الجمهـــــــورية الجـــــزائرية الديمقراطية الشعبيـــــــة

جـــامعة الجزائر ـ 3 ـ

كلية العلــوم الإقتصادية و العلــوم التجارية و علــوم التسيير

مطبــــوعة خــــــاصّة بـ

دروس مبسّطة و تـمـارين مـحلـــولة في مقياس الرّياضيات 1

موجّهـــة لطلاب السنة الأولـى جذع مشترك ل. م. د

إعــــــــــــداد : د. داود مليــــــــكة

السـنـــــة الجامعيـــــة :2018/2019

المحتويات

الفصل 1

المجموعات و التّطبيقات

1.1 المجموعات

1.1.1 تعريف المجموعات

- المجموعة عبارة عن مصنّفة عناصر محدّدة؛ مثال : $\mathbb{N}=\{0,1,2,\ldots,\}$ أو يمكن تعريفها بمصنّفة عناصر تحقّق خاصية ما؛ مثال : $[0,1]=\{x\in\mathbb{R}\mid 0\le x\le 1\}$
بعبارة أخرى يوجد طريقتين لبناء مجموعة إمّا تعريفها مباشرة بإعطاء عناصرها، مثال: $E=\{0,1,\ldots,10\}$ و إمّا بوصف خاصية تلك العناصر، مثال: $\mathbb{N}=\Big\{n \mid n$ عد د طبيعي $\Big\}$

نذكر من بين المجموعات المعروفة: $\mathbb{Z}$ مجموعة الأعداد الصحيحة، $\mathbb{N}$ مجموعة الأعداد الطبيعية، $\mathbb{Q}$ مجموعة الأعداد الناطقة، $\mathbb{R}$ مجموعة الأعداد الحقيقية، ... ، إلخ.

- المجموعة الخالية و نرمز لها بـ $\emptyset$ هي المجموعة التي لا تحوي أي عنصر.

- نكتب $x\in E$ إذا كان x عنصر من المجموعة E و $x\notin E$ في حالة العكس.

- المجموعة المتهية: نقول أنّ E مجموعة متهية إذا كانت تحوي عدد منته من العناصر، و نرمز لعدد عناصر المجموعة E بـ $card(E)$.

- المجموعة $\mathbb{N}^*$ هي مجموعة الأعداد الطبيعية الغير معدومة.

- المجموعة $\mathbb{Z}^*$ هي مجموعة الأعداد الصحيحة الغير معدومة.

2.1.1 عمليات على المجموعات

- الإحتواء : $A\subset B$ إذا كل عنصر من A هو عنصر من B ، بطريقة أخرى: $\forall x\in A\Rightarrow x\in B$

- المجموعة الجزئية: لتكن E المجموعة الكلية،

  نقول أنّ المجموعة A مجموعة جزئية من E إذا كانت المجموعة A محتواة في المجموعة E.

- تساوي مجموعتين: نقول أنّ A و B متساويتان إذا وفقط إذا كان: $A \subset B$ و $B \subset A$ و نكتب : $A = B$ ، بمعنى آخر : $B \subset A$ و $A \subset B \Leftrightarrow A = B$.

- التقاطع : نسّمي تقاطع مجموعتين A و B مجموعة العناصر التي تنتمي إلى A و B معا و نرمز لها بـ $A \cap B$ ، بمعنى آخر : $A \cap B = \{x \mid x \in A$ و $x \in B\}$

- الإتحاد : نسّمي إتحاد مجموعتين A و B مجموعة العناصر التي تنتمي إمّا إلى A أو إلى B و نرمز لها بـ $A \cup B$ ، بمعنى آخر : $A \cup B = \{x \mid x \in A$ أو $x \in B\}$

  نظرية 1.

  إذا كان A و B مجموعتين جزئيتين متهيتين فإنّ :
  $card(A \cup B) = card(A) + card(B) - card(A \cap B)$

  إذا كان $A \cap B = \emptyset$ فإنّ : $card(A \cup B) = card(A) + card(B)$

- متمّم مجموعة: ليكن A مجموعة جزئية من E, نعرّف متمّم مجموعة A في المجموعة E كما يلي: $\complement_E^A = \{x \in E \mid x \notin A\}$

  ملاحظة: يمكن أن نرمز لـ $\complement_E^A$ بـ A^c أو $\bar{A}$. لتسهيل الكتابة في كل مايلي نرمز لـ $\complement_E^A$ بـ $\bar{A}$.

- الفرق : نسّمي فرق مجموعتين A و B مجموعة العناصر التي تنتمي إلى A و لا تنتمي إلى B و نرمز لها بـ $A - B$ ، بمعنى آخر : $A - B = \{x,\ x \in A$ و $x \notin B\}$

  ملاحظة: يمكن أن نرمز لـ $A - B$ بـ $A \backslash B$

- مجموعة أجزاء مجموعة: نسّمي مجموعة أجزاء مجموعة E المجموعة التي تتكون من كل مجموعة محتواة في المجموعة E و نرمز لها بـ $P(E)$ حيث $P(E) = \{A \mid A \subset E\}$

  مثال: $E = \{1, 2, 3\}$ إذن : $card(E) = 3$.
  $P(E) = \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1,2\}, \{1,3\}, \{2,3\}, \{1,2,3\}\}$ إذن : $card(P(E)) = 8 = 2^3$.

  بصفة عامّة: إذا كان $card(E) = n$ فإنّ $card(P(E)) = 2^n$.

3.1.1 خواص المجموعات - ليكن A و B و C مجموعات جزئية من E

- $A \cap B = B \cap A$
- $A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$
- $A \cap \emptyset = \emptyset$ ، $A \cap A = A$ ، $A \subset B \Leftrightarrow A \cap B = A$

- $A \cup B = B \cup A$
- $A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$
- $A \cup \emptyset = A$ ، $A \cup A = A$ ، $A \subset B \Leftrightarrow A \cup B = B$
- $\bar{\bar{A}} = A$ ، $A \subset B \Leftrightarrow \bar{B} \subset \bar{A}$
- $\overline{A \cap B} = \bar{A} \cup \bar{B}$
- $\overline{A \cup B} = \bar{A} \cap \bar{B}$

مثال:
لتكن A و B مجموعتين جزئيتين من E حيث $E = \{1,2,3,4,5,6\}$ و $A = \{1,2,4\}$ و $B = \{1,2,3,5\}$. لدينا:

- $A \cap B = \{1,2\}$
- $A \cup B = \{1,2,3,4,5\}$
- $A - B = \{4\}$
- $\bar{A} = \{3,5,6\}$

4.1.1 الجداء الديكارتي

لتكن A و B مجموعتين جزئيتين من E ، الجداء الديكارتي لمجموعتين A و B و التي نرمز لها بـ $A \times B$ المجموعة المعرّفة بـ:

$$A \times B = \{(x,y) \ : \ x \in A \text{ و } y \in B\}$$

حيث (x,y) تسمى ثنائية، x المركبة الأولى و y المركبة الثانية.

ملاحظة: إذا كانت A و B مجموعتين منتهيتين عندئذ :

$$card(A \times B) = card(A) \times card(B)$$

مثال 1. : لدينا: $A = \{0,1,2\},\ B = \{1,3\}$ فإنّ الجداء الديكارتي:

$$A \times B = \{(0,1),(0,2),(1,1),(1,3),(2,1),(2,3)\}$$

مثال 2. :

$$\mathbb{R}^2 = \mathbb{R} \times \mathbb{R} = \{(x,y) \ : \ x,y \in \mathbb{R}\}$$

$$[0,1] \times \mathbb{R} = \{(x,y) \ : \ x \in [0,1] \text{ و } y \in \mathbb{R}\}.$$

2.1 التّطبيقات

1.2.1 تعريف التّطبيق •

لتكن E و F مجموعتين غير خاليتين و f علاقة من E نحو F .
تكون العلاقة f تطبيق إذا كان من أجل كل x من E يرفق له عنصر واحد $f(x)$ من F.

- نسّمي المجموعة E بمجموعة البدء و المجموعة F بمجموعة الوصول.
- نسّمي العنصر x سابقة و $f(x)$ صورة.

مثال:

$$\begin{array}{rccc} f: & \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & x & \longmapsto & x^2+1 \end{array}$$

f يمثّل تطبيق من $\mathbb{R}$ نحو $\mathbb{R}$.

2.2.1 التباين، الغمر، التقابل •

تعريف التّطبيق المتباين:

نقول أنّ التّطبيق $f: E \longrightarrow F$ متباين إذا كل عنصر من F له سابقة على الأكثر من E أي :

$$\forall x_1, x_2 \in E \;:\; f(x_1) = f(x_2) \Longrightarrow x_1 = x_2$$

بصيغة أخرى:

$$\forall x_1, x_2 \in E \;:\; x_1 \neq x_2 \Longrightarrow f(x_1) \neq f(x_2)$$

أمثلة :

$$\begin{array}{rccc} f: & \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & x & \longmapsto & x+3 \end{array}$$ تطبيق متباين

$$\begin{array}{rccc} f: & \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & x & \longmapsto & |x| \end{array}$$ تطبيق غير متباين

تعريف التّطبيق الغامر:

نقول أنّ التّطبيق $f: E \longrightarrow F$ غامر إذا كان كل عنصر من F له سابقة على الأقل في E ، أي:

$$\forall y \in F \quad \exists x \in E : \quad f(x) = y$$

أمثلة :

$$\begin{array}{rccc} f: & \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & x & \longmapsto & x+3 \end{array}$$ تطبيق غامر،

$$\begin{array}{rccc} g: & \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & x & \longmapsto & x^2 \end{array}$$ تطبيق غير غامر لأنّ العنصر -1 مثلا ليس له سابقة،

لكنّ

$$\begin{array}{rccc} h: & \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R}^+ \\ & x & \longmapsto & x^2 \end{array}$$ تطبيق غامر.

تعريف التّطبيق التقابلي: نقول أنّ f تقابلي إذا كان f تطبيق متباين و غامر.

تركيب تطبيقين :

ليكن $f : E \longrightarrow F$ و $g : F \longrightarrow G$

نعرّف $g \circ f$ بـ:

$$\begin{array}{rcl} g \circ f : E & \longrightarrow & G \\ x & \longmapsto & g \circ f(x) = g(f(x)) \end{array}$$

مثال:

$$\begin{array}{rcl} f : \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & 2x+3 \end{array} \qquad \begin{array}{rcl} g : \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & x^2 \end{array}$$

$$\begin{array}{rcl} g \circ f : \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & (2x+3)^2 \end{array} \qquad \begin{array}{rcl} f \circ g : \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & 2x^2+3 \end{array}$$

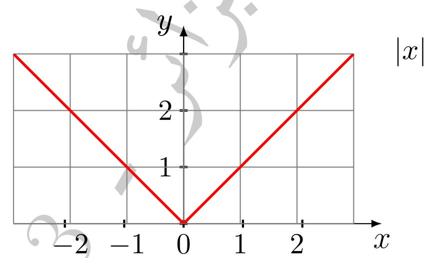
نلا حظ أنّ: $gof \neq fog$

3.2.1 القيمة المطلقة

• من أجل كل عد د حقيقي x ، نعرّف القيمة المطلقة لـ x بـ:

$$|x| = \begin{cases} x & x \geq 0 \\ -x & x < 0 \end{cases} \tag{1.1}$$

الشكل (1.1) الموالي يوضّح بيان التابع $x \mapsto |x|$



الشكل (1.1) : التمثيل البياني للتابع $|x|$

خواص:

- $|x| \geq 0$
- $|-x| = |x|$
- $|0| = 0$
- $|x| > 0 \ (x \neq 0)$
- $|x.y| = |x|.|y|$
- $|x| \leq a \Leftrightarrow -a \leq x \leq a \Leftrightarrow x \in [-a, a], \ a \in \mathbb{R}$
- $|x \mp y| \leq |x| + |y|$

4.2.1 المجالات، الحواد العليا و الحواد الدنيا

تعريف 1. : نسمّي **مجالا** في $\mathbb{R}$ المجموعة الجزئية I من $\mathbb{R}$ التي تحقّق الخاصية :

$$\forall a,b\in I,\quad \forall x\in\mathbb{R},\quad a\leq x\leq b\Rightarrow x\in I$$

تعريف 2. : نسمّي **مجالا مفتوحا** المجموعة الجزئية من $\mathbb{R}$ من النّوع:

$]a,b[=\{x\in\mathbb{R}\mid a<x<b\}$ ، حيث a,b عناصر من $\mathbb{R}$.

- **الحواد العليا و الحواد الدنيا:**

  - نقول أنّ M **حاد أعلى** لـ A (Majorant) إذا $\forall x\in A,\ x\leq M$
  - نقول أنّ m **حاد أدنى** لـ A (Minorant) إذا $\forall x\in A,\ m\leq x$

ملاحظة: M و m ليستا بالضرورة في A

مثال 1. :

بالنسبة للمجموعة $A=]0,2[$ ، 3 هو **حاد أعلى** لـ A ، أمّا بالنسبة للمجموعة $B=]0,+\infty[$ ، -7 **حاد أدنى** لـ B لكنّ لا يوجد حاد أعلى لـ B .

- **الحد الأعلى و الحد الأدنى:**

لتكن A **مجموعة** جزئية من $\mathbb{R}$ ، و ليكن $a\in\mathbb{R}$ ،

- نقول أنّ a **حد أعلى** لـ A إذا: a حاد أعلى لـ A و هو أصغر الحواد العليا، و نرمز له بـ Sup A.
- نقول أنّ a **حد أدنى** لـ A إذا : a حاد أدنى لـ A و هو أكبر الحواد الدنيا، و نرمز له بـ Inf A.

مثال 2. :

الحواد العليا لـ $A=[0,1[$ هي كل الأعداد المنتمية إلى $[1,+\infty[$ إذن أصغر الحواد العليا هو $\text{Sup A}=1$.

الحواد الدنيا لـ $A=[0,1[$ هي هي كل الأعداد المنتمية إلى $]-\infty,0]$ إذن أكبر الحواد الدنيا هو $\text{Inf A}=0$.

- **العنصر الأعظمي و العنصر الأصغري :**

لتكن A **مجموعة** جزئية من $\mathbb{R}$ ، و ليكن $a\in A$ ،

- نسمّي a **عنصرا أعظميا** لـ A (Maximum, plus grand element) إذا $a\in A$ و $\forall x\in A,\ x\leq a$ و نرمز له بـ Max A.

- نسمّي a **عنصرا أصغريا** لـ A (Minimum, plus petit element) إذا $a \in A$ و $\forall x \in A,\ a \leq x$ و نرمز له بـ Min A.

مثال 3. :

المجموعة $A = [0, 1[$ ، لا تقبل عنصرأعظمي لأنّ A ليست مغلقة من الأعلى أمّا بالنسبة للعنصر الأصغري فهو Min A = 0.

نظرية 2.

- كلّ مجموعة جزئية من $\mathbb{R}$ و محدودة من الأعلى تقبل حد أعلى.
- كلّ مجموعة جزئية من $\mathbb{R}$ و محدودة من الأدنى تقبل حد أدنى.
- نقول أنّ المجموعة A محدودة إذا كانت محدودة من الأعلى و محدودة من الأدنى.

3.1 تمارين

التمرين الأوّل: أوجد $\overline{A\cup B},\ \overline{A}\cap\overline{B},\ \overline{A\cap B},\ \overline{A}\cup\overline{B}$ في كلا الحالتين:

الحالة الأولى: $E=\{1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$ و لتكن A و B مجموعتين جزئيتين من E بحيث $A=\{x \mid 2 \text{ مضاعف } x\}$ و $B=\{x \mid 3 \text{ مضاعف } x\}$.

الحالة الثانية : $E=\mathbb{R},\ A=\{x\in\mathbb{R},\mid x^2<2\},\ B=\{x\in\mathbb{R},\mid x^2>1\}$.

ماذا تستنتج؟

التمرين الثاني: ليكن E مجموعة متهية حيث $card(E)=30$ ، إذا كان A و B مجموعتين جزئيتين من E حيث $card(A)=20$ ، $card(B)=15$ و $card(A\cap B)=6$.

- أوجد $card(A\cup B)$.
- إعط مثال.

التمرين الثالث: ليكن $A=\{a,b\},\ B=\{1,3\},\ C=\{4,5\}$ ، حدّد كلّ من:

- $A\times(B\cup C)$
- $(A\times B)\cup(A\times C)$
- $A\times(B\cap C)$
- $(A\times B)\cap(A\times C)$

ماذا تستنتج؟

التمرين الرّابع: أذكر إن كانت التطبيقات التالية متباينة، غامرة، تقابلية.

$$\begin{array}{rcl} f:\mathbb{R}^* & \to & \mathbb{R}^* \\ x & \mapsto & f(x)=\frac{1}{x} \end{array} \qquad \begin{array}{rcl} g:\mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & g(x)=x^2+1 \end{array} \qquad \begin{array}{rcl} k:\mathbb{R}_+ & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & k(x)=|x| \end{array}$$

.

التمرين الخامس: ليكن f و g معرفتين كمايلي:

$$\begin{array}{rcl} f:\mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & f(x)=2x+3 \end{array} \qquad \begin{array}{rcl} g:\mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & g(x)=x^2 \end{array}$$

.

- أوجد gof و fog , ماذا تستنتج.

التمرين السادس: ليكن التابعين f و g معرّفين كمايلي:

$$\begin{array}{rcl} f:]0,+\infty[& \to &]0,+\infty[\\ x & \mapsto & \frac{1}{x} \end{array} \qquad \begin{array}{rcl} g:]0,+\infty[& \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \frac{x-1}{x+1} \end{array}$$

1. أوجد $f\circ g$ و $g\circ f$ إن أمكن.
2. ليكن $f,\ g,\ h:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ المعرّفة بـ $f(x)=x^2$ ، $g(x)=2x+1$ و $h(x)=x^3-1$.
3. أحسب $(f\circ g)\circ h$ و $f\circ(g\circ h)$.

التمرين السابع: لتكن المجموعات التالية:

$E_1=\left\{x\in\mathbb{R}\ \mid\ x\le 10 \text{ و } x\ge 5\right\}$

$E_2=\left\{x\in\mathbb{R}\ \mid\ x<0 \text{ أو } x\ge 1\right\}$

$E_3=\left\{x\in\mathbb{R}\ \mid\ x\ge 0 \text{ أو } x<1\right\}$

$E_4=\{x\in\mathbb{R}\ \mid\ |x|\le 4\}$

$E_5=\{x\in\mathbb{R}\ \mid\ x^2<7\}$

$E_6=\{x\in\mathbb{R}\ \mid\ x^2>4\}$

$E_7=\{x\in\mathbb{N}\ \mid\ 2<x\le 10\}$

$E_8=\left\{x\in\mathbb{N}\ \mid\ x \text{ زوجي}\right\}$

1. أكتب المجموعات السابقة على شكل مجالات.
2. عيّن إن وجدت كلّ من الحد الأدنى Inf ، الحد الأعلى Sup ، العنصر الأعظمي Max ، العنصر الأصغري Min ، الحواد العليا و الحواد الدنيا للمجموعات السابقة مع التعليل.

التمرين الثامن: عيّن إن وجد كلّ من الحد الأدنى Inf ، الحد الأعلى Sup ، العنصر الأعظمي Max ، العنصر الأصغري Min ، الحواد العليا و الحواد الدنيا للمجموعات التالية مع التعليل.

- $A_1=\{x\in\mathbb{R}\ \mid\ |x|<4\}$.
- $A_2=\{x\in\mathbb{R}\mid x^2>9\}$.
- $A_3=\{y\in\mathbb{R}\ \mid y=\frac{1}{1-x},\ 0<x\le\frac{1}{2}\}$.
- $A_4=\{y\in\mathbb{R}\ \mid y=3-\frac{1}{n},\ n\in\mathbb{N}^*\}$.

الفصل 2

المتتاليات

1.2 المتتاليات العددية

تعريف .1 : نسمّي متتالية عددية كل تطبيق:

$$\begin{array}{rccl} U: & \mathbb{N} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & n & \longmapsto & U(n) = U_n \end{array}$$

نسمّي $U_0, U_1, \ldots, U_n$ حدود المتتالية و نرمز للمتتالية ذات الحد العام U_n بـ $(U_n)_n$ أو $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

نسمّي U_0 بالحد الأول للمتتالية و U_n بالحد العام للمتتالية .

مثال: $U_n = \frac{1}{n+1}$

لدينا : $U_0 = 1,\ U_1 = \frac{1}{2}, \ldots, U_n = \frac{1}{n+1}$

ملاحظة :

- دراسة أي متتالية يرتبط بدراسة حدّها العام U_n.
- تتكوّن متتالية غير متهية من عدد غير منته من الحدود: $U_0,\ U_1,\ U_2, \ldots$.
- تتكوّن متتالية متهية من عدد منته من الحدود: $U_0,\ U_1,\ U_2 \ldots, U_n$.

تعريف .2 : المتتالية المتناوبة هي المتتالية حيث كلّ حدين متتابعين لهما إشارتين مختلفتين.

مثال: $U_n = (-1)^{n+1} \times n$ هي متتالية متناوبة: من أجل $n = 1, 2, 3, 4, \ldots$ لدينا $1,\ -2,\ 3,\ -4, \ldots$

1.1.2 المتتالية المحدودة •

تعريف .1 : نقول أنّ $(U_n)_n$ متتالية محدودة من الأعلى إذا :

$$\exists M \in \mathbb{R}, \quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad U_n \leq M.$$

تعريف .2 : نقول أنّ $(U_n)_n$ متتالية محدودة من الأدنى إذا :

$$\exists m \in \mathbb{R}, \quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad U_n \geq m.$$

تعريف 3. : نقول أنّ $(U_n)_n$ متتالية محدودة إذا كانت محدودة من الأدنى و محدودة من الأعلى معا .

$$\exists m, M \in \mathbb{R}, \quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad m \leq U_n \leq M.$$

مثال: المتتالية ذات الحد العام: $U_n = \frac{1}{n+1}$ محدودة لأنّ :

$$\forall \in \mathbb{N} \,:\, 0 < \frac{1}{n+1} \leq 1$$

لكنّ المتتالية ذات الحد العام: $(V_n)_n$ حيث $V_n = n+1$ غير محدودة.

2.1.2 رتابة متتالية

لتكن $(U_n)_n$ متتالية،

- نقول أنّ المتتالية $(U_n)_n$ **متتالية متزايدة** إذا : $U_{n+1} \geq U_n \quad \forall n \in \mathbb{N},$
- نقول أنّ المتتالية $(U_n)_n$ **متتالية متزايدة تماما** إذا : $U_{n+1} > U_n \quad \forall n \in \mathbb{N},$
- نقول أنّ المتتالية $(U_n)_n$ **متتالية متناقصة** إذا : $U_{n+1} \leq U_n \quad \forall n \in \mathbb{N},$
- نقول أنّ المتتالية $(U_n)_n$ **متتالية متناقصة تماما** إذا : $U_{n+1} < U_n \quad \forall n \in \mathbb{N},$
- نقول أنّ المتتالية $(U_n)_n$ **متتالية رتيبة** إذا كانت المتتالية متزايدة أو متناقصة.
- نقول أنّ المتتالية $(U_n)_n$ **متتالية رتيبة تماما** إذا كانت المتتالية متزايدة تماما أو متناقصة تماما.

ملاحظة 1. : في حالة $(U_n)_n$ متتالية ذات حدود موجبة تماما، نقول أنّها

- متزايدة إذا : $\frac{U_{n+1}}{U_n} \geq 1 \quad \forall n \in \mathbb{N},$.
- متناقصة إذا : $\frac{U_{n+1}}{U_n} \leq 1 \quad \forall n \in \mathbb{N},$.

ملاحظة 2. :

- إذا كانت $U_n = f(n)$ و $\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \ f'(x) \geq 0$ فإنّ : $(U_n)_n$ **متتالية متزايدة** .
- إذا كانت $U_n = f(n)$ و $\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \ f'(x) \leq 0$ فإنّ : $(U_n)_n$ **متتالية متناقصة** .

3.1.2 نهاية متتالية

لتكن $(U_n)_n$ متتالية،

تعريف 1. : $(U_n)_n$ متتالية متقاربة نحو l إذا $\lim\limits_{n\to+\infty} U_n = l$ حيث l عدد حقيقي .

تعريف 2. : $(U_n)_n$ متتالية متباعدة إذا كانت $\lim\limits_{n\to+\infty} U_n = \mp\infty$ أو كانت النهاية غير موجودة.

نظرية 1. إذا تقاربت متتالية عددية ما $(U_n)_n$ نحو l فإنّ l وحيد.

نظرية 2. كل متتالية متقاربة فإنّها محدودة.

العكس غير صحيح عامّة، مثال: $U_n = (-1)^n$ ،

لدينا $(U_n)_n$ محدودة لأنّ $|U_n| \leq 1$ لكنّ:

$$U_n = \begin{cases} 1 & n \text{ زوجي} \\ -1 & n \text{ فردي} \end{cases} \tag{1.2}$$

$(U_n)_n$ ليست متقاربة لأنّ لها نهايتين ∓ 1 .

نظرية 3. إذا كانت المتتالية $(U_n)_n$ محدودة و $\lim\limits_{n\to+\infty} V_n = 0$ فإنّ $\lim\limits_{n\to+\infty}(U_n \times V_n) = 0$

مثال: إذا كانت $(U_n)_n$ متتالية و حدّها العام $U_n = \cos(n)$ و $(V_n)_n$ متتالية و حدّها العام معطى بـ $V_n = \frac{1}{\sqrt{n}}$ إذن $\lim\limits_{n\to+\infty}(U_n \times V_n) = 0$

نظرية 4.

1. كلّ متتالية $(U_n)_n$ متزايدة و محدودة من الأعلى فهي متقاربة نحو حدّها الأعلى :
$\lim\limits_{n\to+\infty} U_n = l = \text{Sup}\{U_n \mid n \in \mathbb{N}\}$

2. كلّ متتالية $(V_n)_n$ متناقصة و محدودة من الأدنى فهي متقاربة نحو حدّها الأدنى :
$\lim\limits_{n\to+\infty} V_n = l = \text{Inf}\{V_n \mid n \in \mathbb{N}\}$.

ملاحظة:

- كلّ متتالية متزايدة و غير محدودة من الأعلى تؤول إلى $+\infty$.
- كلّ متتالية متناقصة و غير محدودة من الأدنى تؤول إلى $-\infty$.
- كلّ متتالية متزايدة فهي محدودة من الأدنى بحدّها الأوّل.
- كلّ متتالية متناقصة فهي محدودة من الأعلى بحدّها الأوّل.

4.1.2 المتتاليات المتجاورة •

تعريف: نقول عن متتاليتين $(U_n)_n$ و $(V_n)_n$ أنّهما متجاورتين إذا تحقّق مايلي:

1. $(U_n)_n$ متزايدة (أو متناقصة).
2. $(V_n)_n$ متناقصة(أو متزايدة).
3. $\lim\limits_{n\to+\infty}(U_n - V_n) = 0$

نظرية 5.
إذا كانت المتتاليتين $(U_n)_n$ و $(V_n)_n$ متجاورتين، فإنّهما تتقاربان إلى نفس النهاية.

مثال:
ليكن $(U_n)_n$ و $(V_n)_n$ متتاليتين معرّفتين من أجل كلّ $n \geq 1$ بـ:
$V_n = U_n + \dfrac{2}{n+1}$ و $U_n = \sum\limits_{k=1}^{n} \dfrac{1}{k^2}$.

1. رتابة $(U_n)_n$:

لدينا $(U_n)_n$ متزايدة لأنّ : $U_{n+1}-U_n=\dfrac{1}{(n+1)^2}>0$

2. رتابة $(V_n)_n$:

$(V_n)_n$ متناقصة لأنّ : $V_{n+1}-V_n=\frac{-n}{(n+2).(n+1)^2}<0$

3. نهاية الفرق (U_n-V_n) :

$\lim\limits_{n\to+\infty}(V_n-U_n)=\lim\limits_{n\to+\infty}(\frac{2}{n+1})=0$

نظرية 6.
إذا كانت $(U_n)_n$ و $(V_n)_n$ متتاليتين متقاربتين، عندئذ يكون لدينا:

- المتتاليات $(U_n\mp V_n)_n$ ، $(U_n\times V_n)_n$ و $\left(\frac{U_n}{V_n}\right)$ كلّها متقاربة حيث $V_n\neq 0$ و $\lim\limits_{n\to+\infty}V_n\neq 0$.
- لدينا:

$$\lim_{n\to+\infty}(U_n\pm V_n)=\lim_{n\to+\infty}U_n\pm\lim_{n\to+\infty}V_n$$
$$\lim_{n\to+\infty}(U_n\times V_n)=\lim_{n\to+\infty}U_n\times\lim_{n\to+\infty}V_n$$
$$\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{U_n}{V_n}\right)=\frac{\lim\limits_{n\to+\infty}U_n}{\lim\limits_{n\to+\infty}V_n}$$

.

2.2 المتتاليات التراجعيّة

سمّيت المتتاليات التراجعيّة كذلك لأنّ كلّ حد يكتب بدلالة الحد الذي يسبقه، و منه الشكل العام للمتتالية التراجعية يعطى بـ:

$$\begin{cases} U_0\in[a,b] \\ U_{n+1}=f(U_n)\end{cases} \tag{2.2}$$

حيث f تابع معرّف على مجال $[a,b]$ و يحقّق $f([a,b])\subset[a,b]$.

ملاحظة:

- إذا f تابع مستمر، حيث $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ و المتتالية التراجعيّة $(U_n)_n$ متقاربة نحو l إذن l حل للمعادلة $f(l)=l$.
- إذا f تابع متزايد فإنّ دراسة تغيرات المتتالية التراجعيّة (U_n) تكون كمايلي:

1. إذا $U_1\geq U_0$ فإنّ (U_n) متزايدة.
2. إذا $U_1\leq U_0$ فإنّ (U_n) متناقصة.

نظرية 7. (نظرية النقطة الصامدة)
إذا كان $f:[a,b]\to[a,b]$ تابع مستمر و متزايد، إذن $\forall U_0\in[a,b]$ المتتالية التراجعيّة $(U_n)_n$ رتيبة و متقاربة نحو $l\in[a,b]$ و تحقّق $f(l)=l$.

مثال: نعرّف المتتالية ذات الحد العام كمايلي:

$$\begin{cases} U_0 = 1 \\ U_{n+1} = 5 + U_n, \quad n\in\mathbb{N} \end{cases} \tag{3.2}$$

$U_0=1,\ U_1=6,\ U_2=11,\ \ldots, U_{n+1}=5+U_n$.

3.2 السلاسل

1.3.2 تعاريف ←

ليكن المتتالية $(U_n)_n$ ، الهدف هو معرفة مجموع حدود المتتالية $(U_n)_n$.

تعريف 1. : السلسلة المتهية هي مجموع منته من حدود المتتالية المتهية $(U_n)_n$.

$U_1+U_2+\cdots+U_n$ و نرمز $\sum\limits_{k=1}^{n} U_k$.

مثال 1. : $\sum\limits_{k=1}^{4} k^3 = 1+2^3+3^3+4^3=100$.

تعريف 2. : السلسلة الغير متهية (السلسلة) هي مجموع غير منته من حدود المتتالية الغير متهية $(U_n)_n$

$U_1+U_2+\cdots+U_n+\cdots$ و نرمز $\sum\limits_{k=1}^{+\infty} U_k$.

مثال 2. : $\sum\limits_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{2^{k-1}} = 1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\cdots$.

2.3.2 طبيعة السلاسل ←

- بالنسبة للسلسلة المتهية: مجموع منته من حدود المتتالية المتهية يعطي عدد منته.

- أمّا بالنسبة للسلسلة؛ لمعرفة ما إذا كان مجموعها منته أم لا، يجب علينا إدراج متتالية المجاميع الجزئية و التي نرمز لها بـ $(S_n)_n$ و المعطاة بالشكل التالي : $S_n=\sum\limits_{k=0}^{n} U_k$

$S_0 = U_0$
$S_1 = U_0 + U_1$
$S_2 = U_0 + U_1 + U_2$
$\vdots$
$S_n = U_0 + U_1 + U_2 + \cdots + U_n$

عندئذ يمكن دراسة طبيعة السلسلة (تقارب، تباعد).

تعريف :

1. نقول أنّ السلسلة $\sum\limits_{k=0}^{+\infty} U_k$ متقاربة إذا كانت متتالية المجاميع الجزئية $(S_n)_n$ متقاربة:

$$\lim_{n\to+\infty} S_n = \lim_{n\to+\infty} \sum_{k=0}^{n} U_k = S$$

S هو مجموع السلسلة و نكتب $S = \sum\limits_{k=0}^{+\infty} U_k$

2. إذا كانت متتالية المجاميع الجزئية $(S_n)_n$ متباعدة إذن $\sum\limits_{k=0}^{+\infty} U_k$ متباعدة.

نظرية 8.

- إذا كانت السلسلة $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} U_n$ متقاربة إذن $\lim\limits_{n\to+\infty} U_n = 0$.
- إذا كانت $\lim\limits_{n\to+\infty} U_n \neq 0$ إذن السلسلة $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} U_n$ متباعدة.

أمثلة:

السلسلة $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{n}{n+1}\right)$ متباعدة لأنّ: $\lim\limits_{n\to+\infty} U_n = \lim\limits_{n\to+\infty} \left(\frac{n}{n+1}\right) = 1 \neq 0$.

السلسلة $\sum\limits_{k=1}^{+\infty} \left(1+\frac{1}{k}\right)$ متباعدة لأنّ: $\lim\limits_{n\to+\infty} U_n = \lim\limits_{n\to+\infty} \left(1+\frac{1}{n}\right) = 1 \neq 0$.

السلسلة $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} n^2$ متباعدة لأنّ: $\lim\limits_{n\to+\infty} U_n = \lim\limits_{n\to+\infty} (n^2) = +\infty \neq 0$.

3.3.2 حالات خاصّة -•

1.3.3.2 المتتالية الهندسية -• المتتالية الهندسية $(U_n)_n$ ذات الحد العام $U_n = U_0 q^n$. حيث U_0 حدّها الأوّل و q أساسها.

1. إذا كان $q = 1$ إذن $\forall n \in \mathbb{N},\ U_n = U_0$.
2. إذا كان $q > 1$ إذن $\lim\limits_{n\to+\infty} U_n = \pm\infty$ (حسب إشارة U_0).
3. إذا كان $q \leq -1$ المتتالية $(U_n)_n$ متباعدة.
4. إذا كان $-1 < q < 1$ إذن $\lim\limits_{n\to+\infty} U_n = 0$.

2.3.3.2 **السلسلة الهندسية** • السلسلة الهندسية هي تلك السلسلة التي مجموع حدودها هو حدود متتالية هندسية و لتكن $(U_n)_n$ ذات الحد العام $U_n = U_0 q^n$:

1. إذا كان $q = 1$ ، $\lim\limits_{n\to+\infty} U_n = \lim\limits_{n\to+\infty} U_0 = U_0 \neq 0$ إذن السلسلة $\sum\limits_{n\geq 0} U_n$ متباعدة (حسب النظرية 8).

2. إذا كان $q > 1$ ، إذن $\lim\limits_{n\to+\infty} U_n = \pm\infty$ (حسب إشارة U_0)، يمكن إستنتاج أنّ السلسلة $\sum\limits_{n\geq 0} U_n$ متباعدة.

3. إذا كان $q \leq -1$ ، المتتالية $(U_n)_n$ متباعدة و بالتالي السلسلة $\sum\limits_{n\geq 0} U_n$ متباعدة.

4. إذا كان $-1 < q < 1$ ، إذن $\lim\limits_{n\to+\infty} U_n = 0$ ، لا يمكن إستنتاج طبيعة السلسلة $\sum\limits_{n\geq 0} U_n$ ، يجب دراسة طبيعتها (دراسة طبيعة المتتالية (S_n)).

ليكن $\sum\limits_{k=0}^{n} U_0 q^k = U_0 + U_0 q + U_0 q^2 + \cdots + U_0 q^n$ إذن لدينا:

$$S_n = \sum_{k=0}^{n} U_0 q^k = U_0 \left(\frac{1-q^{n+1}}{1-q}\right)$$

ملاحظة:

- إذا كان $-1 < q < 1$ و $(S_n)_n$ متتالية حدّها العام $S_n = \sum\limits_{k=0}^{n} U_0 q^k$ إذن :
$S = \lim\limits_{n\to+\infty} S_n = U_0 \left(\frac{1}{1-q}\right)$ و نكتب $S = U_0 + U_0 q + U_0 q^2 + \cdots = U_0 \left(\frac{1}{1-q}\right)$

- إذا كان $q = 1$, $S_n = \sum\limits_{k=0}^{n} U_0 1^k = U_0 + U_0 + \cdots + U_0 = U_0(n+1)$ إذن $\lim\limits_{n\to+\infty} S_n = \pm\infty$ (حسب إشارة U_0) و منه $(S_n)_n$ متباعدة.

أمثلة:

- لدينا السلسلة $\sum\limits_{n\geq 0} \frac{1}{2^n}$ متقاربة، لأنّ: $S = \lim\limits_{n\to+\infty} S_n = \frac{1}{1-\frac{1}{2}} = 2$.

- كذلك لدينا السلسلة $\sum\limits_{n\geq 0} \frac{1}{3^n}$ متقاربة، لأنّ: $S = \lim\limits_{n\to+\infty} S_n = \frac{1}{1-\frac{1}{3}} = \frac{3}{2}$.

- السلسلة $\sum\limits_{n\geq 0} 5^n$ متباعدة لأنّ $q = 5 > 1$.

- السلسلة $\sum\limits_{n\geq 0} 1^n$ متباعدة لأنّ $\lim\limits_{n\to+\infty} S_n = \lim\limits_{n\to+\infty} (n+1) = +\infty$.

4.2 تمارين

التمرين الأوّل: هل القضايا التالية صحيحة، في حالة ما إذا كانت خاطئة إعط مثال مضاد :

1. كلّ متتالية محدودة من الأعلى فهي متزايدة.
2. مجموع متتاليتين متباعدتين متتالية متباعدة.
3. كلّ متتالية متقاربة فهي محدودة.
4. إذا كانت $(U_n)_n$ متقاربة فإنّ $(U_n^2)_n$ متقاربة.
5. كلّ متتالية غير محدودة من الأعلى فهي تؤول نحو $+\infty$.
6. إذا كانت $(U_n+V_n)_n$ متتالية متباعدة فإنّ المتتاليتين $(U_n)_n$ و $(V_n)_n$ متباعدتين.
7. إذا كانت $\lim\limits_{n\to+\infty} U_n = 0$ فإنّ $\lim\limits_{n\to+\infty}(U_n \times V_n) = 0$.
8. إذا كانت $(U_n)_n$ متقاربة فإنّ $(\frac{1}{U_n})_n$ متقاربة.
9. كلّ متتالية محدودة فهي متقاربة.

التمرين الثاني:

1. أكتب الحدود الأربعة الأولى للمتتاليات التالية:

$U_n = 1-\frac{1}{3n}, \quad V_n = \frac{(-1)^{n+1}}{4n-1}, \quad W_n = \frac{3n}{2+n^2}, \quad T_n = 2((-1)^n+2).$

2. بالنسبة للمتتاليات ذات الحدود العامّة التالية:

$$U_n = 2, \quad V_n = n.(-1)^n, \quad W_n = \frac{-2}{n^2},$$

$$T_n = \frac{(-1)^n}{n^2}, \quad Z_n = \frac{(-1)^n}{3n}, \quad K_n = 1-\frac{1}{3n}$$

.

1. أدرس رتابة المتتاليات.
2. هل المتتاليات محدودة.
3. أدرس طبيعة المتتاليات.

التمرين الثالث: 1. أدرس طبيعة (تقارب أو تباعد) و تغيّرات (رتابة) المتتاليات التالية.

$$U_n = \frac{5n+2}{7n+3}, \quad V_n = n + (-1)^n, \quad W_n = \frac{1}{n^2+1}\sin(n),$$

$$L_n = \frac{1}{n} + (-1)^n, \quad Y_n = \frac{(-1)^n}{n},$$

$$M_n = \frac{n^2+1}{n+1}, \quad K_n = \frac{1-n^2}{n+2}, \quad S_n = M_n + K_n.$$

2. هل $(U_n)_n$ و $(V_n)_n$ المعرّفتين كمايلي متجاورتين، حيث:

$$U_n = \frac{-1}{n+2}, \quad V_n = \frac{2}{n+1},$$

و

$$U_n = 1 + \frac{1}{2^2} + \cdots + \frac{1}{n^2}, \quad V_n = U_n + \frac{1}{n}.$$

3. أوجد الخصائص المميّزة (Inf ، Sup ، Min ، Max) للمجموعات التالية:

$$A = \left\{\frac{1}{n}, \quad n \in \mathbb{N}^*\right\}, \quad B = \left\{3 - \frac{1}{n}, \quad n \geq 1\right\}$$

.

التمرين الرابع: لتكن المتتالية التراجعية المعرّفة كمايلي:

$$\begin{cases} U_0 = 0 \\ U_{n+1} = \dfrac{7U_n + 4}{3U_n + 3} \end{cases} \tag{4.2}$$

.

1. برهن أنّ : $\forall n \in \mathbb{N},\ 0 \leq U_n \leq 2$.
2. هل المتتالية (U_n) رتيبة ؟ أدرس طبيعتها.
3. ليكن $A = \{U_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ ، أوجد $\text{Inf}A,\ \text{Sup}A$.

التمرين الخامس: لتكن المتتالية التراجعية المعرّفة كمايلي:

$$\begin{cases} U_0 = \dfrac{1}{2} \\ U_{n+1} = U_n^2 + \dfrac{3}{16} \end{cases} \tag{5.2}$$

.

1. برهن أنّ : $\forall n \in \mathbb{N},\ \frac{1}{4} \leq U_n \leq \frac{3}{4}$.
2. هل المتتالية (U_n) رتيبة ؟ أدرس طبيعتها.
3. ليكن $A = \{U_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ ، أوجد $\text{Inf}A,\ \text{Sup}A$.

التمرين السادس: لتكن السلسلة ذات الحد العام $U_n = \frac{1}{n(n+1)}$

1. تأكّد أنّ $\frac{1}{n(n+1)} = \frac{a}{n} + \frac{b}{n+1}$ حيث a, b عددين حقيقيين يطلب تعيينهما.

2. إعط شكل آخر لعبارة S_n حيث $S_n = \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{1}{k(k+1)}\right)$.

3. أدرس طبيعة المتتالية (S_n) ثمّ إستنتج طبيعة السلسلة $\sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{1}{n(n+1)}\right)$.

الفصل 3

التوابع الحقيقية لمتغيّر حقيقي

1.3 مفاهيم عامّة

تعريف التابع: نسمّي تابع حقيقي لمتغير حقيقي كلّ علاقة من $\mathbb{R}$ نحو $\mathbb{R}$ بحيث ترفق كل عنصر x من $\mathbb{R}$ عنصر واحد $f(x)$ على الأكثر من $\mathbb{R}$:

$$\begin{array}{rccc} f: & \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & x & \longmapsto & f(x) \end{array}$$

مجموعة تعريف التابع f :

$$D_f = \Big\{ x \in \mathbb{R} \ | \ f(x) \text{ موجود و معرّف} \Big\}$$

أمثلة:

- $D_f = \mathbb{R}$ ، $f(x) = x^2 + 2x + 1$.
- $D_f = \{x \in \mathbb{R} \ | \ x - 1 \geq 0\} = [1, +\infty[$ ، $g(x) = \sqrt{x-1}$.
- $D_f = \{x \in \mathbb{R} \ | \ x^2 - 1 \geq 0\} =]-\infty, -1] \cup [1, +\infty[$ ، $h(x) = \sqrt{x^2-1}$.
- $D_f = \mathbb{R} - \{3\}$ ، $K(x) = \dfrac{x^2+1}{x-3}$.

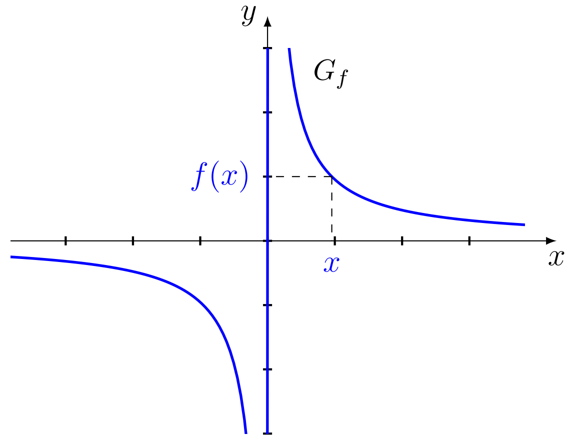
بيان التابع:

$$G_f = \{(x, f(x)) \ | \ x \in D_f\}.$$

مثال: ليكن التابع :

$$\begin{array}{rccc} f: &]-\infty, 0[\cup]0, +\infty[& \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & x & \longmapsto & f(x) = \dfrac{1}{x} \end{array}$$

بيان التابع $x \mapsto \dfrac{1}{x}$ يعطى بالشكل (1.3) التالي:



الشكل (1.3) : التمثيل البياني للتابع $\frac{1}{x}$

1.1.3 خصائص التابع

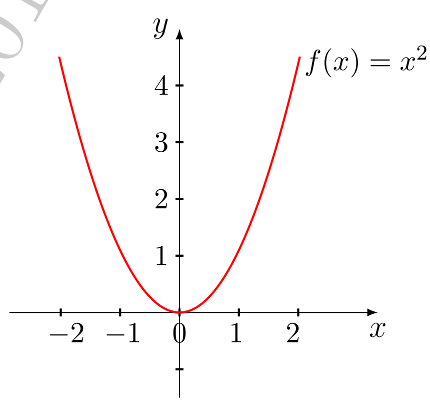
1.1.1.3 رتابة تابع ليكن $f : E \longrightarrow F$ حيث E و F مجموعتين جزئيتين من $\mathbb{R}$.

- **التابع المتزايد:** نقول أنّ التابع f متزايد على مجال I حيث $I \subset D_f$ إذا:
$$\forall\, x_1,\ \ x_2 \in I,\ \ x_1 \leq x_2 \Rightarrow f(x_1) \leq f(x_2)$$

- **التابع المتناقص:** نقول أنّ التابع f متناقص على مجال I حيث $I \subset D_f$ إذا:
$$\forall\, x_1, x_1 \in I,\ \ x_1 \leq x_2 \Rightarrow f(x_1) \geq f(x_2)$$

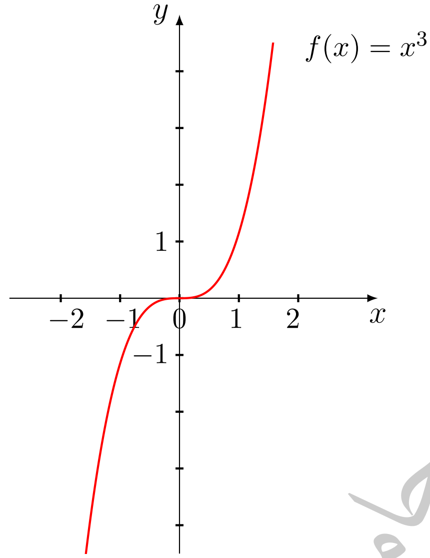
مثال:

- التابع f المعرّف بـ $f(x) = x^2$ متناقص تماما على مجال $]-\infty, 0]$ و متزايد تماما على مجال $[0, +\infty[$ (أنظر الشكل (2.3))



الشكل (2.3) : التمثيل البياني للتابع x^2

- بينما التابع f المعرّف بـ $f(x)=x^3$ متزايد تماما على $]-\infty,+\infty[$ (أنظر الشكل (3.3))



الشكل (3.3) : التمثيل البياني للتابع x^3

2.1.1.3 **التابع الزوجي و التابع الفردي** • ليكن $f:E\longrightarrow F$ حيث E و F مجموعتين جزئيتين من $\mathbb{R}$.

- نقول أنّ التابع f تابع زوجي إذا : $\forall\, x\in D_f,\ f(-x)=f(x)$
- نقول أنّ التابع f تابع فردي إذا: $\forall\, x\in D_f,\ f(-x)=-f(x)$

أمثلة:

- التابع f المعرّف بـ $f(x)=x^2$ زوجي لأنّ:
$\forall x\in\mathbb{R}:\ f(-x)=(-x)^2=x^2=f(x)$. (أنظر الشكل (2.3))
- التابع f المعرّف بـ $f(x)=\cos(x)$ زوجي لأنّ:
$\forall x\in\mathbb{R}:\ f(-x)=\cos(-x)=\cos(x)=f(x)$. (سنرى فيمابعد بيان التابع $\cos$)
- التابع f المعرّف بـ $f(x)=x^3$ فردي لأنّ:
$\forall x\in\mathbb{R}:\ f(-x)=(-x)^3=-x^3=-f(x)$. (أنظر الشكل (3.3))
- التابع f المعرّف بـ $f(x)=\sin(x)$ فردي لأنّ :
$\forall x\in\mathbb{R}:\ f(-x)=\sin(-x)=-\sin(x)=-f(x)$. (سنرى فيمابعد بيان التابع $\sin$)

ملاحظة :

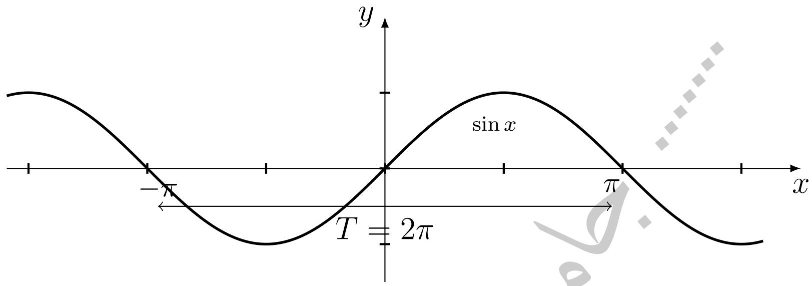
- التوابع الزوجية: في حالة f تابع زوجي يكون بيانه تناظري مع محور التراتيب.
- التوابع الفردية: في حالة f تابع زوجي يكون بيانه تناظري مع المبدء.

3.1.1.3 التابع الدوري • ليكن التابع f معرّف كمايلي:

$$\begin{array}{rcll} f: & E & \longrightarrow & F \\ & x & \longmapsto & f(x) \end{array}$$

نقول أنّ التابع f تابع دوري إذا وجد عدد حقيقي موجب T بحيث من أجل كلّ x حيث $x \in D_f$ لدينا $f(x+T) = f(x)$ ، بعبارة أخرى $\exists T > 0, \forall x \in D_f: \ f(x+T) = f(x)$ حيث T هي دورة.

مثال: التابع المعرّف بـ $f(x) = \sin(x)$ هو تابع دوري و دورته هي $T = 2\pi$.



الشكل (4.3) : التمثيل البياني للتابع $\sin x$

4.1.1.3 التابع المحدود • نقول أنّ التابع f تابع محدود إذا:

$$\exists m,\ M \in \mathbb{R},\ \forall x \in D_f:\ m \leq f(x) \leq M$$

مثال: $f(x) = \sin(x)$

$$\forall x \in \mathbb{R}: -1 \leq \sin(x) \leq 1 \Longleftrightarrow \forall x \in \mathbb{R}:\ |\sin(x)| \leq 1$$

2.3 النهايات

1.2.3 النهايات المتنهية •

1.1.2.3 نهايات تابع عند النقطة x_0 •

ليكن $f: I = [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ و لتكن $x_0 \in I$.

- نقول أنّ التابع f يقبل نهاية l عند النقطة x_0 إذا : $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = l$ و l منته.

مثال .1

$$\lim_{x\to 3}(2x+6) = 12$$

$$\lim_{x\to -4}\left(\frac{x^2-16}{x+4}\right) = \lim_{x\to -4}\left(\frac{(x-4)(x+4)}{x+4}\right) = \lim_{x\to -4}(x-4) = -8$$

$$\lim_{x\to 2}\left(\frac{-2x^2+7x-6}{x-2}\right) = \lim_{x\to 2}\left(\frac{(-2x+3)(x-2)}{x-2}\right) = \lim_{x\to 2}(-2x+3) = -1$$

- نقول أنّ f يقبل نهاية على يمين x_0 إذاا : $\lim\limits_{x \to x_0^+} f(x) = l_1$ حيث l_1 موجود.

مثال 2. التابع f المعرّف بـ $f(x)=\sqrt{x-2}$ حيث $D_f=[2,+\infty[$ يقبل نهاية على يمين النقطة 2 لأنّ: $\lim\limits_{x\to 2^+}(\sqrt{x-2})=0$.

- نقول أنّ f يقبل نهاية على يسار x_0 إذاا : $\lim\limits_{x\to x_0^-} f(x)=l_2$ حيث l_2 موجود.

مثال 3. التابع f المعرّف بـ $f(x)=\sqrt{5-x}$ حيث $D_f=]-\infty,5]$ يقبل نهاية على يسار النقطة 5 لأنّ: $\lim\limits_{x\to 5^-}(\sqrt{5-x})=0$.

نظرية 1. :
نقول أنّ التابع f يقبل نهاية منتهية l عند x_0 إذاا : $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=\lim\limits_{x\to x_0^+} f(x)=\lim\limits_{x\to x_0^-} f(x)=l$

مثال 4.

$$f(x)=\begin{cases}\sin(x) & x\geq 0,\\ \cos(x)-1 & x<0\end{cases}$$

ملاحظة:

- في حالة $\lim\limits_{x\to x_0^-} f(x)\neq \lim\limits_{x\to x_0^+} f(x)$ نقول أنّ $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$ غير موجودة أي f لا تقبل نهاية عند x_0.

مثال 5. التابع f المعرّف بـ $f(x)=\dfrac{|x|}{x}$ غير معرّف عند 0 ، لكنّ: $\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{|x|}{x}=1$ و $\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{|x|}{x}=-1$
لأنّ:

$$f(x)=\begin{cases}+1 & x>0,\\ -1 & x<0\end{cases}$$

إذن f لا تقبل نهاية عند 0.
نظرية 2. :
إذا كان التابع f يقبل نهاية منتهية l عند x_0 فإنّ هذه النهاية وحيدة.

2.1.2.3 **نهايات تابع في جوار اللانهاية** • ليكن $f:I=]a,+\infty[\longrightarrow\mathbb{R}$

تعريف: نقول أنّ f يقبل نهاية l لمّا x يؤول نحو ∞ إذا : $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=l$

مثال 6 : $f(x)=2-\frac{1}{x}$ حيث $D_f=\mathbb{R}^*$

لدينا f يقبل نهاية في جوار لانهاية لأنّ: $\lim\limits_{x\to\mp\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to\mp\infty} 2-\frac{1}{x}=2$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{2x^3+5x^2+6}{x^3-3x+9}\right)=\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{2x^3}{x^3}\right)=2$$

3.1.2.3 **خواص النهايات المتنهية** • إذا $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=l_1,\ \lim\limits_{x\to x_0} g(x)=l_2$ و α عدد ثابت فإنّ:

1. $\lim\limits_{x\to x_0}\alpha=\alpha$.

2. $\lim\limits_{x\to x_0}(\alpha f(x))=\alpha\times l_1$.

3. $\lim\limits_{x\to x_0}(f(x)\mp g(x))=\lim\limits_{x\to x_0}f(x)\mp\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=l_1\mp l_2$.

4. $\lim\limits_{x\to x_0}(f(x)\times g(x))=\lim\limits_{x\to x_0}f(x)\times\lim\limits_{x\to x_0}g(x)=l_1\times l_2$.

5. $\lim\limits_{x\to x_0}\left(\dfrac{f(x)}{g(x)}\right)=\dfrac{\lim\limits_{x\to x_0}f(x)}{\lim\limits_{x\to x_0}g(x)}=\dfrac{l_1}{l_2}$. مع $l_2\neq 0$.

2.2.3 النهايات الغير متهية
• يوجد حالتين للنهايات الغير متهية:

الحالة الأولى:

نقول أنّ f يقبل نهاية ∞ لمّا x يؤول نحو ∞ إذا : $\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=\infty$

مثال 7 : $f(x)=x^2$ حيث $D_f=\mathbb{R}$ لدينا : $\lim\limits_{x\to\mp\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to\mp\infty}x^2=+\infty$

$\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}(-2x^3+4x^2-3)=+\infty$

الحالة الثانية:

نقول أنّ f يقبل نهاية ∞ لمّا x يؤول نحو x_0 إذا : $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=\infty$

مثال 8 : $f(x)=\frac{1}{x}$ حيث $D_f=\mathbb{R}^*$

لدينا: $\lim\limits_{x\to 0^+}f(x)=\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{1}{x}=+\infty$ و $\lim\limits_{x\to 0^-}f(x)=\lim\limits_{x\to 0^-}\frac{1}{x}=-\infty$

$f(x)=\frac{1}{x-1}$ حيث $D_f=\mathbb{R}-\{1\}$

لدينا: $\lim\limits_{x\to 1^+}f(x)=\lim\limits_{x\to 1^+}\frac{1}{x-1}=+\infty$ و $\lim\limits_{x\to 1^-}f(x)=\lim\limits_{x\to 1^-}\frac{1}{x-1}=-\infty$

$f(x)=\frac{1}{x^2}$ حيث $D_f=\mathbb{R}^*$ $\lim\limits_{x\to 0}f(x)=\lim\limits_{x\to 0^+}f(x)=\lim\limits_{x\to 0^-}f(x)=\lim\limits_{x\to 0}\frac{1}{x^2}=\infty$

نظرية 3. : إذا كانت $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=0$ و g دالة محدودة فإنّ: $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)\times g(x)=0$

أمثلة:

1. $\lim\limits_{x\to 0}\left(x^5\times\sin(\frac{1}{x^2})\right)=0$ لأنّ:

$\forall x\in\mathbb{R}^*,\ |\sin(\frac{1}{x^2})|\leq 1$ و $\lim\limits_{x\to 0}x^5=0$

2. $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{\sin(x)}{x^2}\right)=0$ لأنّ:

$\forall x\in\mathbb{R},\ |\sin(x)|\leq 1$ و $\lim\limits_{x\to+\infty}(\frac{1}{x^2})=0$

ملاحظة:

$\lim\limits_{x\to+\infty}\sin(x)$ و $\lim\limits_{x\to+\infty}\cos(x)$ غير موجودة.

$\lim\limits_{x\to 0}\sin(\frac{1}{x})$ و $\lim\limits_{x\to 0}\cos(\frac{1}{x})$ غير موجودة.

حالات عدم التعيين

ملاحظة : نذكر بعض حالات عدم التعيين المثلة بالأشكال الآتية: $\dfrac{0}{0}$ ، $\dfrac{\infty}{\infty}$ ، $0\times\infty$ ، $\infty-\infty$ ، 0^0 ، ∞^0 ، 1^∞ .

أمثلة:

1. $\lim\limits_{x\to 3}(\frac{x-3}{\sqrt{x+1}-2}) = [\frac{0}{0}]$ نضرب و نقسّم على المرافق فنتحصّل على: $\lim\limits_{x\to 3}(\sqrt{x+1}+2) = 4$.
2. $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{2x^3+5x^2+6}{x^3-3x+9}\right) = [\frac{+\infty}{+\infty}]$, نحاول إزالة حالة عدم التعيين فنجد:
$$\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{2x^3+5x^2+6}{x^3-3x+9}\right) = \lim_{x\to+\infty}\left(\frac{2x^3}{x^3}\right) = 2 .$$
3. $\lim\limits_{x\to 0^-}\left(-x\sqrt{1-\frac{1}{x}}\right) = [0.\infty]$ نحاول إزالة حالة عدم التعيين إذن:
$$\lim_{x\to 0^-}\left(-x\sqrt{1-\frac{1}{x}}\right) = \lim_{x\to 0^-}\left(-\sqrt{x^2-x}\right) = 0$$
4. $\lim\limits_{x\to+\infty}(\sqrt{x^2+2}-x) = [+\infty-\infty]$ نضرب و نقسّم على المرافق فنتحصّل على:
$$\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{2}{\sqrt{x^2+2}+x}\right) = 0$$

3.3 إستمرارية التوابع

تعريف: نقول أنّ التابع f مستمرّ عند النقطة x_0 إذا:

1. $f(x_0)$ معرّف.
2. $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$ موجود.
3. $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$

مثال 1. **:** $f(x) = 2x+5$ حيث $x_0 = 1$ ، لدينا f مستمر عند النقطة $x_0 = 1$ لأنّ:

1. $f(x_0) = f(1) = 5$.
2. $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = \lim\limits_{x\to 1} f(x) = 5$.
3. $\lim\limits_{x\to 1} f(x) = f(x_0) = f(1) = 5$

مثال 2. **:** التابع f المعرّف بـ $f(x) = \frac{\sin x}{x}$ غير مستمرّ عند النقطة $x_0 = 0$ لأنّه غير معرّف عند النقطة $x_0 = 0$ ، رغم أنّ $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = \lim\limits_{x\to 0} f(x) = \lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{\sin x}{x}\right) = 1$.

ملاحظة : إذا كان f غير معرّف عند x_0 فإنّ f غير مستمرّ عند x_0 .

تعاريف:

1. نقول أنّ التابع f مستمرّ على يمين النقطة x_0 إذا: $\lim\limits_{x\to x_0^+} f(x) = f(x_0)$
2. نقول أنّ التابع f مستمرّ على يسار النقطة x_0 إذا: $\lim\limits_{x\to x_0^-} f(x) = f(x_0)$

نظرية 4. **:** نقول أنّ التابع f مستمرّ عند النقطة x_0 إذا: $\lim\limits_{x\to x_0^+} f(x) = \lim\limits_{x\to x_0^-} f(x) = f(x_0)$.

1.3.3 إستمرارية التوابع على مجال •

تعريف 1. : إستمرارية التوابع على مجال $]a,b[$: نقول أنّ f مستمرّ على $]a,b[$ إذاا f مستمرّ عند كلّ نقطة من $]a,b[$.

تعريف 2. : إستمرارية التوابع على مجال $[a,b]$: نقول أنّ f مستمرّ على $[a,b]$ إذاا:

- f مستمرّ على $]a,b[$.
- f مستمرّ على يمين النقطة a.
- f مستمرّ على يسار النقطة b.

2.3.3 التمديد بالإستمرارية •

ليكن I مجال، x_0 نقطة من I و $f : I\backslash\{x_0\} \longrightarrow \mathbb{R}$ تابع.

- نقول أنّه يمكن تمديد f بالإستمرارية عند النقطة x_0 أو f يقبل تمديد بالإستمرارية عند النقطة x_0 إذا f يقبل نهاية متهية l عند x_0 و نكتب: $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = l$
- نعرّف إذن التابع $\widetilde{f} : I \longrightarrow \mathbb{R}$ من أجل كلّ $x \in I$

$$\begin{array}{rccl} \widetilde{f}: & I & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & x & \longmapsto & \widetilde{f}(x) = \begin{cases} f(x) & x \neq x_0, \\ l & x = x_0 \end{cases} \end{array}$$

. إذن $\widetilde{f}$ مستمرّة عند x_0 و نسمّي $\widetilde{f}$ تمديد f بالإستمرارية عند x_0 .

مثال 1. التابع $f(x) = x.\sin(\frac{1}{x})$ المعرّف على $\mathbb{R}^*$ يقبل تمديد بالإستمرارية عند $x_0 = 0$ لأنّ:

$\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = \lim\limits_{x\to 0} x\sin(\frac{1}{x}) = 0$ (حسب النظرية 2. جداء تابعين الأوّل يؤول إلى 0 و الثاني محدود) و بالتالي يمكن تعريف $\widetilde{f}$ المستمرّة في $\mathbb{R}$ كمايلي:

$$\begin{array}{rccl} \widetilde{f}: & \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & x & \longmapsto & \widetilde{f}(x) = \begin{cases} x\sin(\frac{1}{x}) & x \neq 0, \\ 0 & x = 0 \end{cases} \end{array}$$

. **مثال** 2. التابع $f(x) = \cos(\frac{1}{x-3})$ المعرّف على $\mathbb{R} - \{3\}$ لا يقبل تمديد بالإستمرارية عند $x_0 = 3$ لأنّ: $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = \lim\limits_{x\to 3} \cos(\frac{1}{x-3})$ غير موجود.

3.3.3 خواص التوابع المستمرّة •

ليكن f و g تابعين مستمرّين عند x_0 من I (على I على التوالي)، إذن:

1. جمع أو طرح تابعين مستمرّين هو تابع مستمّر عند x_0 (على I على التوالي).
2. جداء تابعين مستمرّين هو تابع مستمّر عند x_0 (على I على التوالي).

3. حاصل قسمة تابعين مستمرّين هو تابع مستمرّ عند x_0 (على I على التوالي) إذا المقام يختلف عن الصفر.

4. تركيب تابعين مستمرّين هو تابع مستمرّ عند x_0 (على I على التوالي).

نظرية القيم المتوسطة: ليكن $f:[a,b]\longrightarrow\mathbb{R}$ تابع مستمرّ على $[a,b]$ و لدينا $f(a)\times f(b)<0$ إذن يوجد على الأقل عدد c حيث $c\in]a,b[$ يحقق $f(c)=0$ أي:

$$f(a)\times f(b)<0\Longrightarrow \exists c\in]a,b[\ |\ f(c)=0$$

ملاحظة: إذا كان f تابع رتيب تماما (متناقص تماما أو متزايد تماما) على $[a,b]$ فإنّ c وحيد.

نظرية التوابع العكسية: كلّ تابع f حيث $f:I\longrightarrow f(I)=J$ مستمرّ و رتيب تماما على I يقبل تابع عكسي $f^{-1}:J\longrightarrow I$ مستمرّ و رتيب تماما على J و له نفس تغيّرات التابع f.

4.3 التوابع الأساسيّة

1.4.3 التابع اللّوغرتمي و التابع الأسّي

1.1.4.3 التابع اللّوغرتمي

التابع اللّوغرتمي معرّف بـ:

$$\begin{array}{rlcl} f: &]0,+\infty[& \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & x & \longmapsto & f(x)=\ln x \end{array}$$

.

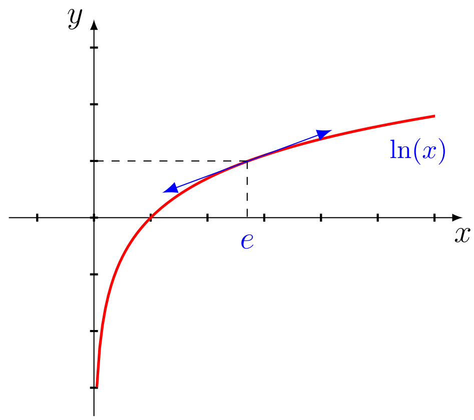
- $D_f=]0,+\infty[$
- $\ln(a\times b)=\ln(a)+\ln(b)$
- $\ln(\frac{a}{b})=\ln(a)-\ln(b)$
- $\ln a^n=n.\ln a$
- $\ln 1=0,\ \ln e^x=x,\ \ln e=1$

نستطيع أن نلخّص تغيّرات التابع ln في الجدول (1.3) الموضح أدناه:

x	0	1	$+\infty$
$(\ln x)'=\frac{1}{x}$	‖	$+$	
$\ln x$	‖ $-\infty$	$\nearrow 0 \nearrow$	$+\infty$

الجدول (1.3) : تغيّرات التابع ln

من الجدول (1.3) يكون رسم بيان التابع ln كمايلي :



الشكل (5.3) : التمثيل البياني للتابع ln

التابع ln معرّف، مستمرّ و متزايد تماما على $]0,+\infty[$ إذن فهو يقبل تابع عكسي $f^{-1}: exp: \mathbb{R} \longrightarrow]0,+\infty[$ مستمرّ و متزايد تماما على $\mathbb{R}$ و له نفس تغيّرات التابع ln. (حسب نظرية التوابع العكسية)

2.1.4.3 **التابع الأسّي** • التابع الأسّي معرّف بـ:

$$\begin{array}{rccl} f: & \mathbb{R} & \longrightarrow &]0,+\infty[\\ & x & \longmapsto & f(x)=\exp(x)=e^x \end{array}$$

.

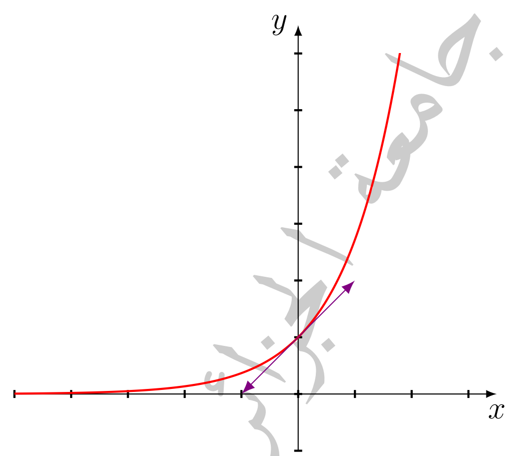
- $D_f=\mathbb{R}$
- exp مستمرّ و متزايد تماما على $\mathbb{R}$
- $\exp(a+b)=\exp(a)\times\exp(b)$
- $(\exp(x))^n=\exp(n.x)$
- $\exp(0)=1$

نستطيع أن نلخّص تغيّرات التابع exp في الجدول (2.3) الموضح أدناه:

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$(\exp(x))' = \exp(x)$		$+$	
$\exp(x)$	0	$\nearrow 1 \nearrow$	$+\infty$

الجدول (2.3) : تغيّرات التابع exp

من الجدول (2.3) يكون رسم بيان التابع exp كمايلي :



الشكل (6.3) : التمثيل البياني للتابع exp

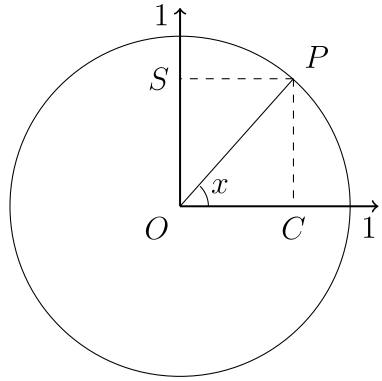
3.1.4.3 **تابع القوى** • هو التابع المعرّف بـ $f(x) = a^x = e^{xlna}$ حيث $x \in \mathbb{R}$ ، $a > 0,\ a \neq 1$
تابعه العكسي هو التابع اللّوغرتمي ذو الأساس a حيث:

$$\begin{array}{llll} f^{-1}: &]0,+\infty[& \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & x & \longmapsto & f^{-1}(x) = \log_a(x) = \frac{\ln x}{\ln a} \end{array}$$

.

2.4.3 **التوابع المثلثية** • sin و cos للزاوية x معرّفتين داخل الدائرة المثلثية كمايلي (أنظر الشكل (7.3)) :

$$\sin(x) = \frac{\overline{OS}}{\overline{OP}} = \overline{OS} = \overline{CP}, \qquad \text{و} \qquad \cos(x) = \frac{\overline{OC}}{\overline{OP}} = \overline{OC} = \overline{SP} (\overline{OP} = 1)$$



الشكل (7.3) : الدائرة المثلثية

سندرس في مايلي بعض التوابع المثلثية البسيطة :

1. $f(x) = \sin x$
2. $f(x) = \cos x$
3. $f(x) = \tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$

1.2.4.3 **التابع** sin • ليكن التابع f المعرّف كمايلي:

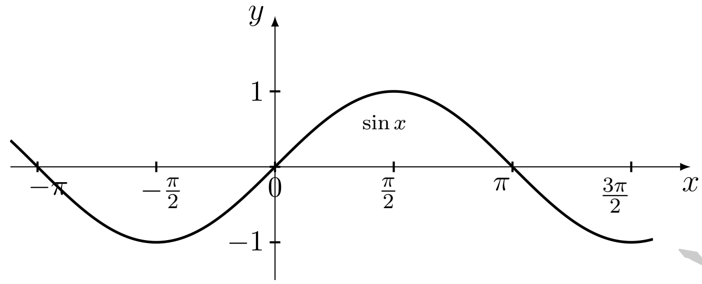
$$\begin{array}{rccl} f: & \mathbb{R} & \longrightarrow & [-1,1] \\ & x & \longmapsto & f(x) = \sin x \end{array}$$

نعلم أنّ التابع sin معرّف و مستمر على $\mathbb{R}$ ، لكنّه ليس رتيب على $\mathbb{R}$ (sin تابع دوري) إذن فهو ليس تقابلي على $\mathbb{R}$ و بالتالي لا يقبل تابع عكسي. الجدول التالي (3.3) يمثّل جدول تغيّرات التابع sin على المجال $[-\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}]$:

x	$-\frac{\pi}{2}$	0	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$
$(\sin x)' = \cos x$	0		0		0
$\sin(x)$	-1 ↗	0 ↗	1 ↘	0 ↘	-1

الجدول (3.3) : تغيّرات التابع sin

من الجدول (3.3) يكون رسم بيان التابع sin كمايلي :



الشكل (8.3) : التمثيل البياني للتابع $\sin x$

لنعتبر التابع $\sin$ على المجال $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$:

$$\begin{array}{rccc} \sin: & [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] & \longrightarrow & [-1,1] \\ & x & \longmapsto & \sin x \end{array}$$

في المجال $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ ، التابع $\sin$ مستمر و متزايد تماما، إذن فهو تقابلي و بالتالي يقبل تابع عكسي يدعى بالتابع $\arcsin$ حيث: $\arcsin : [-1,1] \longrightarrow [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ و منه الخواص التالية:

- $\sin(\arcsin(x)) = x, \ \forall x \in [-1,1]$
- $\arcsin(\sin(x)) = x, \ \forall x \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$
- $y = \sin x \Leftrightarrow x = \arcsin y, \ \forall x \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}], \ \forall y \in [-1,1]$

x	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
$\sin x$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1

x	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
$\arcsin x$	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$

الجدول (4.3) : التابع $\sin$ و التابع العكسي $\arcsin$

2.2.4.3 التابع $\cos$

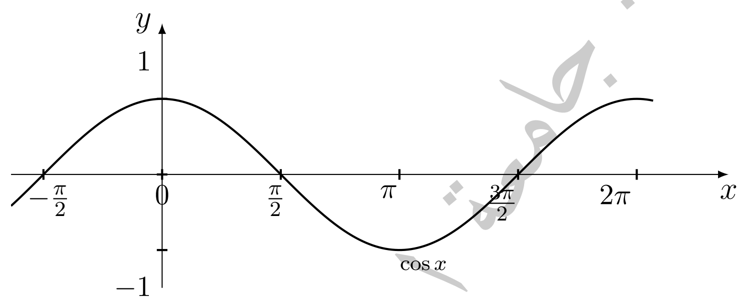
• ليكن التابع f المعرّف كمايلي:

$$\begin{array}{rccc} f: & \mathbb{R} & \longrightarrow & [-1,1] \\ & x & \longmapsto & f(x) = \cos x \end{array}$$

نعلم أنّ التابع $\cos$ معرّف و مستمر على $\mathbb{R}$ ، لكنّه ليس رتيب على $\mathbb{R}$ ($\cos$ تابع دوري) إذن فهو ليس تقابلي على $\mathbb{R}$ و بالتالي لا يقبل تابع عكسي. الجدول التالي يمثّل جدول تغيّرات التابع $\cos$ على المجال $[0, \pi]$:

x	0	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π
$(\cos x)' = -\sin x$	0	$-$	0	$+$	0
$\cos(x)$	1 ↘	0 ↘	-1	↗ 0	↗ 1

الجدول (5.3) : تغيّرات التابع cos



الشكل (9.3) التمثيل البياني للتابع $\cos x$

لنعتبر التابع cos على المجال $[0,\pi]$.

$$\begin{array}{rccc} \cos : & [0,\pi] & \longrightarrow & [-1,1] \\ & x & \longmapsto & \cos x \end{array}$$

في المجال $[0,\pi]$ التابع cos مستمر و متناقص تماما، إذن فهو تقابلي و بالتالي يقبل تابع عكسي يدعى بالتابع arccos حيث $\arccos : [-1,1] \longrightarrow [0,\pi]$ و منه الخواص التالية:

- $\cos(\arccos(x)) = x,\ \forall x \in [-1,1]$
- $\arccos(\cos(x)) = x,\ \forall x \in [0,\pi]$
- $y = \cos x \Leftrightarrow x = \arccos y,\ \forall x \in [0,\pi],\ \forall y \in [-1,1]$

x	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
$\cos x$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0

x	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
$\arccos x$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{6}$	0

الجدول (5.3) : التابع cos و التابع العكسي arccos

ملاحظة: بالنسبة للتابع $\tan$ المعرّف بـ $\tan(x)=\frac{\sin x}{\cos x}$ و $D_{\tan}=\{x\neq\frac{\pi}{2}+k\pi, \mid k\in\mathbb{Z}\}$.
نعلم أنّ التابع $\tan :]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}[\longrightarrow\mathbb{R}$ مستمر و متزايد تماما فهو إذن تقابلي و بالتالي يقبل تابع عكسي يدعى بالتابع $\arctan$ حيث $\arctan:\mathbb{R}\longrightarrow]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}[$ ، و منه الخواص التالية:

- $\tan(\arctan(x))=x,\ \forall x\in\mathbb{R}$
- $\arctan(\tan(x))=x,\ \forall x\in]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}[$
- $y=\tan x\Leftrightarrow x=\arctan y,\ \forall x\in]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}[,\ \forall y\in\mathbb{R}$

x	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
$\tan x$	0	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	1	$\sqrt{3}$	∞

x	0	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	1	$\sqrt{3}$	∞
$\arctan x$	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$

الجدول (6.3) : التابع $\tan$ و التابع العكسي $\arctan$

5.3 إشتقاق التوابع

1.5.3 تعاريف ← ليكن I مجال مفتوح من $\mathbb{R}$ و $f:I\longrightarrow\mathbb{R}$ تابع و ليكن $x_0\in I$

تعريف 1 : نقول أنّ التابع f قابل للإشتقاق عند النقطة x_0 إذا:

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=l \tag{1.3}$$

حيث l متهية، عندئذ نسمّي l مشتق التابع f عند النقطة x_0 و نكتب $l=f'(x_0)$

تعريف:

1. نقول أنّ التابع f قابل للإشتقاق على يمين النقطة x_0 إذا:
$$\lim_{x\to x_0^+}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=l_1 \text{ إذن } l_1=f'_d(x_0)$$
2. نقول أنّ التابع f قابل للإشتقاق على يسار النقطة x_0 إذا:
$$\lim_{x\to x_0^+}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=l_2 \text{ إذن } l_2=f'_g(x_0)$$

نظرية 5. : نقول أنّ التابع f قابل للإشتقاق عند النقطة x_0 إذا: $f'_d(x_0)=f'_g(x_0)=l$.

تعريف 2 : نقول أنّ التابع f قابل للإشتقاق على I إذا كان f قابل للإشتقاق عند كل نقطة x_0 من I.

التابع f' حيث $f':x\longrightarrow f'(x)$ يسمّى مشتق f و نكتب $f'(x)$ أو $\frac{df(x)}{dx}$.

مثال: $f(x)=x^2$ ، بيّن أنّ f قابل للإشتقاق عند كل نقطة x_0 من $\mathbb{R}$.

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=\lim_{x\to x_0}\frac{x^2-x_0^2}{x-x_0}=\lim_{x\to x_0}(x+x_0)=2x_0$$

برهنّا أنّ القيمة المشتقّة للتابع f عند النقطة x_0 هي $2x_0$ ، إذن $f'(x)=2x$.

نظرية 6. **:** ليكن I مجال مفتوح من $\mathbb{R}$ و $f:I\longrightarrow\mathbb{R}$ تابع و ليكن $x_0\in I$.

- إذا كان f قابل للإشتقاق عند النقطة x_0 فإنّ f مستمرّ عند النقطة x_0.
- إذا كان f قابل للإشتقاق على I فإنّ f مستمرّ على I.

العكس غير صحيح، مثال:

$f(x)=|x|$ مستمرّ عند النقطة $x_0=0$ ، لكنّ غير قابل للإشتقاق عند 0 لأنّ:

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0}\frac{|x|}{x}=\lim_{x\to 0}\begin{cases}\dfrac{x}{x}=1=f'_d(0) & x>0,\\[2ex] \dfrac{-x}{x}=-1=f'_g(0) & x<0\end{cases}$$

ملاحظة: f غير قابل للإشتقاق عند النقطة $x_0=0$ لأنّ $f'_d(0)\neq f'_g(0)$.

إستنتاج: من النظرية السابقة ينتج أنّ :

إذا كان f غير مستمرّ عند النقطة x_0 (I على التوالي) فإنّ f غير قابل للإشتقاق عند النقطة x_0 (I على التوالي).

2.5.3 خواص التوابع القابلة للإشتقاق

- ليكن $f,\ g$ حيث $f,\ g:I\longrightarrow\mathbb{R}$ تابعين قابلين للإشتقاق على I ، إذن من أجل كل $x\in I$:

- $(f\mp g)'(x)=f'(x)\mp g'(x)$
- $(\lambda\times f)'(x)=\lambda\times f'(x)$ حيث λ عدد حقيقي ثابت.
- $(f\times g)'(x)=[f'(x)\times g(x)]+[f(x)\times g'(x)]$
- $\left(\dfrac{f}{g}\right)'(x)=\dfrac{[f'(x)\times g(x)]-[g'(x)\times f(x)]}{g^2(x)}$ إذا $g(x)\neq 0$
- $\left(\dfrac{1}{f}\right)'(x)=\dfrac{-f'(x)}{f^2(x)}$ إذا $f(x)\neq 0$
- $(g\circ f)'(x)=g'(f(x))\times f'(x)$
- $[a^x]'=\ln a\times a^x,\ a>0$
- $[f^g]'=[g.\ln f]'\times[f^g]$ إذا $f>0$.

أمثلة:

- $\ln$ قابل للإشتقاق على $]0,+\infty[$ و $(\ln x)'=\dfrac{1}{x}$

- exp قابل للإشتقاق على $\mathbb{R}$ و $(\exp(x))' = \exp(x)$
- $[\ln(3x^5+2x^2+x+2)]' = \frac{(3x^5+2x^2+x+2)'}{3x^5+2x^2+x+2} = \frac{15x^4+4x+1}{3x^5+2x^2+x+2}$
- $[e^{2x^2+5x+2}]' = (2x^2+5x+2)' \times [e^{2x^2+5x+2}] = (4x+5) \times [e^{2x^2+5x+2}]$
- $[3^x]' = \ln 3 \times 3^x$
- $[x^{x+1}]' = [(x+1).\ln x]' \times [x^{x+1}] = \left[\ln x + \frac{x+1}{x}\right]$

3.5.3 **مشتق تابع عكسي** ←

ليكن $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ مستمرّ و رتيب تماما و إذا كان f يقبل الإشتقاق عند $x_0 \in I$ و $f'(x_0) \neq 0$ فإنّ التابع العكسي f^{-1} يقبل الإشتقاق عند $y_0 = f(x_0)$ و مشتقه معطى بالعلاقة التالية:

$$\left[f^{-1}(y_0)\right]' = \frac{1}{f'(x_0)}$$

مثال: مشتق التابع arcsin

لدينا $\sin : [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] \to [-1, 1]$ مستمرّ و متزايد تماما و يقبل الإشتقاق على $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$ و مشتقّه هو:

$$\forall x \in]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[: (\sin x)' = \cos x \neq 0$$

إذن حسب النظرية السابقة فإنّ تابعه العكسي arcsin يقبل الإشتقاق عند y_0 حيث $y_0 = \sin x_0$ و لدينا:

$$(\arcsin)'(y_0) = \frac{1}{\sin'(x_0)} = \frac{1}{\cos(x_0)} = \frac{1}{\sqrt{1-\sin^2(x_0)}} = \frac{1}{\sqrt{1-y_0^2}}$$

و بالتالي : $(\arcsin)'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

ملاحظة: نفس الخطوات بالنسبة للتابع cos و tan.

4.5.3 **إشتقاق التوابع الشهيرة** ←

الجدول التالي يلخّص المشتقّات البسيطة حيث x متغيّر و كذلك مشتقّات التوابع المركّبة حيث f و g تابعين.

التابع	التابع المشتق	التابع المركّب	التابع المشتق
f	f'	$g(f)$	$g'(f)\times f'$
x^n	nx^{n-1}	$(f)^n$	$n(f)^{n-1}\times f'$
$\dfrac{1}{x}$	$-\dfrac{1}{x^2}$	$\dfrac{1}{f}$	$-\dfrac{f'}{f^2}$
$\sqrt{x}$	$\frac{1}{2\sqrt{x}}$	$\sqrt{f}$	$\dfrac{f'}{2\sqrt{f}}$
e^x	e^x	e^f	$f'\times e^f$
$\ln x$	$\dfrac{1}{x}$	$\ln f$	$\dfrac{f'}{f}$
$\sin x$	$\cos x$	$\sin f$	$f'\times\cos f$
$\cos x$	$-\sin x$	$\cos f$	$-f'\times\sin f$
$\arccos x$	$\dfrac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$	$\arccos f$	$\dfrac{-f'}{\sqrt{1-f^2}}$
$\arcsin x$	$\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$\arcsin f$	$\dfrac{f'}{\sqrt{1-f^2}}$
$\tan x$	$\dfrac{1}{\cos^2 x}$	$\tan f$	$\dfrac{f'}{\cos^2 f}$
$\arctan x$	$\dfrac{1}{1+x^2}$	$\arctan f$	$\dfrac{f'}{1+f^2}$
a^x	$\ln a\times a^x$	f^g	$[g.\ln f]'\times[f^g]$

الجدول (7.3) : بعض مشتقات التوابع الشهيرة

5.5.3 قـــــاعدة لوبيتال

• ليكن f و g تابعان قابلان للإشتقاق على المجال $]a,b[$ و $x_0\in]a,b[$ و $g'(x_0)\neq 0$.

إذا كان $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=0$ و $\lim\limits_{x\to x_0} g(x)=0$ و $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f'(x)}{g'(x)}$ موجودة (متهية أو غير متهية) فإنّ :

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to x_0}\frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

ملاحـــــــظة:

- إذا كان $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f'(x)}{g'(x)}=[\frac{0}{0}]$ ، يمكن إستعمال قاعدة لوبيتال للمرّة الثانية $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f''(x)}{g''(x)}=\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f'(x)}{g'(x)}$.
- قاعدة لوبيتال تطبّق من أجل حالة عدم التعيين $\frac{\infty}{\infty}$.
- قاعدة لوبيتال تبقى على حالها من أجل $x\to\pm\infty$ ، $x\to x_0^-$ ، $x\to x_0^+$

أمثلة:

- $\lim\limits_{x\to 2}\left(\dfrac{x^2+x-6}{x^2-x-2}\right)=\lim\limits_{x\to 2}\left(\dfrac{(x^2+x-6)'}{(x^2-x-2)'}\right)=\lim\limits_{x\to 2}\left(\dfrac{2x+1}{2x-1}\right)=\frac{5}{3}$
- $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{\sin x}{x}\right)=\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{(\sin x)'}{x'}\right)=\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{\cos x}{1}\right)=\cos 0=1$

- $$\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{\ln x}{3x}\right)=\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{(\ln x)'}{(3x)'}\right)=\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{\frac{1}{x}}{3}\right)=0$$

- $$\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{e^{\sqrt{x}}}{x}\right)=\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{(e^{\sqrt{x}})'}{x'}\right)=\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{\frac{1}{2\sqrt{x}}e^{\sqrt{x}}}{1}\right)=+\infty$$

- $$\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x^2}{e^x}\right)=\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{(x^2)'}{(e^x)'}\right)=\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{2x}{e^x}\right)=\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{2}{e^x}\right)=0$$

- $$\lim_{x\to0^+}x^2\ln(x)=\lim_{x\to0}\left(\frac{\ln(x)}{\frac{1}{x^2}}\right)=\lim_{x\to0}\left(\frac{(\ln(x))'}{(\frac{1}{x^2})'}\right)=\lim_{x\to0}\left(\frac{\frac{1}{x}}{\frac{-2}{x^3}}\right)=\lim_{x\to0}(-\frac{x^2}{2})=0$$

- $\lim_{x\to0}\left(\frac{2}{x}-\frac{2}{e^x-1}\right)=\lim_{x\to0}\left(\frac{2e^x-2-2x}{x(e^x-1)}\right)$ إذن:

$$\lim_{x\to0}\left(\frac{2e^x-2-2x}{x(e^x-1)}\right)=\lim_{x\to0}\left(\frac{(2e^x-2-2x)'}{(x(e^x-1))'}\right)=\lim_{x\to0}\left(\frac{2e^x-2}{e^x-1+xe^x}\right)=\lim_{x\to0}\left(\frac{2e^x}{2e^x+xe^x}\right)=1$$

ملاحظة: يمكن إستعمال قاعدة لوبيتال في حالات أخرى لعدم التعيين و ذلك بتغيير شكل الدالة.

أمثلة:

1. $\lim_{x\to0^+}(x^x)=[0^0]$ **نحسب** : $\lim_{x\to0^+}(x\ln(x))$

$$\lim_{x\to0^+}(x\ln(x))=\lim_{x\to0^+}\left(\frac{\ln(x)}{\frac{1}{x}}\right)=\lim_{x\to0^+}\left(\frac{\frac{1}{x}}{\frac{-1}{x^2}}\right)=\lim_{x\to0^+}(-x)=0$$

و بالتالي: $\lim_{x\to0^+}(x^x)=e^0=1$

2. $\lim_{x\to\infty}\left((1+x^2)^{\frac{1}{x}}\right)=[\infty^0]$ **نحسب** : $\lim_{x\to\infty}\left(\frac{1}{x}\ln(1+x^2)\right)$

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{1}{x}\ln(1+x^2)\right)=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{\ln(1+x^2)}{x}\right)=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{\frac{2x}{1+x^2}}{1}\right)=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{2}{x}\right)=0$$

و بالتالي: $\lim_{x\to\infty}\left((1+x^2)^{\frac{1}{x}}\right)=e^0=1$

6.3 تمارين

التمرين الأوّل: مجموعة التعريف و النهـــــــايـــــــــات

1. أوجد مجموعة التعريف للتوابع التالية:

$$f(x)=\sqrt{\frac{2+3x}{5-2x}},\ g(x)=\sqrt{x^2-1},\ h(x)=\ln(4x+3)$$

2. أوجد النهايات التالية:

$$1.\lim_{x\to 0}\left(\frac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{x}\right),\ 2.\lim_{x\to 0}\left(\frac{\sqrt{1+x+x^2}-1}{x}\right),\ 3.\lim_{x\to 2}\left(\frac{x^2+3}{x}\right),$$
$$4.\lim_{x\to -4}\left(\frac{x^2-16}{x+4}\right),\ 5.\lim_{x\to +\infty}\left(\frac{2x^3+5x^2+6}{x^3-3x+4}\right),\ 6.\lim_{x\to +\infty}\left(x-\sqrt{x^2-x}\right),$$
$$7.\lim_{x\to +\infty}\left(\sqrt{x^2+3x}-x\right),\ 8.\lim_{x\to 2}\left(\tfrac{1}{x-2}\right)\ 9.\lim_{x\to 0}\left(\tfrac{2}{1+3^{\frac{1}{x}}}\right),\ 10.\lim_{x\to +\infty}\left(\frac{2x+5}{x^2-3}\right).$$

التمرين الثاني: الإستمرارية و الإشتقـــــــــــــاق
ليكن التابع f المعرّف كمايلي:

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{e^{2x}-1}{\ln(x+1)} & x>0,\\[2ex] x^3e^{2x} & x\leq 0\end{cases}$$

.

1. عيّن مجموعة تعريف التابع f.
2. أدرس إستمرارية التابع f عند النقطة $x_0=0$.
3. هل التابع f قابل للإشتقاق عند النقطة $x_0=0$.
4. إعط التابع المشتق.

التمرين الثالث: الإستمرارية و الإشتقـــــــــــاق
ليكن التابع f المعرّف كمايلي:

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{\sin x}{x} & x>0,\\[2ex] x^3+\alpha-1 & x\leq 0\end{cases}$$

.

1. عيّن مجموعة تعريف التابع f.

2. عيّن العدد الحقيقي α حتّى يكون التابع f مستمر عند النقطة $x_0 = 0$.

3. أدرس قابلية إشتقاق التابع f عند النقطة $x_0 = 0$.

4. إعط التابع المشتق.

التمرين الرّابع: التمديـــــــد بالإستمراريـــة

هل التوابع التالية قابلة للتمديـــــــد بالإستمراريـــــة عند النقطة x_0 حيث:

$$f(x) = e^{\frac{1}{x}},\ x_0 = 0,\ h(x) = \frac{4-x^2}{3-\sqrt{x^2+5}}$$

التمرين الخامس: بإستعمال تعريف المشتق، أوجد مشتقّات التوابع التالية:

$$(2x+1)^{\frac{1}{2}},\ x^{\frac{1}{3}},\ \frac{-1}{x},\ \ln x,\ \sin(1-4x),\ \ln(3x+4),\ e^{2x},$$
$$\ln(x^2+5x+2),\ \ln(e^{3x}+x^3),\ \cos(e^{2x}+\sqrt{3x+1}),\ x^x,\ (x+2)^x.$$

التمرين السادس: قـــــــاعدة لوبيتــــــال

1. بإستعمال قاعدة لوبيتال، أحسب النهايات التالية:

$$1. \lim_{x\to 0}\left(\frac{e^x-1}{\sin x}\right), 2. \lim_{x\to 0}\left(\frac{1-e^{-x}}{x}\right), 3. \lim_{x\to 0}\left(\frac{e^x-1}{3\ln(1+x)}\right), 4. \lim_{x\to 0}\left(\frac{\ln(1+x)}{\sqrt{x}}\right), 5. \lim_{x\to 0}\left(\frac{1-\cos x}{\tan x}\right),$$

$$6. \lim_{x\to 0}\left(\frac{x-\sin x}{x^3}\right), 7. \lim_{x\to 2}\left(\frac{x^2-4}{x^2-3x+2}\right), 8. \lim_{x\to \pi}\left(\frac{\sin^2 x}{1+\cos x}\right), 9. \lim_{x\to 0}\left(\frac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1+x^2}}{x}\right),$$

$$10. \lim_{x\to 2}\left(\frac{e^x-e^2}{x^2+x-6}\right), 11. \lim_{x\to 1}\left(\frac{x^5-1}{2x^2-2}\right), 12. \lim_{x\to 5}\left(\frac{\sqrt{x}-\sqrt{5}}{x-5}\right), 13. \lim_{x\to 1}\left(\frac{1}{1-x}-\frac{3}{1-x^3}\right),$$

$$14. \lim_{x\to 0}\left(\frac{\sqrt{1+x}-1}{\sqrt[3]{1+x}-1}\right), 15. \lim_{x\to 4}\left(\frac{\sqrt{x}-2}{x^2-5x+4}\right), 16. \lim_{x\to -2}\left(\frac{x^3-3x+2}{x^2-4}\right), 17. \lim_{x\to \pi}\left(\frac{\sin x}{\cos(\frac{x}{2})}\right)$$

2. نفس السؤال بالنسبة للنهايات التالية:

$$.\lim_{x\to +\infty}\left(\frac{2x+5}{x^2-3}\right),\ \lim_{x\to +\infty}\left(\frac{\ln x}{x}\right),\ \lim_{x\to +\infty}\left(\frac{x^2}{e^x}\right),\ \lim_{x\to +\infty}\left(\frac{e^{3x}+3x^2}{4e^x+2x^2}\right),\ \lim_{x\to 1}\left(\frac{3x\ln x}{x^2-x}\right)$$

الفصل 4

التوابع ذات عدّة متغيرات

1.4 التوابع ذات متغيرين

تعريف: نسمّي f تابع ذات متغيرين كل علاقة من E نحو $\mathbb{R}$ تحقّق:

$$\begin{array}{rccl} f: & E & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & (x,y) & \longmapsto & f(x,y)=z \end{array}$$

$$D_f=\Big\{(x,y)\in E \mid \text{معرّف } f(x,y)\Big\}$$

أمثلة:

$$\begin{array}{rccl} f: & \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & (x,y) & \longmapsto & f(x,y)=x^3+2x^2y+3x \end{array}$$

$$D_f=\mathbb{R}^2$$

$$\begin{array}{rccl} g: & \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & (x,y) & \longmapsto & g(x,y)=\dfrac{1}{x}+y \end{array}$$

$$D_g=\mathbb{R}^*\times\mathbb{R}\subset\mathbb{R}^2$$

$$\begin{array}{rccl} h: & \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & (x,y) & \longmapsto & h(x,y)=\dfrac{x.y}{x^2+y^2} \end{array}$$

$$D_h=\mathbb{R}^2-\{(0,0)\}$$

$$\begin{array}{rccl} k: & \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & (x,y) & \longmapsto & h(x,y)=\dfrac{x.y}{\ln x} \end{array}$$

$$D_k=(]0,1[\cup]1,+\infty[)\times\mathbb{R}$$

.

1.1.4 المشتقّات الجزئية

1.1.1.4 المشتقّات الجزئية من الرتبة 1

- المشتقّات الجزئية لـ f بالنسبة لـ x و نرمز $f'_x = \frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial x}(x,y)$ ، حيث y ثابت.
- المشتقّات الجزئية لـ f بالنسبة لـ y و نرمز $f'_y = \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial f}{\partial y}(x,y)$ ، حيث x ثابت.

مثال 1. :

أوجد المشتقّات الجزئية لـ f من الرتبة 1 حيث $f(x,y) = x^3 + 2x^2y^4$

- $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y) = (x^3 + 2x^2y^4)'_x = 3x^2 + 4xy^4$ ، حيث y ثابت.
- $\dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y) = (x^3 + 2x^2y^4)'_y = 8x^2y^3$ ، حيث x ثابت.

المشتقّات الجزئية من الرتبة 1 عبارة عن توابع لـ x و y و بالتالي يمكن إشتقاقها مرّة ثانية.

2.1.1.4 المشتقّات الجزئية من الرتبة 2

- $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) = f''_{xx} = \dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \dfrac{\partial}{\partial x}\left[\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y)\right]$ ، حيث y ثابت.
- $\dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y) = f''_{yy} = \dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \dfrac{\partial}{\partial y}\left[\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y)\right]$ ، حيث x ثابت.
- $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y) = \dfrac{\partial}{\partial x}\left[\dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y)\right]$ ، حيث y ثابت.
- $\dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x,y) = \dfrac{\partial}{\partial y}\left[\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y)\right]$ ، حيث x ثابت.

أوجد المشتقّات الجزئية لـ f من الرتبة 2 بالنسبة للمثال السابق.

- $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) = \dfrac{\partial}{\partial x}\left[3x^2 + 4y^4x\right] = 6x + 4y^4$ ، حيث y ثابت.
- $\dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y) = \dfrac{\partial}{\partial y}\left[8x^2y^3\right] = 24x^2y^2$ ، حيث x ثابت.
- $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y) = \dfrac{\partial}{\partial x}\left[\dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y)\right] = \dfrac{\partial}{\partial x}\left[8x^2y^3\right] = 16xy^3$ ، حيث y ثابت.
- $\dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x,y) = \dfrac{\partial}{\partial y}\left[\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y)\right] = \dfrac{\partial}{\partial y}\left[3x^2 + 4y^4x\right] = 16xy^3$ ، حيث x ثابت.

نلاحظ أنّ : $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y) = \dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x,y)$

مثال 2. :

أوجد المشتقّات الجزئية لـ f من الرتبة 1 و 2 حيث $f(x,y)=3x^2+xy-2y^2$

المشتقّات الجزئية من الرتبة 1

- $$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)=\left(3x^2+xy-2y^2\right)'_x=6x+y$$
- $$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)=\left(3x^2+xy-2y^2\right)'_y=x-4y$$

المشتقّات الجزئية من الرتبة 2

- $$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y)=\frac{\partial}{\partial x}\left[\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)\right]=\frac{\partial}{\partial x}\left[6x+y\right]=6$$
- $$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y)=\frac{\partial}{\partial y}\left[\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)\right]=\frac{\partial}{\partial y}\left[x-4y\right]=-4$$
- $$\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(x,y)=\frac{\partial}{\partial x}\left[\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)\right]=\frac{\partial}{\partial x}\left[x-4y\right]=1$$
- $$\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}(x,y)=\frac{\partial}{\partial y}\left[\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)\right]=\frac{\partial}{\partial y}\left[6x+y\right]=1$$

مثال 3. :

أوجد المشتقّات الجزئية لـ f من الرتبة 1 و 2 حيث $f(x,y)=5x.\ln(1+2y)$

المشتقّات الجزئية من الرتبة 1

- $$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)=\left(5x.\ln(1+2y)\right)'_x=5.\ln(1+2y)$$
- $$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)=\left(5x.\ln(1+2y)\right)'_y=5x\left(\tfrac{2}{1+2y}\right)=\frac{10x}{1+2y}$$

المشتقّات الجزئية من الرتبة 2

- $$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y)=\frac{\partial}{\partial x}\left[\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)\right]=\frac{\partial}{\partial x}\left[5.\ln(1+2y)\right]=0$$
- $$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y)=\frac{\partial}{\partial y}\left[\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)\right]=\frac{\partial}{\partial y}\left[\frac{10x}{1+2y}\right]=\frac{-20x}{(1+2y)^2}$$
- $$\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(x,y)=\frac{\partial}{\partial x}\left[\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)\right]=\frac{\partial}{\partial x}\left[\frac{10x}{1+2y}\right]=\frac{10}{1+2y}$$
- $$\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}(x,y)=\frac{\partial}{\partial y}\left[\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)\right]=\frac{\partial}{\partial y}\left[5.\ln(1+2y)\right]=5\left(\tfrac{2}{1+2y}\right)=\frac{10}{1+2y}$$

مثال 4. :

أوجد المشتقّات الجزئية لـ f من الرتبة 1 و 2 حيث $f(x,y) = -2x^2 + 3xy^2 - y^3$

المشتقّات الجزئية من الرتبة 1

- $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y) = (-2x^2 + 3xy^2 - y^3)'_x = -4x + 3y^2$
- $\dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y) = (-2x^2 + 3xy^2 - y^3)'_y = -3y^2 + 6xy$

المشتقّات الجزئية من الرتبة 2

- $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) = \dfrac{\partial}{\partial x}\left[\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y)\right] = \dfrac{\partial}{\partial x}\left[-4x + 3y^2\right] = -4$
- $\dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y) = \dfrac{\partial}{\partial y}\left[\dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y)\right] = \dfrac{\partial}{\partial y}\left[-3y^2 + 6xy\right] = -6y + 6x$
- $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y) = \dfrac{\partial}{\partial x}\left[\dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y)\right] = \dfrac{\partial}{\partial x}\left[-3y^2 + 6xy\right] = 6y$
- $\dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x,y) = \dfrac{\partial}{\partial y}\left[\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y)\right] = \dfrac{\partial}{\partial y}\left[-4x + 3y^2\right] = 6y$

نظرية شوارز:

إذا كان $f,\ g : I \longrightarrow \mathbb{R}$ تابعين حيث المشتقّات الجزئية من الرتبة 2 موجودة و مستمرّة فإنّ:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y) = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x,y)$$

.

2.4 التوابع ذات ثلاث متغيرات

تعريف: نسمّي f تابع ذات ثلاث متغيرات كل تطبيق:

$$\begin{array}{llll} f: & E & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & (x,y,z) & \longmapsto & f(x,y,z) = t \end{array}$$

$$D_f = \Big\{(x,y,z) \in E \ \mid \ f(x,y,z) \text{ معرّف} \Big\}$$

مثال:

$$\begin{array}{llll} f: & \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & (x,y,z) & \longmapsto & f(x,y) = x^3 + 2x^2yz + \dfrac{3x}{z} \end{array}$$

$$D_f = \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^*$$

1.2.4 المشتقّات الجزئية

1.1.2.4 المشتقّات الجزئية من الرتبة 1

- المشتقّات الجزئية لـ f بالنسبة لـ x و نرمز $f'_x = \frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial x}(x, y, z)$ ، حيث y و z ثوابت.
- المشتقّات الجزئية لـ f بالنسبة لـ y و نرمز $f'_y = \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial f}{\partial y}(x, y, z)$ ، حيث x و z ثوابت.
- المشتقّات الجزئية لـ f بالنسبة لـ z و نرمز $f'_z = \frac{\partial f}{\partial z} = \frac{\partial f}{\partial z}(x, y, z)$ ، حيث x و y ثوابت.

مثال:
أوجد المشتقّات الجزئية لـ f من الرتبة 1 المعرّف بـ $f(x, y, z) = x^2 - 2xy + y^3 + yz$

- $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x, y, z) = (x^2 - 2xy + y^3 + yz)'_x = 2x - 2y$ حيث y و z ثوابت.
- $\dfrac{\partial f}{\partial y}(x, y, z) = (x^2 - 2xy + y^3 + yz)'_y = -2x + 3y^2 + z$ حيث x و z ثوابت.
- $\dfrac{\partial f}{\partial z}(x, y, z) = (x^2 - 2xy + y^3 + yz)'_y = y$ حيث x و y ثوابت.

3.4 تمارين

التّمرين الأوّل: ليكن التوابع ذات متغيّرين المعرّفة كمايلي:
$f_1(x,y) = 2x^3y^4 + \frac{1}{x} - 5$ ، $f_2(x,y) = \ln(x+y)$ و $f_3(x,y) = e^{(x^2+y)}$
أوجد المشتقّات الجزئية من الرتبة 1 و 2 لـ f_1, f_2 و f_3.

التّمرين الثاني: ليكن تابع التكلفة المشتركة المعرّف بـ $C(x,y) = 2x\ln(3+2y)$
أوجد التكلفة الهامشية بالنسبة لـ x و بالنسبة لـ y .

التّمرين الثالث: ليكن تابع الإنتاج المشترك الآتي:

- $f_1(x,y) = 2x^{\frac{1}{4}}y^{\frac{3}{8}}$
- $f_2(x,y) = xy + 4x^3y^2 - 6x + 3$
- $f_3(x,y) = (xy)^{\frac{1}{3}}$
- $f_4(x,y) = x^2 + y^2$
- $f_5(x,y) = xy$

أوجد الإنتاج الهامشي بالنسبة لـ x و بالنسبة لـ y .

التّمرين الرابع: لتكن التوابع ذات ثلاث متغيّرات التالية:
$f(x,y,z) = e^{xyz} + e^{-xyz}$ و $g(x,y,z) = e^{xyz} - e^{-xyz}$
بيّن أنّ : $f'_x(x,y,z) + f'_y(x,y,z) + f'_z(x,y,z) = (xy + xz + yz)g(x,y,z)$

الفصل 5

التكـــــامل

1.5 التكـــــامل الغير محدود

1.1.5 التابع الأصلي ◄

تعريف: ليكن f $(f : I \longrightarrow \mathbb{R})$ تابع معرّف على مجال I .

نقول أنّ F تابع أصلي لـ f على مجال I إذا تحقّق مايلي: $\forall x \in I \quad F'(x) = f(x),$.

ملاحظة: كل تابع أصلي لـ f يكتب على الشكل $F + c$ و نكتب $\int f(x)dx = F(x) + c$ حيث c ثابت التكامل و x متغيّر التكامل.

أمثلة:

التابع المعرّف بـ $F(x) = x^4 + 5x^2 + 8x + 3$ تابع أصلي لـ f المعرّف بـ $f(x) = 4x^3 + 10x + 8$ لأنّ $F'(x) = f(x)$.

التابع المعرّف بـ $F(x) = x^4 + 5x^2 + 8x + 6$ تابع أصلي لـ f المعرّف بـ $f(x) = 4x^3 + 10x + 8$ لأنّ $F'(x) = f(x)$.

التابع المعرّف بـ $F(x) = \dfrac{1}{x} + c$ حيث $c \in \mathbb{R}$ تابع أصلي لـ f المعرّف بـ $f(x) = -\dfrac{1}{x^2}$ لأنّ $\left(\dfrac{1}{x}\right)' = -\dfrac{1}{x^2}$.

2.1.5 جدول التكامل ◄ قبل إعطاء كيفية إيجاد التكامل، نعطي في الجدول (1.5) بعض التوابع الأصلية و التي نتحصل عليها مباشرة من التعريف المعطى سابقا ، و أيضا نعطي تكاملات التوابع المركّبة (إيجاد التابع الأصلي بإستعمال الأشكال العامّة للمشتقّات).

التابع البسيط	التابع الأصلي	التابع المركّب	التابع الأصلي
1	$x+c$	$f'(x)$	$f(x)+c$
x	$\frac{x^2}{2}+c$	$f(x)f'(x)$	$\frac{[f(x)]^2}{2}+c$
x^n	$\frac{x^{n+1}}{n+1}+c$	$[f(x)]^n f'(x)$	$\frac{[f(x)]^{n+1}}{n+1}+c$
$\frac{1}{x}$	$\ln\lvert x\rvert+c$	$\frac{f'(x)}{f(x)}$	$\ln\lvert f(x)\rvert+c$
$\frac{1}{x^2}$	$-\frac{1}{x}+c$	$\frac{f'(x)}{f^2(x)}$	$-\frac{1}{f(x)}+c$
$\frac{1}{\sqrt{x}}$	$2\sqrt{x}+c$	$\frac{f'(x)}{\sqrt{f(x)}}$	$2\sqrt{f(x)}+c$
e^x	e^x+c	$e^{f(x)}f'(x)$	$e^{f(x)}+c$
$\cos x$	$\sin x+c$	$\cos(f(x))f'(x)$	$\sin[f(x)]+c$
$\sin x$	$-\cos x+c$	$\sin(f(x))f'(x)$	$-\cos f(x)+c$
$\frac{1}{\cos^2 x}$	$\tan x+c$	$\frac{f'(x)}{\cos^2(f(x))}$	$\tan f(x)+c$
$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$\arcsin x+c$	$\frac{f'(x)}{\sqrt{[1-f(x)]^2}}$	$\arcsin f(x)+c$
$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$-\arccos x+c$	$\frac{f'(x)}{\sqrt{[1-f(x)]^2}}$	$-\arccos f(x)+c$
$\frac{1}{1+x^2}$	$\arctan x+c$	$\frac{f'(x)}{[1+f(x)]^2}$	$\arctan f(x)+c$

الجدول (1.5) : بعض تكاملات التوابع الشهيرة

3.1.5 خصائص التكامل •

ليكن $f,\ g: I \longrightarrow \mathbb{R}$ تابعين:

- $\int (f \mp g)(x)dx = \int f(x)dx \mp \int g(x)dx$
- $\int (\lambda \times f)(x)dx = \lambda \times \int f(x)dx,$ حيث λ عدد حقيقي ثابت.

أمثلة:

$$I_1 = \int (6x^2+4)dx = 6\int x^2dx + 4\int 1dx = 6\left(\frac{x^3}{3}\right)+4x+c$$
$$I_2 = \int \frac{5}{x}dx = 5\int \frac{1}{x}dx = 5\ln|x|+c$$
$$I_3 = \int 6e^x dx = 6\int e^x dx = 6e^x + c$$
$$I_4 = \int 7^x dx = \frac{7^x}{\ln 7}+c$$

4.1.5 تكامل التوابع المركّبة •

نعلم أنّ: $[g(f(x))]' = g'(f(x)) \times f'(x)$ إذن $\int g'(f(x)) \times f'(x) = g(f(x)) + c$.

أمثلة:

1. $I_1 = \int e^{2x+5}dx$

نضع $g(x) = e^x$ و $f(x) = 2x+5$ **فنجد** : $I_1 = \int e^{2x+5}dx = \frac{1}{2}e^{2x+5} + c$.

2. $I_2 = \int \cos(7x-3)dx$

نضع: $g(x) = \cos x$ و $f(x) = 7x-3$ **فنجد** : $I_2 = \int \cos(7x-3)dx = \frac{1}{7}\sin(7x-3) + c$.

بصفة عامّة:

إذا كان $\int f(x)dx = F(x) + c$ فــإنّ : $\int f(ax+b)dx = \frac{1}{a}F(ax+b) + c$ حيث $a \neq 0$

ملاحظة: يمكن إيجاد التكاملات السابقة بإستعمال تغيير متغيّر لتبسيطها و جعلها تكاملات بسيطة كما سنرى في الفقرة التالية.

5.1.5 إيجاد التكامل بطريقة تغيير متغيّر

• يمكن لتكامل تابع مركّب أن يبسّط لتكامل تابع بسيط بإستعمال تغيير متغيّر كمايلي:

$$\int g(f(x))f'(x)dx = \int g(t)dt \tag{1.5}$$

حيث g تابع مستمر.

أمثلة:

1. $I_1 = \int 4xe^{2x^2+5}dx$

نضع $t = 2x^2+5$ و بالتالي $dt = 4xdx$ ، إذن:

$$I_1 = \int 4xe^{2x^2+5}dx = \int e^t dt = e^t + c = e^{2x^2+5} + c$$

2. $I_2 = \int 21x^2\cos(7x^3-3)dx$

نضع $t = 7x^3-3$ و بالتالي $dt = 21x^2dx$ ، إذن:

$$I_2 = \int 21x^2\cos(7x^3-3)dx = \int \cos(t)dt = \sin t + c = \sin(7x^3-3) + c$$

3. $I_3 = \int 2e^{2x+5}\cos(e^{2x+5})dx$

نضع $t = e^{2x+5}$ و بالتالي $dt = 2e^{2x+5}dx$ ، إذن:

$$I_3 = \int 2e^{2x+5}\cos(e^{2x+5})dx = \int \cos t dt = \sin(t) + c = \sin(e^{2x+5}) + c$$

4. $I_4 = \int e^{5x^2+6x-1}(10x+6)dx$

نضع $t = 5x^2+6x-1$ و بالتالي $dt = (10x+6)dx$

$I_4 = \int e^{5x^2+6x-1}(10x+6)dx = \int e^t dt = e^t + c = e^{5x^2+6x-1} + c$

- في حالة ما إذا كان $g = I$ (التطبيق المطابق) فإنّ :

$$\int f(x)f'(x)dx = \int tdt = \frac{t^2}{2} + c = \frac{f^2(x)}{2} + c \tag{2.5}$$

مثال: $I_1 = \int \sin x \cos x dx$

نضع $t = \sin x$ و بالتالي $dt = \cos x dx$

$$I_1 = \int \sin x \cos x dx = \int tdt = \frac{t^2}{2} + c = \frac{\sin^2 x}{2} + c$$

بصفة عامّة:

$$\int (f(x))^n f'(x)dx = \frac{1}{n+1}(f(x))^{n+1} + c \ \mid \ n \neq -1$$

مثال: $I_2 = \int (x+3)^6 dx$

نضع $t = x+3$ و بالتالي $dt = 1dx$ إذن :

$$I_2 = \int (x+3)^6 dx = \int t^6 dt = \frac{1}{7}t^7 + c = \frac{1}{7}(x+3)^7 + c$$

في حالة $n = -1$ نحصل على :

$$\int \frac{f'(x)}{f(x)}dx = \int \frac{1}{t}dt = \ln|t| + c = \ln|f(x)| + c \tag{3.5}$$

مثال: $I_3 = \int \frac{2x}{x^2+5}dx$

نضع $t = x^2 + 5$ و بالتالي $dt = 2xdx$ إذن :

$$I_3 = \int \frac{2x}{x^2+5}dx = \int \frac{1}{t}dt = \ln|t| + c = \ln|x^2+5| + c$$

6.1.5 إيجاد التكامل بالتجزئة -•

بما أنّ: $(f(x)g(x))' = g(x)f'(x) + f(x)g'(x)$ و منه $f(x)g'(x) = (f(x)g(x))' - f'(x)g(x)$ و بالتالي:

$$\int f(x)g'(x)dx = [f(x)g(x)] - \int g(x)f'(x)dx$$

أمثلة:

$$I_1 = \int x \times \sin x dx$$

نضع: $f(x) = x$ ، $g'(x) = \sin x dx$ و بالتالي $f'(x) = 1dx$ و $g(x) = -\cos x$

$$I_1 = -x\cos x - \int -\cos x dx = -x\cos x + \int \cos x dx = -x\cos x + \sin x + c$$

$$I_2 = \int x \times e^x dx$$

نضع: $f(x) = x$ ، $g'(x) = e^x dx$ و بالتالي $f'(x) = 1dx$ و $g(x) = e^x$

$$I_2 = xe^x - \int e^x dx == xe^x - e^x + c$$

2.5 التكامل المحدود

إذا كان f تابع مستمر على المجال $[a,b]$ و F التابع الأصلي لـ f ، إذن:

$$\int_a^b f(x)dx = [F(x)]_a^b = F(b) - F(a)$$

.

1.2.5 خصائص التكامل المحدود • ليكن f و g تابعين مستمرّين على المجال $[a,b]$

1. $\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx$

2. $\int_a^a f(x)dx = 0$

3. $\int_a^b cf(x)dx = c\int_a^b f(x)dx$

4. $\int_a^b (f(x) \mp g(x))dx = \int_a^b f(x)dx \mp \int_a^b g(x))dx$

5. $a \leq b \leq c \quad \int_a^c f(x)dx = \int_a^b f(x)dx + \int_b^c f(x)dx$

أمثلة:

$$\int_0^3 x^2dx = \left[\frac{x^3}{3}\right]_0^3 = \frac{27}{3} - 0 = 9$$
$$\int_0^2 (x^2-4x)dx = \left[\frac{x^3}{3} - 2x^2\right]_0^2 = \frac{-16}{3}$$
$$\int_0^1 e^{-x}dx = \left[-e^{-x}\right]_0^1 = 1 - \frac{1}{e}$$
$$\int_0^1 \frac{x}{1+x^2}dx = \left[\frac{1}{2}\ln(1+x^2)\right]_0^1 = \frac{1}{2}\ln 2$$

$$\int_0^1 \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}dx = \left[\sqrt{1+x^2}\right]_0^1 = \sqrt{2} - 1$$

3.5 تمارين

التّمرين الأوّل: أوجد التكاملات التالية :

$$I_1=\int(3x^2+9)dx,\ I_2=\int\left(x^{\frac{1}{2}}-3(2x)^{\frac{1}{3}}\right)dx,\ I_3=\int(\frac{1}{x^4}+10)dx$$

$$I_4=\int(\sqrt{x}+\frac{1}{x})dx,\ I_5=\int(a^x)dx,\ I_6=\int\frac{1}{\sqrt{x}}dx,\ I_7=\int(e^{3x}+2x+4)dx.$$

التّمرين الثاني: بإستعمال طريقة تغيير متغيّر، أوجد التكاملات التالية:

$$I_1=\int(1+x^2)\times xdx,\ I_2=\int(1+x^3)\times x^2dx,\ I_3=\int\frac{x^2}{2+x^3}dx,$$

$$I_4=\int\sin(2x)dx,\ I_5=\int\frac{1}{3x+1}dx,\ I_6=\int\frac{3+\ln x}{x}dx,$$

$$.\ I_7=\int 3x\sqrt{1-2x^2}dx,\ I_8=\int\frac{x+3}{(x^2+6x)^{\frac{1}{3}}}dx$$

التّمرين الثالث: بإستعمال التكامل بالتجزئة، أوجد التكاملات التالية:

$$I_1=\int\ln xdx,\ I_2=\int x\times\ln xdx,\ I_3=\int xe^{-x}dx,$$

$$I_4=\int x\times e^xdx,\ I_5=\int\arctan xdx,\ I_6=\int x^2\times\sin xdx.$$

التّمرين الرّابع : أوجدّ التكاملات المحدودة التالية:

$$I_1=\int_{-\infty}^{0}e^xdx,\ I_2=\int_{1}^{+\infty}\frac{1}{x}dx,\ I_3=\int_{1}^{+\infty}\frac{1}{x^2}dx.$$

الفصل 6

حـــلول التمـــــــارين

1.6 الفصل 1 : (المجموعات و التّطبيقات)

التمرين الأوّل: الجدول (1.6) الآتي يوضّح كل المجموعات المطلوبة في التمرين:

	الحالة الأولى $(E=\{1,2,3,4,5,6,7,8,9\})$	الحالة الثانية $(E=\mathbb{R})$
	$A=\{2,4,6,8\},\ B=\{3,6,9\}$	$A=]-\sqrt{2},\sqrt{2}[,\ B=]-\infty,-1[\cup]1,+\infty[$
$A\cap B$	$\{6\}$	$]-\sqrt{2},-1[\cup]1,\sqrt{2}[$
$\overline{A\cap B}$	$\{1,2,3,4,5,7,8,9\}$	$]-\infty,-\sqrt{2}]\cup[-1,1]\cup[\sqrt{2},+\infty[$
$\overline{A}$	$\{1,3,5,7,9\}$	$]-\infty,-\sqrt{2}]\cup[\sqrt{2},+\infty[$
$\overline{B}$	$\{1,2,4,5,7,8\}$	$[-1,1]$
$\overline{A}\cap\overline{B}$	$\{1,5,7\}$	$\emptyset$
$A\cup B$	$\{2,3,4,6,8,9\}$	$\mathbb{R}$
$\overline{A\cup B}$	$\{1,5,7\}$	$\emptyset$
$\overline{A}\cup\overline{B}$	$\{1,2,3,4,5,7,8,9\}$	$]-\infty,-\sqrt{2}]\cup[-1,1]\cup[\sqrt{2},+\infty[$

الجدول (1.6) : خصائص المجموعات

نستنتج في كلا الحالتين أنّ : $\overline{A\cap B}=\overline{A}\cup\overline{B}$ و $\overline{A\cup B}=\overline{A}\cap\overline{B}$.

التمرين الثاني: لدينا $card(E)=30$ ، $card(A)=20$ ، $card(B)=15$ و $card(A\cap B)=6$.

- حسب نظرية في الدرس، لدينا:
$$card(A\cup B)=card(A)+card(B)-card(A\cap B)$$
إذن : $card(A\cup B)=20+15-6=29$.

- مثال:
$A=\{1,2,3,4,5,6,7,8,\ldots,20\}$ ، إذن : $card(A)=20$ ، $B=\{15,16,\ldots,29\}$ ، إذن : $card(B)=15$
لدينا : $A\cap B=\{15,16,17,18,19,20\}$ ، إذن : $card(A\cap B)=6$
و لدينا : $A\cup B=\{1,2,\ldots,29\}$ إذن : $card(A\cup B)=20+15-6=29$.

التمرين الثالث: لدينا $A=\{a,b\},\ B=\{1,3\},\ C=\{4,5\}$ ،

- $A\times(B\cup C)=\{a,b\}\times(\{1,3,4,5\})=\{(a,1),(a,3),(a,4),(a,5),(b,1),(b,3),(b,4),(b,5)\}$
- $(A\times B)\cup(A\times C)=\{(a,1),(a,3),(b,1),(b,3),(a,4),(a,5),(b,4),(b,5)\}$

نستنتج أنّ:

$A\times(B\cup C)=(A\times B)\cup(A\times C)$.

كذلك يمكن إستنتاج أنّ : $A\times(B\cap C)=(A\times B)\cap(A\times C)$ و ذلك بنفس الخطوات السابقة.

التمرين الرّابع: لدينا :

$$\begin{array}{rcl} f:\mathbb{R}^* & \to & \mathbb{R}^* \\ x & \mapsto & f(x)=\dfrac{1}{x} \end{array}$$

.

1. دراسة تباين f :
حسب تعريف التباين : $\forall x_1,x_2\in\mathbb{R}^*\ :\ f(x_1)=f(x_2)\Rightarrow x_1=x_2?$

- ليكن $x_1,x_2\in\mathbb{R}^*$ حيث $f(x_1)=f(x_2)$ إذن $\dfrac{1}{x_1}=\dfrac{1}{x_2}$ و بالتالي $x_1=x_2$ إذن f متباين.

2. دراسة غمر f :
حسب تعريف الغمر : $\forall y\in\mathbb{R}^*\quad \exists? x\in\mathbb{R}^*:\quad f(x)=y$

- ليكن $y\in\mathbb{R}^*$ بحيث $f(x)=y$ أي $\dfrac{1}{x}=y$ بالتالي يوجد x حيث $x=\dfrac{1}{y}\in\mathbb{R}^*$ إذن f غامر.

من (1) و (2) نستنتج أنّ f تقـابلي.

$$\begin{array}{rcl} g:\mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & g(x)=x^2+1 \end{array}$$

نلاحظ أنّ g ليس تقـابلي لأنّ:

1. ليكن $x_1,\ x_2\in\mathbb{R}$ بحيث $g(x_1)=g(x_2)$ أي $x_1^2+1=x_2^2+1$ لدينا $x_1^2=x_2^2$ و بالتالي $x_1=\pm x_2$
إذن g ليس متباين؛ يكفي أخذ : $x_2=1,\ x_1=-1$ مع $x_1\neq x_2$ و $g(x_1)=g(x_2)=2$

2. $g(x)=y\Rightarrow x^2+1=y\Rightarrow x=\sqrt{y-1}$ من أجل $y=-2\in\mathbb{R}$ لا يوجد x إذن g ليس غامر

نفس الخطوات بالنسبة للتطبيق k.

التمرين الخامس: ليكن f و g معرفتين كمايلي:

$$f:\mathbb{R} \to \mathbb{R},\quad x \mapsto f(x)=2x+3 \qquad\qquad g:\mathbb{R} \to \mathbb{R},\quad x \mapsto g(x)=x^2$$

.

- $gof(x)=g(f(x))=g(2x+3)=(2x+3)^2=4x^2+12x+9$
- $fog(x)=f(g(x))=f(x^2)=2x^2+3$

نستنتج أنّ $gof \neq fog$.

التمرين السادس: نفس خطوات الحل بالنسبة للتمرين الخامس.

التمرين السابع: الجدول التالي (2.6) يوضّح بعض مميّزات المجموعــات E_i ,$i=1,\dots,8$.

المميّزات/المجموعات E_i	المجال	$Inf(E_i)$	$Sup(E_i)$	$Min(E_i)$	$Max(E_i)$
E_1	$[5,10]$	5	10	5	10
E_2	$]-\infty,0[\cup[1,+\infty[$	لايوجد	لايوجد	لايوجد	لايوجد
E_3	$\mathbb{R}$	لايوجد	لايوجد	لايوجد	لايوجد
E_4	$[-4,4]$	-4	4	-4	4
E_5	$]-\sqrt{7},\sqrt{7}[$	$-\sqrt{7}$	$\sqrt{7}$	لايوجد	لايوجد
E_6	$]-\infty,-2[\cup]2,+\infty[$	لايوجد	لايوجد	لايوجد	لايوجد
E_7	$]2,10]$	2	10	لايوجد	10
E_8	$\{2,4,6,8,10,\dots\}$	2	لايوجد	2	لايوجد

الجدول (2.6) : مميّزات المجموعــات E_i

التمرين الثامن: نفس خطوات الحل بالنسبة للتمرين السابع، أمّا بالنسبة للمتتاليات سنرى فيمابعد كيفية إيجاد Inf ، Sup ، Min ، Max (التمرين الثالث: الفصل 2).

2.6 **الفصل** 2 : (المتتاليات)

التمرين الأوّل:

1. خطأ لأنّ:
   مثال مضاد : $U_n=(-1)^n$

لدينا: $|U_n|=|(-1)^n|\leq 1,$ أي $(U_n)_n$ محدودة، لكنّ $(U_n)_n$ ليست متزايدة لأنّ:

$$U_{n+1}-U_n=(-1)^{n+1}-(-1)^n=-2(-1)^n=\begin{cases}-2 & n \text{ زوجي} \\ 2 & n \text{ فردي}\end{cases}$$

.

2. خطأ لأنّ:

مثال مضاد 1. : $U_n=(-1)^n$ و $V_n=(-1)^{n+1}$

لدينا $(U_n)_n$ و $(V_n)_n$ متباعدتين لأنّهما تقبلا نهايتين مختلفتين متهيتين ± 1 ، لـكنّ $(U_n+V_n)_n$ متقاربة نحو 0 لأنّ:

$\lim\limits_{n\to+\infty}(U_n+V_n)=\lim\limits_{n\to+\infty}((-1)^n+(-1)^{n+1})=\lim\limits_{n\to+\infty}((-1)^n-(-1)^n)=0$.

مثال مضاد 2. : $U_n=n$ و $V_n=1-n$ لدينا $(U_n)_n$ و $(V_n)_n$ متباعدتين نحو النهايتين $+\infty$ و $-\infty$ على التوالي، لـكنّ: $\lim\limits_{n\to+\infty}(U_n+V_n)=1$ إذن: $(U_n+V_n)_n$ متقاربة نحو 1.

3. صحيحة (أنظر الدرس).

4. صحيحة، لأنّ جداء متتاليتن متقاربتين هو متتالية متقاربة (أنظر الدرس) .

5. خطأ لأنّ:

مثال مضاد : $U_n=(-1)^n\times n$ ، لدينا : $\lim\limits_{n\to+\infty}(U_n)=\pm\infty$

6. خطأ لأنّ:

مثال مضاد : $U_n=(-1)^n$ و $V_n=\frac{1}{n}$

لدينا $\lim\limits_{n\to+\infty}(U_n+V_n)=\mp 1$ لدينا: $\lim\limits_{n\to+\infty}(U_n)=\mp 1$ و $\lim\limits_{n\to+\infty}(V_n)=0$

7. خطأ لأنّ:

مثال مضاد : $U_n=\frac{1}{n}$ و $V_n=n$

لدينا $\lim\limits_{n\to+\infty}(U_n)=0$ و $\lim\limits_{n\to+\infty}(U_n\times V_n)=1$

8. خطأ لأنّ:

مثال مضاد : $U_n=\frac{1}{n}$ و $V_n=\frac{1}{U_n}=n$

لدينا $(U_n)_n$ متقاربة لـكنّ $(V_n)_n$ متباعدة.

9. خطأ لأنّ:

مثال مضاد : $U_n=(-1)^n$

لدينا $(U_n)_n$ محدودة و لـكنّ ليست متقاربة.

التمرين الثاني:

1. الحدود الأربعة الأولى للمتتاليات:

$$U_1=\frac{2}{3},\ U_2=\frac{5}{6},\ U_3=\frac{8}{9},\ U_4=\frac{11}{12}.$$

$$V_0=1,\ V_1=\frac{1}{3},\ V_2=\frac{-1}{7},\ V_3=\frac{1}{11}.$$

$$W_0=0,\ W_1=1,\ W_2=1,\ W_3=\frac{9}{11}.$$

$$T_0 = 6,\ T_1 = 2,\ T_2 = 6,\ T_3 = 2.$$

2. لدينا:

- المتتالية $(U_n)_n$ ثابتة، محدودة و متقاربة.
- المتتالية $(V_n)_n$ ليست رتيبة لأنّ :

$$V_{n+1} - V_n = (n+1)(-1)^{n+1} - n(-1)^n = \begin{cases} -2n-1 < 0 & n \text{ زوجي} \\ 2n+1 > 0 & n \text{ فردي} \end{cases}$$

أيضا $(V_n)_n$ غير محدودة و متباعدة.

- بالنسبة للمتتالية $(W_n)_n$:

1. متزايدة لأنّ:

$$W_{n+1} - W_n = \frac{-2}{(n+1)^2} - \left(\frac{-2}{n^2}\right) = \frac{4n+2}{n^2.(n+1)^2} > 0$$

2. محدودة لأنّ:

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad 0 < \tfrac{1}{n^2} \le 1 \Rightarrow -2 \le \tfrac{-2}{n^2} < 0.$$

3. متقاربة لأنّ:

$$\lim_{n\to+\infty} W_n = \lim_{n\to+\infty} \left(\frac{-2}{n^2}\right) = 0.$$

- المتتالية $(T_n)_n$ ليست رتيبة لأنّ :

$$T_{n+1} - T_n = \begin{cases} -\left(\dfrac{1}{(n+1)^2} + \dfrac{1}{n^2}\right) < 0 & n \text{ زوجي} \\ \dfrac{1}{(n+1)^2} + \dfrac{1}{n^2} > 0 & n \text{ فردي} \end{cases}$$

أيضا المتتالية $(T_n)_n$ محدودة لأنّها متقاربة (كلّ متتالية متقاربة $\lim_{n\to+\infty} T_n = 0$ محدودة).

- بالنسبة للمتتالية $(Z_n)_n$ ليست رتيبة لأنّ:

$$Z_{n+1} - Z_n = \frac{(-1)^{n+1}}{3(n+1)} - \frac{(-1)^n}{3n} = \frac{(-1)^n[-2n-1]}{3(n+1)n} = \begin{cases} \dfrac{-2n-1}{3(n+1)n} < 0 & n \text{ زوجي} \\ \dfrac{2n+1}{3(n+1)n} > 0 & n \text{ فردي} \end{cases}$$

أيضا محدودة لأنّها متقاربة($\lim_{n\to+\infty} Z_n = 0$ لأنّها جداء تابعين أحدهما محدود و الآخر يؤول إلى الصفر).

- المتتالية $(K_n)_n$ متزايدة لأنّ: $K_{n+1} - K_n = \dfrac{1}{3n(n+1)} > 0,$ أيضا محدودة لأنّها متقاربة $\lim_{n\to+\infty} K_n = 1$.

التمرين الثالث:

1. دراسة طبيعة و تغيّرات المتتاليات التالية:

- $(U_n)_n$ متقاربة لأنّ : $\lim\limits_{n\to+\infty} U_n = \lim\limits_{n\to+\infty} \frac{5n+2}{7n+3} = \frac{5}{7}$.

  أيضا $(U_n)_n$ متزايدة لأنّ: $U_{n+1} - U_n = \frac{1}{(7n+3)(7n+10)} > 0$.

- $(V_n)_n$ متباعدة لأنّ:

$$\lim_{n\to+\infty} V_n = \lim_{n\to+\infty} \begin{cases} n+1 = +\infty & n \text{ زوجي} \\ n-1 = +\infty & n \text{ فردي} \end{cases}$$

$(V_n)_n$ ليست رتيبة لأنّ:

$$V_{n+1} - V_n = n+1+(-1)^{n+1} - n - (-1)^n = 1 - 2(-1)^n = \begin{cases} -1 < 0 & n \text{ زوجي}, \\ 3 > 0 & n \text{ فردي} \end{cases}$$

.

- المتتالية $(W_n)_n$ متقاربة حيث $W_n = \frac{1}{n^2+1}\sin(n)$ ، لأنّ حسب نظرية في الدرس : إذا كانت المتتالية $(h_n)_n$ محدودة و $\lim\limits_{n\to+\infty} k_n = 0$ فإنّ $\lim\limits_{n\to+\infty}(h_n \times k_n) = 0$ بوضع $h_n = \sin(n)$ و $k_n = \frac{1}{n^2+1}$. أمّا بالنسبة للتغيّرات، نلاحظ أنّ الحدود الأولى متذبذبة إذن المتتالية غير رتيبة $(W_0 = 0, W_1 = \frac{1}{2}\sin 1 = 0.42, W_2 = \frac{1}{5}\sin 2 = 0.18, W_3 = \frac{1}{10}\sin 3 = 0.01)$.

- $(L_n)_n$ متباعدة لأنّ:

$$\lim_{n\to+\infty} L_n = \lim_{n\to+\infty} \begin{cases} \frac{1}{n} + 1 = +1 & n \text{ زوجي}, \\ \frac{1}{n} - 1 = -1 & n \text{ فردي} \end{cases}$$

و لأنّ إذا وجدت النهاية فإنّها وحيدة. $(L_n)_n$ ليست رتيبة لأنّ الحدود الأولى ليست رتيبة $(L_1 = 0, L_2 = \frac{3}{2}, L_3 = -\frac{2}{3}, L_4 = \frac{5}{4})$.

- بالنسبة لـ $(Y_n)_n$ نفس دراسة $(T_n)_n$ للتمرين السابق.

- بالنسبة لطبيعة المتتالية $(M_n)_n$ حيث $M_n = \frac{n^2+1}{n+1}$ فإنّها متبا عدة لأنّ :
  $\lim\limits_{n\to+\infty} M_n = \lim\limits_{n\to+\infty}\left(\frac{n^2+1}{n+1}\right) = +\infty$

- المتتالية $(K_n)_n$ حيث $K_n = \frac{1-n^2}{n+2}$ متبا عدة لأنّ $\lim\limits_{n\to+\infty} K_n = \lim\limits_{n\to+\infty}\left(\frac{1-n^2}{n+2}\right) = -\infty$

- المتتالية $(S_n)_n$ حيث $S_n = M_n + K_n$ متقاربة لأنّ:
  $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\frac{n^2+1}{n+1} + \frac{1-n^2}{n+2}\right) = \lim\limits_{n\to+\infty}\left(\frac{n^2+2n+3}{n^2+3n+2}\right) = 1$

2. دراسة تجاور المتتاليتين $(U_n)_n$ و $(V_n)_n$:

- لكي تكون المتتاليتين $(U_n)_n$ و $(V_n)_n$ المعرّفتين بـ $U_n = -\frac{1}{n+2}$ و $V_n = \frac{2}{n+1}$ متجاورتين يجب أن يتحقق ثلاث شروط (أنظر الدرس):

1. دراسة رتابة $(U_n)_n$:
$$U_{n+1} - U_n = -\frac{1}{n+3} + \frac{1}{n+2} = \frac{1}{(n+2)(n+3)} > 0 \Rightarrow (U_n)_n \nearrow$$
2. دراسة رتابة $(V_n)_n$:
$$V_{n+1} - V_n = \frac{2}{n+2} - \frac{2}{n+1} = -\frac{2}{(n+1)(n+2)} > 0 \Rightarrow (U_n)_n \searrow$$
3. $$\lim_{n\to+\infty} (V_n - U_n) = \lim_{n\to+\infty} \left(\frac{2}{n+1} + \frac{1}{n+2}\right) = \lim_{n\to+\infty} \left(\frac{3n+5}{(n+1)(n+2)}\right) = 0$$

إذن $(U_n)_n$ و $(V_n)_n$ متجاورتين.

- لكي تكون المتتاليتين $(U_n)_n$ و $(V_n)_n$ المعرّفتين بـ $U_n = 1 + \frac{1}{2^2} + \cdots + \frac{1}{n^2}$ و $V_n = U_n + \frac{1}{n}$ متجاورتين يجب:

1. دراسة رتابة $(U_n)_n$:
$$U_{n+1} - U_n = \left(1 + \tfrac{1}{2^2} + \cdots + \tfrac{1}{n^2} + \tfrac{1}{(n+1)^2}\right) - \left(1 + \tfrac{1}{2^2} + \cdots + \tfrac{1}{n^2}\right) = \tfrac{1}{(n+1)^2} > 0$$
2. دراسة رتابة $(V_n)_n$:
$$V_{n+1} - V_n = \left(U_{n+1} + \tfrac{1}{n+1}\right) - \left(U_n + \tfrac{1}{n}\right) = (U_{n+1} - U_n) + \tfrac{1}{n+1} - \tfrac{1}{n} = \tfrac{1}{(n+1)^2} + \tfrac{1}{n+1} - \tfrac{1}{n} = -\tfrac{1}{(n+1)^2 n} < 0$$
3. $$\lim_{n\to+\infty} (V_n - U_n) = \lim_{n\to+\infty} \left(\frac{1}{n}\right) = 0$$

إذن $(U_n)_n$ و $(V_n)_n$ متجاورتين.

3. إيجاد الخصائص المميّزة للمجموعات التالية: $A = \left\{\frac{1}{n}, \quad n \in \mathbb{N}^*\right\}$ و $B = \left\{3 - \frac{1}{n}, \quad n \geq 1\right\}$.

1. بالنسبة للمجموعة $A = \left\{\frac{1}{n}, \quad n \in \mathbb{N}^*\right\}$ لدينا $0 < \frac{1}{n} \leq 1$ إذن :
   - $InfA = 0$ هو حد أدنى لـ A أمّا $MinA$ لايوجد لأنّ $0 \notin A$.
   - $SupA = 1$ هو حد أعلى لـ A أمّا $MaxA = 1$ لأنّ $1 \in A$
2. بالنسبة للمجموعة $B = \left\{3 - \frac{1}{n}, \quad n \geq 1\right\}$ لدينا $2 \leq 3 - \frac{1}{n} < 3$ إذن :
   - $InfB = 2$ هو حد أدنى لـ B أمّا $MinB = 2$ لأنّ $2 \in B$.
   - $SupB = 3$ هو حد أعلى لـ B أمّا $MaxB$ غير موجود لأنّ $3 \notin B$.

التمرين الرابع: لتكن المتتالية التراجعية المعرّفة كمايلي:

$$\begin{cases} U_0 = 0 \\ U_{n+1} = \dfrac{7U_n + 4}{3U_n + 3} \end{cases} \tag{1.6}$$

.

1. نبرهن صحّة العلاقة : $\forall n \in \mathbb{N},\ 0 \leq U_n \leq 2 \ldots (P_n)$.
من أجل $n = 0$ لدينا $0 \leq U_0 = 0 \leq 2$
نبرهن صحة $(P_n) \Longrightarrow (P_{n+1})$
لدينا (P_n) صحيحة أي: $0 \leq U_n \leq 2$ و نبرهن صحّة (P_{n+1}) أي: $0 \leq U_{n+1} \leq 2$ ، للوصول إلى ذلك يكفي إدخال التابع f لأنّ $U_{n+1} = f(U_n)$ ، لكن للحفاظ على المتراجحة يجب أن يكون f متزايد إذن ندرس رتابة f ؛
نضع $f(x) = \dfrac{7x+4}{3x+3}$, مع $x \neq -1$ لدينا :
$f'(x) = \dfrac{7(3x+3) - 3(7x+4)}{(3x+3)^2} = \frac{9}{(3x+3)^2} > 0$ إذن : $f \nearrow$.
لدينا $0 \leq U_n \leq 2$ إذن $f(0) \leq f(U_n) \leq f(2)$ و بالتالي : $\frac{4}{3} \leq U_{n+1} \leq 2$ و لدينا $0 \leq \frac{4}{3}$ إذن $0 \leq U_{n+1} \leq 2$ و هو المطلوب.

2. دراسة رتابة (U_n) :
بما أنّ $f \nearrow$ يكفي حساب الفرق $U_1 - U_0$:
$U_1 - U_0 = f(U_0) - U_0 = f(0) - 0 = \frac{4}{3} > 0$
لدينا $f \nearrow$ و $U_1 - U_0 > 0$ إذن (U_n) متزايدة، بالنسبة لطبيعة $(U_n)_n$ ، لدينا (U_n) متزايدة و $(U_n)_n$ محدودة من الأعلى بـ 2 $(U_n \leq 2)$ إذن المتتالية (U_n) متقاربة نحو حدّها الأعلى.
لإيجاد حدّها الأعلى يكفي حل المعادلة $f(l) = l$ أي $\dfrac{7l+4}{3l+3} = l$ إذن: $3l^2 - 4l - 4 = 0$ ، لإيجاد حلول المعادلة نحسب Δ . نجد في الأخير $l_1 = -\frac{2}{3}$ مرفوض لأنّ $(0 \leq U_n \leq 2)$ و $l_2 = 2 \in [0,2]$ إذن $l = 2$.

3. ليكن $A = \{U_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ ، حسب ماسبق $(U_n) \nearrow$ إذن $\text{Inf}A = U_0 = 0$. و $\text{Sup}A = l = 2$ (أنظر الدرس)

التمرين الخامس: لتكن المتتالية التراجعية المعرّفة كمايلي:

$$\begin{cases} U_0 = \dfrac{1}{2} \\ U_{n+1} = U_n^2 + \dfrac{3}{16} \end{cases} \tag{2.6}$$

.

1. نبرهن صحة : $\forall n \in \mathbb{N},\ \frac{1}{4} \leq U_n \leq \frac{3}{4} \ldots (P_n)$.

من أجل $n=0$ لدينا $\frac{1}{4} \leq U_0 = \frac{1}{2} \leq \frac{3}{4}$

نبرهن صحة $(P_n) \Longrightarrow (P_{n+1})$

لدينا (P_n) صحيحة و نبرهن صحة (P_{n+1}) أي $\frac{1}{4} \leq U_{n+1} \leq \frac{3}{4}$ ؛ للوصول إلى ذلك يكفي إدخال التابع f لأنّ $U_{n+1} = f(U_n)$ ، لكن للحفاظ على المتراجحة يجب أن يكون f متزايد إذن ندرس رتابة f :

نضع $f(x) = x^2 + \frac{3}{16}$ مع $x \in \mathbb{R}$ لدينا: $f'(x) = 2x > 0,\ \forall x > 0$ إذن $f \nearrow$.

لدينا $\frac{1}{4} \leq U_n \leq \frac{3}{4}$ إذن $f(\frac{1}{4}) \leq f(U_n) \leq f(\frac{3}{4})$ و بالتالي $\frac{1}{4} \leq U_{n+1} \leq \frac{3}{4}$ لأنّ $f(\frac{1}{4}) = \frac{1}{4}$ و $f(\frac{3}{4}) = \frac{3}{4}$ إذن $\frac{1}{4} \leq U_{n+1} \leq \frac{3}{4}$ و هو المطلوب.

2. دراسة رتابة (U_n) :

بما أنّ $f \nearrow$ يكفي حساب الفرق $U_1 - U_0$:

$$U_1 - U_0 = f(U_0) - U_0 = f(\tfrac{1}{2}) - \tfrac{1}{2} = \tfrac{7}{16} - \tfrac{8}{16} = -\tfrac{1}{16} < 0$$

لدينا $f \nearrow$ و $U_1 - U_0 < 0$ إذن $(U_n)_n$ متناقصة. بالنسبة لطبيعة $(U_n)_n$ ، لدينا $(U_n)_n$ متناقصة و $(U_n)_n$ محدودة من الأدنى بـ $\dfrac{1}{4}$ $(U_n \geq \dfrac{1}{4})$ إذن المتتالية $(U_n)_n$ متقاربة نحو حدّها الأدنى.

لإيجاد حدّها الأدنى يكفي حل المعادلة $f(l) = l$ أي $l^2 + \frac{3}{16} = l \Rightarrow l^2 - l + \frac{3}{16} = 0$ لإيجاد حلول المعادلة نحسب Δ ، نجد في الأخير $l_1 = \frac{1}{4}$ و $l_2 = \frac{3}{4}$ إذن $l = \frac{1}{4}$.

3. ليكن $A = \{U_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ ، حسب ماسبق $(U_n)_n \searrow$ إذن $\text{Inf}A = l = \frac{1}{4}$ و $\text{Sup}A = U_0 = \frac{1}{2}$ (أنظر الدرس)

التمرين السادس:

1. إيجاد a و b ، لدينا : $U_n = \dfrac{1}{n(n+1)} = \dfrac{a}{n} + \dfrac{b}{n+1} = \dfrac{an+a+bn}{n(n+1)} = \dfrac{(a+b)n+a}{n(n+1)}$

بالمطابقة نجد: $a+b=0,\ a=1$ إذن : $a=1$ و $b=-1$ نكتب $U_n = \dfrac{1}{n(n+1)} = \dfrac{1}{n} - \dfrac{1}{n+1}$

2. إيجاد شكل آخر لعبارة S_n

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} U_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n(n+1)} = \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right) = (1-\tfrac{1}{2})+(\tfrac{1}{2}-\tfrac{1}{3})+\cdots+(\tfrac{1}{n}-\tfrac{1}{n+1}) = 1-\tfrac{1}{n+1}$$

3. $\lim\limits_{n\to+\infty} S_n = \lim\limits_{n\to+\infty}(1 - \frac{1}{n+1}) = 1$ إذن المتتالية $(S_n)_n$ متقاربة، إذن السلسلة $\sum\limits_{n\geq 1} S_n$ متقاربة.

3.6 الفصل 3 : (التوابع الحقيقية لمتغيّر حقيقي)

التمرين الأوّل:

1. إيجاد مجموعة التعريف :

$$D_f=\{x\in\mathbb{R} \mid \frac{2+3x}{5-2x}\geq 0 \text{ و } 5-2x\neq 0\}$$

بجدول تغيّرات بسيط نستطيع إيجاد مجموعة التعريف f و هي $D_f=\left[-\frac{2}{3},\frac{5}{2}\right[$

$$D_g=\{x\in\mathbb{R} \mid x^2-1\geq 0\}$$

يمكن التأكد من أنّ مجموعة تعريف g هي $D_g=]-\infty,-1]\cup[1,+\infty[$

$$D_h=\{x\in\mathbb{R} \mid 4x+3>0\}=]-\frac{3}{4},+\infty[$$

2. حساب النهايات :

1. $\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{x}\right)=\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{2x}{x(\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x})}\right)=1$

2. $\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{\sqrt{1+x+x^2}-1}{x}\right)=\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{x+x^2}{x(\sqrt{1+x+x^2}+1)}\right)=\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{1+x}{(\sqrt{1+x+x^2}+1)}\right)=\frac{1}{2}$

3. $\lim\limits_{x\to 2}\left(\frac{x^2+3}{x}\right)=\lim\limits_{x\to 2}\left(\frac{2^2+3}{2}\right)=\frac{7}{2}$

4. $\lim\limits_{x\to -4}\left(\frac{x^2-16}{x+4}\right)=\lim\limits_{x\to -4}\left(\frac{(x+4)(x-4)}{x+4}\right)=\lim\limits_{x\to -4}(x-4)=-8$

5. $\lim\limits_{x\to +\infty}\left(\frac{2x^3+5x^2+6}{x^3-3x+4}\right)=\lim\limits_{x\to +\infty}\left(\frac{x^3(2+\frac{5}{x}+\frac{6}{x^3})}{x^3(1-\frac{3}{x^2}+\frac{4}{x^3})}\right)=2$

6. $\lim\limits_{x\to +\infty}\left(x-\sqrt{x^2-x}\right)=\lim\limits_{x\to +\infty}\left(\frac{x^2-(x^2-x)}{x+\sqrt{x^2-x}}\right)=\lim\limits_{x\to +\infty}\left(\frac{x}{x+\sqrt{x^2-x}}\right)=\lim\limits_{x\to +\infty}\left(\frac{1}{1+\frac{\sqrt{x^2-x}}{x}}\right)=\frac{1}{2}$

7. $\lim\limits_{x\to +\infty}\left(\sqrt{x^2+3x}-x\right)=\lim\limits_{x\to +\infty}\left(\frac{x^2+3x-x^2}{\sqrt{x^2+3x}+x}\right)=\lim\limits_{x\to +\infty}\left(\frac{3x}{x(\sqrt{1+\frac{3}{x}}+1)}\right)=\frac{3}{2}$

8. $\lim\limits_{x\to 2}\left(\frac{1}{x-2}\right)=\begin{cases}-\infty & x\to 2^-,\\ +\infty & x\to 2^+\end{cases}$

9. $\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{2}{1+3^{\frac{1}{x}}}\right)=\begin{cases}2 & x\to 0^-,\\ 0 & x\to 0^+\end{cases}$

10. $\lim\limits_{x\to +\infty}\left(\frac{2x+5}{x^2-3}\right)=\lim\limits_{x\to +\infty}\left(\frac{x(2+\frac{5}{x})}{x^2(1-\frac{3}{x^2})}\right)=\lim\limits_{x\to +\infty}\left(\frac{2}{x}\right)=0$

التمرين الثاني:

1. $D_f =]-\infty, +\infty[= \mathbb{R}$

2. دراسة إستمرارية التابع f عند النقطة $x_0 = 0$:

حتّى يكون التابع f مستمر عند النقطة $x_0 = 0$ يجب: $\lim\limits_{x \to x_0^-} f(x) = \lim\limits_{x \to x_0^+} f(x) = f(x_0)$

$$\lim_{x \to x_0^-} f(x) = \lim_{x \to x_0^-} (x^3 e^{2x}) = f(0) = 0$$

$$\lim_{x \to x_0^+} f(x) = \lim_{x \to x_0^+} \left(\frac{e^{2x} - 1}{\ln(x+1)} \right) = \lim_{x \to x_0^+} \left(\frac{2e^{2x}}{\frac{1}{x+1}} \right) = 2$$ (باستعمال قاعدة لوبيتال)

لدينا: $\lim\limits_{x \to x_0^+} f(x) \neq \lim\limits_{x \to x_0^-} f(x)$ إذن f ليس مستمر عند النقطة $x_0 = 0$.

3. f ليس مستمر عند النقطة $x_0 = 0$ إذن التابع f ليس قابل للإشتقاق عند النقطة $x_0 = 0$ (حسب نظرية في الدرس)

4. كتـــابة التـــابع المشتق:

$$f'(x) = \begin{cases} \left[\dfrac{e^{2x} - 1}{\ln(x+1)} \right]' = \dfrac{(2e^{2x}) \ln(x+1) - (\frac{1}{x+1})(e^{2x} - 1)'}{(\ln(x+1))^2} & x > 0, \\ [x^3 e^{2x}]' = 3x^2 e^{2x} + 2x^3 e^{2x} & x < 0 \end{cases}$$

.

التمرين الثالث:

1. $D_f = \mathbb{R}$

2. حتّى يكون التابع f مستمر عند النقطة $x_0 = 0$ يجب $\lim\limits_{x \to x_0^-} f(x) = \lim\limits_{x \to x_0^+} f(x) = f(x_0)$

$$\lim_{x \to x_0^-} f(x) = \lim_{x \to x_0^-} (x^3 + \alpha - 1) = f(0) = \alpha - 1$$

$$\lim_{x \to x_0^+} f(x) = \lim_{x \to x_0^+} \left(\frac{\sin x}{x} \right) = 1$$

لدينا: f مستمر عند النقطة $x_0 = 0$ إذن $\lim\limits_{x \to x_0^+} f(x) = \lim\limits_{x \to x_0^-} f(x)$ إذن $\alpha - 1 = 1$ إذن: $\alpha = 2$.

3. دراسة قابلية إشتقاق التابع f عند النقطة $x_0 = 0$.

- من أجل $\alpha \neq 2$: f غير مستمر عند النقطة $x_0 = 0$ و بالتالي f غير قابل للإشتقاق عند النقطة $x_0 = 0$
- من أجل $\alpha = 2$: ندرس قابلية إشتقاق التابع f عند النقطة $x_0 = 0$:

$$\lim_{x \to 0^+} \left(\frac{f(x) - f(0)}{x - 0} \right) = \lim_{x \to 0^+} \left(\frac{\frac{\sin x}{x} - 1}{x - 0} \right) = \lim_{x \to 0^+} \left(\frac{\sin x - x}{x^2} \right)$$

$$= \lim_{x\to 0^+}\left(\frac{\cos x - 1}{2x}\right) = \lim_{x\to 0^+}\left(\frac{-\sin x}{2}\right) = 0 = f'_d(0)$$

$$\lim_{x\to 0^-}\left(\frac{f(x)-f(0)}{x-0}\right) = \lim_{x\to 0^-}\left(\frac{x^3+1-1}{x-0}\right) = \lim_{x\to 0^-}(x^2) = 0 = f'_g(0)$$

لدينا $f'_d(0) = f'_g(0)$ إذن f قابل للإشتقاق عند النقطة $x_0 = 0$.

4. كتـــــابة التــــابع المشتق:

- من أجل $\alpha \neq 2$

$$f'(x) = \begin{cases} \left[\dfrac{\sin x}{x}\right]' = \dfrac{(x\cos x) - (\sin x)}{x^2} & x > 0, \\ [x^3+\alpha-1]' = 3x^2 & x < 0 \end{cases}$$

.

- من أجل $\alpha = 2$

$$f'(x) = \begin{cases} \left[\dfrac{\sin x}{x}\right]' = \dfrac{(x\cos x) - (\sin x)}{x^2} & x > 0, \\ f'(0) = 0 & x = 0, \\ [x^3+1]' = 3x^2 & x < 0 \end{cases}$$

.

التمرين الرابع: التمديـــــــد بالإستمراريـة

- التابع f المعرّف بـ $f(x) = e^{\frac{1}{x}}$ غير معرّف عند النقطة $x_0 = 0$ و لدينا :

$$\lim_{x\to 0} e^{\frac{1}{x}} = \begin{cases} +\infty & x \to 0^+ \\ 0 & x \to 0^- \end{cases}$$

إذن f لا تقبل تمديد بالإستمرارية عند النقطة $x_0 = 0$ لأنّ : $\lim_{x\to 0} e^{\frac{1}{x}} \neq l$ (l منتهية).

- التابع h المعرّف بـ $h(x) = \frac{4-x^2}{3-\sqrt{x^2+5}}$ غير معرّف عند النقطة $x_0 = 2$ ، لدينا

$\lim_{x\to 2}(\frac{4-x^2}{3-\sqrt{x^2+5}}) = \lim_{x\to 2}(3+\sqrt{x^2+5}) = 3$, إذن يمكن تمديد h بالإستمرارية عند النقطة $x_0 = 2$:

$$\begin{aligned} \widetilde{h} :\ & \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \\ & x \longmapsto \widetilde{h}(x) = \begin{cases} \frac{4-x^2}{3-\sqrt{x^2+5}} & x \neq 2, \\ 9 & x = 2 \end{cases} \end{aligned}$$

.

التمرين الخامس: إيجاد مشتقّات التوابع التالية:

$$\left[(2x+1)^{\frac{1}{2}}\right]' = \frac{1}{\sqrt{2x+1}},\ \left[x^{\frac{1}{3}}\right]' = \tfrac{1}{3}x^{-\frac{2}{3}},\ \left[\frac{-1}{x}\right]' = \frac{1}{x^2},\ [\ln x]' = \frac{1}{x},$$

$$[\sin(1-4x)]' = (1-4x)'\cos(1-4x) = -4\cos(1-4x),\ [\ln(3x+4)]' = \frac{3}{3x+4},\ [e^{2x}]' = 2e^{2x},$$

$$[\ln(x^2+5x+2)]' = \frac{2x+5}{x^2+5x+2},\ [\ln(e^{3x}+x^3)]' = \frac{3e^{3x}+3x^2}{e^{3x}+x^3},$$

$$\left[\cos(e^{2x}+\sqrt{3x+1})\right]' = -(2e^{2x}+\tfrac{3}{2\sqrt{3x+1}})\sin(e^{2x}+\sqrt{3x+1}),\ [x^x]' = (x\ln x)'x^x = (\ln x+1)x^x,$$

$$[(x+2)^x]' = (x\ln(x+2))'[(x+2)^x] = (\ln(x+2)+\tfrac{x}{x+2})[(x+2)^x].$$

التمرين السادس: قـــــــاعدة لوبيتـــــــال

1. بإستعمال قاعدة لوبيتال، نحسب النهايات التالية:

$$1.\ \lim_{x\to0}\left(\frac{e^x-1}{\sin x}\right) = \lim_{x\to0}\left(\frac{e^x}{\cos x}\right) = 1$$

$$2.\ \lim_{x\to0}\left(\frac{1-e^{-x}}{x}\right) = \lim_{x\to0}\left(\frac{e^{-x}}{1}\right) = 1$$

$$3.\ \lim_{x\to0}\left(\frac{e^x-1}{3\ln(1+x)}\right) = \lim_{x\to0}\left(\frac{e^x}{3\frac{1}{1+x}}\right) = \tfrac{1}{3}$$

$$4.\ \lim_{x\to0}\left(\frac{\ln(1+x)}{\sqrt{x}}\right) = \lim_{x\to0}\left(\frac{\frac{1}{x+1}}{\frac{1}{2\sqrt{x}}}\right) = \lim_{x\to0}\left(\frac{2\sqrt{x}}{x+1}\right) = 0$$

$$5.\ \lim_{x\to0}\left(\frac{1-\cos x}{\tan x}\right) = \lim_{x\to0}\left(\frac{\sin x}{\frac{1}{(\cos x)^2}}\right) = 0$$

$$6.\ \lim_{x\to0}\left(\frac{x-\sin x}{x^3}\right) = \lim_{x\to0}\left(\frac{1-\cos x}{3x^2}\right) = \lim_{x\to0}\left(\frac{\sin x}{6x}\right) = \tfrac{1}{6}$$

$$7.\ \lim_{x\to2}\left(\frac{x^2-4}{x^2-3x+2}\right) = \lim_{x\to2}\left(\frac{2x}{2x-3}\right) = 4$$

$$8.\ \lim_{x\to\pi}\left(\frac{\sin^2 x}{1+\cos x}\right) = \lim_{x\to\pi}\left(\frac{2\sin x\cos x}{-\sin x}\right) = \tfrac{2\cos\pi}{-1} = 2$$

9. $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1+x^2}}{x}\right)=\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{\frac{1}{2\sqrt{1+x}}-\frac{2x}{2\sqrt{1+x^2}}}{1}\right)=\frac{1}{2}$

10. $\lim\limits_{x\to 2}\left(\dfrac{e^x-e^2}{x^2+x-6}\right)=\lim\limits_{x\to 2}\left(\dfrac{e^x}{2x+1}\right)=\frac{e^2}{5}$

11. $\lim\limits_{x\to 1}\left(\dfrac{x^5-1}{2x^2-2}\right)=\lim\limits_{x\to 1}\left(\dfrac{5x^4}{4x}\right)=\frac{5}{4}$

12. $\lim\limits_{x\to 5}\left(\dfrac{\sqrt{x}-\sqrt{5}}{x-5}\right)=\lim\limits_{x\to 5}\left(\frac{1}{2\sqrt{x}}\right)=\frac{1}{2\sqrt{5}}$

13. $\lim\limits_{x\to 1}\left(\dfrac{1}{1-x}-\dfrac{3}{1-x^3}\right)=\lim\limits_{x\to 1}\left(\dfrac{1+x+x^2-3}{1-x^3}\right)=\lim\limits_{x\to 1}\left(\dfrac{x^2+x-2}{1-x^3}\right)=\lim\limits_{x\to 1}\left(\dfrac{2x+1}{-3x^2}\right)=-1$

14. $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{\sqrt{1+x}-1}{\sqrt[3]{1+x}-1}\right)=\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{\frac{1}{2}(1+x)^{\frac{-1}{2}}}{\frac{1}{3}(1+x)^{\frac{-2}{3}}}\right)=\frac{3}{2}$

15. $\lim\limits_{x\to 4}\left(\dfrac{\sqrt{x}-2}{x^2-5x+4}\right)=\lim\limits_{x\to 4}\left(\dfrac{\frac{1}{2\sqrt{x}}}{2x-5}\right)=\dfrac{\frac{1}{4}}{3}=\frac{1}{12}$

16. $\lim\limits_{x\to -2}\left(\dfrac{x^3-3x+2}{x^2-4}\right)=\lim\limits_{x\to -2}\left(\dfrac{3x^2-3}{2x}\right)=\frac{-9}{4}$

17. $\lim\limits_{x\to \pi}\left(\frac{\sin x}{\cos(\frac{x}{2})}\right)=\lim\limits_{x\to \pi}\left(\frac{\cos x}{\frac{-1}{2}\sin(\frac{x}{2})}\right)=2$

2. نفس الخطوات بالنسبة لنهايات السؤال 2.

4.6 الفصل 4 : (التوابع ذات عدّة متغيرات)

التّمرين الأوّل: الجدول (3.6) يمثّل المشتقّات الجزئية من الرتبة 1 و 2 للتوابع f_1 ، f_2 و f_3 :

التوابع /المشتقّات	$f_1(x,y)=2x^3y^4+\dfrac{1}{x}-5$	$f_2(x,y)=\ln(x+y)$	$f_3(x,y)=e^{(x^2+y)}$
f'_x	$6x^2y^4-\frac{1}{x^2}$	$\frac{1}{x+y}$	$2xe^{x^2+y}$
f'_y	$8x^3y^3$	$\frac{1}{x+y}$	e^{x^2+y}
f''_{xx}	$12xy^4+\frac{2}{x^3}$	$\frac{-1}{(x+y)^2}$	$e^{x^2+y}\,(2+4x^2)$
f''_{yy}	$24x^3y^2$	$\frac{-1}{(x+y)^2}$	e^{x^2+y}
f''_{xy}	$24y^3x^2$	$\frac{-1}{(x+y)^2}$	$2xe^{x^2+y}$
f''_{yx}	$24x^2y^3$	$\frac{-1}{(x+y)^2}$	$2xe^{x^2+y}$

الجدول (3.6) : المشتقّات الجزئية

التّمرين الثاني: التكلفة الهامشية لـ $C(x,y)=2x\ln(3+2y)$ ممثلة في الجدول الآتي:

التكلفة الهامشية/ $C(x,y)$	$C(x,y)=2x\ln(3+2y)$
$\frac{\partial C}{\partial x}(x,y)$	$2\ln(3+2y)$
$\frac{\partial C}{\partial y}(x,y)$	$\frac{4x}{3+2y}$

الجدول (4.6) : التكلفة الهامشية

التّمرين الثالث: الإنتاج الهامشي بالنسبة لـ x و بالنسبة لـ y للتوابع ممثل في الجدول (5.6) :

الإنتاج الهامشي/التوابع	f'_x	f'_y
$f_1(x,y)=2x^{\frac{1}{4}}y^{\frac{3}{8}}$	$\frac{1}{2}y^{\frac{3}{8}}x^{-\frac{3}{4}}$	$\frac{3}{4}x^{\frac{1}{4}}y^{-\frac{5}{8}}$
$f_2(x,y)=xy+4x^3y^2-6x+3$	$y+12y^2x^2-6$	$x+8x^3y$
$f_3(x,y)=(xy)^{\frac{1}{3}}$	$\frac{1}{3}(xy)^{-\frac{2}{3}}y$	$\frac{1}{3}(xy)^{-\frac{2}{3}}x$
$f_4(x,y)=x^2+y^2$	$2x$	$2y$
$f_5(x,y)=xy$	y	x

الجدول (5.6) : الإنتاج الهامشي

التّمرين الرابع: لدينا التوابع ذات ثلاث متغيّرات التالية:
$f(x,y,z)=e^{xyz}+e^{-xyz}$ و $g(x,y,z)=e^{xyz}-e^{-xyz}$
نبيّن أنّ : $f'_x(x,y,z)+f'_y(x,y,z)+f'_z(x,y,z)=(xy+xz+yz)g(x,y,z)$
لدينا

$$f'_x(x,y,z)=yz.e^{xyz}-yz.e^{-xyz} = yz.(e^{xyz}-e^{-xyz}) \tag{3.6}$$
$$f'_y(x,y,z)=xz.e^{xyz}-xz.e^{-xyz} = xz(e^{xyz}-e^{-xyz}) \tag{4.6}$$
$$f'_z(x,y,z)=xy.e^{xyz}-xy.e^{-xyz} = xy(e^{xyz}-e^{-xyz}) \tag{5.6}$$

بجمع المعادلات الثلاث السابقة نجد:

$$\begin{aligned} f'_x(x,y,z)+f'_y(x,y,z)+f'_z(x,y,z) &= yz(e^{xyz}-e^{-xyz})+xz(e^{xyz}-e^{-xyz})+xy(e^{xyz}-e^{-xyz}) \\ &= (xy+xz+yz)(e^{xyz}-e^{-xyz})=(xy+xz+yz)g(x,y,z) \end{aligned}$$

و هو المطلوب.

5.6 الفصل 5 : (التكـــــــامل)

التّمرين الأوّل : إيجاد التكامل بإستعمال جدول التكاملات

$$I_1 = \int (3x^2+9)dx = \int 3x^2dx + \int 9dx = 3\int x^2dx + 9\int 1dx = 3\frac{x^3}{3} + 9x + c = x^3 + 9x + c$$

$$I_2 = \int \left(x^{\frac{1}{2}} - (2x)^{\frac{1}{3}}\right) dx = \int x^{\frac{1}{2}}dx - \int (2x)^{\frac{1}{3}}dx = \frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}} - 2^{\frac{1}{3}}\frac{3}{4}x^{\frac{4}{3}} + c$$

$$I_3 = \int (\frac{1}{x^4}+10)dx = \int \frac{1}{x^4}dx + \int 10dx = \frac{x^{-4+1}}{-4+1} + 10x + c = \frac{x^{-3}}{-3} + 10x + c = -\frac{1}{3x^3} + 10x + c$$

$$I_4 = \int (\sqrt{x} + \frac{1}{x})dx = \int \sqrt{x}dx + \int \frac{1}{x}dx = \frac{x^{\frac{1}{2}+1}}{\frac{1}{2}+1} + \ln|x| + c = \frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}} + \ln|x| + c$$

$$I_5 = \int (a^x)dx = \int e^{x\ln a}dx = \frac{1}{\ln a}e^{x\ln a} + c = \frac{1}{\ln a}a^x + c$$

$$I_6 = \int \frac{1}{\sqrt{x}}dx = 2\sqrt{x} + c$$

$$I_7 = \int (e^{3x} + 2x + 4)dx = \frac{1}{3}e^{3x} + x^2 + 4x + c$$

التّمرين الثاني: إيجاد التكامل بطريقة تغيير متغيّر

- $I_1 = \int (1+x^2) \times xdx$

نضع: $t = 1 + x^2$ و بالتالي $dt = 2xdx$ إذن:

$$I_1 = \int (1+x^2) \times xdx = \frac{1}{2}\int (1+x^2) \times 2xdx = \frac{1}{2}\int tdt = \frac{1}{4}t^2 + c = \frac{1}{4}(1+x^2)^2 + c$$

- $I_2 = \int (1+x^3) \times x^2dx$

نضع: $t = 1 + x^3$ و بالتالي $dt = 3x^2dx$ إذن:

$$I_2 = \int (1+x^3) \times x^2dx = \frac{1}{3}\int (1+x^3) \times 3x^2dx = \frac{1}{3}\int tdt = \frac{1}{3.2}t^2 + c = \frac{1}{6}(1+x^3)^2 + c$$

- $I_3 = \int \frac{x^2}{2+x^3}dx$

نضع: $t = 2 + x^3$ و بالتالي $dt = 3x^2dx$ إذن:

$$I_3 = \int \frac{x^2}{2+x^3}dx = \frac{1}{3}\int \frac{3x^2}{2+x^3}dx = \frac{1}{3}\int \frac{1}{t}dt = \frac{1}{3}\ln|t| + c = \frac{1}{3}\ln|2+x^3| + c$$

- $I_4 = \int \sin(2x)dx$

نضع: $t = 2x$ و بالتالي $dt = 2dx$ إذن:

$$I_4 = \int \sin(2x)dx = \frac{1}{2}\int 2\sin(2x)dx = \frac{1}{2}\int \sin t dt = \frac{1}{2}(-\cos t + c) = -\frac{1}{2}\cos(2x) + c$$

- $I_5 = \int \frac{1}{3x+1}dx$

نضع: $t = 3x + 1$ و بالتالي $dt = 3dx$ إذن:

$$I_5 = \int \frac{1}{3x+1}dx = \frac{1}{3}\int \frac{3}{3x+1}dx = \frac{1}{3}\int \frac{1}{t}dt = \frac{1}{3}\ln|t| + c = \frac{1}{3}\ln|3x+1| + c$$

- $I_6 = \int \frac{3+\ln x}{x}dx$

نضع: $t = 3 + \ln x$ و بالتالي $dt = \frac{1}{x}dx$ إذن:

$$I_6 = \int \frac{3+\ln x}{x}dx = \int t dt = \frac{t^2}{2} + c = \frac{(3+\ln x)^2}{2} + c$$

- $I_7 = \int 3x\sqrt{1-2x^2}dx$

نضع: $t = 1 - 2x^2$ و بالتالي $dt = -4xdx$ إذن:

$$I_7 = \int 3x\sqrt{1-2x^2}dx = \frac{3}{-4}\int -4x\sqrt{1-2x^2}dx = \frac{3}{-4}\int \sqrt{t}dt = \frac{3}{-4}\left(\frac{t^{\frac{1}{2}+1}}{\frac{1}{2}+1}\right) + c = \frac{3}{-4}\left(\frac{t^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}}\right) + c$$

$$= \frac{3.2}{-4.3}\left(t^{\frac{3}{2}}\right) + c = -\frac{1}{2}(1-2x^2)^{\frac{3}{2}} + c$$

- $I_8 = \int \frac{x+3}{(x^2+6x)^{\frac{1}{3}}}dx$

نضع: $t = x^2 + 6x$ و بالتالي $dt = (2x+6)dx$ إذن:

$$I_8 = \int \frac{x+3}{(x^2+6x)^{\frac{1}{3}}}dx = \frac{1}{2}\int \frac{2x+6}{(x^2+6x)^{\frac{1}{3}}}dx = \frac{1}{2}\int (2x+6)(x^2+6x)^{-\frac{1}{3}}dx$$

$$= \frac{1}{2}\int t^{-\frac{1}{3}}dt = \frac{1}{2}\left(\frac{t^{-\frac{1}{3}+1}}{-\frac{1}{3}+1}\right) + c = \frac{1}{2}\left(\frac{t^{\frac{2}{3}}}{\frac{2}{3}}\right) + c = \frac{3}{4}(x^2+6x)^{\frac{2}{3}} + c$$

التّمرين الثالث: إيجاد التكامل بالتجزئة

- $I_1 = \int \ln x dx$

نضع: $f(x) = \ln x$ ، $g'(x) = 1dx$ و بالتالي $f'(x) = \frac{1}{x}dx$ و $g(x) = x$ ، إذن حسب قانون التكامل بالتجزئة لدينا:

$$I_1 = x \times \ln x - \int \frac{1}{x}x dx = x \times \ln x - \int 1dx = x \times \ln x - x + c$$

- $I_2 = \int x \times \ln x dx$

نضع: $fx) = \ln x$ ، $g'(x) = xdx$ و بالتالي $f'(x) = \frac{1}{x}dx$ و $g(x) = \frac{x^2}{2}$ ، إذن:

$$I_2 = \frac{x^2}{2} \times \ln x - \frac{1}{2}\int xdx = \frac{x^2}{2} \times \ln x - \frac{1}{4}x^2 + c$$

- $I_3 = \int x \times e^{-x} dx$

نضع: $f(x) = x$ ، $g'(x) = e^{-x}dx$ و بالتالي $f'(x) = 1dx$ و $g(x) = -e^{-x}$ ، إذن:

$$I_3 = -xe^{-x} - \int -e^{-x}dx = -xe^{-x} - e^{-x} + c$$

- $I_4 = \int x \times e^{x} dx$

نضع: $f(x) = x$ ، $g'(x) = e^{x}dx$ و بالتالي $f'(x) = 1dx$ و $g(x) = e^{x}$ ، إذن:

$$I_4 = xe^{x} - \int e^{x}dx = xe^{-x} - e^{x} + c$$

- $I_5 = \int \arctan x dx$

نضع: $f(x) = \arctan x$ ، $g'(x) = 1dx$ و بالتالي $f'(x) = \frac{1}{1+x^2}dx$ و $g(x) = x$ ، إذن:

$$I_5 = x\arctan x - \frac{1}{2}\int \frac{2x}{1+x^2}dx = x\arctan x - \frac{1}{2}\ln|1+x^2| + c$$

- $I_6 = \int x^2 \times \sin x dx$

نضع: $f(x) = x^2$ ، $g'(x) = \sin x dx$ و بالتالي $f'(x) = 2xdx$ و $g(x) = -\cos x$ ، إذن:

$$I_6 = -x^2\cos x + 2\int x\cos x dx = -x^2\cos x + J$$

نكامل بالتجزئة J :

نضع: $f(x) = x$ ، $g'(x) = \cos x dx$ و بالتالي $f'(x) = 1dx$ و $g(x) = \sin x$ ، إذن:

$J = x\sin x - \int \sin x dx = x\sin x + \cos x + c_1$ فيصبح لدينا:

$I_6 = -x^2\cos x + 2(x\sin x + \cos x + c_1) = -x^2\cos x + 2x\sin x + 2\cos x + 2c_1$.

حيث $2c_1 = c$ ثابت التكامل.

التّمرين الرّابع : إيجاد التكاملات المحدودة التالية:

$$I_1 = \int_{-\infty}^{0} e^x dx = [e^x]_{-\infty}^{0} = 1 - 0 = 1$$

$$I_2 = \int_{1}^{+\infty} \frac{1}{x} dx = [\ln|x|]_{1}^{+\infty} = +\infty$$

$$I_3 = \int_{1}^{+\infty} \frac{1}{x^2} dx = \left[-\frac{1}{x}\right]_{1}^{+\infty} = -0 + 1 = 1$$

المراجع

[1] Alain Piller. Analyse *I* pour économistes, 2011.

[2] Abdelaziz El Kaabouchi. Le succès en ANALYSE en fiches-méthodes, 2003.

[3] Beaujolais Bofoya Komba. Mathématiques pour économistes: cours et exercices résolus, 2017.

[4] Mohamed Mehbali.Mathématiques 1, 2011.

[5] Site Exo7. ANALYSE, COURS DE MATHÉMATIQUES: PREMIÈRE ANNÉE, Université de Lille.

[6] Yadolah Dodge. Mathématiques de base pour économistes, 2008.

[7] بن عيسى لخضر، محمود سعود ، التحليل الرياضي للسنة الأولى جامعي (الجزء الأوّل)، 2012.