y + 2z - t = 0 \\ 4x - y - 5z + 2t = 0 \\ 2x + 5y + 9z - 4t = 0 \end{cases}$$

إنها جملة متجانسة بثلاث معادلات وأربعة مجاهيل. والحل المعدوم هو حل للجملة، ولكنه ليس وحيدا، فكل المصفوفات التي درجتها 3 محدداتها معدومة.

وبأخذ المصفوفة $M = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$ المستخرجة من المصفوفة المرافقة للجملة، والتي رتبتها 2 لأن

det M= -11

نجد: $\left\{x = \frac{1}{11}(8z - 3t), y = \frac{1}{11}(-23 + 10t), z \in IR, t \in IR\right\}$مجموعة حلول الجملة غير معدومة.

مثال:

لنحل الجملة المتجانسة بثلاث مجاهيل وأربعة معادلات التالية:

$$\begin{cases} 4x - 3y - z = 0 \\ 2x + 7y + 5z = 0 \\ 3x - y + 4z = 0 \\ 5x - 2y - 3z = 0 \end{cases}$$

المصفوفة $M = \begin{pmatrix} 4 & -3 & -1 \\ 2 & 7 & 5 \\ 3 & -1 & 4 \end{pmatrix}$ مستخرجة من المصفوفة المرافقة للجملة، والتي رتبتها 3 وهي أعظمية، وبالتالي فالجملة تقبل حلا وحيدا وهو المعدوم.

4. طريقة الحل لـ غوص « Gauss ».

هذه الطريقة تكمن في إجراء عدة عمليات على جملة خطية للحصول على جملة خطية مكفئة سهلة الحل، وترتكز على إجراء العمليات التالية:

1. تغيير موضعي سطرين، ونكتب: $L_i \leftrightarrow L_k$

2. ضرب سطر L_i بمعامل غير معدوم α، ونكتب: $\alpha L_i \leftrightarrow L_i$ $(\alpha \neq 0)$

3. تغيير سطر L_i بضربه بمعامل غير معدوم α وجمعه مع مزج خطي للأسطر الأخرى، ونكتب:

$$(\alpha \neq 0) \quad \alpha L_i + \sum_{k \neq i} \beta_k L_k \to L_i$$

مثال تطبيقي:

لنقم بحل الجملة التالية ذات 4 معادلات و5 مجاهيل:

$$(S)\begin{cases} 0x_1 + x_2 + 3x_3 - x_4 + 0x_5 = b_1 & L_1 \\ 2x_1 + x_2 + 7x_3 + x_4 + 6x_5 = b_2 & L_2 \\ 3x_1 + 0x_2 + 6x_3 + x_4 + 5x_5 = b_3 & L_3 \\ 4x_1 + x_2 + 11x_3 + 0x_4 + 6x_5 = b_4 & L_4 \end{cases}$$

المرحلة الأولى: نختار سطرا يكون فيه معامل x_1 غير معدوم ونضع في السطر الأول وهذا المعامل يسمى معامل غوص، ونختار عادة السطر الذي يكون فيه المعامل مساو لـ1، وبالنسبة للجملة (S) نقوم بوضع السطر الثاني في مكان الأول $L_1 \leftrightarrow L_2$ فنجد:

$$(S)\begin{cases} 2x_1 + x_2 + 7x_3 + x_4 + 6x_5 = b_2 & L_1 \\ 0x_1 + x_2 + 3x_3 - x_4 + 0x_5 = b_1 & L_2 \\ 3x_1 + 0x_2 + 6x_3 + x_4 + 5x_5 = b_3 & L_3 \\ 4x_1 + x_2 + 11x_3 + 0x_4 + 6x_5 = b_4 & L_4 \end{cases}$$

المرحلة الثانية: نقوم بإجراء عمليات لنحصل على معاملات x_1 معدومة في الأسطر المتبقية. في حالتنا نقوم بالعمليات التالية $2L_3 - 3L_1 \to L_3$: ثم $2L_4 - 4L_1 \to L_4$، فنحصل على الجملة المكافئة التالية:

$$(S)\begin{cases} 2x_1 + x_2 + 7x_3 + x_4 + 6x_5 = b_2 & L_1 \\ 0x_1 + x_2 + 3x_3 - x_4 + 0x_5 = b_1 & L_2 \\ 0x_1 - 3x_2 - 9x_3 - x_4 - 8x_5 = 2b_3 - 3b_2 & L_3 \\ 0x_1 - 2x_2 - 6x_3 - 4x_4 - 12x_5 = 2b_4 - 4b_2 & L_4 \end{cases}$$

<u>المرحلة الثالثة:</u> نحتفظ بالسطر الأول، ونقوم بنفس المرحلتين السابقتين وذلك للحصول على معاملات x_2 معدومة في الأسطر المتبقية، على الجملة الخطية التالية:

$$(S)\begin{cases} 1x_2+3x_3-x_4+0x_5=b_1 & L'_2\\ -3x_2-9x_3-x_4-8x_5=2b_3-3b_2 & L'_3\\ -2x_2-6x_3-4x_4-12x_5=2b_4-4b_2 & L'_4\end{cases}$$

بعد العمليتين المتواليتين $L'_3+3L'_1\to L'_3$ و $L'_4+2L'_4\to L'_3$ ، نجد:

$$(S)\begin{cases} 2x_1+x_2+7x_3+x_4+6x_5=b_2 & L_1\\ 0x_1+x_2+3x_3-x_4+0x_5=b_1 & L_2\\ 0x_1+0x_2+0x_3-4x_4-8x_5=2b_3-3b_2+3b_1 & L_3\\ 0x_1+0x_2+0x_3-6x_4-12x_5=2b_4-4b_2+2b_1 & L_4\end{cases}$$

<u>وكمرحلة نهائية،</u> نقوم بـ $2L_4-3L_3\to L_4$ لنجد:

$$(S)\begin{cases} 2x_1+x_2+7x_3+x_4+6x_5=b_2 & L_1\\ 0x_1+x_2+3x_3-x_4+0x_5=b_1 & L_2\\ 0x_1+0x_2+0x_3-4x_4-8x_5=2b_3-3b_2+3b_1 & L_3\\ 0x_1+0x_2+0x_3+0x_4+0x_5=4b_4-6b_3+b_2-5b_1 & L_4\end{cases}$$

نميز حالتين:

1. إذا كان $4b_4-6b_3+b_2-5b_1\neq 0$ فمجموعة الحلول هي مجموعة خالية.
2. إذا كان $4b_4-6b_3+b_2-5b_1=0$ فالجملة تقبل ما لا نهاية من الحلول.

لنأخذ مثلا $b_1=0,\ b_2=6,\ b_3=1,\ b_4=0$ الجملة تصبح:

$$(S)\begin{cases} 2x_1+x_2+7x_3+x_4+6x_5=6\\ 0x_1+x_2+3x_3-x_4+0x_5=0\\ 0x_1+0x_2+0x_3-4x_4-8x_5=-16\end{cases}$$

وباختيار x_3 , x_5 كيفيين، نجد: $\begin{cases} x_1=-1-2x_3-x_5\\ x_2=4-3x_3-2x_5\\ x_4=4-2x_5\end{cases}$

ومنه، مجموعة الحلول هي: $\{(-1-x_5-2x_3, 4-2x_5-3x_3, x_3, 4-2x_5, x_5), x_3, x_5\in IR\}$.

مثال: لنحل الجملة التالية:

$$(S)\begin{cases} 2x_1 + x_2 + 4x_4 = 2 \\ -4x_1 - 2x_2 + 3x_3 - 7x_4 = -9 \\ 4x_1 + x_2 - 3x_3 + 8x_4 = 2 \\ 3x_2 - 12x_3 - x_4 = 2 \end{cases}$$

يمكن تبسيط كتابة الجملة *(S)* وطريقة حل غوص على الشكل التالي:

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 & 4 & : & 2 \\ -4 & -2 & 3 & -7 & : & -9 \\ 4 & 1 & -2 & 8 & : & 2 \\ 0 & -3 & -12 & -1 & : & 2 \end{vmatrix} \xrightarrow{L_2 + 2L_1 \to L_2} \begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 & 4 & : & 2 \\ 0 & 0 & 3 & 1 & : & -5 \\ 4 & 1 & -2 & 8 & : & 2 \\ 0 & -3 & -12 & -1 & : & 2 \end{vmatrix}$$

$$\xrightarrow{L_3 - 2L_1 \to L_3} \begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 & 4 & : & 2 \\ 0 & 0 & 3 & 1 & : & -5 \\ 0 & -1 & -2 & 0 & : & -2 \\ 0 & -3 & -12 & -1 & : & 2 \end{vmatrix} \xrightarrow{L_2 \leftrightarrow L_3} \begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 & 4 & : & 2 \\ 0 & -1 & -2 & 0 & : & -2 \\ 0 & 0 & 3 & 1 & : & -5 \\ 0 & -3 & -12 & -1 & : & 2 \end{vmatrix}$$

$$\xrightarrow{L_4 - 3L_2 \to L_4} \begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 & 4 & : & 2 \\ 0 & -1 & -2 & 0 & : & -2 \\ 0 & 0 & 3 & 1 & : & -5 \\ 0 & 0 & -6 & -1 & : & 8 \end{vmatrix} \xrightarrow{L_4 + 2L_3 \to L_4} \begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 & 4 & : & 2 \\ 0 & -1 & -2 & 0 & : & -2 \\ 0 & 0 & 3 & 1 & : & -5 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & : & -2 \end{vmatrix}$$

فالجملة تصبح مكافئة للجملة:

$$(S)\begin{cases} 2x_1 + x_2 + 4x_4 = 2 \\ x_2 - 2x_3 = -2 \\ 3x_3 + x_4 = -5 \\ x_4 = -2 \end{cases}$$

وحلها هو (3,4,-1,-2).

ملاحظة:

يمكن كذلك استعمال طريقة غوص لحساب المحددات، حيث نحصل في المرحلة النهائية على محدد مصفوفة مثلثية.

الفصل السابع: القيم الذاتية والأشعة الذاتية.

1. تعاريف وخواص.

نفرض E فضاء شعاعي على جسم تبديلي IK، وليكن f تطبيقا خطيا من E في E، أي f تماثل داخلي.

تعريف 1:

إذا كان v شعاع غير معدوم من E، نقول أن v شعاع ذاتي للتماثل الداخلي f إذا وجدت سلمية λ من IK بحيث يكون $f(v) = \lambda v$

ملاحظة:

لما كان $f(0) = 0$ فإن الشرط $v \neq 0$ ضروري لتعريف الشعاع الذاتي.

تعريف 2:

نقول عن السلمية λ من IK أنها قيمة ذاتية للتماثل الداخلي f إذا وجد شعاع v غير معدوم ($v \neq 0$) بحيث يكون $f(v) = \lambda v$

ملاحظة:

إذا كان $f(v) = \lambda v$ بحيث $v \neq 0$، نقول أن λ هي القيمة الذاتية المرافقة للشعاع الذاتي v، وأن v هو الشعاع الذاتي المرافق للقيمة الذاتية λ.

خاصية 1:

لكل شعاع ذاتي، توجد قيمة ذاتية وحيدة.

البرهان:

نفرض $v \neq 0$، فإذا كان $f(v) = \lambda_1 v$ و $f(v) = \lambda_2 v$ فإن $(\lambda_1 - \lambda_2)v = 0$ ومنه: $\lambda_1 = \lambda_2$

خاصية 2:

إذا كان v الشعاع الذاتي للتماثل الداخلي f المرافق للقيمة الذاتية λ فإن الشعاع αv، حيث $\alpha \in IK$ و $\alpha \neq 0$ هو أيضا شعاع ذاتي مرافق للقيمة λ.

البرهان

إذا كان $v \neq 0$ ، $\lambda \neq 0$ ، $\alpha \neq 0$ ، $\alpha \in IK$ فإن $f(\alpha v) = \alpha f(v) = \alpha(\lambda v) = \lambda(\alpha v)$

2. الفضاء الشعاعي الجزئي الذاتي.

تعريف 3:

لتكن λ قيمة ذاتية للتماثل الداخلي f.

نسمي المجموعة $E_\lambda = \{\mathrm{v} \in \mathrm{E} \,/\, f(v) = \lambda v\}$ الفضاء الشعاعي الجزئي المرافق للقيمة الذاتية λ.

نظرية 1:

المجموعة $E_\lambda = \{\mathrm{v} \in \mathrm{E} \,/\, f(v) = \lambda v\}$ فضاء شعاعي جزئي من E، ومستقر بالنسبة للتماثل الداخلي f أي: $f(E_\lambda) \subset E_\lambda$.

نتيجة 1:

إذا كانت $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m$ قيم ذاتية لتماثل داخلي مختلفة مثنى مثنى فإن المجموع $E_{\lambda 1} + \cdots + E_{\lambda m}$ هو و مجموع مباشر.

تعريف 4:

ليكن $n \in IN^*$ و A مصفوفة مربعة من الدرجة n ذات المعاملات في حقل IK.

- نسمي شعاع ذاتي لـ A كل شعاع v بحيث توجد $\lambda \in IK$ و $Av = \lambda v$

- نسمي قيمة ذاتية بـ Aكل سلمي λ بحيث يوجد شعاع غير معدوم v مع $Av = \lambda v$

مثال 1: لتكن المصفوفة: $A = \begin{pmatrix} 2 & a & 1 \\ b & 1 & -1 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$

عيّن a و b حتى تكون $\lambda = 2$ قيمة ذاتية لـ A، استنتج الفضاء الشعاعي الجزئي الذاتي المرافق لـ$\lambda = 2$.

الحل:

ليكن $\{e_1, e_2, e_3\}$ الأساس القانوني لـ IR^3، نضع $x = x_1e_1 + x_2e_2 + x_3e_3$

$$AX = 2\,X \;\Rightarrow (1)\begin{cases} 2x_1 + ax_2 + x_3 = 2x_1 \\ bx_1 + x_2 - x_3 = 2x_2 \\ x_1 + 3x_2 + 2x_3 = 2x_3 \end{cases} \;/\; X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow (2)\begin{cases} ax_2 + x_3 = 0 \\ bx_1 - x_2 - x_3 = 0 \\ x_1 + 3x_2 = 0 \end{cases}$$

جملة معادلات متجانسة من المرتبة 3، وحتى تقبل حلولا يجب أن يكون:

$$\begin{vmatrix} 0 & a & 1 \\ b & -1 & -1 \\ 1 & 3 & 0 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow 3b - a + 1 = 0 \Rightarrow a = 3b + 1$$

وبالتالي، يوجد عدد غير منته من الحلول $b \in IR$ و a = 3b + 1

نختار $b = 1$ و $a= 4$

المجموعة $E_2 = \{x \in I/^3 \; f(x) = 2x\}$ حيث x معرف بـ (2) من أجل $b = 1$ و $a= 4$ الجملة (2) تصبح:

$$3)\begin{cases} 4x_2 + x_3 = 0 \\ x_1 - x_2 - x_3 = 0 \\ x_1 + 3x_2 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = -3x_2 \\ 0x_2 = 0 \\ x_3 = -4x_2 \end{cases}$$

بالتالي، مجموعة الحلول هي: $x_1 = -3t, \quad x_2 = t, \quad x_3 = -4t, \quad t \in IR$

بمعنى أن: $E_2 = \{t(-3,1,-4), t \in IR\}$ الفضاء الشعاعي الجزئي الذاتي المرافق لـ $\lambda = 2$

و $v = (-3,1,-4)$ هو الشعاع الذاتي المرافق للقيمة الذاتية 2.

3. كثير الحدود المميز.

ليكن E شعاعي ذو بعد منته $\{\boldsymbol{e_1}, \boldsymbol{e_2}, \dots, \boldsymbol{e_n}\}$ أساس لـ E.

نظرية 2:

لتكن $\boldsymbol{A} = (\boldsymbol{a_{ij}})_{1\le i,j\le n}$ المصفوفة المرفقة للتماثل الداخلي f في E. لدينا:

$(\boldsymbol{\lambda}$ قيمة ذاتية لـ $\boldsymbol{f})$ $\leftrightarrow$ **det** $(\mathbf{A}-\boldsymbol{\lambda I_n}) = \mathbf{0}$

حيث $\boldsymbol{I_n}$ المصفوفة الواحدية المرفق للتطبيق الحيادي Id في E

4. تعريف كثير الحدود المميز.

بعد نشر المحدد:

$$det\ (A-\lambda I)=\begin{vmatrix} a_{11}-\lambda & a_{21} & \cdots & a_{n1} \\ a_{21} & a_{22}-\lambda & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn}-\lambda \end{vmatrix}$$

نحصل على كثير حدود بدلالة λ ومعاملاته في IK وحدّه الأعلى درجة λ^n معامله $(-1)^n$، معامل λ^{n-1} هو $(-1)^{n-1}\, Tr\,(A)$، وأخيرا الحد الثابت هو det A أي:

$$det\ (A-\lambda I_n) = (-1)^n \lambda^n + (-1)^n\, Tr\ (A)\ \lambda^{n-1} + \ldots + det\ A.$$

ويسمى كثير الحدود المميز للمصفوفة ونرمز له بالرمز $P_A\ (\lambda)$ ونكتب:

$$P_A\ (\lambda) = det\ (A-\lambda I_n) = (-1)^n \lambda^n + (-1)^n\, Tr\ (A)\ \lambda^{n-1} + \ldots + det\ A$$

مثال 1: لتكن $A=\begin{pmatrix} 0 & 3 & 0 \\ 1 & -2 & 4 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

كثير الحدود المميز لـ A هو:

$$P_A\ (\lambda) = det\ (A-\lambda I_3)=\begin{vmatrix} -\lambda & 3 & 0 \\ 1 & -2-\lambda & 4 \\ 1 & 1 & 1-\lambda \end{vmatrix}$$

$$=\begin{vmatrix} 3-\lambda & 3 & 0 \\ 3-\lambda & -2-\lambda & 4 \\ 3-\lambda & 1 & 1-\lambda \end{vmatrix}$$

$$=(3-\lambda)\begin{vmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 1 & -2-\lambda & 4 \\ 1 & 1 & 1-\lambda \end{vmatrix}$$

$$=(3-\lambda)\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & -5-\lambda & 4 \\ 1 & -2 & 1-\lambda \end{vmatrix}$$

$$=(3-\lambda)(\lambda^2+4\lambda+3)$$

$$=(3-\lambda)(\lambda+1)(\lambda+3)$$

مثال 2: لتكن المصفوفة B حيث: $B=\begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & -4 \\ 1 & 1 & -3 \end{pmatrix}$

كثير الحدود المميز لـ B هو:

$$P_B(\lambda) = det\,(B-\lambda I_3) = \begin{vmatrix} -\lambda & -1 & 0 \\ 1 & 2-\lambda & -4 \\ 1 & 1 & -3-\lambda \end{vmatrix} = -(\lambda+1)^2\,(\lambda-1)$$

ومن النظرية السابقة نجد:

نتيجة 2:

لتكن $A \in M_n\,(IK)$ و $\lambda \in IK$ ، القضايا التالية متكافئة:
1. λ قيمة ذاتية لـ A.
2. $(A - \lambda I)$ ليست عكوسة.
$P_A\,(\lambda) = \det(A - \lambda I_n) = 0$.

ملاحظة:

1. لحساب القيم الذاتية نستعمل الخاصية (3).
2. إذا كان IK = C فإن كثير الحدود المميز $P_A\,(\lambda)$ يقبل n جذرا ويكون لها عدد n من القيم الذاتية (وبالتالي يكون للتماثل الداخلي f، n قيم ذاتية).
3. إذا كان $IK = R$ يكون عدد جذور كثير الحدود$P_A\,(\lambda)$ مساويا n على الأكثر، وكذلك يكون عدد القيم الذاتية.

مثال: لتكن $A \in M_2\,(IK)$ حيث: $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

عيّن القيم الذاتية في كل من الحالتين التاليتين: IK = IR و IK = C.

الحل:

لدينا كثير الحدود المميز لـ A هو

$$P_A\,(\lambda) = \begin{vmatrix} -\lambda & -1 \\ 1 & -\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 + 1$$

1. إذا كان IK= IR فإن A لا تقبل قيما ذاتية.
2. إذا كان IK= C فإن لـ A قيمتين ذاتيتين هما: $\lambda_1 = i$ و $\lambda_2 = -i$

5. تعيين الأشعة الذاتية.

إذا كان λ_0 قيمة ذاتية لتماثل داخلي f (أي للمصفوفة A المرفقة لـ f)، وفرضنا $\{e_1, e_2, \dots, e_n\}$ أساسا مختارا في E، فإننا نعني الأشعة الذاتية المرفقة للقيمة λ_0 بأن نكتب العلاقة $f(x) = \lambda_0 x$ بالشكل المصفوفي:

$$AX = \lambda_0 X$$

أي :

$$(A - \lambda_0 I_n)X = 0$$

وهذه هي الكتابة المصفوفية لجملة معادلات متجانسة، وهذه الجملة ليست جملة كرامر.

نبدأ بتعيين رتبة الجملة r_0 ثم نبحث عن أساس للفضاء الشعاعي الجزئي الذاتي المرافق لـ λ_0 .

مثال: لتكن:

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 0 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

لدينا:

$$P_A(\lambda) = det(A - \lambda I_3) = \begin{vmatrix} 5-\lambda & 0 & 0 \\ -1 & 2-\lambda & 0 \\ 3 & 1 & 2-\lambda \end{vmatrix} = (2-\lambda)^2\,(5-\lambda)$$

نبحث عن الأشعة التي تحقق $(A - \lambda I)X = 0$ وذلك من أجل كل قيمة ذاتية λ.

أي أنه يجب حل جملة المعادلات الخطية:

$$\begin{cases} (5-\lambda)x = 0 \\ -5x + 2\,(2-)y = 0 \\ 3x + y + (2-\lambda)z = 0 \end{cases}$$

من أجل $\lambda_1 = 5$ نجد:

$$\begin{cases} -x - 3y = 0 \\ 3x + y - 3z = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x = -3y \\ z = \frac{1}{3}x + \frac{1}{3}y \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x = -3y \\ z = \frac{1}{3}y - 3\,y \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = -3y \\ z = -\frac{8}{3}y \\ y \in IR \end{cases}$$

نلاحظ أن $E_{\lambda 1} = \left\{ y\left(-3,1,-\frac{8}{3}\right), y \in IR \right\}$ الفضاء الشعاعي الجزئي الذاتي المرافق لـ$\lambda 1$

من أجل $\lambda_2 = 2$ يكون:

$$\begin{cases} 3x = 0 \\ -x = 0 \\ 3x + y = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \\ z \in IR \end{cases}$$

وبالتالي، $E_{\lambda 2} = \{z\,(0,0,1), z \in IR\}$ الفضاء الشعاعي الجزئي الذاتي، و $v_2 = (0,0,1)$ هو شعاع ذاتي مرافق للقيمة الذاتية $\lambda_2 = 2$.

سلسلة تمارين

سلسلة تمارين الفضاء الشعاعي.

التمرين الأول:

هل المجموعات التالية تشكل فضاء شعاعيا جزئيا من E أم لا؟

$E_1 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 ; x+y+z=0\}$, $E = \mathbb{R}^3$

$E_2 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 ; x+y-z=4\}$, $E = \mathbb{R}^3$

$E_3 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 ; 2x^2+y=0\}$, $E = \mathbb{R}^2$

$E_4 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 ; 3x+y>5\}$, $E = \mathbb{R}^2$

التمرين الثاني:

1. ليكن $E=\mathbb{R}^4$ و v_1, v_2, v_3 ثلاث أشعة من **E**. احسب $3v_1 - 2v_2 + 7v_3$

$v_1 = (3,1,-7,4)$ $v_2 = (1,-5,0,-6)$ $v_3 = (-1,1,3,0)$

ماذا تستنتج؟

2. حدد ما إذا كانت الأشعة التالية مستقلة أم مرتبطة خطيا؟

$v_1 = (1,0,0)$ $v_2 = (1,1,0)$ $v_3 = (3,1,-1)$ $E = \mathbb{R}^3$

$v_1 = (1,2,0,0)$ $v_2 = (0,1,2,0)$ $v_3 = (0,0,1,2)$ $E = \mathbb{R}^4$

التمرين الثالث:

في $\mathbb{R}^3$ نعتبر المجموعات الجزئية التالية: E ; F حيث:

$E = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 ; x=y=z\}$

$F = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 ; x+y+z=0\}$

1. أوجد أساس وبعد الفضاءين الشعاعيين الجزئيين E و F.

حل سلسلة الفضاء الشعاعي.

حل التمرين 1:

حتى تشكل المجموعات التالية فضاء شعاعيا جزئيا من E يجب أن يتحقق ما يلي:

1. $0_{E1} \in E$
2. $\forall v_1, v_2 \in E_1 \Rightarrow v_1 + v_2 \in E_1$
3. $\forall v \in E_1, \forall\lambda \in \mathbb{R} \Rightarrow \lambda v \in E_1$

<u>الحالة الأولى:</u>

$E_1 = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3; x+y+z=0\right\}$, $E = \mathbb{R}^3$

1/ $0_{\mathbb{R}^3} \in E_1$ لأن $0+0+0 = 0$ الشرط الأول محقق.

2/ . $\forall v_1, v_2 \in E_1$ هل $v_1 + v_2 \in E_1$

$v_1 = (x_1, y_1, z_1) \in E_1 \Rightarrow x_1 + y_1 + z_1 = 0$ ....(1)

$v_2 = (x_2, y_2, z_2) \in E_1 \Rightarrow x_2 + y_2 + z_2 = 0$ ....(2)

$v_1 + v_2 = (x_1 + x_2, y_1 + y_2, z_1 + z_2) \in E_1$?

بجمع (1) مع (2) طرفا لطرف نجد:

$$(x_1 + x_2) + (y_1 + y_2) + (z_1 + z_2) = 0$$

تحصلنا على نفس شكل المعادلة بمركبات الشعاع $v_1 + v_2$

$\forall v_1, v_2 \in E_1 \Rightarrow v_1 + v_2 \in E_1$ الشرط الثاني محقق

3/ $\forall v \in E_1, \forall\lambda \in \mathbb{R}$ هل $\lambda v \in E_1$?

$V = (x,y,z) \in E_1 \Rightarrow x+y+z = 0$ ....(3)

$\lambda V = (\lambda x, \lambda y, \lambda z) \in E_1$?

بضرب طرفي (3) في λ نجد:

$$\lambda x + \lambda y + \lambda z = 0$$

تحصلنا على نفس شكل المعادلة بمركبات الشعاع λV.

$$\forall v \in E_1, \forall\lambda \in \mathbb{R} \Rightarrow \lambda v \in E_1$$

الشرط الثالث محقق.

ومنه : E_1 هو فضاء شعاعي جزئي من $\mathbb{R}^3$.

الحالة الثانية:

$E_2 = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 ; x + y - z = 4\right\}$, $E = \mathbb{R}^3$

E_2 ليس فضاء شعاعي جزئي من $\mathbb{R}^3$ لأن: الشرط الأول غير محقق لأن:

$0_{\mathbb{R}^3} \notin E_1$ لأن $0 + 0 - 0 \neq 4$

الحالة الثالثة:

$E_3 = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 ; 2x^2 + y = 0\right\}$

E_3 ليس فضاء شعاعي جزئي لأن: الشرط الثاني غير محقق لأن:

$\exists\, v_1 = (1,-2) \in E_3$, $\exists\, v_2 = (2 , -8) \in E_3 : v_1 + v_2 = (3,-10) \notin E_3$ لأن $2(3)^2 - 10 \neq 0$

الحالة الرابعة:

$E_4 = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 ; 3x + y > 5\right\}$

E_4 ليس فضاء شعاعي جزئي من $\mathbb{R}^2$ لأن: الشرط الثالث غير محقق لأن:

$\exists\, v = (2,1) \in E_4$, $\exists \lambda = -1 : \lambda v = (-2, -1) \notin E_4$

لأن $5 > 3(2) -1$.

حل التمرين الثاني:

1. إيجاد مجموع $3v_1 - 2v_2 + 7v_3$:

$3v_1 - 2v_2 + 7v_3 = (0, 0, 0, 0)$.

نستنتج أن الأشعة v_1, v_2, v_3 هي أشعة ليست مستقلة خطيا لأنه:

$$\exists \alpha_1 = 3 , \quad \exists \alpha_2 = -2 , \exists \alpha_3 = 7$$

$$\exists \alpha_1 \neq \alpha_2 \neq \alpha_3 \neq 0 : \alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \alpha_3 v_3 = 0_{\mathbb{R}^4}$$

2. دراسة الاستقلالية الخطية :

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, v_3 = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \alpha_3 v_3 = \vec{0}$$

$$\alpha_1\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}+\alpha_{\ 2}\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}+\alpha_3=\begin{pmatrix}3\\1\\-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow\begin{cases}\alpha_1+\alpha_2+3\alpha_3=0\\ \alpha_2+\alpha_3=0\\ \alpha_3=0\end{cases}\Rightarrow\ \alpha_1=\alpha_2=\ \alpha_3=0.$$

إذن، الأشعة v_1, v_2, v_3 أشعة مستقلة خطيا.

$$v_1=\begin{pmatrix}1\\2\\0\\0\end{pmatrix}\quad ,v_2=\begin{pmatrix}0\\1\\2\\0\end{pmatrix}\quad ,v_3=\begin{pmatrix}0\\0\\1\\2\end{pmatrix}\quad ,$$

$$\alpha_1v_1+\alpha_2v_2+\ \alpha_3v_3\ =0_{\mathbb{R}^3}$$

$$\alpha_1\begin{pmatrix}1\\2\\0\\0\end{pmatrix}+\alpha_{\ 2}\begin{pmatrix}0\\1\\2\\0\end{pmatrix}+\alpha_3=\begin{pmatrix}0\\0\\1\\2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\\0\end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow\begin{cases}\alpha_1=0\\2\alpha_1+\alpha_2=0\\2\alpha_2+\alpha_3=0\\2\alpha_3=0\end{cases}\Rightarrow\qquad \alpha_1=\alpha_2=\ \alpha_3=0.$$

ومنه، الأشعة v_1, v_2, v_3 أشعة مستقلة خطيا.

حل التمرين الثالث:

<u>1. إيجاد أساس لـ **E**:</u>

E = $\left\{(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y},\boldsymbol{z})\in\mathbb{R}^{\boldsymbol{3}};x=y=z\right\}$

E = $\left\{(\boldsymbol{x},x,x)\in\mathbb{R}^{\boldsymbol{3}}\right\}$

= $\{x\ (1,1,1)\ /\ \ x\in\mathbb{R}\}$

= $\{\alpha\ v\ \ /\ \ \alpha\in\mathbb{R}\}$

E مولد من شعاع وحيد يختلف عن $\vec{0}$ ، فهو مستقل خطيا، وعليه فهو يشكل أساسا لـ **E**.

E =$\langle(1,1,1)\rangle$

$dim_{\mathbb{R}}E=1$

<u>1. إيجاد أساس لـ **F**:</u>

$$F = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3; x + y + z = 0\right\}$$

$$F = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3; x = -y - z\right\}$$

$$= \left\{(-y - z,\ y,\ z) \in \mathbb{R}^3\right\}$$

$$= \left\{(-y,\ y, 0) + (-z, 0, z) \in \mathbb{R}^3\right\}$$

$$= \{y\ (-1,1,0) + z(-1,0,1) \ /\ \ y, z \in \mathbb{R}\ \}$$

$$= \alpha_1\ v_1 + \alpha_2\ v_2 \quad / \quad \alpha_1\ ,\ \alpha_2 \in \mathbb{R}$$

لندرس الاستقلال الخطي للجملة المولدة $\left\{ \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \ ,\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$

$$\alpha_1 \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \alpha_2 \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} \alpha_1 - \alpha_2 = 0 \\ \alpha_1 = 0 \\ \alpha_2 = 0 \end{cases} \Rightarrow \ \alpha_1 = \ \alpha_2 = 0$$

ومنه، الأشعة v_1, v_2 مستقلة خطيا، فهي تشكل أساسا لـ F.

$$F = \langle \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \rangle$$

$$dim_{\mathbb{R}} F = 2$$

سلسلة تمارين التطبيقات الخطية.

التمرين الأول:

$$f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$$

$$(x,y,z) \mapsto (2x+3y,\ x-2y+z)$$

- بيّن أن هذا التطبيق هو تطبيق خطي.
- أوجد أساس وبعد $kerf$
- أوجد أساس وبعد Imf
- هل التطبيق تقابلي ولماذا؟

التمرين الثاني:

ليكن التطبيق $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$

$$(x,y) \mapsto (x+y,\ x-y)$$

- بيّن أن هذا التطبيق هو تطبيق خطي.
- أوجد $kerf$
- استنتج Imf
- هل التطبيق تقابلي ولماذا؟

التمرين الثالث:

ليكن لدينا:

$f_1(x,y,z) = x-y$, $f_2(x,y,z) = y-z$

$E = \{(x,y,z) \in IR^3 : f_1 = 0 \wedge f_2 = 0\}$

- بيّن أن E هي فضاء شعاعي جزئي من الفضاء IR^3، ثم أوجد أساس وبعد E.

ليكن $f(x,y,z) = (f_1, f_2, z)$

- بيّن أن هذا التطبيق هو تطبيق خطي.
- أوجد النواة وبُعدها.
- استنتج صورة هذا التطبيق مبيّنا ما إذا كان هذا التطبيق هو تطبيق تقابلي؟

حل سلسلة التطبيقات الخطية.

حل التمرين الأول:

$$f: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$$

$$(x,y,z) \mapsto (2x+3y,\ x-2y+z)$$

- <u>نبيّن أن هذا التطبيق تطبيق خطي:</u>

$$\forall (x,y,z),(x',y',z') \in \mathbb{R}^3, \forall \alpha,\beta \in \mathbb{R}: f\big(\alpha(x,y,z)+\beta(x',y',z')\big)$$
$$= \alpha f(x,y,z) + \beta f(x',y',z')$$

$$f\big(\alpha(x,y,z)+\beta(x',y',z')\big) = f(\alpha x+\beta x', \alpha y+\beta y', \alpha z+\beta z')$$
$$= (2\alpha x+2\beta x'+3\alpha y+3\beta y', \alpha x+\beta x'-2\alpha y-2\beta y'+\alpha z+\beta z')$$
$$= (2\alpha x+3\alpha y, \alpha x-2\alpha y+\alpha z)+(2\beta x'+3\beta y', \beta x'-2\beta y'+\beta z')$$
$$= \alpha(2x+3y, x-2y+z)+\beta(2x'+3y', x'-2y'+z')$$
$$= \alpha f(x,y,z)+\beta f(x',y',z')$$

ومنه التطبيق هو تطبيق خطي.

- <u>إيجاد نواة هذا التطبيق:</u>

$$\ker f = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : f(x,y,z) = (0,0)\}$$

$$f(x,y,z) = (0,0) \Leftrightarrow (2x+3y, x-2y+z) = (0,0) \Leftrightarrow \begin{cases} 2x+3y=0 \\ x-2y+z=0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = -\frac{3}{2}y \\ -\frac{3}{2}y-2y+z=0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = -\frac{3}{2}y \\ z = -\frac{7}{2}y \end{cases}$$

$$\forall (x,y,z) \in \ker f: (x,y,z) = \left(-\frac{3}{2}y, y, -\frac{7}{2}y\right) = y\left(-\frac{3}{2}, 1, -\frac{7}{2}\right)$$

$$\forall (x,y,z) \in \ker f;\ \exists \alpha \in \mathbb{R}:\ (x,y,z) = \alpha\left(-\frac{3}{2}, 1, -\frac{7}{2}\right)$$

أي أن الشعاع $\left(-\frac{3}{2}, 1, -\frac{7}{2}\right)$ مولد للفضاء الشعاعي الجزئي $\ker f$، أي:

$$kerf = \left[\left(-\frac{3}{2}, 1, -\frac{7}{2}\right)\right] \Rightarrow dim\,(kerf) = 1$$

بما أن $kerf \neq \{(0,0,0)\}$ فإن التطبيق ليس متباين.

- <u>إيجاد صورة هذا التطبيق:</u>

$$dimE = dim(kerf)+dim\,(Imf) \Rightarrow dim\,(Imf) = dimE - dim(kerf) \Rightarrow$$

$$dim\,(Imf) = dim\,\text{-}\mathbb{R}^3\text{-}\,dim\,(kerf) = 3\text{-}1 = 2 = dim\,\mathbb{R}^2.$$

$$Dim\,(Imf) = dim\,\mathbb{R}^2 \Leftrightarrow \mathrm{Imf} = \mathbb{R}^2.$$

أي أن التطبيق غامر.

نتيجة: التطبيق غامر وليس متباين، فهو غير تقابلي.

حل التمرين الثاني:

$$(x,y) \mapsto (x+y,\; x-y)$$

- <u>نبيّن أن هذا التطبيق تطبيق خطي:</u>

$$\forall (x,y),(x',y') \in \mathbb{R}^2, \forall \alpha,\beta \in \mathbb{R}: f\big(\alpha(x,y)+\beta(x',y')\big) = \alpha f(x,y)+\beta f(x',y')$$

$$f\big(\alpha(x,y)+\beta(x',y')\big) = f(\alpha x+\beta x', \alpha y+\beta y')$$

$$=(\alpha x+\beta x'+\alpha y+\beta y',\; \alpha x+\beta x'-\alpha y+\beta y')$$

$$=(\alpha x+\alpha y,\; \alpha x-\alpha y)+(\beta x'+\beta y',\; \beta x'-\beta y')$$

$$= \alpha(x+y, x-y)+\beta(x'+y', x'-y') = \alpha f(x,y)+\beta f(x'+y')$$

ومنه التطبيق هو تطبيق خطي.

- <u>إيجاد نواة هذا التطبيق:</u>

$$kerf = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : f(x,y) = (0,0)\right\}$$

$$f(x,y) = (0,0) \Leftrightarrow (x+y, x-y) = (0,0) \Leftrightarrow \begin{cases} x+y=0 \\ x-y=0 \end{cases} \Leftrightarrow x = y = 0$$

ومنه نجد: $kerf = \{(0,0)\}$

- <u>استنتاج صورة التطبيق الخطي:</u>

$$dim\,\mathbb{R}^2 = dim\,(kerf) + dim\,(Imf) \Leftrightarrow \dim(Imf) = \dim\mathbb{R}^2 \Leftrightarrow Imf = \mathbb{R}^2$$

- <u>التطبيق f هو تطبيق تقابلي</u>، وهذا لأن:

$kerf = \{(0,0)\} \Leftrightarrow$ متباين f

$$Imf = \mathbb{R}^2 \Leftrightarrow \text{غامر } f$$

حل التمرين الثالث:

- إثبات أن E هي فضاء شعاعي جزئي:

$$(0,0,0) \in E; (0-0=0 \wedge 0-0=0)$$

$$\forall (x,y,z),(x',y',z') \in E;\ \forall \alpha,\beta \in IR: \alpha(x,y,z)+\beta(x',y',z') \in E\ ?$$

$$\Leftrightarrow (\alpha x+\beta x', \alpha y+\beta y', \alpha z+\beta z') \in E\ ? \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha x+\beta x'-\alpha y-\beta y'=0 \\ \alpha y+\beta y'-\alpha z-\beta z'=0 \end{cases}\ ?$$

$$(x,y,z) \in E \Leftrightarrow \begin{cases} x-y=0 \\ y-z=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha x-\alpha y=0 \ldots\ldots 1 \\ \alpha y-\alpha z=0 \ldots\ldots 2 \end{cases} \qquad \forall \alpha \in IR$$

$$(x',y',z') \in E \Leftrightarrow \begin{cases} x'-y'=0 \\ y'-z'=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \beta x'-\beta y'=0 \ldots\ldots 3 \\ \beta y'-\beta z'=0 \ldots\ldots 4 \end{cases} \quad \forall \beta \in IR$$

بجمع 1 مع 3 و 2 مع 4، نجد المطلوب، ومن ثم نستنتج أن E هي فضاء شعاعي جزئي من الفضاء IR^3 على الحقل IR.

- إيجاد أساس وبعد الفضاء الجزئي E:

$$(x,y,z) \in E \Leftrightarrow \begin{cases} x-y=0 \\ y-z=0 \end{cases} (x,y,z) \in E \Leftrightarrow \begin{cases} x=y \\ y=z \end{cases}$$

$$(x,y,z) \in E \Leftrightarrow (x,y,z)=(y,y,y)=\ y\,(1,1,1)$$

أي أن: $E = [\{(1,1,1)\}]$

بمعنى أن E مولد بالشعاع *(1,1,1)*وبما أن الشعاع وحيد فهو يشكل أساسا، ومنه نجد أن:

$$Dim\ E = 1$$

- إثبات أن f تطبيق خطي:

$$\forall (x,y,z),((x',y',z') \in IR^3, \forall \alpha,\beta \in IR: f\big(\alpha(x,y,z)+\beta(x',y',z')\big)$$
$$= \alpha f(x,y,z)+\beta f(x',y',z')\ ?$$

$$f\big(\alpha(x,y,z)+\beta(x',y',z')\big) = f(\alpha x+\beta x', \alpha y+\beta y', \alpha z+\beta z')$$

$$= (\ \alpha x+\beta x'-\ \alpha y\text{-}\beta y', \alpha y\text{+}\beta y'-\alpha z-\beta z', \alpha z+\ \beta z')$$

$$= (\ \alpha x-\ \alpha y,\ \alpha y-\ \alpha z,\ \alpha z)+(\beta x'\text{-}\beta y',\ \beta y'-\beta z',+\beta z')$$

$$= \alpha(\ x-\ y,\ y-\ z,\ z)+\ \beta(x'\text{-}y',\ y'-z',z') =\ \alpha f(x,y,z)+\beta f(x',y',z')$$

أي أن f تطبيق خطي.

- إيجاد النواة:

$$kerf = \{(x,y,z) \in IR^3 : f(x,y,z) = (0,0,0)\}$$

$$f(x,y,z) = (0,0,0) \Leftrightarrow \begin{cases} x - y = 0 \\ y - z = 0 \\ z = 0 \end{cases} \Leftrightarrow x = y = z = 0$$

$$kerf = \{(0,0,0)\}$$

ومنه، نستنتج مباشرة أن:

$$dimkerf = 0$$

أي أن التطبيق هو تطبيق متباين.

وبما أن مجموعة البدء هي نفسها مجموعة الوصول، فإن التطبيق هو غامر أي تقابلي، ومنه فإن الصورة هي نفسها مجموعة الوصول، أي:

$$Imf = IR^3$$

سلسلة تمارين المصفوفات والمحددات.

التمرين الأول: لتكن المصفوفات التالية:

$$A=\begin{pmatrix}1 & 1 & 2\\ 0 & -1 & 1\\ 1 & 2 & 1\end{pmatrix}, B=\begin{pmatrix}4 & 3\\ 1 & -1\\ -2 & 0\end{pmatrix},\ C=\begin{pmatrix}2 & -2 & 1\\ 1 & -1 & 3\end{pmatrix},\ D=\begin{pmatrix}4 & -1 & 1\\ 1 & 2 & -4\\ -2 & 1 & 3\end{pmatrix}$$

1. احسب مجموع المصفوفات الممكنة.
2. احسب -2B, -D, 3C و 4A ثم احسب المجموع الممكن.
3. احسب كل الجداءات الممكنة.
4. احسب منقول المصفوفات وأثرها إن أمكن.

التمرين الثاني: لتكن المصفوفتان:

$$A=\begin{pmatrix}2 & 1 & -1\\ 0 & 2 & 1\\ 5 & 2 & -3\end{pmatrix},\quad B=\begin{pmatrix}8 & -1 & -3\\ -5 & 1 & 2\\ 10 & -1 & -4\end{pmatrix}$$

احسب الجداء A.B ثم استنتج أن المصفوفة A قابلة للقلب وأوجد مقلوبها.

التمرين الثالث: لتكن المصفوفة المعرّفة بالعلاقة:

$$A=\begin{pmatrix}0 & 2 & 2\\ 2 & 0 & 2\\ 2 & 2 & 0\end{pmatrix}$$

1. احسب المصفوفة A^2.
2. أوجد الأعداد الحقيقية α,β,λ حيث: $\lambda A^2+\alpha A+\beta I=0$ حيث I هي مصفوفة الوحدة و 0 هو المصفوفة الصفرية.
3. من العلاقة السابقة بيّن أن A قابلة للقلب وأوجد مقلوبها.

التمرين الرابع: لتكن المصفوفة المعرفة بـ:

$$A=\begin{pmatrix}2 & 1 & -1\\ 0 & 2 & 1\\ 5 & 2 & -3\end{pmatrix}$$

1. تحقق من وجود مقلوب المصفوفة A باستعمال الأعمدة (الأسطر) كأشعة في الفضاء الشعاعي $\mathbb{R}^3$
2. أوجد مقلوبها باستعمال التحويلات الأولية (المصفوفة الموسعة).

التمرين الخامس: احسب محدد المصفوفات التالية:

$$A=\begin{pmatrix}2 & -1\\ 1 & 2\end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix}1 & -2 & 2\\ 2 & 1 & 3\\ 1 & -1 & 4\end{pmatrix},\ C=\begin{pmatrix}1 & 2 & 4\\ 0 & -1 & 3\\ 0 & 0 & 2\end{pmatrix},\ D=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 1 & 2 & 0\\ 22 & 15 & 3\end{pmatrix}$$

$$,E=\begin{pmatrix}3 & 0 & 0\\ 0 & 2 & 0\\ 0 & 0 & 9\end{pmatrix}$$

التمرين السادس: احسب محدد المصفوفة التالية بثلاث طرق مختلفة:

$$B=\begin{pmatrix}8 & -1 & -3\\ -5 & 1 & 2\\ 10 & -1 & -4\end{pmatrix}$$

التمرين السابع: من نتيجة التمرين السابق، استنتج قيمة محددات المصفوفات التالية:

$$A=\begin{pmatrix}-1 & 8 & -3\\ 1 & -5 & 2\\ -1 & 10 & -4\end{pmatrix},\ C=\begin{pmatrix}8 & -1 & -3\\ 10 & -1 & -4\\ -5 & 1 & 2\end{pmatrix},\ D=\begin{pmatrix}16 & -4 & -6\\ -5 & 2 & 2\\ 10 & -2 & -4\end{pmatrix}$$

التمرين الثامن: ليكن الفضاءين الشعاعيين $\mathbb{R}^2$، $\mathbb{R}^3$ على نفس الحقل $\mathbb{R}$، ولنعرف التطبيق الخطي من $\mathbb{R}^2$ نحو $\mathbb{R}^3$ بالعلاقة التالية: $f(x,y)=(x+2y,2x-y,3x-2y)$

باستعمال الأساس القانوني في $\mathbb{R}^2$ و $\mathbb{R}^3$، أوجد المصفوفة المرافقة للتطبيق الخطي f.

التمرين التاسع: لتكن المصفوفة المعرفة بـ:

$$A=\begin{pmatrix}3 & -1 & 2\\ 1 & 2 & 3\end{pmatrix}$$

باستعمال الأساس القانوني في $\mathbb{R}^2$ و $\mathbb{R}^3$، أوجد التطبيق الخطي المرافق للمصفوفة A.

التمرين العاشر:

$f(x,y) = (-x,\ 2x+y,\ 3x+y)$

$g(x,y,z) = (x-y,\ x+z,\ y-2z)$

1. أوجد المصفوفة المرافقة للتطبيق الخطي f وفق الأساس القانوني لمجموعة البدء ومجموعة الوصول.
2. أوجد المصفوفة المرافقة للتطبيق الخطي g وفق الأساس لمجموعة البدء والاساس القانوني لمجموعة الوصول.
3. أوجد المصفوفة المرافقة للتطبيق الخطي $g°f$.

حل سلسلة المصفوفات والمحددات.

حل التمرين الأول:

1. تذكير: حتى يكون الجمع ممكنا، يجب أن تكون المصفوفتان من نفس النوع، أي لهما نفس عدد الأسطر ونفس عدد الأعمدة $A,B \in M_{n,m}(K)$

وبالتالي/ المجموع الوحيد الممكن هو $A+D$.

$$A+D=\begin{pmatrix}1&1&2\\0&-1&1\\1&2&1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}4&-1&1\\1&2&-4\\-2&1&3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1+4&1-1&2+1\\0+1&-1+2&1-4\\1-2&2+1&1+3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}5&0&3\\1&1&-3\\-1&3&4\end{pmatrix}$$

2. تذكير: لضرب مقدار سلمي في مصفوفة، يكفي ضربه في كل عدد من المصفوفة:

$$A=\begin{pmatrix}1&1&2\\0&-1&1\\1&2&1\end{pmatrix}\Leftrightarrow 4A=\begin{pmatrix}4&4&8\\0&-4&4\\4&8&4\end{pmatrix},B=\begin{pmatrix}4&3\\1&-1\\-2&0\end{pmatrix}\Leftrightarrow -2B=\begin{pmatrix}-8&-6\\-2&2\\4&0\end{pmatrix}$$

$$C=\begin{pmatrix}2&-2&1\\1&-1&3\end{pmatrix}\Leftrightarrow 3C=\begin{pmatrix}6&-6&3\\3&-3&9\end{pmatrix},$$

$$D=\begin{pmatrix}4&-1&1\\1&2&-4\\-2&1&3\end{pmatrix}\Leftrightarrow -D=\begin{pmatrix}-4&1&-1\\-1&-2&4\\2&-1&-3\end{pmatrix}$$

3. حساب الجداءات الممكنة:

تذكير: حتى يكون الجداء ممكنا، يجب أن يتحقق الشرط التالي: عدد أعمدة المصفوفة الأولى يجب أن يساوي عدد أسطر المصفوفة الثانية.

وعليه، فإن الجداءات الممكنة هي: *A.B, A.D, !b.C, C.A, C. B, C.D, D.A, D.B*

$$A.B=\begin{pmatrix}1&1&2\\0&-1&1\\1&2&1\end{pmatrix}.\begin{pmatrix}4&3\\1&-1\\-2&0\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}1\times4+1\times1+2(-2)&1\times3+1(-1)+2\times0\\0\times4+(-1)\times1+1(-2)&0\times3+(-1)(-1)+1\times0\\1\times4+2\times1+1(-2)&1\times3+2(-1)+1\times0\end{pmatrix}$$

$$A.B=\begin{pmatrix}1&2\\-3&1\\4&1\end{pmatrix}$$

$$A.D=\begin{pmatrix}1&1&2\\0&-1&1\\1&2&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}4&-1&1\\1&2&-4\\-2&1&3\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}1\times4+1\times1+2(-2)&1(-1)+1\times2+2\times1&1\times1+1(-4)+2\times3\\0\times4+(-1)\times1+1(-2)&0(-1)+(-1)\times2+1\times1)&0\times1+(-1)(-4)+1\times3\\1\times4+2\times1+1(-2)&1(-1)+2\times2+1\times1&1\times1+2(-4)+1\times3\end{pmatrix}$$

$$A.D = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 3 \\ -3 & -1 & 7 \\ 4 & 4 & -4 \end{pmatrix}$$

$$B.C = \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 1 & -1 \\ -2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & -2 & 1 \\ 1 & -1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 11 & -11 & 13 \\ 1 & -1 & -2 \\ -4 & 4 & -2 \end{pmatrix}$$

$$C.A = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 1 \\ 1 & -1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 6 & 3 \\ 4 & 8 & 4 \end{pmatrix}$$

$$C.B = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 1 \\ 1 & -1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 1 & -1 \\ -2 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 8 \\ -3 & 4 \end{pmatrix}$$

$$C.D = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 1 \\ 1 & -1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & -4 \\ -2 & 1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & -5 & 13 \\ -3 & 0 & 14 \end{pmatrix}$$

$$D.A = \begin{pmatrix} 4 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & -4 \\ -2 & 1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 7 & 8 \\ -3 & -9 & 0 \\ 1 & 3 & 0 \end{pmatrix}$$

$$D.B = \begin{pmatrix} 4 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & -4 \\ -2 & 1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 1 & -1 \\ -2 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 13 & 13 \\ 14 & 1 \\ -13 & -0 \end{pmatrix}$$

4. حساب منقول المصفوفات:

<u>تذكير:</u> منقول المصفوفة هو تحويل العمود الأول إلى السطر الأول والعمود الثاني إلى السطر الثاني وهكذا.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \Leftrightarrow A^T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 1 & -1 \\ -2 & 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow B^T = \begin{pmatrix} 4 & 1 & -2 \\ 3 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$C = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 1 \\ 1 & -1 & 3 \end{pmatrix} \Leftrightarrow C^T = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -2 & -1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix},$$

$$D = \begin{pmatrix} 4 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & -4 \\ -2 & 1 & 3 \end{pmatrix} \Leftrightarrow D^T = \begin{pmatrix} 4 & 1 & -2 \\ -1 & 2 & 1 \\ 1 & -4 & 3 \end{pmatrix}$$

5. حساب أثر مصفوفة:

<u>تذكير</u>: أثر مصفوفة يكون في المصفوفات المربعة، وهو عبارة عن مجموع عناصر القطر الرئيسي.

$Tr(A) = 1+(-1)+1=1$, $Tr(D) = 4+2+3 = 9$

لأن عناصر القطر في المصفوفة A هي ، 1,1- ,1 أما عناصر القطر في المصفوفة D فهي 4,2,3.

حل التمرين الثاني:

حساب الجداء A.B:

$$A.B=\begin{pmatrix}2&1&-1\\0&2&1\\5&2&-3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}8&-1&-3\\-5&1&2\\10&-1&-4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}16-5-10&-2+1+1&-6+2+4\\0-10+10&0+2-1&0+4-4\\40-10-30&-5+2+3&-15+4-12\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$$

لنحسب الآن الجداء BA:

$$B.A=\begin{pmatrix}8&-1&-3\\-5&1&2\\10&-1&-4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2&1&-1\\0&2&1\\5&2&-3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}16+0-15&8-2-6&-8-1+9\\-10+0+10&-5+2+4&5+1-6\\20+0-20&10-2-8&-10-1+12\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$$

ومنه، نلاحظ أن: $A.B = B.A = I_3$

وهذا يؤكد أن المصفوفة A قابلة للقلب ولدينا: $A^{-1} = B$.

حل التمرين الثالث:

حساب A^2:

$$A=\begin{pmatrix}0&2&2\\2&0&2\\2&2&0\end{pmatrix}\Leftrightarrow A^2=A.A=\begin{pmatrix}0&2&2\\2&0&2\\2&2&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&2&2\\2&0&2\\2&2&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}8&4&4\\4&8&4\\4&4&8\end{pmatrix}$$

إيجاد الأعداد الحقيقية α,β,λ حيث: $\lambda A^2+\alpha A+\beta I=0$:

$$\lambda A^2+\alpha A+\beta I=0\Leftrightarrow \lambda\begin{pmatrix}8&4&4\\4&8&4\\4&4&8\end{pmatrix}+\alpha\begin{pmatrix}0&2&2\\2&0&2\\2&2&0\end{pmatrix}+\beta\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow\begin{pmatrix}8\lambda+\beta&4\lambda+2\alpha&4\lambda+2\alpha\\4\lambda+2\alpha&8\lambda+\beta&4\lambda+2\alpha\\4\lambda+2\alpha&4\lambda+2\alpha&8\lambda+\beta\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}8\lambda+\beta=0\\4\lambda+2\alpha=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}8\lambda+\beta=0\\2\lambda+\alpha=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\beta=-8\lambda\\\alpha=-2\lambda\end{cases}$$

ومنه، بأخذ $\lambda=1$ نجد: $\beta=-8$ و $\alpha=-2$ ، وفي النهاية نجد أن:

$$A^2 - 2A - 8I = 0.$$

تبيان أن المصفوفة A قابلة للقلب:

تذكير: نقول عن المصفوفة Aأنها قابلة للقلب إذا وجدت مصفوفة B من نفس درجة المصفوفة A حث تحقق العلاقة التالية: $A.B = B.A = I$.

من العلاقة السابقة لدينا:

$$A^2 - 2A - 8I = 0 \Leftrightarrow A^2 - 2A = 8I \Leftrightarrow A(A - 2I) = 8I$$

$$\Leftrightarrow A\frac{1}{8}(A - 2I) = I \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots . (1)$$

$$A^2 - 2A - 8I = 0 \Leftrightarrow A^2 - 2A = 8I \Leftrightarrow A(A - 2I) = 8I$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{8}(A - 2I)A = I \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots . (2)$$

من العلاقة 1 و 2 نستنتج أنه توجد مصفوفة $B = \frac{1}{8}(A - 2)$ وتحقق العلاقة $A.B = B.A = I$

أي أن A قابلة للقلب ولدينا:

$$A^{-1} = \frac{1}{8}\left(\begin{pmatrix} 0 & 2 & 2 \\ 2 & 0 & 2 \\ 2 & 2 & 0 \end{pmatrix} - 2\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\right) = \frac{1}{8}\begin{pmatrix} -2 & 2 & 2 \\ 2 & -2 & 2 \\ 2 & 2 & -2 \end{pmatrix}$$

$$A^{-1} = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

حل التمرين الرابع:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 5 & 2 & -3 \end{pmatrix}$$

التحقق من أن المصفوفة A قابلة للقلب:

تذكير: تكون المصفوفة المربعة A قابلة للقلب إذا وفقط إذا كانت الأعمدة أو الأسطر مستقلة خطيا.

لنأخذ الأشعة التالية $(-1,1,-3)$; $(1,2,2)$; $(2,0,5)$ولتكن $\alpha, \beta, \lambda \in \mathbb{R}$ حيث:

$$\alpha(2,0,5) + \beta(1,2,2) + \lambda(-1,1,-3) = (0,0,0) \Leftrightarrow (2\alpha + \beta - \lambda, 2\beta + \lambda, 5\alpha + 2\beta - 3\lambda) =$$

$$(0,0,0) \Leftrightarrow \begin{cases} 2\alpha + \beta - \lambda = 0 \\ 2\beta + \lambda = 0 \\ 5\alpha + 2\beta - 3\lambda = 0 \end{cases}$$

من المعادلة الثانية نجد أن $\lambda = -2\beta$ نعوضها في المعادلة الاولى نجد أن: $\alpha = -\frac{3}{2}\beta$ نعوّض القيمتين في المعادلة الاخيرة نجد:

$$5\beta = 0 \ \Rightarrow \alpha = \beta = \lambda = 0$$

أي أن الأشعة مستقلة خطيا، وبالتالي المصفوفة A قابلة للقلب.

نحسب الآن مقلوبها:

لهذا سنأخذ المصفوفة الموسعة $(A|I)$ ونحولها إلى مصفوفة $(I|A^{-1})$

$$(A|I) = \left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 5 & 2 & -3 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

نقسم السطر الأول على العدد 2، نحصل على:

$$(A|I) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 5 & 2 & -3 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

نضرب السطر الأول في العدد 5- ونضيفه للسطر الثالث، نجد:

$$(A|I) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 5 & 2 & -3 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & -\frac{5}{2} & 0 & 1 \end{array}\right)$$

نقسم السطر الثاني على العدد 2، نحصل على:

$$(A|I) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & -\frac{5}{2} & 0 & 1 \end{array}\right)$$

نضرب السطر الثاني في العدد $\frac{1}{2}$ ونضيفه للسطر الثالث ثم نضرب السطر الثاني في العدد $-\frac{1}{2}$ ونضيفه للسطر الأول، نجد:

$$(\boldsymbol{A}|\boldsymbol{I}) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} \mathbf{1} & \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}} & -\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}} & \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{1} & \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}} & \mathbf{0} & \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & -\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}} & -\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}} & -\frac{\mathbf{5}}{\mathbf{2}} & \mathbf{0} & \mathbf{1} \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} \mathbf{1} & \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}} & -\frac{\mathbf{3}}{\mathbf{4}} & \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}} & -\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{4}} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{1} & \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}} & \mathbf{0} & \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & -\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{4}} & -\frac{\mathbf{5}}{\mathbf{2}} & \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{4}} & \mathbf{1} \end{array}\right)$$

نضرب السطر الثالث في العدد 4- ، نحصل على:

$$(A|I) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -\frac{3}{4} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{4} & 0 \\ 0 & 1 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 10 & -1 & -4 \end{array}\right)$$

نضرب السطر الثالث في العدد $-\frac{1}{2}$، ونضيفه للسطر الثاني وفي نفس الوقت نضرب السطر الثالث في العدد $\frac{3}{4}$ ونضيفه للسطر الأول، فنحصل على المصفوفة الموسعة التالية:

$$(A|I) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 8 & -1 & -3 \\ 0 & 1 & 0 & -5 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 10 & -1 & -4 \end{array}\right)$$

وهي من الشكل $(I|A^{-1})$ ، ومنه نستنتج أن:

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 8 & -1 & -3 \\ -5 & 1 & 2 \\ 10 & -1 & -4 \end{pmatrix}$$

حل التمرين الخامس:

حساب محدد المصفوفات:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \Leftrightarrow det\ (A) = |A| = 2 \times 2 - (-1) \times 1 = 5$$

$$B = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 \\ 2 & 1 & 3 \\ 1 & -1 & -4 \end{pmatrix}$$

نختار أحد الأسطر أو أحد الأعمدة وليكن العمود الأول مثلا. نجد:

$$\det(B) = \sum_{i=1}^{3} (-1)^{\,i+1} a_{i1} |A_{i1}|$$

حيث أن المصفوفة $A_{1\,1}$ هي المصفوفة التي نحصل عليها بحذف السطر الأول والعمود الأول، وأما $A_{2\,1}$هي المصفوفة التي نحصل عليها بحذف السطر الثاني والعمود الأول، و $A_{3\,1}$ هي المصفوفة التي نحصل عليها بحذف السطر الثالث والعمود الأول.

$$det(B) = 1 \times \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ -1 & 4 \end{vmatrix} - 2\begin{vmatrix} -2 & 2 \\ -1 & 4 \end{vmatrix} + 1\begin{vmatrix} -2 & 2 \\ 1 & 3 \end{vmatrix}$$
$$= (4+3) - 2(-8+2) + (-6-2)$$

$$= 7 + 12 - 8 = 11$$

أما باقي المصفوفات فهي عبارة عن مصفوفات مثلثية علوية أو سفلية أو قطرية، وبالتالي فإن محددها يساوي جداء عناصر القطر الرئيسي، أي:

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 0 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \Rightarrow\not\Leftrightarrow \det(C) = 1(-1)2 = -2$$

$$D= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 22 & 15 & 3 \end{pmatrix} \Rightarrow \det(D) = 1 \times 2 \times 3 = 6.$$

$$E = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 9 \end{pmatrix} \Rightarrow \det(E) = 3 \times 2 \times 9 = 54.$$

حل التمرين السادس:

حساب المحدد بثلاث طرق مختلفة:

$$B = \begin{pmatrix} 8 & -1 & -3 \\ -5 & 1 & 2 \\ 10 & -1 & -4 \end{pmatrix}$$

<u>الطريقة الأولى</u>: نختار العمود الثاني:

$$det(B) = |B| = \sum_{i=1}^{3} (-1)^{\,i+2} a_{i2}|A_{i2}| = -a_{1\,2}|A_{1\,2}| + a_{2\,2}|A_{2\,2}| - a_{3\,2}|A_{3\,2}|$$
$$= \begin{vmatrix} -5 & 2 \\ 10 & -4 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 8 & -3 \\ 10 & -4 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 8 & -3 \\ -5 & 2 \end{vmatrix} = 0 - 2 + 1 = -1$$

<u>الطريقة الثانية</u>: نضيف عمودين للمصفوفة B الأول والثاني:

$$\begin{pmatrix} 8 & -1 & -3 \\ -5 & 1 & 2 \\ 10 & -1 & -4 \end{pmatrix} \begin{matrix} 8 & -1 \\ -5 & 1 \\ 10 & -1 \end{matrix}$$

نضرب العناصر المتواجدة على نفس اتجاه السهم في بعضها، ثم نضرب تلك المشار اليها بسهم أحمر في العدد 1، أما تلك المشار إليها بسهم أزرق نضربها في العدد 1- ، ثم نجمع الكل، فنحصل على قيم المحدد.

$$\det(B) = |B| = \big(8 \times 1(-4) + (-1)2 \times 10 + (-3)(-5)(-1)\big)$$

$$+(-10\times 1(-1)—12\times 8—4(-5)(-1))$$
$$= -32-20-15+30+16+20 = -1.$$

الطريقة الثالثة: تعتمد هذه الطريقة على أن نجعل في أحد الأسطر أو الأعمدة أكبر عدد ممكن من الأصفار، وهذا بإضافة مزج خطي إلى أحد الأعمدة (الأسطر) لبقية الأعمدة (الأسطر).

$$B = \begin{pmatrix} 8 & -1 & -3 \\ -5 & 1 & 2 \\ 10 & -1 & -4 \end{pmatrix}$$

من الواضح أنه إذا أضفنا السطر الثاني للسطر الأول، وفي نفس الوقت نضيف السطر الثاني للسطر الثالث، نحصل على المصفوفة المكافئة للمصفوفة B، وزيادة على ذلك يكون لها نفس محدد المصفوفة B.

$$B = \begin{pmatrix} 8 & -1 & -3 \\ -5 & 1 & 2 \\ 10 & -1 & -4 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 3 & 0 & -1 \\ -5 & 1 & 2 \\ 5 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

من المنطقي أن نختار العمود الثاني لأنه يحتوي على أكبر عدد من الأصفار، فنجد بسهولة:

$$det(B) = |B| = \sum_{i=1}^{3}(-1)^{\,i+2}a_{i2}|A_{i2}| = \begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 5 & -2 \end{vmatrix} = -6+5 = -1$$

ملاحظة: هذه الطريقة تكون ناجعة أكثر حين يكون المحدد من درجة أعلى من 3.

حل التمرين السابع:

من أن المصفوفة A هي المصفوفة الناتجة من المصفوفة Bوذلك بتبديل العمود الأول مع العمود الثاني، وبالتالي فإن قيمة محدد المصفوفة A هي نفسها قيمة محدد المصفوفة B مضروب ف العدد 1-.

Det (A) = - det (B) = 1

من أن المصفوفة C هي المصفوفة الناتجة من المصفوفة B وذلك بتبديل السطر الثاني مع السطر الثالث، وبالتالي فإن قيمة محدد المصفوفة C هي نفسها قيمة محدد المصفوفة C هي نفسها قيمة محدد المصفوفة B مضروب في العدد 1-.

Det (C) = - det (B) = 1

أما المصفوفة D فهي ناتجة من المصفوفة B، لكن من الواضح أن السطر الأول مضروب في العدد 2 لهذا فإن:

$$|D| = \begin{vmatrix} 16 & -4 & -6 \\ -5 & 2 & 2 \\ 10 & -2 & -4 \end{vmatrix} = 2 \begin{vmatrix} 8 & -1 & -3 \\ -5 & 1 & 2 \\ 10 & -1 & -4 \end{vmatrix} = 2\ |B| = -2$$

حل التمرين الثامن:

الأساس القانوني في $\mathbb{R}^2$ هو $\{(1,0),(0,1)\}$ والأساس القانوني في $\mathbb{R}^3$ هو$\{(1,0,0),(0,1,0),(0,0,1)\}$ ولدينا:

f (x,y)= (x+2y, 2x - y, 3x - 2y)

$$\begin{cases} f(1,0) = (1,2,3) = 1(1,0,0) + 2(0,1,0) + 3(0,0,1) \\ f(0,1) = (2,-1,-2) = 2(1,0,0) + (-1)(0,1,0) + (-2)1(0,0,1) \end{cases}$$

وبالتالي المصفوفة المرافقة لهذا التطبيق الخطي وفق الأساس القانوني في $\mathbb{R}^2$ والأساس القانوني $\mathbb{R}^3$

معرفة بالشكل التالي: $A\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -1 \\ 3 & -2 \end{pmatrix} = \in M_{2,3}(\mathbb{R})$

حل التمرين التاسع:

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

من الواضح من خلال المصفوفة أن التطبيق معرّف من $\mathbb{R}^3$ نحو $\mathbb{R}^2$ ، وهذا لأن عدد أعمدة المصفوفة A يساوي بعد مجموعة البدء، أما عدد الأسطر فهو بعد مجموع الوصول، ومنه فإن:

$f: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$

$(x,y,z) \mapsto f(x,y,z)$

لدينا من المصفوفة A:

$$\begin{cases} f(1,0,0) = 3(1,0) + 1(0,1) = (3,1) \\ f(0,1,0) = -1(1,0) + 2(0,1) = (-1,2) \\ f(0,0,1) = 2(1,0) + 3(0,1) = (2,3) \end{cases}$$

بما أن التطبيق f هو تطبيق خطي، فإنه لدينا:

f(x,y,z) = f (x(1,0,0) + y(0,1,0) + z(0,0,1))= x f (1,0,0)+ y f (0,1,0)+z f (0,0,1)

= x(3,1) + y(-1,2) + z(2,3) = (3x,x) + (-y,2y) + (2z,3z)

= (3x-y +2z , x+2y + 3z)

حل التمرين العاشر:

f (x,y) = (-x, 2x+y, 3x+y)

g (x,y,z) = (x-y,x+z, y-2z)

1. إيجاد المصفوفة المرافقة للتطبيق الخطي f وفق الأساس القانوني لمجموعة البدء ومجموعة الوصول:

من الواضح أن:

$$f:\mathbb{R}^{2} \to \mathbb{R}^{3}$$

من المؤكد أن المصفوفة المرافقة للتطبيق الخطي f هي من الدرجة 2×3 أي لها ثلاثة أسطر وعمودين، ونرمز لها بالرمز M_f

$$f(1;0) = (-1;2;3) = \alpha(1,0,0) + \beta(0,1,0) + \lambda(0,0,1) \Leftrightarrow (-1,2,3) = (\alpha;\beta;\lambda)$$

ومنه، العمود الأول من المصفوفة M_f هو الشعاع (-1, 2,3) .

$$f(0,1) = (0,1,1) = \alpha(1,0,0) + \beta(0,1,0) + \lambda(0,0,1) \Leftrightarrow (0,1,1) = (\alpha;\beta;\lambda)$$

ومنه، العمود الثاني من المصفوفة M_f هو الشعاع (0,1,1) .

في النهاية، نحصل على المصفوفة:

$$M_f = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 2 & 1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$$

2. إيجاد المصفوفة المرافقة للتطبيق الخطي g وفق الأساس لمجموعة البدء والأساس القانوني لمجموعة الوصول:

من الواضح أن:

$$g:\mathbb{R}^{3} \to \mathbb{R}^{3}$$

أي أن المصفوفة المرافقة للتطبيق الخطي g من الدرجة 3، أي لها ثلاثة أسطر وثلاثة أعمدة، ولنرمز لها بالرمز M_g.

$g(1;0;0) = (1;1;0) = (0,1,1) = \alpha(1,0,0) + \beta(0,1,0) + \lambda(0,0,1) \Leftrightarrow (1;1;0) = (\alpha;\beta;\lambda)$

ومنه، العمود الأول للمصفوفة M_g هو الشعاع (0; 1; 1) .

$g(1;1;0) = (0,1,1) = \alpha(1,0,0) + \beta(0,1,0) + \lambda(0,0,1) \Leftrightarrow (0,1,1) = (\alpha;\beta;\lambda)$

ومنه، العمود الثاني للمصفوفة M_g هو الشعاع (1; 1; 0) .

$g(1;1;1) = (0,2,-1) = \alpha(1,0,0) + \beta(0,1,0) + \lambda(0,0,1) \Leftrightarrow (0,2,-1) = (\alpha;\beta;\lambda)$

ومنه، العمود الثالث للمصفوفة M_g هو الشعاع (1-; 2; 0) .

في النهاية، نحصل على المصفوفة:

$$M_g = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

3.إيجاد المصفوفة المرافقة للتطبيق الخطي $g°f$:

نعلم أن المصفوفة المرافقة للتطبيق الخطي $g^\circ f$ هي جداء المصفوفة المرافقة للتطبيق الخطي g مع المصفوفة المرافقة للتطبيق الخطي f أي:

$$M_{g^\circ f} = M_g . M_f = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 2 & 1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 7 & 3 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

ملاحظة: انطلاقا من الكتابة المصفوفية للتطبيق الخطي $g^\circ f$ يمكن إيجاد صيغة هذا التطبيق.

سلسلة تمارين جمل المعادلات الخطية.

التمرين الأول:

لتكن الجملة التالية:

$$(S)\begin{cases}-x+2y-z=1\\5x-2z=-1\\3y+2z=4\end{cases}$$

اكتب الشكل المصفوفي للجملة ثم أوجد الحلول بطريقة كرامر.

التمرين الثاني:

لتكن الجملة التالية:

$$(S)\begin{cases}x+y-z=1\\2x+z=-1\\2x+y-z=2\end{cases}$$

اكتب الشكل المصفوفي للجملة ثم أوجد الحلول بطريقة المقلوب.

التمرين الثالث:

لتكن الجمل التالية:

$$(S)\begin{cases}x+2y-2z=2\\3x+6y-5z=7\\2x+4y-3z=5\\5x+10y-8z=12\end{cases}\quad,\quad(S)\begin{cases}x+y-z=1\\2x-2y+z=3\\3x-y=5\end{cases}\quad,\quad(S)\begin{cases}x+y-z=8\\2x+2y-3z=5\\3x-3y-z=2\\4x-2y-3z=-1\end{cases}$$

حل هذه الجمل باستعمال طريقة قوص.

التمرين الرابع:

لتكن الجملة التالية:

$$(S)\begin{cases}(\lambda+1)x+y+z=1\\x+(\lambda+1)y+z=1\\x+y+(\lambda+1)z=1\end{cases}$$

اكتب الشكل المصفوفي للجملة.

أوجد القيم λ التي من أجلها تكون الجملة التالية لكرامر .

التمرين الخامس:

لتكن المصفوفتان:

$$A=\begin{pmatrix}2&1&-1\\0&2&1\\5&2&-3\end{pmatrix},\quad D=\begin{pmatrix}8&-1&-3\\-5&1&2\\10&-1&-4\end{pmatrix}\quad,\quad B=\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}$$

احسب الجداء A.D ثم حل الجملة AX =B.

حل سلسلة جمل المعادلات الخطية.

حل التمرين الأول:

تذكير: تكون الجملة جملة كرامر إذا وفقط إذا كانت المصفوفة A المرافقة للجملة مربعة ومحددها غير معدوم.

$$(S)\begin{cases}-x+2y-z=1\\ 5x-2z=-1\\ 3y+2z=4\end{cases}$$

الشكل المصفوفي للجملة:

$$(S)\Leftrightarrow AX=B\Leftrightarrow\begin{pmatrix}-1&2&-1\\5&0&-2\\0&3&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\-1\\4\end{pmatrix}$$

من الواضح أن المصفوفة A مربعة بقي أن نحسب محددا:

$$\det(A)=|A|=\begin{vmatrix}-1&2&-1\\5&0&-2\\0&3&2\end{vmatrix}=-41\neq 0$$

المصفوفة مربعة ومحددها غير معدوم، وبالتالي الجملة هي لكرامر.

حل الجملة:

تذكير: إذا كانت الجملة لكرامر فهي تملك حلا وحيدا يحسب بالطريقة التالية:

$$x_i=\frac{\Delta_{x_i}}{\Delta},i=1,\dots,n$$

حيث x_i هي المجاهيل، أما Δ فهو محدد المصفوفة المرافقة للجملة، و Δ_{x_i} هو محدد المصفوفة المرافقة للجملة، لكن باستبدال العمود رقم i بالشعاع B في كل مرة.

وعليه، فإن حلول الجملة المعطاة هي:

$$x=\frac{\Delta_x}{\Delta},y=\frac{\Delta_y}{\Delta},z=\frac{\Delta_z}{\Delta}$$

يكفي حساب المحددات التالية:

$$\Delta_x=\begin{vmatrix}1&2&-1\\-1&0&-2\\4&3&2\end{vmatrix}=-3,\ \Delta_y=\begin{vmatrix}-1&1&-1\\5&-1&-2\\0&4&2\end{vmatrix}=-36,\ \Delta_z=\begin{vmatrix}-1&2&1\\5&0&-1\\0&3&4\end{vmatrix}$$
$$=-28$$

ومنه، الحلول هي:

$$x = -\frac{3}{-41} = \frac{3}{41}\,, \qquad y = -\frac{36}{-41} = \frac{36}{41}\,, z = -\frac{28}{-41} = \frac{28}{41}$$

ومن ثم، مجموعة الحلول هي: $S = \left\{\left(\frac{3}{41}, \frac{36}{41}, \frac{28}{41}\right)\right\}$

حل التمرين الثاني:

تذكير: تكون الجملة جملة قابلة للحل بطريقة المقلوب إذا كانت المصفوفة A المرافقة للجملة مربعة ومحددها غير معدوم.

$$(S)\begin{cases} x + y - z = 1 \\ 2x + z = -1 \\ 2x + y - z = 2 \end{cases}$$

الشكل المصفوفي للجملة:

$$(S) \Leftrightarrow AX = B \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$\det(A) = |A| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0$$

المصفوفة مربعة ومحددها غير معدوم، وبالتالي الجملة تقبل حلا وحيدا نستعمل في هذا التمرين طريقة المقلوب في حلها، وهو معطى بالعلاقة التالية:

$$AX = B \Leftrightarrow X = A^{-1} B$$

أي نقوم بحساب A^{-1} ثم إجراء الجداء $A^{-1} B$.

حساب A^{-1}:

لدينا:

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|}\big(com(A)\big)^T = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 4 & 1 & -3 \\ 2 & 1 & -2 \end{pmatrix}$$

بقي الآن حساب فقط الجداء $A^{-1} B$ فنحصل على الحل المطلوب:

$$A^{-1}B = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 4 & 1 & -3 \\ 2 & 1 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ -3 \end{pmatrix}$$

ومن ثم مجموعة الحلول هي: $S = \{(1, -3, -3)\}$

حل التمرين الثالث:

ملاحظة: لا يوجد شروط لتطبيق طريقة غوص، فهي صالحة لكل الجمل الخطية.

$$(S)\begin{cases} x+y-z=8 \\ 2x+2y-3z=5 \\ 3x-3y-z=2 \\ 4x-2y-3z=-1 \end{cases},$$

نكتب الجملة على الشكل المصفوفي:

$$(S) \Leftrightarrow AX=B \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & 2 & -3 \\ 3 & -3 & -1 \\ 4 & -2 & -3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 8 \\ 5 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$$

الآن نكتب المصفوفة الموسعة والتي هي من الشكل $(|B)$:

$$(A|B)=\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 8 \\ 2 & 2 & -3 & 5 \\ 3 & -3 & -1 & 2 \\ 4 & -2 & -3 & -1 \end{array}\right)$$

نقوم بضرب السطر الأول في العدد 2- ثم نضيفه إلى السطر الثاني، وهذا كي ينعدم العنصر الأول من السطر الثاني، ثم نضرب السطر الأول في العدد 3-، ونضيفه للسطر الثالث وهذا كي ينعدم العنصر الأول من السطر الثالث، ثم نضرب السطر الأول في العدد 4- ونضيفه للسطر الرابع، وهذا كي ينعدم العنصر الأول من السطر الرابع فنحصل على المصفوفة المكافئة للمصفوفة $(A|B)$.

$$(A|B)\sim\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 8 \\ 0 & 0 & -1 & -11 \\ 0 & -6 & 2 & -22 \\ 0 & -6 & 1 & -1 \end{array}\right)$$

الآن، نضرب السطر الثالث في العدد 1-، ونضيفه للسطر الرابع، وهذا كي ينعدم العنصر الثاني من السطر الرابع:

$$(A|B)\sim\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 8 \\ 0 & 0 & -1 & -11 \\ 0 & -6 & 2 & -22 \\ 0 & 0 & -1 & -11 \end{array}\right)$$

نلاحظ جيدا أن السطر الثاني والثالث متساويان، وبالتالي نضرب السطر الثاني في العدد 1- ونضيفه للسطر الرابع، نجد:

$$(A|B)\sim\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 8 \\ 0 & 0 & -1 & -11 \\ 0 & -6 & 2 & -22 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

نلاحظ أمران:

أحدهما هو أن: $\mathrm{rg(A)} = \mathrm{rg}\,(|B)$

والأمر الثاني أن رتبة المصفوفة يساوي عدد المجاهيل.

نتيجة: نستنتج أن الجملة تملك حلا وحيدا.

نكتب الجملة المكافئة للجملة:

$$S\sim\begin{cases} x+y-z=8 \\ -z=-11 \\ -6y+2z=-22 \end{cases}$$

من المعادلة الثانية نجد أن: *z =11* نعوّض في المعادلة الثالثة، نجد أن $y=\frac{11}{2}$ ثم نعوض القيمتين في المعادلة الأولى فنجد: $x=\frac{27}{2}$.

وبالتالي فإن مجموعة الحلول هي:$\left\{\left(\frac{27}{2},\frac{11}{2},11\right)\right\}$

لننتقل إلى الجملة الموالية

$$(S)\begin{cases} x+y-z=1 \\ 2x-2y+z=3 \\ 3x-y=5 \end{cases}$$

نكتب الجملة على الشكل المصفوفي:

$$(S)\Leftrightarrow AX=B\Leftrightarrow\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & -2 & 1 \\ 3 & -2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix}$$

الآن نكتب المصفوفة الموسعة والتي هي من الشكل $(A|B)$:

$$(A|B)=\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 2 & -2 & 1 & 3 \\ 3 & -1 & 0 & 5 \end{array}\right)$$

نقوم بضرب السطر الأول في العدد 2- ثم نضيفه إلى السطر الثاني، وهذا كي ينعدم العنصر الأول من السطر الثاني، ثم نضرب السطر الأول في العدد 3- ونضيفه للسطر الثالث، وهذا كي ينعدم العنصر الأول من السطر الثالث، فنحصل على المصفوفة المكافئة للمصفوفة $(A|B)$:

$$(A|B)\sim\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & -4 & 3 & 1 \\ 0 & -4 & 3 & 2 \end{array}\right)$$

الآن نضرب السطر الثاني في العدد 1- ونضيفه للسطر الثالث، وهذا كي ينعدم العنصر الثاني من السطر الثالث:

$$(A|B)\sim\left(\begin{array}{ccc|c}1&1&-1&1\\0&-4&3&1\\0&0&0&1\end{array}\right)$$

بما أن المساواة الأخيرة *0=1* غير ممكنة فهذه المعادلة لا تقبل حلول

نتيجة: نستنتج أن الجملة مستحيلة، وبالتالي فهي لا تملك حلا.

لننتقل إلى الجملة الموالية

$$S)\begin{cases}x+2y-2z=2\\3x+6y-5z=7\\2x+4y-3z=5\\5x+10y-8z=12\end{cases}$$

نكتب الجملة على الشكل المصفوفي:

$$(S)\Leftrightarrow AX=B\Leftrightarrow\begin{pmatrix}1&2&-2\\3&6&-5\\2&4&-3\\5&10&-8\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2\\7\\5\\12\end{pmatrix}$$

الآن نكتب المصفوفة الموسعة والتي هي من الشكل $(A|B)$:

$$(A|B)=\left(\begin{array}{ccc|c}1&2&-2&2\\3&6&-5&7\\2&4&-3&5\\5&10&-8&12\end{array}\right)$$

نقوم بضرب السطر الأول في العدد 3- ثم نضيفه إلى السطر الثاني، وهذا كي ينعدم العنصر الأول من السطر الثاني، ثم نضرب السطر الأول في العدد 2- ونضيفه للسطر الثالث، وهذا كي ينعدم العنصر الأول من السطر الثالث، ثم نضرب السطر الأول في العدد 5- ونضيفه للسطر الرابع وهذا كي ينعدم العنصر الأول من السطر الرابع، فنحصل على المصفوفة المكافئة للمصفوفة $(A|B)$:

$$(A|B)\sim\left(\begin{array}{ccc|c}1&2&-2&2\\0&0&1&1\\0&0&1&1\\0&0&2&2\end{array}\right)$$

الآن نضرب السطر الثاني في العدد 1- ونضيفه للسطر الثالث، وهذا كي ينعدم العنصر الثالث من السطر الثالث ونضرب السطر الثاني في العدد -2 ونضيفها للسطر الرابع، وهذا كي ينعدم العنصر الثالث من السطر الرابع، فنجد في النهاية:

$$(A|B)\sim\left(\begin{array}{ccc|c}1&2&-2&2\\0&0&1&1\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{array}\right)$$

نلاحظ أمران:

أحدهما هو أن: $\mathrm{rg}(\mathrm{A}) = \mathrm{rg}\,(|B)$

والأمر الثاني أن رتبة المصفوفة أقل من عدد المجاهيل.

نتيجة: نستنتج أن الجملة تملك عددا غير منته من الحلول.

عدد المجاهيل الحرة هو: $n - rg(A) = 3-2=1$

نكتب الجملة المكافئة للجملة

$$(S)\sim\begin{cases} x+2y-2z=2 \\ z=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+2y=4 \\ z=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=4-2y \\ z=1 \end{cases}$$

وبالتالي فإن مجموعة الحلول هي: $S=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 : x=4-2y \wedge z=1\}$

حل التمرين الرابع:

$$(S)\begin{cases} (\lambda+1)x+y+z=1 \\ x+(\lambda+1)y+z=1 \\ x+y+(\lambda+1)z=1 \end{cases}$$

1. نكتب الجملة على الشكل المصفوفي:

$$(S)\Leftrightarrow AX=B\Leftrightarrow \begin{pmatrix} \lambda+1 & 1 & 1 \\ 1 & \lambda+1 & 1 \\ 1 & 1 & \lambda+1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

2. إيجاد القيم λ التي من أجلها (S) تقبل حلا حسب كرامر:

حتى تكون (S) تقبل حلا حسب كرامر، يجب أن يكون $|A| \neq 0$

$$\begin{vmatrix} \lambda+1 & 1 & 1 \\ 1 & \lambda+1 & 1 \\ 1 & 1 & \lambda+1 \end{vmatrix} = (\lambda+1)\begin{vmatrix} \lambda+1 & 1 \\ 1 & \lambda+1 \end{vmatrix} - 1\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & \lambda+1 \end{vmatrix} + 1\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ \lambda+1 & 1 \end{vmatrix}$$

$$= (\lambda+1)\left((\lambda+1)^2-1\right) - (\lambda+1-1) + (1-\lambda-1)$$

$$= (\lambda+1)\ (\lambda^2+2\lambda+1-1) - \lambda - 1 + 1 + 1 + 1 - \lambda - 1$$

$$= (\lambda+1)\ (\lambda^2+2\lambda-\lambda)$$

$$= (\lambda+1)\ (\lambda^2+\lambda)$$

$$= \lambda(\lambda+1)(\lambda+1) = \lambda\,(\lambda+1)^2$$

حتى تكون (S) تقبل حلا حسب كرامر، نضع:

$$\lambda(\lambda+1)^2 \neq 0 \Rightarrow \begin{cases} \lambda \neq 0 \\ \vee \\ \lambda \neq -1 \end{cases}$$

حل التمرين الخامس:

$$A=\begin{pmatrix}2&1&-1\\0&2&1\\5&2&-3\end{pmatrix},\ D=\begin{pmatrix}8&-1&-3\\-5&1&2\\10&-1&-4\end{pmatrix}\ ,\qquad B=\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}$$

حساب الجداء A.D:

$$A=\begin{pmatrix}2&1&-1\\0&2&1\\5&2&-3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}8&-1&-3\\-5&1&2\\10&-1&-4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}\Leftrightarrow D=\ A^{-1}$$

استنتاج حل الجملة AX = B.

$$(s)\begin{cases}2x+y-z=1\\2y+z=2\\5x+2y-3z=3\end{cases}\quad\Leftrightarrow \mathrm{AX}=\mathrm{B}\ \Leftrightarrow \mathrm{X}=\mathrm{A}^{-1}\mathrm{B}$$

وبالتالي:

$$X=\mathrm{A}^{-1}B\Leftrightarrow\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}8&-1&-3\\-5&1&2\\10&-1&-4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-3\\3\\-4\end{pmatrix}$$

ومنه: مجموعة الحلول هي: $\boldsymbol{S=\{(-3,3,-4)\}}$

سلسلة تمارين القيم الذاتية والأشعة الذاتية.

التمرين الأول:

لنعتبر المصفوفة $M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ والعناصر: $e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ ، $e_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ ، $e_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

1. أوجد $P(x)$ كثير الحدود المميز للمصفوفة M.
2. بالاستعانة بالجذور الظاهرة لكثير الحدود $P(x)$، أوجد القيم الذاتية للمصفوفة M.
3. احسب العناصر: $V_1 = e_2 - e_1$ ، $V_2 = e_3 - e_1$ ، $V_3 = e_1 + e_3 + e_2$.
4. احسب: $M.V_1$ ثم قارن بين V_1 و $M.V_1$. ماذا تستنتج ؟
   $M.V_2$ ثم قارن بين V_2 و $M.V_2$. ماذا تستنتج ؟
   $M.V_3$ ثم قارن بين V_3 و $M.V_3$. ماذا تستنتج ؟
5. احسب : $M^2 = M.M$ ، $M^3 = M.M^2$ ، $-M^3 + 3M + 2I_3$
6. من أجل $P = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ احسب المصفوفة المعاكسة P^{-1}.
7. احسب المصفوفة D حيث: $D = P^{-1} . M . P$ ثم احسب $P . D . P^{-1}$.
8. احسب $D^2 = D.D$ و $D3 = D. D^2$ ثم استنتج D^n و M^n .

التمرين الثاني:

لنعتبر $A = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ b & c & 0 \\ d & e & t \end{pmatrix}$

بيّن أن القيم الذاتية للمصفوفة A هي الأعداد a ,c , t.

التمرين الثالث:

لنعتبر $B = \begin{pmatrix} p & q \\ q & p \end{pmatrix}$ $\quad p \neq q$

1. اكتب كثير الحدود المميز للمصفوفة B بدلالة كل من p و q.
2. استنتج القيم الذاتية للمصفوفة B ثم ادرس فضاء الأشعة الذاتية لكل منها، مستخرجا قاعدة لكل منها.
3. من أجل $N = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$ احسب $^tN . N$ ماذا تستنتج ؟
4. احسب $N^{-1} . B . N$.

حل سلسلة القيم الذاتية والأشعة الذاتية.

حل التمرين الأول:

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

1. $P(x)$ كثير الحدود المميز للمصفوفة M:

$$Det\,|M - xI_3| = \text{M}$$

$$P(x) = Det\,|M - xI_3| = \begin{vmatrix} -x & 1 & 1 \\ 1 & -x & 1 \\ 1 & 1 & -x \end{vmatrix}$$

$$P(x) = -x\begin{vmatrix} -x & 1 \\ 1 & -x \end{vmatrix} - 1\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -x \end{vmatrix} + 1\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -x & 1 \end{vmatrix}$$

$$= -x\,(x^2 - 1) - x - 1 + (1 + x)$$

$$= -x^3 + x + x + 1 + x + 1$$

$$P(x) = -x^3 + 3x + 2$$

جذور $P(x)$:

- الحل الظاهر هو $x = 2$ لأن $P(2) = -2^3+3.2 + 2 = -8 + 8 = 0$

بما أن $x = 2$ هو حل ظاهر لـ $P(x)$. إذن $P(x)$ يقبل القسمة على $x - 2$.

$$\begin{array}{r|l} P(x) = -x^3 + 3.x + 2 & x - 2 \\ \hline - \quad \underline{-x^3 + 2x^2} & -x^2 - 2x - 1 \\ 0 - 2x^2 + 3x + 2 & \\ - \quad \underline{-2x^2 + 3x + 2} & \\ 0 - x + 2 & \\ - \quad \underline{-x + 2} & \\ 0 + 0 & \end{array}$$

إذن $P(x) = (x-2)\,(-x^2-2x-1)$

$$= -(x-2)\,(x^2 + 2x + 1) = -(x-2)\,(x+1)^2$$

ومنه: حلول $P(x)$ هي $x = 2$ و $x = -1$ حل مضاعف.

2. λ قيمة ذاتية لـ M $\Leftrightarrow P(\lambda)=0 \Leftrightarrow \lambda = 2$ قيمة ذاتية لـ M.

$\lambda = -1$ قيمة ذاتية لـ M.

وهي قيمة مضاعفة .

3. حساب العناصر V_1 ، V_2، V_3 :

$$V_1 = e_2 - e_1 = \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix}$$

$$V_2 = e_3 - e_1 = \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix}$$

$$V_3 = e_1 + e_3 + e_2 = \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$$

4. حساب $M.V_1$:

$$M.V_1 = \begin{pmatrix}0&1&1\\1&0&1\\1&1&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix} = -V_1.$$

نلاحظ أن $M.V_1 = -V_1 \Leftrightarrow \lambda = -1 =$ قيمة ذاتية لـ M.
إذن V_1 هو شعاع ذاتي لـ M.

* حساب $M.V_2$:

$$M.V_2 = \begin{pmatrix}0&1&1\\1&0&1\\1&1&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix} = -V_2.$$

نلاحظ أن $M.V_2 = -V_2 \Leftrightarrow \lambda = -1 =$ قيمة ذاتية لـ M.
إذن V_2 هو شعاع ذاتي لـ M.

* حساب $M.V_3$:

$$M.V_3 = \begin{pmatrix}0&1&1\\1&0&1\\1&1&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2\\2\\2\end{pmatrix} = 2\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix} = 2\,V_3.$$

نلاحظ أن $M.V_3 = 2\,V_3 \Leftrightarrow \lambda = 2 =$ قيمة ذاتية لـ M.
إذن V_3 هو شعاع ذاتي لـ M.

5. حساب M^2 :

$$: M^2 = M.M = \begin{pmatrix}0&1&1\\1&0&1\\1&1&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&1&1\\1&0&1\\1&1&0\end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix}2&1&1\\1&2&1\\1&1&2\end{pmatrix}$$

***حساب M^3 :**

$$M^3 = M^2 . M = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 2 & 3 & 3 \\ 3 & 2 & 3 \\ 3 & 3 & 2 \end{pmatrix}$$

*** حساب $-M^3 + 3M + 2I_3$:**

$$-M^3 + 3M + 2I_3 = + \begin{pmatrix} -2 & -3 & -3 \\ -3 & -2 & -3 \\ -3 & -3 & -2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 3 & 3 \\ 3 & 0 & 3 \\ 3 & 3 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

إذن $-M^3 + 3M + 2I_3 = 0$

6. نضع $\boldsymbol{P = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}}$ **. حساب P^{-1}:**

$$\det P = \begin{vmatrix} -1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = -1\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} - 1\begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} + 0\begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} \to 0$$

$$= -(0-1) - (-1-1) = 1 + 2 = 3 \neq 0$$

إذن P^{-1} موجودة $= P^{-1} = \frac{1}{detP}\ {}^{t}(comP)$

$$comP = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 \\ +2 & -1 & +1 \\ -1 & +2 & +1 \end{pmatrix} \Rightarrow P^{-1} = \frac{1}{3}\begin{vmatrix} -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} \qquad \text{إذن}$$

7. حساب المصفوفة D : $D = P^{-1} M . P$

1. حساب أولا $M . P$:

$$M.P = \begin{array}{c} M \\ \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} V_1 & V_2 & V_3 \end{array} \\ \begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \end{array} = \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} -V_1 & -V_2 & 2V_3 \end{array} \\ \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ -1 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix} \end{array}$$

$$D = P^{-1} M P = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ -1 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{3}\begin{pmatrix} -3 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

إذن:
$$D = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_1 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}$$

$\lambda_2 = 2$ هي قيمة ذاتية.

$\lambda_1 = -1$ هي قيمة ذاتية مضاعفة.

8. حساب D^2:

$$D^2 = D.D = P^{-1} M \underbrace{P.P}_{I_3}{}^{-1} MP$$

$$D^2 = P^{-1} M^2 P.$$

$$D^2 = D.D = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (-1)^2 & 0 & 0 \\ 0 & (-1)^2 & 0 \\ 0 & 0 & 2^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

$$D^3 = \begin{pmatrix} (-1)^3 & 0 & 0 \\ 0 & (-1)^3 & 0 \\ 0 & 0 & 2^3 \end{pmatrix} \ldots\ldots\ldots D^n = \begin{pmatrix} (-1)^n & 0 & 0 \\ 0 & (-1)^n & 0 \\ 0 & 0 & 2^n \end{pmatrix}$$

*** استنتاج M^n :**

$$D = P^{-1} M P$$

$$D^2 = D.D = P^{-1} M \underbrace{P.P}_{I_3}{}^{-1} MP = P^{-1} M^2 P$$

$$D^3 = D^2.D = P^{-1} M^2 \underbrace{P.P}_{I_3}{}^{-1} MP = P^{-1} M^3 P$$

ومنه:
$$D^n = P^{-1} M^n P$$

$$P.D^n = \underbrace{P.P}_{I_3}{}^{-1} M^n P = M^n P$$

$$P.D^n.P^{-1} = M^n \underbrace{P.P}_{I_3}{}^{-1} = M^n.$$

$$M^n = P.D^n.P^{-1}.$$

*** حساب M^n :**

$$M^n = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} (-1)^n & 0 & 0 \\ 0 & (-1)^n & 0 \\ 0 & 0 & 2^n \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$M^n = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} (-1)^{n+1} & 2(-1)^n & (-1)^{n+1} \\ (-1)^{n+1} & (-1)^{n+1} & 2(-1)^n \\ 2^n & 2^n & 2^n \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2(-1)^{n+2} + 2^n & 2(-1)^n + 2(-1)^{n+2} + 2^n & (-1)^{n+2} + 2(-1)^{n+2} + 2^n \\ (-1)^{n+1} + 2^n & 2(-1)^n + 2^n & (-1)^{n+1} + 2^n \\ (-1)^{n+1} + 2^n & (-1)^{n+1} + 2^n & 2(-1)^n + 2^n \end{pmatrix}$$

$$M^2 = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 6 & 3 & 3 \\ 3 & 6 & 3 \\ 3 & 3 & 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$ من أجل n = 2

$$M^3 = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 6 & 9 & 9 \\ 9 & 6 & 9 \\ 9 & 9 & 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 3 \\ 3 & 2 & 3 \\ 3 & 3 & 2 \end{pmatrix}$$ من أجل n = 3

$$M^4 = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 18 & 15 & 15 \\ 15 & 18 & 15 \\ 15 & 15 & 18 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & 5 & 5 \\ 5 & 6 & 5 \\ 5 & 5 & 6 \end{pmatrix}$$ من أجل n = 2

حل التمرين الثاني:

$$A = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ b & c & 0 \\ d & *** e & t \end{pmatrix}$$

حساب القيم الذاتية باستعمال كثير الحدود المميز لـ A:

$P(x) = det\,(A - x\, I_3) = |A - x\, I_3|$

$$A - x\, I_3 = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ b & c & 0 \\ d & e & t \end{pmatrix} - x\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a-x & 0 & 0 \\ b & c-x & 0 \\ d & e & t-x \end{pmatrix}$$

$$P(x) = det|A - x\, I_3| = \begin{vmatrix} a-x & 0 & 0 \\ b & c-x & 0 \\ d & e & t-x \end{vmatrix}$$

$$= (a-x)\begin{vmatrix} c-x & 0 \\ e & t-x \end{vmatrix} = (a-x)(c-x)(t-x)$$

القيم الذاتية هي حلول كثير حدود المميز أي: $P(x)=0$

$$P(x)=0 \Leftrightarrow (a-x)(c-x)(t-x)=0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a-x=0 \\ c-x=0 \\ t-x=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=a \\ \vee \\ x=c \\ \vee \\ x=t \end{cases}$$

إذن القيم الذاتية هي: a, c, t.

حل التمرين الثالث:

$$p \neq q \qquad B=\begin{pmatrix} p & q \\ q & p \end{pmatrix}$$

1. كثير الحدود المميز للمصفوفة B بدلالة كل من p و q: $P(x)=\det(B-XI_2)$

$$B-XI_2=\begin{pmatrix} p & q \\ q & p \end{pmatrix} - x\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix} p-x & q \\ q & p-x \end{pmatrix}$$

$$P(x)=\det\begin{pmatrix} p-x & q \\ q & p-x \end{pmatrix} = \begin{vmatrix} p-x & q \\ q & p-x \end{vmatrix}$$

$$=(p-x)^2-q^2=(p-x-q)(p-x+q)$$

$$\boldsymbol{P(x)=(-x+p-q)(-x+p+q)}$$

2. القيم الذاتية للمصفوفة B هي القيم التي تعدم المميز للمصفوفة B ، أي البحث عن حلول P(x):

$$P(x)=0 \Leftrightarrow (-x+p+q)(-x+p+q)=0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -x+p-q=0 \\ \vee \\ -x+p+q=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=p-q \\ \vee \\ x=p+q \end{cases}$$

إذن: $\lambda_1 = p+q$ *قيمة ذاتية لـ* $B \neq 0$

$\lambda_2 = p+q$ *قيمة ذاتية لـ* B.

إيجاد الفضاء الشعاعي الذاتي لـ $\boldsymbol{\lambda_1 = p-q}$

$$E(\lambda_1)=E(p-q)=\{v \in \mathbb{R}^2 \ / \ Bv=\lambda_1 v\}$$

$$=\left\{v=\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \ / \ (B-\lambda_1 I_2)v=0_{\mathbb{R}^2}\right\}$$

$$(B-\lambda_1 I_2)v = 0_{\mathbb{R}^2} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} p-p+q & q \\ q & p-p+q \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$(B-(p-q)I_2)v = 0_{\mathbb{R}^2} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} q & q \\ q & q \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} qx+qy=0 \\ qx+qy=0 \end{cases} \Leftrightarrow x = -\frac{q}{q}y \qquad \boldsymbol{x = -y}$$

إذن: $E(\lambda_1) = E(p-q) = \left\{\begin{pmatrix} -y \\ y \end{pmatrix},\ \ y \in \mathbb{R}\right\}$

$= \left\{ y\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix},\ \ y \in \mathbb{R}\right\}$

$\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ هو شعاع ذاتي لـ B، ومنه: $dimE(\lambda_1) = 1$

لأن القيمة الذاتية λ_1 بسيطة (ليست مضاعفة).

إيجاد الفضاء الشعاعي الذاتي لـ $\lambda_1 = p+q$:

$$E(\lambda_2) = E(p+q) = \{v \in \mathbb{R}^2 /\ \ Bv = \lambda_2 v\}$$

$$= \left\{\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\ /\ (B-\lambda_2 I_2)\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}\right\}$$

$$(B-\lambda_2 I_2) = \begin{pmatrix} p & q \\ q & p \end{pmatrix} - (p+q)\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p-q-p & q \\ q & p-p-q \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -q & q \\ q & -q \end{pmatrix}$$

$$(B-\lambda_2 I_2)v = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} -q & q \\ q & -q \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -qx+qy=0 \\ qx-qy=0 \end{cases} \Leftrightarrow x = \frac{q}{q}y = y \qquad \boldsymbol{x = y}$$

إذن: $E(\lambda_2) = E(p+q) = \left\{\begin{pmatrix} x \\ x \end{pmatrix},\ \ y \in \mathbb{R}\right\}$

$= \left\{ x\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix},\ \ x \in \mathbb{R}\right\}$

$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ هو شعاع ذاتي لـ B، ومنه: $dimE(\lambda_2) = 1$

لأن القيمة الذاتية λ_2 بسيطة (ليست مضاعفة).

3. من أجل $N = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$ حساب $^tN.N$:

$$^tN.N = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = 2I_2$$

نلاحظ أن: $^tN.N = 2I_2 \Leftrightarrow \frac{1}{2}\,{}^tN.N = I_2$

هذا يعني أن $\frac{1}{2}\,{}^tN$ هي معكوس N. إذن:

$$N^{-1} = \frac{1}{2}\,{}^{t}N = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \left(\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right)$$

4. حساب $N^{-1} . B . N$.

نحسب أولا: $B . N$:

$$B.N = \begin{pmatrix} p & q \\ q & p \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p-q & p+q \\ q-p & p+q \end{pmatrix}$$

$N^{-1} . B . N$:

$$N^{-1} . B . N = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p-q & p+q \\ q-p & p+q \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} p-q-q+p & p+q-p-q \\ p-q+q-p & p+q+p+q \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 2p-2q & 0 \\ 0 & p+q \end{pmatrix}$$

جامعة الجزائر 03 كلية العلوم الاقتصادية و التجارية و التسيير

السنة الأولى LMD امتحان السداسي الثاني في مادة الرياضيات 2 مدة الامتحان: 1ساعة و15 دقيقة

الاسم واللقب:	الرقم الآلي:	الفوج:

التمرين الاول: ليكن **f** تطبيق خطي معرف كما يلي:

$$\mathbf{f}: \mathbf{R}^3 \longrightarrow \mathbf{R}^3$$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} x+2y-3z \\ 2x+3y-4z \\ x+y-z \end{pmatrix}$$

1- لدينا **A** المصفوفة المرفقة للتطبيق الخطي **f** . أوجد **A** ؟

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} & & \\ & & \\ & & \end{pmatrix}$$

2- احسب محدد المصفوفة **A** ثم استنتج رتبها **(Rg A)** ؟

....
....
....
....

3- اوجد أساس نواة **f (Ker f)** ؟ و هل **f** متباين ؟

....
....
....
....
....
....

4- استنتج بعد صورة f (**dim Im f**) ? و هل **f** غامر ? وهل **f** تقابلي ?.

....

....

....

التمرين الثالث:

1- أوجد A^{-1} (مقلوب المصفوفة **A**) إن أمكن? بحيث : $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 3 & -1 \\ 0 & 2 & -3 \end{pmatrix}$

....

....

....

....

....

2- حل جملة المعادلات التالية:

$$\begin{cases} x + 2y - z = 3 \\ 2x + 3y - z = 6 \\ 2y - 3z = -1 \end{cases}$$

....

....

....

....

....

....

3- استخدم طريقة قوس في حل جملة المعادلات التالية:

$$\begin{cases} x + 2y + 3z = 0 \\ 6x + 5y + 4z = 1 \\ x + y + z = 0 \end{cases}$$

....

....

....

....

....

....

بالتوفيق د – المدهون

جامعة الجزائر 03 كلية العلوم الاقتصادية و التجارية و التسيير

السنة الأولى LMD امتحان السداسي الثاني في مادة الرياضيات 2 6 مدة الامتحان: 1ساعة و15 دقيقة

الاسم واللقب:	الرقم الآلي:	الفوج:

التمرين الأول: لتكن **M , N , H** ثلاثة مصفوفات حيث:

$$\mathbf{M}=\begin{pmatrix}1&2&0\\-3&-1&-5\\2&4&3\end{pmatrix} \quad ; \quad \mathbf{N}=\begin{pmatrix}7&1&-2\\4&3&1\\2&0&0\end{pmatrix} \quad ; \quad \mathbf{H}=\begin{pmatrix}1&0&0\\2&1&-1\\0&3&2\end{pmatrix}$$

1-أوجد العمليات التالية إن أمكن كما لا تنسى الإشارة إلى نوع كل مصفوفة متحصل عليها إن أمكن ?.

$$3M + N = \begin{pmatrix} & & \\ & & \\ & & \end{pmatrix} \qquad M \cdot H = \begin{pmatrix} & & \\ & & \\ & & \end{pmatrix}$$

$$M \cdot N = \begin{pmatrix} & & \\ & & \\ & & \end{pmatrix} \qquad {}^{t}H = \begin{pmatrix} & & \\ & & \\ & & \end{pmatrix}$$

2- هل يمكن اختزال المصفوفة **H** علل إجابتك **?**

....
....
....

التمرين الثاني: ليكن f تطبيق خطي معرف كما يلي:

$$f: \mathbf{R}^3 \longrightarrow \mathbf{R}^3$$

$$\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix}x+y-z\\2x-z\\y-z\end{pmatrix}$$

1- لتكن **A** المصفوفة المرفقة للتطبيق الخطي **f** . أوجد **A** ?

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} & & \\ & & \\ & & \end{pmatrix}$$

2- احسب محدد المصفوفة **A** ثم استنتج رتبها **(Rg A)** ?

....
....
....
....
....

3- اوجد أساس نواة **f** (**Ker f**) ? و هل **f** متباين ?

....
....
....
....
....
....
....

4- استنتج بعد صورة f ($\dim Im\,f$) ? و هل f غامر ? وهل f تقابلي ?.

....
....
....
....
....
....

التمرين الثالث:

1- أوجد $\mathbf{A}^{-1}$ (مقلوب المصفوفة **A**) إن أمكن? بحيث : $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{2} & \mathbf{-1} \\ \mathbf{2} & \mathbf{3} & \mathbf{-1} \\ \mathbf{0} & \mathbf{2} & \mathbf{-3} \end{pmatrix}$

....
....
....
....
....

-2 حل جملة المعادلات التالية:

$$\begin{cases} x + y - z = 3 \\ 2x \quad - z = 0 \\ \quad y - z = 4 \end{cases}$$

....
....
....
....
....
....

حل جملة المعادلات التالية:

$$\begin{cases} x + 2y + 3z = 0 \\ 6x + 5y + 4z = 1 \\ x + y + z = 0 \end{cases}$$

....
....
....
....
....
....
....
....
....
....

. بالتوفيق د – المدهون