جامعة الجزائر03

كلية العلوم الاقتصادية والعلوم التجارية وعلوم التسيير

قسم العلوم التجارية

مطبوعة دروس مقدمة لطلاب السنة الثانية

شعبة العلوم التجارية

تحت عنوان:

رياضيات المؤسسة

من إعداد الأستاذ: العـايب ياســين

السنة الدراسية: 2020/2019

الفهرس

مقدمة:

هذا العمل عبارة عن مطبوعة دروس موجهة لطلاب السنة الثانية علوم تجارية ، كما أن هذا العمل المتواضع يدخل في صدد تذليل بعض العقبات و العراقيل التي تصادف طلبتنا الجامعيين في بعض المقاييس الكمية، و لعل من أهمها مقياس رياضيات المؤسسة و الذي تكمن صعوبته في اعتماده على الطرق الرياضية بشكل شبه مطلق مما يتطلب تركيزا أدق و جهدا أكبر.

و لقد قسمنا هذا العمل إلى ثلاث محاور كبرى من هذا المقياس ، ففي المحور الأول عرضنا إمكانية و كيفية ترجمة أي مشكلة على شكل نموذج رياضي مع بعض الأمثلة الأكثر شيوعا و ركزنا على هذا المحور أكثر من غيره لأن عملية تشكيل أي نموذج رياضي تعتمد فقط على تركيز و قدرة الطالب فقط و لا توجد أي برامج معلوماتية يمكنها القيام بذلك ، ثم في المحور الثاني استعرضنا طرق و خوارزميات حل نماذج البرمجة الخطية و حتى و إن كانت هناك خوارزميات متوفرة على شكل برامج معلوماتية لحلها إلا أننا لا نستطيع الاستغناء عن معرفة كيفية عملها ، ذلك لأن فهمها يساعدنا في تحليل و شرح النتائج فيما بعد ، بينما تناولنا في المحور الثالث الشكل الثنائي و هو نموذج رياضي مرتبط بعلاقة رياضية تامة مع أي نموذج برمجة خطية ، ثم بعد ذلك تحليل حساسية النتائج لأي تغيرات محتملة في أحد معطيات المشكلة المدروسة.

و لترسيخ كل الدروس التي وردت في هذه المطبوعة عمدنا إلى حل عدد معتبر من الأمثلة و التمرينات بطريقة منهجية و مبسطة إلى غاية الحدود .

و في الأخير نرجو من الله العلي القدير أن يكون قد و فقنا في إخراج هذا العمل المتواضع إلى النور و أن يستفيد منه من يحتاج إليه سواء كانوا طلابا أو أساتذة أو غيرهم و نعتذر مسبقا عن كل الأخطاء التي قد ترد ضمن هذه المطبوعة

.

المحور الأول : تشكيل نماذج البرمجة الخطية

تعتبر البرمجية الخطية أحد النماذج التي عرفت تطورا كبيرا منذ ظهورها أول مرة سنة *1939*م من طرف الرياضي الروسي *Kontorovitch* , ثم بعد ذلك من طرف الرياضي الأمريكي *George Dantzig* الذي اكتشف طريقة حل هذا النوع من النماذج التي اشتهرت باسم طريقة *Simplex* , وقد تم استخدام هذه النماذج بكثرة في ميدان التسيير كأحد أهم الأدوات الكمية في عملية اتخاذ القرارات , فعلى سبيل المثال يمكن استخدامها في تحديد التوزيع الأمثل للموارد المحدودة الضرورية لإنجاز نشاطات متنافسة فيما بينها من أجل بلوغ هدف معين , أو في تحديد المخطط الأمثل في إنتاج عدد معين من المنتجات التي تحتاج لنفس الموارد الأولية , أو تحديد المسار الأقل الكلفة لنقل المنتجات من مراكز التخزين نحو مراكز التوزيع , بل و حتى عند تكليف عدد من العمال بمهام مختلفة بطريقة مثلى , و في مجالات عديدة أخرى لا يمكن حصرها.

و قبل أن نتطرق إلى كيفية استخدام البرمجة الخطية في اتخاذ القرارات الرشيدة , سوف نستعرض أولا مفاهيم و فرضيات هذه النماذج.

1 . مفاهيم و فرضيات نماذج البرمجة الخطية:

1 . 1 . مفاهيم النموذج:

سوف نشرح مختلف هذه المفاهيم من خلال المثال التالي:

مثال 1-1:

تنتج مؤسسة "شابي" ثلاث أنواع من الأنابيب البلاستيكية ذات أقطار مختلفة نرمز لها بالرموز C , B , A , ولإنتاج وحدة واحدة (الوحدة:المتر) من كل نوع من هذه الأنابيب تحتاج إلى كمية معينة من نفس المادة الأولية , و عدد معين من ساعات العمل (كما هو مبين في الجدول الموالي), إلا أن هذه الموارد متوفرة بشكل محدود لديها , و كل وحدة مباعة من كل نوع تحقق ربحا صافيا ثابتا.

بالإضافة إلى ذلك و نظرا لمحدودية طاقة التخزين لديها لا تستطيع أن تنتج أكثر من *4000* وحدة من المنتجات الثلاث مجتمعة.

الجدول 1-1

المنتجات / الموارد	مادة أولية	ساعات العمل	الربح الصافي (دج)
A	8	4	70
B	4	1	22
C	2	6	50
الكميات المتاحة	7000	5000	

المطلوب:

ما هو عدد الوحدات الواجب إنتاجها من كل نوع من هذه الأنابيب من أجل بلوغ أقصى ربح ممكن؟

إن المشكلة التي تواجه هذه المؤسسة هو اختيار التوفيقة المثلى من بين ثلاث نشاطات مختلفة و التي تمثل هنا إنتاج ثلاث منتجات مختلفة C , B , A , فعملية تحديد الكمية الواجب إنتاجها من كل منتج تسمى في البرمجة الخطية "**متغيرات القرار**" , و لتكن X_3 , X_2 , X_1 متغيرات القرار المتعلقة بهذه المؤسسة :

X_1 : عدد وحدات المنتج A.

X_2 : عدد وحدات المنتج B.

X_3 : عدد وحدات المنتج C.

تقوم هذه المؤسسة بإطلاق ثلاث نشاطات لتحويل الموارد الضرورية التي تسمى "**المدخلات**" لإنتاج ثلاث منتجات مختلفة تسمى "**المخرجات**" , و تتوفر هذه المؤسسة على ثلاث موارد هي:

المورد *1* : المتاح من المواد الأولية.

المورد *2* : المتاح من ساعات العمل.

المورد *3* : المتاح من طاقة التخزين.

و الملاحظ هنا أن الموردين الأوليين هما موردين حقيقيين , بينما الثالث لا يعتبر كمورد حقيقي و لكن تم إدراجه لأنه و بالنسبة لهذه المؤسسة في غياب مكان للتخزين لا يمكن الإنتاج .

و بطبيعة الحال لا يمكن أن تتوفر هذه المؤسسة على هذه الموارد بكميات لا محدودة و التي نرمز لها بالرمز $\boldsymbol{b_i}$: $b_1=7000$, $b_2=5000$, $b_3=4000$.

إن عدد الوحدات الضرورية من كل مورد من أجل إنتاج وحدة واحدة من منتج معين تسمى "**المعامل التكنولوجي**" لهذا المنتج و نرمز له بالرمز $\boldsymbol{a_{ij}}$**:** وهو عدد الوحدات الضرورية من المورد i لإنتاج وحدة واحدة من المنتج j.

في مثالنا السابق لدينا :

$a_{12} = 4$: يعني أننا نحتاج لـ 4 وحدات من المادة الأولية لإنتاج وحدة واحدة من المنتج B.

بما أن الكميات المتاحة من الموارد هي كميات محدودة , فإن المنتجات المتحصل عليها سوف تكون محدودة , و بالتالي فإن القيم التي يمكن أن تأخذها متغيرات القرار تكون محدودة هي الأخرى , و يتم ترجمة ذلك رياضيا عن طريق متراجحة لكل مورد و تسمى هذه المتراجحات في البرمجة الخطية "**قيود النموذج**".

في مواجهة أغلب مشاكل التسيير لا تأخذ متغيرات القرار قيما سلبية , و بالتالي نحصل على قيود تسمى "**قيود السلبية**" على الشكل : $X_j \geq 0$.

و في الأخير يجب أن نحدد معيار لقياس جودة و حسن تسيير المؤسسة عندما تأخذ متغيرات القرار قيما معينة , و هذا المعيار يسمى في البرمجة الخطية "**دالة الهدف**" و هي عبارة عن معادلة رياضية لمتغيرات القرار , حيث تمثل معاملات المتغيرات في أغلب الأحيان الربح الصافي الوحدوي أو التكلفة

الوحدوية لكل نشاط و نرمز لهذه المعاملات بالرمز C_j , ففي حالة الربح مثلا يكون المعيار هو تعظيم دالة الهدف , أما في حالة التكلفة فيكون المعيار هو تدنية دالة الهدف , و لا يقتصر الأمر على هاتين الحالتين فقط , فقد يكون انشغال المؤسسة هو تدنية ساعات العمل أو تعظيم حصة السوق لبعض منتجاتها......الخ.

بالنسبة لحالة مؤسستنا هذه فإن معيار القياس في دالة الهدف هو تعظيم أرباحها و معاملاتها هي :
$C_1 = 70DA\ ,\ C_2 = 22DA\ ,\ C_3 = 50DA$

1 . 2 . فرضيات النموذج:

تعني عبارة "**خطية**" في نموذج البرمجة الخطية أن دالة الهدف تكون على شكل معادلة رياضية خطية , و أيضا بالنسبة لجميع قيود النموذج التي يفترض هي الأخرى أن تكون معادلات أو متراجحات رياضية خطية , و يعتمد تحقيق شرط خطية أي معادلة على ثلاث فرضيات أساسية يجب توفرها مجتمعة , و هذا يعني أنه قبل استخدام هذا النوع من النماذج التأكد من أن المشكلة التي تواجهها المؤسسة تتوفر على هذه الفرضيات و هي :

أ)– **مبدأ التناسبية** (*proportionnalité*):

لكل نشاط يجب أن تكون الكميات المستخدمة من الموارد و الأرباح الصافية الوحدوية (أو التكاليف) تتناسب مع مستوى هذا النشاط , و بعبارة أخرى يجب أن تكون كل معاملات دالة الهدف (C_j) ثابتة (و في الواقع العملي قد لا تكون كذلك فأسعار منتجات المؤسسة في السوق في تغير مستمر يخضع لقوانين السوق , و في هذه الحالة يتم خرق أحد فرضيات شرط الخطية و بالتالي لا يمكن اعتماد نماذج البرمجة الخطية) , أي أن لكل وحدة منتجة نفس الأثر على دالة الهدف , و نفس الشيء بالنسبة للمعاملات التكنولوجية ($\boldsymbol{a_{ij}}$) التي يجب أن تكون ثابتة هي الأخرى.

ب)– **مبدأ التجميع**(*additivité*):

مهما تكن مستويات النشاط فالاستخدام الكلي لكل مورد يجب أن تساوي مجموع الكميات المستخدمة في كل نشاط, و القيمة الكلية لدالة الهدف يجب أن تساوي لمجموع قيم كل نشاط , و هذا يعني أنه ليتحقق ذلك يجب أن يكون كل نشاط مستقل عن باقي النشاطات , و لا يجب أن يدخل أحد المنتجات مثلا في إنتاج منتج آخر منافس على الموارد الأولية , و إلا فإن قيمة دالة الهدف لا يمكن أن تساوي مجموع الأرباح الممكن تحقيقها من كل منتج.

ت)– **مبدأ التجزيء**(*divisibilité*):

لا يشترط لقيم متغيرات القرار أن تكون أعداد صحيحة , بل يمكن أن تكون متغيرات مستمرة تأخذ أي قيم عشرية (*frationnaires*) (و في الواقع هي فرضية غير محققة دائما فمؤسسة إنتاج السيارات

مثلا لا تستطيع إنتاج *562.34* سيارة و طريقة البرمجة الخطية غير صالحة , إلا أنه هناك طرق أخرى لحل هذا النوع من المشاكل سوف نأتي على ذكرها فيما بعد) , و مع ذلك يمكن تجاوز هذه الفرضية في بعض المشاكل دون أن تؤثر بشكل كبير على حل النموذج و ذلك عندما تكون مثلا الوحدات المنتجة ذات تكاليف متدنية (مثلا إنتاج *50623.25* قلم أو *50623* لا يعد فرقا واضحا), أو إذا تعلق الأمر بمتغيرات غير فيزيائية ......الخ.

ملاحظة : يمكن في كثير من الأحيان إهمال بعض هذه الفرضيات و ذلك إذا كانت الحلول المتحصل عليها قريبة من الحل الأمثل وسوف نشرح ذلك فيما بعد من خلال أمثلة تطبيقية , و هناك خوارزميات خاصة بالبرمجة الخطية ذات الأعداد الصحيحة سوف نتطرق لها أيضا في مراحل لاحقة من هذا الكتاب.

2 . مراحل تشكيل نموذج برمجة خطية:

عندما نواجه مسألة ما و التي يمكن حلها باستخدام البرمجة الخطية ' فإن أهم مشكلة تعترضنا هي عملية تشكيل النموذج (فكل البرامج المعلوماتية المتوفرة تقوم بحل نماذج البرمجة الخطية المعدة سلفا و لا توجد على الإطلاق أية برامج لبناء هذا النوع من النماذج , لذلك فعلى القارئ أن يركز أكثر على هذا الجزء من الكتاب) لذلك علينا أولا أن نقوم بتحليل هذه المسألة و ذلك بإتباع الخطوات التالية :

أ) . تحديد ماهية النشاطات المتعلقة بهذه المسألة , حيث يمكن تمثيل مستوى كل نشاط بواسطة متغير قرار وحيد , والتي يجب أن تتم بطريقة واضحة ودقيقة و أي خطأ في تحديدها تؤدي إلى نموذج خاطئ و بالتالي حلول غير ملائمة , و تعتبر هذه المرحلة من أهم مراحل تشكيل النموذج.

ب) . تحديد قيود المسألة من خلال بناء مختلف المعادلات والمتراجحات التي تقيد القيم التي يمكن أن تأخذها مختلف المتغيرات , و ذلك بإدراج الكميات المتاحة لمختلف الموارد , و هي لا تقل أهمية عن المرحلة السابقة.

ت) . تحديد المعيار المتبع في قياس متغيرات القرار و بعبارة أخرى تحديد دالة الهدف.

ث) . مراعاة توفر شرط خطية النموذج (دالة الهدف و القيود) , وفي الحقيقة يمكن تجاوز بعض الفرضيات إذا رأينا أنها لا تبعدنا بشكل كبير عن الحل الأمثل , و مع ذلك هناك تقنيات أخرى عدا البرمجة الخطية لمعالجة هذه المشاكل (مثل برمجة الأعداد الصحيحة) .

ج) . جمع كل المعطيات على الشكل الرياضي للنموذج (دالة الهدف و القيود).

ح) . مراجعة الشكل النهائي للنموذج مع معطيات المسألة و التحقق من عدم نسيان أو إهمال أي عنصر من عناصر المسألة.

و الآن نحاول تطبيق هذه الخطوات لتشكيل نموذج المثال السابق:

أ) . لدى المؤسسة ثلاثة نشاطات تمثل تصنيع ثلاث منتجات C,B,A, والتي تم تمثيلها بثلاث متغيرات قرار X_3 , X_2 , X_1 على الترتيب.

ب) . نعبر عن محدودية الموارد المتاحة من خلال قيود , حيث يخص كل قيد مورد محدد , ومن خلال (الجدول 1−1) يمكن تشكيل مختلف القيود , فمثلا بالنسبة لقيد المواد الأولية نحتاج إلى:

. 8 وحدات من المادة الأولية لإنتاج وحدة واحدة من المنتج A.

. 4 " " " " " B.

. 2 " " " " " C.

و بمأن عدد الوحدات المنتجة من كل منتج هي X_3 , X_2 , X_1 فإن الكمية الكلية المستخدمة من المادة الأولية هي: $8X_1+4X_2+2X_3$

و بمأن الكمية المتاحة من المادة الأولية محدودة بـ 7000 وحدة فهذا يعني أن الكمية المستخدمة لا يجب أن تتجاوز الكمية المتاحة و نعبر عنها رياضيا بالمتراجحة التالية: $8X_1+4X_2+2X_3 \leq 7000$

و بنفس الطريقة نعبر عن قيد ساعات العمل المستخدمة التي لا يجب أن تتجاوز عدد ساعات العمل المتاح بالمتراجحة: $4X_1+1X_2+6X_3 \leq 5000$

أما القيد الثالث فيخص طاقة التخزين حيث لا يجب أن تتجاوز الكميات المنتجة طاقة التخزين القصوى و نعبر عنها: $X_1+X_2+X_3 \leq 4000$

و في الأخير لا ننسى أن قيم المتغيرات تعبر عن مقادير فيزيائية غير سالبة و تكون قيود السلبية على الشكل: $X_j \geq 0 : j = 1,2,3$

ت) . تبحث المؤسسة على مخطط الإنتاج الأمثل من أجل تعظيم أرباحها إلى أقصى ما يمكن , و بمأن الربح الصافي الوحدوي للمنتجات C , B , A هي على الترتيب 70 , 22 , 50 فإن الربح الصافي الإجمالي هو :

$$Z = 70X_1+22X_2+50X_3$$

و يصبح هدف المؤسسة هو تعظيم الربح ($Maximisation$) :

$$Max\ Z = 70X_1+22X_2+50X_3$$

ث) . كل فرضيات خطية النموذج متوفرة:

. مبدأ التناسبية : محقق لأن كل معاملات دالة الهدف و المعاملات التكنولوجية ثابتة.

. مبدأ التجميع : محقق كل نشاط مستقل عن باقي النشاطات (لا يدخل أي منتج في إنتاج منتج آخر).

. مبدأ التجزيء : محقق لأن المتغيرات مستمرة (الوحدات بالأمتار).

ج) . يمكن الآن جمع النموذج على الشكل الرياضي التالي:

$$\begin{aligned} &Max\ Z = 70X_1+22X_2+50X_3 \\ &S.C \\ &\quad 8X_1+4X_2+2X_3 \leq 7000 \\ &\quad 4X_1+1X_2+6X_3 \leq 5000 \\ &\quad X_1+X_2+X_3 \leq 4000 \end{aligned}$$

$X_j \geq 0 : j = 1,2,3$

ح) . بعد مراجعة النموذج مع معطيات المسألة تم التأكد من عدم إهمال أو نسيان أي عنصر من عناصر المسألة.

3 . الشكل العام لنموذج البرمجة الخطية:

إن الشكل الرياضي العام لنموذج برمجة خطية يحتوي على n متغير و m قيد هو:

$$Max\ (ou\ Min)\ Z = c_1X_1 + c_2X_2 + \dots\dots\dots + c_nX_n .$$

$$\begin{aligned}
s.c\quad & a_{11}X_1 + a_{12}X_2 + \dots + a_{1n}X_n \ (\geq, =, \leq)\ b_1 .\\
& a_{21}X_1 + a_{22}X_2 + \dots + a_{1n}X_n \ (\geq, =, \leq)\ b_2 .\\
& \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\\
& a_{m1}X_1 + a_{m2}X_2 + \dots + a_{mn}X_n \ (\geq, =, \leq)\ b_m .\\
& X_j \geq 0\ ,\ j = 1,2,\dots\dots\dots,n.
\end{aligned}$$

و يمكن أن نختصر جميع القيود في قيد واحد معبر كما يلي:

$$Max\ (ou\ Min)\ Z = c_1X_1 + c_2X_2 + \dots\dots\dots\dots\dots\dots + c_nX_n .$$

$$S.C$$

$$i = 1,\dots\dots.,m \qquad \sum_{j=1}^{n} aijX_j \left(\leq, =, \geq\right)\ b_i$$

$$X_j \geq 0\ ,\ j = 1,2,\dots\dots\dots,n.$$

يمكن أيضا كتابة الشكل العام لنموذج البرمجة الخطية بطريقة المصفوفات كما يلي :

$$Max(ou\ Min)\ Z = [C]\ [X]$$

$$S.C$$

$$[A]\ [X] (\leq, =, \geq)\ [B]$$

$$[X] \geq 0$$

إن عملية البحث عن حل أمثل لهذا النموذج هو تحديد قيم المتغيرات X_j , إن وجدت , و التي لا تخترق أي قيد من القيود.

رغم كثرة وتنوع أمثلة البرمجية الخطية إلا أن أغلبها يقع ضمن أحد أربع حالات متمايزة و هي :

. مشاكل التوزيع (*Répartition*).

. مشاكل النقل (*Transport*).

. مشاكل المزج (*Mélange*).

. مشاكل التخطيط (*planification*).

4 . مشاكل التوزيع :

تعتبر مشكلة الإنتاج (مثال مؤسسة "شابي")من أشهر مشاكل التوزيع في علوم التسيير , فهي تبحث عن التوزيع الأمثل للموارد الأولية على مختلف النشاطات من أجل تعظيم دالة الهدف (في حالة

الأرباح) أو تدنيتها (في حالة التكاليف), و من خلال المثال الموالي سوف نقوم بدراسة نوع آخر من مشاكل التوزيع يختلف عن مشكلة الإنتاج :

مثال 1-2:

كلفت مؤسسة " عماج" مكتب دراسات متخصص في الإعلانات لإطلاق أحد منتجاتها الجديدة و خصصت لذلك مبلغا إجماليا قدره *510000 دج* , و أمام هذا المكتب عدة مؤسسات إعلامية لنشر هذه الإعلانات (التلفزيون, الإذاعة, الجرائد....الخ) , خصائص و تكاليف كل مؤسسة إعلامية مبينة في الجدول الموالي حيث يمثل :

العمود الأول : التكاليف الوحدوية للإعلان في كل مؤسسة إعلامية.

العمود الثاني : عدد الإعلانات الأقصى المسموح به لدى هذه المؤسسات الإعلامية.

العمود الثالث : يحتوي على قيمة مؤشر التواصل , و هو قيمة تم إعدادها من طرف المكتب تأخذ بعين الاعتبار مكانة كل مؤسسة إعلامية في المجتمع المستهدف , و تميز بين قدرة كل مؤسسة في الوصول إلى أكبر عدد ممكن من المستهلكين.

لجدول 1-2

المؤسسات الإعلامية		تكلفة الإعلان(دج)	عدد الإعلانات المسموح	مؤشر التواصل
الفضائية الأولى	–	*3500*	*35*	*1200*
الفضائية الثانية	–	*3000*	*25*	*900*
القناة الأرضية	–	*2500*	*35*	*800*
الإذاعة	–	*2000*	*30*	*250*
الجرائد	–	*1800*	*25*	*450*

و في الأخير اشترطت هذه المؤسسة على المكتب أن ينفذ *15* إعلانا تلفزيونيا على الأقل , و أن لا يتجاوز المبلغ الكلي المصروف عليها *380000 دج*.

من خلال هذا المثال البسيط يبدوا واضحا أن هدف المكتب هو تعظيم مؤشر التواصل الكلي.

و لمعالجة و تشكيل النموذج الرياضي لهذه المسألة سوف نتبع الخطوات التي ذكرناها فيما سبق:

أ) . في هذا المثال يمثل كل نشاط الإعلان في مؤسسة إعلامية معينة , و مستوى كل نشاط هو عدد الإعلانات في كل مؤسسة إعلانية , و تكون متغيرات القرار :

X_1 : عدد الإعلانات في القناة الفضائية الأولى.

X_2 : عدد الإعلانات في القناة الفضائية الثانية.

X_3 : عدد الإعلانات في القناة الأرضية.

X_4 : عدد الإعلانات في الإذاعة.

X_5 : عدد الإعلانات في الجرائد.

ب) . تحديد قيود المسألة :

القيد الأول يتعلق بالميزانية المخصصة من طرف المؤسسة للإعلانات التي لا يجب أن تتجاوز *510000* دج و رياضيا يكتب القيد :

$$3500\,X_1+3000\,X_2+2500\,X_3+2000\,X_4+1800\,X_5 \leq 510000$$

القيد الثاني يترجم الشرط الذي فرضته المؤسسة على المكتب على أن يتجاوز عدد الإعلانات التلفزيونية *15* إعلانا و يكتب رياضيا :

$$X_1+X_2+X_3 \geq 15$$

القيد الثالث يتعلق بشرط المؤسسة على أن لا يتجاوز حجم الإنفاق الكلي على الإعلانات التلفزيونية *380000 دج* و يكتب هذا القيد رياضيا :

$$3500\,X_1+3000\,X_2+2500\,X_3 \leq 380000$$

أما **باقي القيود** فهي تعبر عن العدد الأقصى المسموح به في كل مؤسسة إعلامية و تكتب : $X_1 \leq 35,\ X_2 \leq 25\ ,\ X_3 \leq 35\ ,\ X_4 \leq 30\ ,\ X_5 \leq 25$.

و في الأخير لا يجب أن ننسى قيود السلبية :

$$X_j \geq 0\ ,\ j=1,2,\ldots 5.$$

ت) . دالة الهدف المراد تعظيمها تمثل مؤشر التواصل الكلي , و بمأنه لدينا في الجدول السابق مؤشر التواصل الوحدوي للإعلان في كل مؤسسة إعلامية فإن دالة الهدف تكتب رياضيا :

$$Max\ Z = 1200\,X_1+900\,X_2+800\,X_3+250\,X_4+450\,X_5$$

ث) . في الحقيقة يعتبر هذا المثال التطبيقي أحد الأمثلة التي يمكن أن تحل بنماذج البرمجة الخطية رغم أنها لا تحترم جيدا الفرضيات الخطية للنموذج , ففيما يخص مبدأ التناسبية فهو محقق في قيد الميزانية (هذا إذا لم نأخذ بعين الاعتبار الخصومات الممنوحة في حالات ارتفاع عدد الإعلانات) , و لكن هل يمكن أن يتحقق في دالة الهدف ؟ فهل إذا قمنا بإعلان تلفزيوني يمنحنا مؤشر قدره *1200* سوف يتضاعف مباشرة بعد إضافة إعلان آخر إلى *2400* ؟ ألا يمكن للمؤسسات الإعلانية أن تشترك في عينة من المجتمع المستهدف ؟

و كذلك الحال بالنسبة لمبدأ التجزيء , فمن الأفضل للمؤسسة الحصول على أعداد صحيحة و لكن هذا المبدأ لا يضمن ذلك

و مع كل ذلك يمكن لمتخذ القرار أن يتجاوز هذه الفرضيات في مثل هذا النوع من الحالات رغم أنه سوف لن يحصل عل حلول مثلى و لكن حلول تقريبية و مقبولة لماذا؟ السؤال التالي يشرح ذلك , هل المؤشرات التي تم اعتمادها في دالة الهدف تم حسابها علميا و بدقة حتى نشترط الوصول إلى حل أمثل دقيق , الإجابة طبعا لا , لأن المؤشرات تمثل قيم تقريبية جاءت نتيجة دراسات ميدانية و إحصائية بدرجات حرية معينة.

ج) . نستطيع الآن تجميع القيود و دالة الهدف في نموذج موحد و منظم بالطريقة التالية :

$$Max\ Z = 1200X_1+900X_2+800X_3+250X_4+450X_5$$

$$S.C$$

$$\begin{cases} 3500X_1+3000X_2+2500X_3+2000X_4+1800X_5 \le 510000 \\ X_1+X_2+X_3 \ge 15 \\ 3500X_1+3000X_2+2500X_3 \le 380000 \\ X_1 \le 35 \\ X_2 \le 25 \\ X_3 \le 35 \\ X_4 \le 30 \\ X_5 \le 25 \end{cases}$$

$$X_j \ge 0\ ,\ j=1,2,...5.$$

ح) . بعد المراجعة كل معطيات المسألة تم أخذها بعين الاعتبار في النموذج النهائي.

مثال 1-3 :

أراد الطبيب "عسال" أن يصف لأحد مرضاه حمية غذائية يومية تتوفر على حاجاته الضرورية من العناصر الغذائية ,

و نظرا لحالته الاجتماعية المتواضعة أراد هذا المريض شراء المواد الغذائية التي تحتوي على العناصر الضرورية و بأقل كلفة , و الجدول الموالي يحتوي على العناصر الضرورية في كل المادة , الكمية الضرورية للمريض من كل عنصر , و في أسفل الجدول تكاليف شراء هذه المواد.

الجدول 1-3

	الحليب (1لتر)	البيض (1بيضة)	الخص (1كلغ)	اللحم (1كلغ)	الحاجات الضرورية (*BM*)
البروتين (الغرام)	34.2	6.1	5.4	100	60
الحريرات (وحدات)	690	77	68	1654	3500
فيتامين A (وحدات)	1650	550	1470	0	5000
فيتامين B (ميليغرام)	0.4	0.1	0.2	0.4	2
فيتامين C (ميليغرام)	14.5	0	25	0	75
التكاليف (دج)	72	8	45	400	

سوف نتبع مرة أخرى نفس الخطوات ليتمرن القارئ أكثر فأكثر على كيفية بناء النموذج , و لكن فيما بعد سوف نقوم بذلك تلقائيا دون اللجوء إلى تعداد الخطوات :

أ) . النشاطات في هذه المسألة هي تناول كميات مختلفة من هذه المواد , و بالتالي نختار المتغيرات التالية:

X_j = كمية المادة الغذائية رقم j حيث $(j = 1,2,3,4)$.

ب) . قيود المسألة يجب أن تترجم تغطية الحاجات الضرورية من كل عنصر غذائي فتكون:

الحاجات الضرورية من البروتين مثلا :

$$34.2X_1+6.1X_2+5.4X_3+100X_4 \ge 60$$

و نفس الشيء بالنسبة لباقي القيود.

ت) . الهدف من هذه المسألة هو تدنية (تخفيض) تكاليف شراء المواد الغذائية, فإذا كانت الكميات المختارة من المواد الغذائية هي(X_1,X_2,X_3,X_4) فسوف تكون دالة الهدف:

$$Min\ Z = 72X_1+8X_2+45X_3+400X_4$$

ث) . خلافا للمثال السابقة كل فرضيات خطية النموذج متوفرة , و بالتالي سوف نحصل على الحل الأمثل بدقة لأن كل معطيات المسألة محسوبة بطريقة علمية ودقيقة.

ج) . بعد تجميع القيود و دالة الهدف نحصل على الشكل النهائي للنموذج :

$$\begin{aligned}
&Min\ Z = 72X_1+8X_2+45X_3+400X_4\\
&S.C\\
&34.2X_1+6.1X_2+5.4X_3+100X_4 \geq 60\\
&690X_1+77X_2+68X_3+1654X_4 \geq 3500\\
&1650X_1+550X_2+1470X_3 \geq 5000\\
&0.4X_1+0.1X_2+0.2X_3+0.4X_4 \geq 2\\
&14.5X_1+25X_3 \geq 75\\
&X_1, X_2, X_3, X_4 \geq 0
\end{aligned}$$

و في الأخير و بعد المراجعة تم التأكد من أن النموذج أخذ بعين الاعتبار جميع معطيات المسألة.

5 . مشاكل النقل:

يدخل ضمن هذا الإطار كل مشكلة تهدف إلى تحديد المسارات المثلى لنقل سلع أو خدمات من نقاط الانطلاق (*Origine*) نحو نقاط الوصول (*Destination*) , فإذا كانت نقاط الانطلاق و نقاط الوصول عبارة عن أماكن جغرافية (مثلا نقل السلع من المصانع نحو مراكز التخزين , أو من مراكز التخزين نحو نقاط البيع.....الخ) فنحن بصدد مشكلة نقل بالمعنى الحقيقي.

أما إذا أردنا مثلا تكليف مجموعة من العمال ذوو كفاءات متفاوتة لإنجاز مهام معينة , فنستطيع إدخالها ضمن مشاكل النقل و ذلك و ببساطة , باعتبار العمال نقاط الانطلاق و المهام نقاط الوصول و تكليف العمال بالمهام هو موضوع النقل(يسمى هذا النوع أيضا بمشاكل التخصيص).

و يتم تحديد المسار الأمثل حسب المعيار المعتمد بالقياس , فإذا كان المعيار تكاليف النقل فتكون دالة الهدف تخفيض التكاليف , و إذا كان المعيار مثلا الوقت المستغرق من طرف كل عامل لإنجاز كل مهمة فتكون دالة الهدف تخفيض الوقت المستغرق الكلي لإنجاز جميع المهام ....وهكذا.

و مثلما فعلنا سابقا فسوف نعتمد على أمثلة تطبيقية لتشكيل هذا النوع من النماذج.

مثال 1-4:

تمتلك مؤسسة "دحلاب" ثلاث مصانع لإنتاج المحركات الكهربائية ذات الحجم الصغير متواجدة في كل من تيارت , الجلفة , سعيدة , طاقة إنتاج كل مصنع للعام المقبل هي على الترتيب *7000 , 6000 , 2500* , و تقوم ببيع هذه المحركات في أربع نقاط بيع تمتلكها في كل من, الجزائر, وهران, عنابه وغرداية, الطلب المتوقع في كل نقطة بيع للعام المقبل أيضا هي على الترتيب *1000 , 5500 , 4000 , 5000*.

تهدف المؤسسة إلى تحديد عدد المحركات الواجب نقلها من كل نقطة انطلاق (المصنع) نحو نقطة وصول معينة (نقطة بيع) , و ذلك طبعا بالأخذ بعين الاعتبار تكاليف النقل المختلفة لكل مسار , و الجدول الموالي يحتوي على تكاليف النقل الوحدوية لكل مسار.

الجدول 1−4 :

الوحدة : دج

		نقاط الوصول			
		1 - الجزائر	2 - وهران	3 - عنابه	4 - غرداية
نقاط الانطلاق	1- تيارت	76	55	82	19
	2- الجلفة	42	25	53	29
	3- سعيدة	31	19	20	53

المطلوب:

هدف المؤسسة هو تشكيل النموذج الذي يسمح باختيار المسارات المثلى التي تخفض تكاليف النقل الكلية إلى أقل ما يمكن.

الحل:

ا) . تكمن نشاطات هذه المؤسسة في نقل المحركات من نقاط الانطلاق (المصانع)نحو نقاط الوصول (نقاط البيع),ونرمز بالمتغير X_{ij} لعدد المحركات الواجب نقلها من المصنع i $(i = 1,2,3)$ نحو نقطة البيع j $(j= 1,2,3,4)$.

ملاحظة:

حتى الآن كنا نستعمل المتغيرات ذات مؤشر وحيد (X_j), و في الحقيقة يمكن استعمالها هنا أيضا و بالتالي تكون متغيرات المسألة $X_1,X_2,X_3 \ldots X_{11},X_{12}$. إلا أنها بهذا الشكل سوف لن يكون من السهل تحديدها فمثلا لتحديد المسار المتعلق بالمتغير X_9 يجب أن نعود إلى الجدول و نعد إلى الخانة رقم *9* لنعرف أنه يتعلق بالمسار الذي يربط المصنع رقم *3* مع نقطة البيع رقم *1* هذا و الحال هنا أن عدد المتغيرات صغير نسبيا فما بالك إذا فاق عدد المتغيرات *20 أو 30* ..أو أكثر , أما باعتماد المتغيرات بالشكل X_{ij} فيتم معرفة المسار مباشرة من خلال قراءة مؤشرات المتغير فمثلا :

X_{32} : *يتعلق بالمصنع رقم 3 و نقطة البيع رقم 2 .*

ب) . تحديد قيود المسألة:

. أولا: عدد المحركات الواجب نقلها من كل مصنع لا يجب أن تتجاوز طاقته الإنتاجية القصوى , ونعبر عن ذلك رياضيا بالشكل :

المصنع رقم 1 : $X_{11}+ X_{12}+ X_{13}+ X_{14} \leq 7000$

المصنع رقم 2 : $X_{21}+ X_{22}+ X_{23}+ X_{24} \leq 6000$

المصنع رقم 3 : $X_{31}+ X_{32}+ X_{33}+ X_{34} \leq 2500$

ـ ثانيا : عدد المحركات المستقبلة في كل نقطة بيع يجب أن تساوي الطلب المتوقع و نعبر عن ذلك رياضيا بالقيود التالية :

نقطة البيع رقم 1 : $X_{11}+X_{21}+X_{31} = 1000$

....

نقطة البيع رقم 4 : $X_{14}+X_{24}+X_{34} = 5000$

. و طبعا لا ننسى قيود السلبية :

$X_{ij} \geq 0 \; ; \; i = 1,2,3, \quad j = 1,2,3,4.$

ت) . تهدف هذه المؤسسة إلى تدنية (تخفيض) تكاليف النقل الكلية , و بمأنه لدينا تكلفة النقل الوحدوية لكل مسار فإن دالة الهدف تكتب كما يلي :

$Min\ Z = 76X_{11}+55X_{12}+\ldots\ldots\ldots+20X_{33}+53X_{34}.$

ث) . في مشاكل النقل يمكن اعتبار فرضيات الخطية محققة , ففيما يخص مبدأ التناسبية و مبدأ التجميع يمكن التأكد منهما بسهولة , أما فيما يخص مبدأ التجزيء فنستطيع التأكيد رياضيا أنه في حالة ما إذا كانت الطاقات الإنتاجية القصوى و الطلب المتوقع عبارة عن أعداد صحيحة , فالنتيجة لن تكون إلا أعداد صحيحة , و بالتالي فإن هذا المبدأ محترم . و بالتالي يمكن اعتبار هذا النموذج ضمن نماذج البرمجة الخطية.

ج) . يمكن الآن تشكيل النموذج النهائي كمايلي :

$$Min\ Z = 76X_{11}+55X_{12}+\ldots\ldots\ldots+20X_{33}+53X_{34}.$$

S.C

قيود الطاقة الإنتاجية القصوى :

$$\begin{cases} X_{11}+X_{12}+X_{13}+X_{14} \leq 7000 \\ X_{21}+X_{22}+X_{23}+X_{24} \leq 6000 \\ X_{31}+X_{32}+X_{33}+X_{34} \leq 2500 \end{cases}$$

قيود الطلب :

$$\begin{cases} X_{11}+X_{21}+X_{31} = 1000 \\ X_{12}+X_{22}+X_{32} = 5500 \\ X_{13}+X_{23}+X_{33} = 4000 \\ X_{14}+X_{24}+X_{34} = 5000 \end{cases}$$

قيود السلبية : $X_{ij} \geq 0 \; ; \; i = 1,2,3, \quad j = 1,2,3,4.$

ح) . تم الأخذ بعين الاعتبار مختلف جوانب المسألة , و الملاحظ هنا أن هذه النماذج تتميز بخاصة مميزة هي أن جميع المعاملات التقنية تساوي الواحد , لذلك توجد خوارزميات خاصة بهذا النوع سوف نأتي على ذكرها عند التطرق إلى كيفية حل نماذج البرمجة الخطية.

مثال 1-5 :

أرادت مصلحة الضرائب مراجعة حسابات خمس شركات خاصة (بودالي للغذاء , حمدوش للنقل , صيدلية كوشي , عماج للبناء , دحلاب للملابس) كانت قد أودعت تصريحاتها السنوية لدى هذه

المصلحة , و يشتغل بهذه المصلحة أربع مفتشين (مصطفى , محمد , عيسى , يحي , عبد العزيز) مؤهلين للقيام بهذا النوع من المهام , إلا أنه لا يستطيع أي منهم القيام بأكثر من مهمة واحدة.

من خلال تجاربه السابقة استطاع مدير هذه المصلحة أن يقيم الوقت المستغرق من طرف كل مفتش لتنفيذ كل مهمة كما مبين في الجدول1−5.

فمثلا يحتاج المفتش عيسى إلى *11* ساعة لإنجاز مهمة مراجعة حسابات شركة بودالي للغذاء , بينما يستطيع المفتش عبد العزيز القيام بنفس المهمة خلال *8* ساعات فقط .

الجدول 1−5

الوحدة : ساعة

		نقاط الوصول				
		بودالي للغذاء	حمدوش للنقل	صيدلية كوشي	عماج للبناء	دحلاب للملابس
نقاط الانطلاق	مصطفى	14	10	8	5	11
	محمد	8	7	16	10	9
	عيسى	11	5	10	4	12
	يحي	14	17	10	11	14
	عبد العزيز	8	10	4	16	9

المطلوب :

تشكيل النموذج الذي يساعد في تكليف المفتشين بالمهام لإنجازها في أقل وقت ممكن ؟.

الحل :

ا) . أولا نقوم بتحديد متغيرات هذه المسألة : المشكلة هنا هي تكليف المفتش رقم i $(i = 1,2,3,4,5)$ لإنجاز المهمة j $(j = 1,2,3,4,5)$, بالتالي فالقرار الواجب اتخاذه هو : هل يجب تكليف الخبير i بالمهمة j ؟ , ولتمثيل هذا القرار رياضيا سوف نعتمد المتغيرات ذات مؤشرين X_{ij} و هذه المتغيرات تحتمل قيمتين فقط *1* أو *0* بحيث :

$X_{ij}=1$: إذا كلف المفتش رقم i لإنجاز المهمة رقم j .

$X_{ij}=0$: إذا تم إعفاء المفتش رقم i من إنجاز المهمة رقم j .

عدد متغيرات هذه المسألة هو*25*متغير X_{ij} : $i=1,2,3,4,5\,;j=1,2,3,4,5,$

للوهلة الأولى تبدوا عملية اختيار المتغيرات بهذا الشكل خاطئة , لأننا فرضنا في نماذج البرمجة الخطية أن متغيرات القرار يمكن أن تأخذ أي قيمة موجبة, و لكن سوف نرى فيما بعد أنه بسبب التركيبة الخاصة لهذا النوع من المسائل أن هذا الاختيار لن يشكل أي صعوبات.

ب) . عملية تشكيل القيود لن تخرج عن إطار مشاكل النقل و تتم كما يلي :

كل مهمة يجب أن تنجز , و لنأخذ مثلا المهمة رقم *1* (مراجعة حسابات شركة بودالي للغذاء) , المتغيرات المتعلقة بهذه المهمة هي X_{11} , X_{21} , X_{31} , X_{41} , X_{51} , و بمأن هذه المهمة يجب أن ينجزها مفتش واحد وواحد فقط فأحد هذه المتغيرات يجب أن يساوي *1* بينما باقي المتغيرات يجب أن تساوي *0* و يمكن أن نعبر عن ذلك رياضيا :

$X_{11}+X_{21}+X_{31}+X_{41}+X_{51}=1$

وبصفة عامة من أجل إنجاز المهمة j نكتب : $j = 1,2,3,4,5$

$$\sum_{i=1}^{5} X_{ij} = 1$$

إذن هذه القيود تضمن لنا أن كل مهمة سوف تنجز بالتأكيد.

الآن يجب أن نبحث عن معادلة رياضية تضمن لنا أن كل مفتش لا يستطيع إنجاز أكثر من مهمة , فمثلا المتغيرات المتعلقة بالمفتش رقم 1 (مصطفى) هي $X_{11}, X_{12}, X_{13}, X_{14}, X_{15}$, بمأن المتغيرات تكون إما 1 أو 0 فإن هذه المعادلة سوف تكتب كما يلي :

$X_{11}+X_{12}+X_{13}+X_{14}+X_{15} \leq 1$

وبصفة عامة نكتب قيد المفتش i: $i = 1,2,3,4,5$

$$\sum_{j=1}^{5} X_{ij} \leq 1$$

. أما فيما يخص قيود السلبية فيتم استبدالها بالقيود التالية :

$$X_{ij} = \begin{cases} 1 \ ; & \text{إذا كلف المفتش رقم } i \text{ بالمهمة رقم } j \\ & i=1,2,3,4,5 \ ; \ j=1,2,3,4,5 \\ 0 \ ; & \text{إذا أعفي المفتش رقم } i \text{ من المهمة } j \end{cases}$$

ت) . هدف رئيس المصلحة هو تدنية (تخفيض)الوقت الكلي المستغرق و تكون دالة الهدف من الشكل :

$MinZ = 14X_{11}+10X_{12}+\ldots\ldots\ldots\ldots+16X_{54}+9X_{55}.$

و تكتب بالشكل العام كما يلي :

$$Z = \sum_{i=1}^{5} \sum_{j=1}^{5} C_{ij} X_{ij}$$

C_{ij} : الوقت المستغرق للمفتش رقم i لإنجاز المهمة رقم j .

ث) . في هذا المثال مبدأ التناسبية و التجميع محققين , وأما بالنسبة لمبد أ التجزيء فنفس الشيء مقارنة مع المثال السابق فإن تركيب النموذج سوف يسمح لنا بالحصول بطريقة أكيدة على قيم ذات أعداد صحيحة , و من خلال القيود التي لدينا سوف تكون هذه القيم 1 أو 0 فقط.

ملاحظة : لو تخلينا عن القيود التي أضفناها مكان قيود السلبية , فإن المتغيرات يمكن أن تأخذ قيما ذات أعداد صحيحة موجبة و سالبة أيضا , لكن إذا أضفنا قيود السلبية مكانها فسوف تكون القيم حتما موجبة و تأخذ 1 أو 0 فقط هذا يعني أنه يمكننا هنا أيضا أن نواصل اعتماد قيود السلبية بدل القيود (0.1) , و التي سوف نعتمدها فيما بعد.

ج) . نحصل في الأخير على النموذج الرياضي التالي :

$$MinZ = 14X_{11}+10X_{12}+\ldots\ldots\ldots\ldots+16X_{54}+9X_{55}.$$

$S.C$

$$\left.\begin{array}{l} X_{11}+X_{21}+X_{31}+X_{41}+X_{51}=1 \\ X_{12}+X_{22}+X_{32}+X_{42}+X_{52}=1 \\ X_{13}+X_{23}+X_{33}+X_{43}+X_{53}=1 \\ X_{14}+X_{24}+X_{34}+X_{44}+X_{54}=1 \\ X_{15}+X_{25}+X_{35}+X_{45}+X_{55}=1 \end{array}\right\}$$ كل المهمات منجزة :

$$\left.\begin{array}{l} X_{11}+X_{12}+X_{13}+X_{14}+X_{15}\leq 1 \\ X_{21}+X_{22}+X_{23}+X_{24}+X_{25}\leq 1 \\ X_{31}+X_{32}+X_{33}+X_{34}+X_{35}\leq 1 \\ X_{41}+X_{42}+X_{43}+X_{44}+X_{45}\leq 1 \\ X_{51}+X_{52}+X_{53}+X_{54}+X_{55}\leq 1 \end{array}\right\}$$ كل مفتش ينجز مهمة وحيدة

$$X_{ij}\geq 0 \ , \quad i=1,2,3,4,5 \ ; \quad j=1,2,3,4,5$$

و في الأخير و بعد مراجعة المسألة تم ترجمة جميع المعطيات في النموذج , و للتذكير هناك خوارزميات خاصة بهذا النوع من النماذج سوف نأتي على ذكرها فيما بعد.

6 . مشاكل المزج :

نجد هذا النوع من المشاكل في الشركات التي تقوم بمزج مجموعة من المواد الأولية للحصول على منتج معين أو عدة منتجات , و خلافا لمشاكل التوزيع أين كنا نعرف مسبقا كمية المواد الأولية اللازمة لإنتاج وحدة واحدة من المنتج النهائي , فهنا لا يمكن معرفة هذه الكمية , بل الانشغال الأساسي هنا هو البحث عن تلك الكميات الواجب إدخالها في مخطط الإنتاج للحصول على منتجات تخضع لشروط مسبقة , و ذلك بطبيعة الحال من أجل تحقيق الهدف النهائي و هو تطبيق معيار دالة الهدف المعتمد.

فمثلا في أغلب مشاكل التسيير , يبحث المسير عن كمية المواد الأولية الواجب شرائها من أجل صنع منتجات تلبي الطلب بأقل تكلفة , هذا الطلب يشترط في هذه المنتجات أن تخضع لشروط معينة.

نواجه هذا النوع من المشاكل بكثرة في الصناعات البترولية (مثلا مزج عدة خامات بترولية للحصول على أنواع من البنزين تحتوي على مستويات مختلفة من الأوكتان . *octane* .) , و في الصناعات الكيميائية (مزج عدة مواد كيميائية لإنتاج الأسمدة , المبيدات ,........الخ) , و أيضا في الصناعات الغذائية (مزج عدة عناصر غذائية لإنتاج المشروبات الغازية , العصائر , العجائن , ...الخ).

سوف نتطرق إلى كيفية بناء هذه النماذج من خلال الأمثلة التالية :

مثال 1-6:

تقوم محطة تكرير البترول " أرزيو " بإنتاج ثلاث أنواع من البنزين (العادي , بدون رصاص , الممتاز) , و ذلك من خلال مزج ثلاث أنواع من البترول الخام المستخرج من حقول الجنوب (القاسي , عين أمناس , بركين), الخصائص التقنية و الكميات المتاحة لهذه الأنواع من البترول الخام مبينة في الجدول الموالي :

الجدول 1-6

الوحدة : برميل/يوميا

البترول الخام	مؤشر الأوكتان	الكميات المتاحة
القاسي	*105*	*4000*
عين أمناس	*92*	*2750*
بركين	*87*	*4230*

بينما يحتوي الجدول الثاني على الخصائص التقنية و الربح الصافي الوحدوي لكل بنزين(الوحدة : برميل).

الجدول 1-7

الوحدة : برميل/يوميا.

البنزين	مؤشر الأوكتان	الربح الصافي (دج)
العادي	بدون قيد	4.55
بدون رصاص	أكبر أو يساوي 90	4.91
الممتاز	أكبر أو يساوي 98	6.04

ملاحظة :

إن مؤشر الأوكتان في البنزين هو علاقة خطية مع أحجام الخامات الممزوجة معا المشكلة لهذا البنزين , فمثلا عند مزج *20* برميل من البترول رقم *1* (القاسي) مع *30* برميل من البترول رقم *3* (بركين) نحصل في الأخير على بنزين حجمه 50 برميل و يتم حساب مؤشر الأوكتان لهذا البنزين كما يلي :

$$\frac{20(105)+30(87)}{50}=94.2$$

المطلوب :

تشكيل النموذج الذي يحدد الكمية الواجب إنتاجها يوميا من كل بنزين من أجل تعظيم الأرباح وذلك دون الإخلال بالخصائص التقنية لكل بنزين.

الحل :

مثلما فعلنا سابقا سوف نقتصر فقط على تشكيل النموذج وفي مراحل لاحقة من هذا الكتاب سوف نقوم بحلها جميعا.

ا) . لو قمنا بتحليل سريع وغير متأني لهذه المسألة فسوف يبدوا أن النشاطات تعبر عن إنتاج الأنواع الثلاث للبنزين و بالتالي نحصل على متغيرات القرار X_1 , X_2 , X_3 و التي تمثل كمية إنتاج البنزين العادي, بدون رصاص, و الممتاز على الترتيب, و يتم كتابة دالة الهدف بكل سهولة.

و لكن هذا الاختيار لن يسمح لنا بتشكيل القيود التي تحقق شروط مؤشر الأوكتان في كل بنزين , و أيضا عدم القدرة على إدراج الكميات المتاحة من كل بترول على شكل قيود .

لذلك و بمأن مؤشر الأوكتان في كل بنزين يرتبط بالكميات المستخدمة من كل خام , فإن النشاط في هذه المسألة هو كمية كل خام مستخدم في كل بنزين, أي أن متغيرات القرار يجب أن تعبر عن الكمية المستخدمة من كل خام في كل بنزين,و رياضيا تكون من الشكل :

$$X_{ij} \ , \ \ i=1,2,3 \ \ ; \ \ j=1,2,3$$

ب) . في هذه المسألة لدينا نوعين من القيود :

قيد يعبر عن الكمية الكلية المستخدمة من البترول الخام لإنتاج الأنواع الثلاث من البنزين و التي لا يجب أن تتجاوز الكمية المتاحة, و هي عبارة عن مجموع الكمية المستخدمة في إنتاج البنزين رقم 1 (X_{i1}) و البنزين رقم 2 (X_{i2}) و البنزين رقم 3 (X_{i3}) و يكتب هذا القيد رياضيا (توجد ثلاث قيود بهذا الشكل) : $X_{i1}+X_{i2}+X_{i3} \leq b_i$.

. قيد يعبر عن خصائص الأوكتان في كل بنزين, و بمأن البنزين رقم 1 (العادي) لا يخضع لأي شروط في معدل الأوكتان, فسوف يكون لدينا قيدين فقط(بدون رصاص و الممتاز), لنأخذ على سبيل المثال البنزين رقم $j=2$ (بدون رصاص) نحصل عليه بمزج X_{12} برميل من الخام رقم 1 , X_{22} برميل من الخام رقم 2, و X_{32} برميل من الخام رقم 3, و يكون حجم هذا البنزين في الأخير هو ($X_{12}+X_{22}+X_{32}$) برميل

و مؤشر الأوكتان له يكون :

$$\frac{105\,X_{12}+92\,X_{22}+87\,X_{32}}{X_{12}+X_{22}+X_{32}} \geq 90$$

و لكن هذه العبارة ليست خطية لذلك سوف نضرب الطرفين في الوسطين وجمع الحدود المتشابهة في طرف نحصل في الأخير على القيد التالي (على الشكل الخطي) : $15X_{12}+2\,X_{22}-3$ $X_{32} \geq 0$

و بنفس الطريقة نحصل على القيد الثاني.

ت) . المعيار المستخدم كما هو واضح من المسألة هو تعظيم الأرباح , و بمأنه لدينا الربح الصافي الوحدوي لكل بنزين و كمية البنزين رقم j مثلا هي : $X_{1j}+X_{2j}+X_{3j}$ فإن دالة الهدف التي تعبر عن الربح الكلي هي:

$$Max\ Z = 4.55(X_{11}+X_{21}+X_{31})+4.91(X_{12}+X_{22}+X_{32})+6.04(X_{13}+X_{23}+X_{33})$$

ث) . إذا قبلنا أن مؤشر الأوكتان في البنزين يتم الحصول علية بطريقة خطية مع أحجام مكونات هذا البنزين فإن كل الفرضيات الخطية متوفرة في هذه المسألة و النموذج المشكل سوف يحل بخوارزميات البرمجية الخطية.

ج) . بعد إعادة كتابة كل القيود من الشكل أقل أو يساوي نحصل على النموذج النهائي التالي :

$$Max\ Z = 4.55(X_{11}+X_{21}+_{31})+4.91(X_{12}+X_{22}+X_{32})+6.04(X_{13}+X_{23}+X_{33})$$

S.C

$$\left.\begin{array}{l} X_{11}+X_{12}+X_{13} \leq 4000. \\ X_{21}+X_{22}+X_{23} \leq 2750. \\ X_{31}+X_{32}+X_{33} \leq 4230. \end{array}\right\} \text{الكميات المتاحة :}$$

$$\left.\begin{array}{l} -15X_{12}-2X_{22}+3X_{32} \leq 0 \\ -7X_{13}+6X_{23}+11X_{33} \leq 0 \end{array}\right\} \text{مؤشر الأوكتان :}$$

$$X_{ij} \geq 0 \ , \quad i=1,2,3 \ ; \quad j=1,2,3$$

ح) . النموذج بهذا الشكل استطاع أن يعبر عن جميع معطيات المسألة, ويمكن تعميم هذا النموذج عل كل المشاكل التي تحافظ على الكمية (أي أن كمية المزيج تساوي مجموع كميات مكوناته) , و أيضا إذا كانت خصائص هذا المزيج تكتسب بشكل خطي لخصائص كل مكون مع حجمه.

تمرينات

في كل هذه التمرينات المطلوب تشكيل النموذج فقط :

تمرين رقم 1. 1 :

تمتلك مؤسسة 3 مراكز تخزين تحتوى على أجهزة تبريد صغيرة و 4 نقاط بيع موزعة على مناطق جغرافية مختلفة الجدول الموالى يوضح الكميات المتاحة في المخازن والطلب المتوقع في نقاط البيع وأيضا تكاليف النقل الوحدوية بين كل مركز تخزين وكل نقطة بيع :

الجدول 1−8

نقاط البيع

مراكز التخزين

	1	2	3	4	الكميات المتاحة
1	40	20	60	40	70
2	80	60	100	80	30
3	60	40	80	60	100
الطلب المتوقع	40	75	25	60	

المطلوب:

تشكيل النموذج الذي يحدد المسارات المثلى من أجل تخفيض تكاليف النقل الكلية إلى أقل ما يمكن.

تمرين رقم 1 . 2:

تنتج مؤسسة 3 العاب مختلفة (سيارة , شاحنة , طائرة) من خلال استخدام الخشب و البلاستيك حيث تمتلك منهما 2500 *و 3500 وحدة على الترتيب* , الكميات اللازمة من المواد الأولية لإنتاج وحدة واحدة من كل لعبة موضحة في الجدول الموالي :

الجدول 1−9

	سيارة	شاحنة	طائرة
الخشب	**3**	**5**	**7**
البلاستيك	**5**	**3**	**4**

. الوقت اللازم لصناعة الطائرة هي ضعف الوقت اللازم لصناعة شاحنة و3 أضعاف الوقت اللازم لصناعة سيارة.

. الطاقة الإنتاجية القصوى لهذه المؤسسة تعادل إنتاج 600 طائرة (بفرض إنتاجها الطائرات فقط).

. تبين من خلال دراسة السوق أن أدنى طلب متوقع لكل لعبة هو 125 وحدة.

. لأسباب تقنية يجب أن يكون إنتاج السيارات ضعف إنتاج الطائرات.

. و في الأخير الأرباح الوحدوية لكل لعبة هي : السيارة 200 دج , الشاحنة 250 دج , الطائرة 500 دج.

المطلوب :

تشكيل النموذج الذي يحدد المخطط الأمثل للإنتاج من أجل تعظيم الأرباح.

تمرين رقم 1 . 3 :

تنتج مؤسسة 3 أنواع من الأحذية الصيفية للأطفال و النساء والرجال , المواد الأولية المستخدمة هي ساعات العمل والجلد مع العلم أنه :

. تمتلك في مخازنها 400 وحدة من الجلد كما تتوفر على 300 وحدة من ساعات العمل.

. لا يوجد قيد على المبيعات حيث أنها تستطيع أن تبيع كل ما تنتج.

. الوحدات الضرورية من كل مورد لإنتاج وحدة واحدة من كل نوع , و الربح الصافي الوحدوي مبينة في الجدول الموالي :

الجدول 1−10

	حذاء أطفال	رجال	نساء
الجلد	− 4	1	6
اليد العاملة	− 3	5	2
الربح الصافي (دج)	− 600	800	1000

المطلوب:

أ . تشكيل النموذج المناسب.

ب . كيف يتم إعادة تشكيل نموذج السؤال (أ) إذا علمنا أنه قد تم إضافة قيد جديد للمسألة و هو يجب أن يمثل عدد أحذية الرجال على الأقل *30%* من الإنتاج الكلى.

ت . لو فرضنا أن المؤسسة تستطيع بيع الجلد كما هو و تحقق ربح صافى وحدوي قدره 250 دج كيف يكون النموذج الجديد.

ث . لأسباب خارجية عن المؤسسة الأرباح الصافية الوحدوية لأحذية الأطفال هي 600 دج إذا كان عدد الوحدات المباعة اقل أو يساوى 50 وحدة, و 450 دج عن كل وحدة إضافية فوق 50 وحدة مباعة كيف يكون النموذج.

ملاحظة : الأسئلة (**ب , ت , ث**) مستقلة عن بعضها البعض.

تمرين رقم 1 . 4 :

تمتلك مؤسسة خراطة آلة خراطة T وآلتي تلحيم S_1 و S_2 , وبرنامج عمل هذه المؤسسة يتم إعداده في بداية كل أسبوع , عدد ساعات العمل المتاحة أسبوعيا على كل آلة هي كما يلي :

T : *200* ساعة , S_1 : *84* ساعة , S_2 : *100* ساعة

. تلقت هذه المؤسسة طلبيه لإنتاج *3* قطع غيار $(C \;,\; B \;,\; A)$, و بعد دراسة خصائص هذه القطع تبين أنها :

. يجب أن تمر كلها عبر آلة الخراطة T ثم على أحد آلتي التلحيم S_1 أو S_2 .

. الربح الصافي الوحدوي لـ (C,B,A) هو على الترتيب *1200, 800*و*700* دج.كما أن المؤسسة تستطيع أن تبيع كل ما تنتج.

. و في الأخير الوقت المستغرق لكل آلة على كل قطعة موضح في الجدول الموالي :

الجدول 1−11

	A	B	C
T	2	1	5
S_1	6	5	3
S_2	5	5	4

المطلوب :

تشكيل النموذج الذي يحدد المخطط الأمثل لساعات العمل على مختلف الآلات من أجل تعظيم الأرباح.

تمرين رقم1 . 5 :

يقدم أحد محلات المشروبات *6* أنواع من المشروبات (الكوكتيل) تعود عليه بنفس الربح الصافي الوحدوي(*35* دج) يتم تحضيرها ابتداء من *4* أنواع من العصائر المركزة من خلال مزجها مع بعضها البعض بنسب متفاوتة , أو بإضافة الماء فقط لعصير معين من أجل الحصول على وحدة واحدة من كل شراب كما هو موضح في الجدول الموالي (الوحدة : سل):

الجدول 1−12

	كوكتيل1	كوكتيل2	كوكتيل3	كوكتيل4	كوكتيل5	كوكتيل6	الكميات المتاحة(سل)
البرتقال	*4*	*6*	–	*2*	–	–	750
الخوخ	*12*	–	–	–	*12*	–	520
المشمش	–	*12*	*17*	–	–	–	480
الموز	–	–	–	*8*	–	*12*	400

المطلوب : تشكيل النموذج الذي يحدد طريقة المزج المثلى من أجل تعظيم الأرباح.

تمرين رقم 1 . 6 :

يستطيع مختبر مختص في دراسة التربة دراسة 1200 عينة يوميا و قام مؤخرا بعقد صفقة مع وزارة الفلاحة لدراسة 400 عينة من التربة يوميا بالإضافة إلى دراسة عينات حدائق الخواص والحدائق العمومية.

. يحقق هذا المختبر ربح صافي وحدوي قدره 18 دج عن عينات الوزارة و 23 دج عن عينات حدائق الخواص و 21 دج عن عينات الحدائق العمومية.

.الوقت الكلي المتوفر لدى المخبر يوميا لدراسة كل هذه العينات هو *1400* ساعة عمل.

. الوقت اللازم لدراسة عينات الوزارة هو ضعف الوقت اللازم لدراسة عينات الحدائق العمومية و هذه الأخيرة تتطلب *1* ساعة عمل لكل عينة.

. الوقت اللازم لدراسة عينة واحدة من حدائق الخواص هو *1.5* ساعة عمل.

. للحفاظ علي سمعته مع السلطات المحلية عدد عينات الحدائق العمومية المدروسة يجب أن تكون أكبر من عدد عينات حدائق الخواص.

المطلوب :

تشكيل النموذج الملائم من أجل تعظيم أرباح هذا المختبر.

تمرين رقم 1 . 7 :

تقوم مؤسسة لتحويل المعادن بتسويق نوعين من المنتجات "**البرونز**" بسعر بيع قدره *128.8* دج للكغ الواحد و "**الرصاص الصلب**" بسعر بيع *134.4* دج للكغ الواحد , و تستطيع أن تبيع كل ما تنتجه. يتم الحصول على هذين المنتجين من خلال مزج *3* أنواع من المعادن الأساسية هي : **الزنك , النحاس , الرصاص الفضي** كلفة شراء وحدة واحدة من كل معدن هي على الترتيب *98* دج , *112*دج , و *95.2* دج. الوحدات الضرورية من كل معدن لإنتاج وحدة واحدة من كل منتج والكميات المتاحة من كل معدن موضحة في الجدول الموالي :

الجدول 1−13

	البرونز	الرصاص الصلب	الكميات المتاحة
− الزنك	0.3	−	1800 −
− النحاس	0.3	0.5	2000 −
− الرصاص الفضي	0.4	0.5	1600 −

المطلوب :

تشكيل النموذج الذي يحدد المخطط الأمثل للإنتاج من أجل تعظيم الأرباح.

تمرين رقم 1 . 8 :

فازت مؤسسة مختصة في نظافة المكاتب الإدارية بعقد لتنظيف مقر وزارة معنية . عملية التنظيف تتم بطريقة مستمرة في اليوم (24 ساعة كاملة) و للقيام بذلك قامت بتقسيم اليوم إلى 6 فترات كل فترة تدوم 4 ساعات عدد العمال اللازم لكل فترة مبين في الجدول الموالي :

الجدول 1−14

الفترات	الساعة	عدد العمال
−1	04 . 00	6 −
−2	08 . 04	10 −
−3	12 . 08	4 −
−4	16 . 12	2 −
−5	20 . 16	5 −
−6	24 . 20	9 −

للتأكيد فقط فإن الفترة الأولي تتبع مباشرة الفترة السادسة (أي دورة متواصلة لمدة 24 ساعة يوميا).

المطلوب :

أ) إذا علمنا أن كل عامل يعمل 8 ساعات متتالية و يبدأ في بداية فترة معينة , مثلا على الساعة 00 أو 04 أو.... الخ) فما هو النموذج الملائم الذي يسمح للمؤسسة بتشغيل أقل عدد ممكن من العمال.

ب) لو فرضنا أن الأجر الساعي لكل عامل من عمال المؤسسة خلال 8 ساعات العادية هو 192.5 دج و 315 دج عن كل ساعة إضافية و كل عامل لا يستطيع أن يعمل أكثر من 10 ساعات متتالية كحد أقصى لذلك أرادت المؤسسة تشغيل بعض العمال الذين يبدؤون العمل علي الساعة 8h ساعتين إضافيتين وأيضا طلبت من بعض العمال الذين من المفترض أن يبدأو العمل على الساعة 20h أن يبدأو عوضا عن ذلك على الساعة 18h و العمل 10 ساعات متواصلة. من جديد تهدف المؤسسة إلي تشكيل النموذج الذي يحدد عدد العمال الذين يشتغلون 8 ساعات و عدد العمال الذين يشتغلون 10 ساعات من اجل تخفيض التكاليف.

تمرين رقم 1 . 9:

يقوم محل لبيع القماش بتسويق نوع معين من أشرطة الزينة A . B , C لها نفس الطول (100م) ولكن عرض كل شريط على الترتيب هو : 3سم , 5سم , 7سم , يتم الحصول على هذه الأشرطة بعد تقطيع قطعة كبيرة من القماش طولها 100م و عرضها 20سم. تستطيع المؤسسة الحصول على هذه الأشرطة باعتماد *7* مخططات تقطيع مختلفة مبينة في الجدول الموالي :

الجدول 1−15

	3 سم	*5 سم*	*7 سم*	*الكمية الضائعة*
1	*6*	*0*	*0*	*2*
2	*0*	*4*	*0*	*0*
3	*2*	*0*	*2*	*0*
4	*0*	*1*	*2*	*1*
5	*1*	*3*	*0*	*2*
6	*1*	*2*	*1*	*0*
7	*4*	*0*	*1*	*1*

وفي الأخير الطلب المتوقع على كل نوع من الأشرطة هو $A : 1000$, $B : 2000$, $C : 4000$ قطعة.

المطلوب :

أ) . شكل النموذج الذي يخفض عدد قطع القماش المستخدم.

ب) . كيف تتغير دالة الهدف للسؤال (أ) إذا كان هذه المرة الهدف هو تخفيض الكمية الضائعة من القماش بعد التقطيع.

تمرين رقم 1 . 10 :

تقوم مؤسسة غذائية بصناعة نوعين من المعجون معجون المشمش و معجون البرتقال , المركبات الضرورية لكل معجون مبينة في الجدول الموالي:

الجدول 1−16

المركبات	معجون المشمش	معجون البرتقال
مشمش	على الأقل 40%	.
برتقال	.	على الأقل 30%
عصير مركز	على الأكثر 35%	على الأكثر 50%

تستطيع المؤسسة شراء 4000 كغ من المشمش يوميا بـ 98 دج للكغ و6000 كغ من العصير المركز 56 دج للكغ و3200كغ من البرتقال بـ 126 دج للكغ،كما أن سعر بيع معجون المشمش هو: 168 دج للكغ , و سعر بيع معجون البرتقال هو : 196 دج للكغ.

المطلوب :

إذا علمنا أن المؤسسة تبيع كل منتوجها شكل النموذج الذي يحقق أقصى ربح ممكن .

المحور الثاني: حل نماذج البرمجة الخطية.

إن عملية حل نموذج برمجة خطية هو البحث عن قيم المتغيرات التي من اجلها نحصل على الحل الأمثل لدالة الهدف.

هناك عدة طرق وتقنيات لحل هذا النوع من النماذج و تأتى في مقدمتها الطريقة الهندسية التي تعتبر أسهل و أسرع الطرق ولكنها محدودة للغاية , فبمجرد أن يتجاوز عدد المتغيرات *2* تصبح غير قابلة للتطبيق , لذلك تم اكتشاف طرق جديدة لحل نماذج تحتوى على عدد كبير من المتغيرات , وتأتى على رأسها خوارزمية *Simplex* ولكن من عيوبها أنها تتطلب عمليات حسابية معقدة ومتتالية للوصول إلى الحل الأمثل , و لكن تم تجاوز هذه المشكلة بسهولة وذلك بعد برمجتها في أجهزة الإعلام الآلي.

في الحقيقة إن برمجة منهجية *simplex* في الإعلام الآلي سمح بالحصول على الحلول الجاهزة و بالتالي جعل البعض يتساءل عن الفائدة من دراستها (و هذا ما سنفعله في هذا الفصل) والجواب على ذلك هو على العكس من ذلك فهناك فائدة كبيرة لا يمكن إغفالها ذلك لأن فهم مبدأ عمل هذه الطريقة ذو فائدة عظيمة تساعدنا في تحليل و استغلال النتائج المتحصل عليها .

و قبل ذلك سوف نستعرض كيفية الحل بالطريقة الهندسية , ثم بعد ذلك نستعرض بطريقة متدرجة منهجية *simplex* واستعراض مختلف أشكالها , الشكل الأولي (*primal*) و الشكل الثنائي(*dual*) و الشكل المختلط (*primal-dual*).

1– الحل بالطريقة الهندسية:

سوف نتطرق إلي هذه الطريقة من خلال المثال التطبيقي التالي:

مثال *2 . 1*:

تقوم مؤسسة لصناعة مواد التجميل بتسويق نوعين من الزيوت , زيت الشعر وزيت البشرة, يتم الحصول عليهما

بالطريقة التالية :

الجدول 2–1

المكونات	زيت الشعر	زيت البشرة	الكميات المتاحة
زيت الزيتون	*%50*	*%20*	– *15000*
زيت الخروع	*%30*	*%60*	– *12000*
زيت الجوز	*%20*	*%20*	– *11500*

. الكميات الممكن تسويقها من زيت الشعر *20000* ل كحد أقصى بسعر *300* دج/ل

. الكميات الممكن تسويقها من زيت البشرة *13000* ل كحد أقصى بسعر *400* دج/ل

المطلوب:

تشكيل و حل نموذج هذه المسألة.

الحل :

تقوم هذه المؤسسة بنشاطين هما إنتاج زيت الشعر وزيت البشرة اللذين نرمز لهما بـ : X_1 ، X_2 على الترتيب .

قيود النموذج التي تعبر عن الكميات المتاحة و الطلب المتوقع هي :

. زيت الزيتون $0.5X_1+0.2X_2 \le 15000$

. زيت الخروع $0.3X_1+0.6X_2 \le 12000$

. زيت الجوز $0.2X_1+0.2X_2 \le 11500$

. الطلب المتوقع على زيت الشعر $X_1 \le 20000$

. الطلب المتوقع على زيت البشرة $X_2 \le 13000$

ونحصل على النموذج النهائي مع إضافة قيود السلبية :

$$
\begin{aligned}
&Max\ Z = 300X_1+400X_2\\
&S.C\\
&0.5X_1 + 0.2X_2 \le 15000 \text{ --------------------- } (1)\\
&0.3X_1 + 0.6X_2 \le 12000 \text{ --------------------- } (2)\\
&0.2X_1 + 0.2X_2 \le 11500 \text{ --------------------- } (3)\\
&X_1 \le 20000 \text{ --------------------- } (4)\\
&X_2 \le 13000 \text{ --------------------- } (5)\\
&X_j \ge 0 \ ; j=1,2
\end{aligned}
$$

بما أن هذه المسألة تحتوى على متغيرين فقط يمكن حلها بالطريقة الهندسية , و بطبيعة الحال يتكون النموذج من دالة الهدف وقيود.

فأما دالة الهدف فهي عبارة عن معادلة مستقيم ذات متغيرين (X_1 , X_2) مع اعتبار Z كوسيط يمكن أن يأخذ أي قيمة حقيقية ثابتة , و يمكن إعادة كتابتها بالشكل التالي :

$$X_2 = -\frac{3}{4}X_1 + \frac{Z}{400}$$

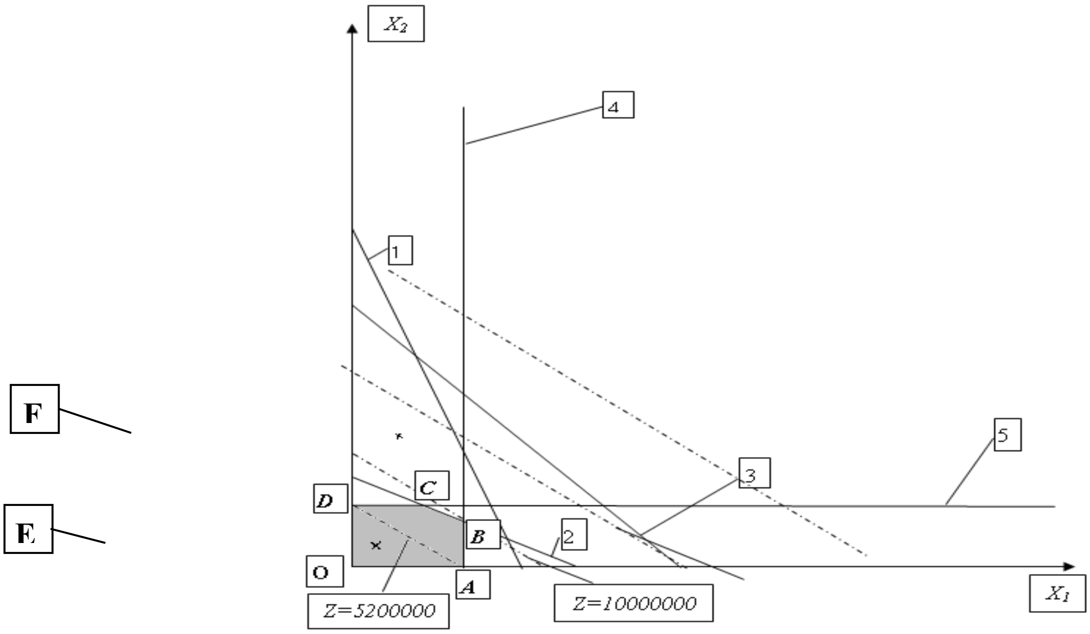
وحسب قيم الوسيط Z نحصل على مجموعة من المستقيمات المتوازية (لها نفس الميل $-3/4$).

وأما باقي القيود فهي عبارة عن مجموعة من المتراجحات (و قد تحوي على معادلات) ذات متغيرين (X_1 , X_2) , و بيانيا كل متراجحة عبارة عن نصف مستوي محدود بمستقيم معادلته هي المتراجحة نفسها بعد حذف العلاقة ($\le$ أو $\ge$) , و إضافة العلاقة (=) مكانها. (مثلا المتراجحة $0.5X_1 + 0.2X_2 \le 15000$ هي عبارة عن نصف المستوي المحدود بالمستقيم $0.5X_1+0.2X_2 = 15000$ و الذي يشمل نقطة المبدأ لأن $0.5(0)+0.2(0)\le 15000$).

نقوم بتمثيل دالة الهدف و القيود في معلم متعامد و متجانس , و حسب الشكل رقم $-1-$ فإن المنطقة المضللة هي منطقة تقاطع جميع أنصاف المستويات , و هي تحتوي على مجموع الثنائيات

المرتبة (X_1 , X_2) التي تحقق جميع المتراجحات , بعبارة أخرى هي المنطقة التي تحتوي على جميع الحلول الممكنة للنموذج , و أي حل أمثل يجب أن ينتمي إلى هذه المنطقة.

الشكل 2−1



هدف المؤسسة هو تعظيم قيمة Z , و هندسيا يعني أنه كلما ابتعدنا عن المبدأ كلما كانت Z كبيرة , ولكن هل نستطيع أن نبتعد إلا مالا نهاية ؟ طبعا لا , لأن الثنائيات المرتبة التي تنتمي إلى المستقيم يجب أن تنتمي كذلك إلى المنطقة المضللة , وبعبارة أخرى يجب أن نبتعد أقصى ما يمكن دون الخروج من المنطقة المضللة , وهذا يعني أن الحل الأمثل حتما سيكون على حدودها , و حسب الشكل فإن الحل الأمثل يقع على النقطة B ذات الثنائية المرتبة (10000, 20000) , و هذا يعني أنه لكي تحقق المؤسسة أقصى ربح ممكن (1000000 دج) يجب أن تنتج 20000 وحدة من X_1, و10000 وحدة من X_2 .

ملاحظة :

قيود السلبية ($X_j \geq 0 \;\; ; j=1,2$) تحتم علينا البقاء ضمن المربع الأول في المعلم.

من خلال هذا المثال نسجل ما يلي :

. إذا كانت منطقة الحلول الممكنة هي منطقة محدبة (مثلما هو الحال في مثالنا هذا) فالحل الأمثل حتما يقع على أحد حدودها (رؤوسها) , و بصفة عامة إذا كانت منطقة الحلول الممكنة غير خالية و محدودة , فعلى الأقل أحد رؤوسها هو الحل الأمثل , و كل رأس من رؤوس هذه المنطقة تشكل ما يسمى الحل القاعدي (*solution de base*) , و في هذا المثال يوجد *5* حلول قاعدية (توافق *5* رؤوس) , و الحل الأمثل هو حتما أحد هذه الحلول.

. إذا صادف و أن كان أبعد مستقيم من بين مستقيمات دالة الهدف (حسب قيم الوسيط Z) الذي يحقق أقصى ربح ممكن مطابقا لأحد مستقيمات القيود , فالحل الأمثل هو عبارة عن مجموعة غير منتهية من الحلول التي تحقق نفس القيمة لـ Z .

. النقطة B في الشكل السابق هي نقطة تقاطع المستقيم المتعلق بقيد زيت الخروع , و قيد الطلب المتوقع على زيت الشعر , و نقول أن هذين القيدين مشبعين , و هذا يعني أن المؤسسة استخدمت كل ما لديها من زيت الخروع , و استطاعت تلبية كل الطلب المتوقع على زيت الشعر , و بمأن هذه النقطة لا تنتمي لأي من باقي القيود فإن هذه القيود غير مشبعة , فمثلا من القيد (1) الكمية المتبقية من زيت الزيتون هي 3000 ل و ذلك بتعويض قيم الحل الأمثل في معادلة هذا القيد :

$$15000 - 0.5(20000) - 0.2(10000) = 3000$$

2 . الحل باستخدام طريقة *Simplex* :

طريقة *simplex* عبارة عن خوارزمية تبحث عن الحل الأمثل بطريقة متدرجة , وفي كل مرحلة يتم حساب قيمة دالة الهدف ويتم تحسينها شيئا فشيئا إلي غاية الوصول إلى قيمة مثلى , و لكن قبل عرض مبادئ هذه الطريقة , يجب تحويل كل متراجحات النموذج على شكل معادلات.

لتحويل أي متراجحة من الشكل ($\leq$) إلى معادلة يكفي إضافة قيمة موجبة لتحقيق المساواة , و بمأن المتراجحة تحتوي على متغيرات مجهولة , فإن هذه القيمة الموجبة سوف تكون هي الأخرى مجهولة و تتغير وفق تغير باقي المتغيرات الأساسية في المتراجحة , و بالتالي يتم تمثيلها بمتغير جديد وليكن (e_j) (و العكس بالنسبة لمتراجحة من الشكل $\geq$ أين يجب طرح قيمة موجبة).

فمثلا بالنسبة للقيد الأول في مثالنا السابق يصبح :

$$0.5X_1+0.2X_2+e_1=15000$$

و هكذا نفعل مع باقي القيود.

أما فيما يخص دالة الهدف , فإن هذه المتغيرات الجديدة لا تحقق أي ربح بالنسبة للمؤسسة و يمكن إضافتها بمعاملات معدومة و تكون دالة الهدف لمثالنا السابق كما يلي :

$$Z=300X_1+400X_2+oe_1+\dots\dots\dots\dots+oe_5$$

و يصبح النموذج في شكله الجديد كما يلي :

$$Max\ Z = 300X_1+400X_2+0\,e_1+\dots\dots+0\,e_5$$

$S.C$

$$0.5X_1 + 0.2X_2+ e_1 = 15000 \text{ -------------- } (1)$$

$$0.3X_1 + 0.6X_2 + e_2 = 12000 \text{ -------------- } (2)$$
$$0.2X_1 + 0.2X_2 + e_3 = 11500 \text{ --------------- } (3)$$
$$X_1 + e_4 = 20000 \text{ --------------- } (4)$$
$$X_2 + e_5 = 13000 \text{ --------------- } (5)$$
$$X_j \geq 0 \ ; j=1,2 \quad e_j \geq 0 \ , j=1,2,3,4,5.$$

تسمى المتغيرات الإضافية بمتغيرات العجز (*variables d'écart*) في حالة ما إذا كانت المتراجحة من الشكل $\leq$, و تسمى بمتغيرات الفائض (*variables de surplus*) في حالة متراجحة من الشكل $\geq$.

2 . 1 . مبادئ طريقة *simplex*:

تعتمد بصفة أساسية على المبادئ التالي :

. إذا كان نموذج خطي يقبل حل ممكن معين , فهو يقبل على الأقل حل قاعدي (*solution de base*)

. إذا كان هذا النموذج يقبل حل أمثل فهو يقبل على الأقل حل قاعدي أمثل(*solution de base optimal*) هذا يعني أنه يوجد على الأقل حل قاعدي أمثل من بين الحلول القاعدية .

إذن, فبمأن الحل الأمثل حتما هو أحد الحلول القاعدية فطريقة *simplex* تطبق كما يلي :

1 . تحديد حل قاعدي معين.

2 . اختبار هذا الحل القاعدي إن كان يمثل حل أمثل أما لا , فإذا كان هو الحل الأمثل فالمشكلة قد حلت , و إذا كان العكس ننتقل إلي المرحلة الثالثة .

3 . استبدال الحل السابق بحل قاعدي آخر , و إتباع نفس الخطوات إلى غاية الوصول إلى الحل الأمثل .

2 . 2 . الحل القاعدي:

قبل كل شيء الحل القاعدي هو أحد الحلول الممكنة , يحقق جميع قيود النموذج و أيضا قيود السلبية فمثلا في شكل المثال السابق : A. O حلول ممكنة بينما F و E ليست حل ممكن .

الجدول 2−2

الحلول	O	A	E	F
X_1	0	20000	10000	10000
X_2	0	0	0	25000
e_1	15000	5000	10000	7000
e_2	12000	6000	9000	−6000
e_3	11500	7500	9500	3500
e_4	20000	0	10000	1000
e_5	13000	13000	13000	−12000

بعد قراءة هذا الجدول يمكن بسهولة التأكد من أن الحلول الممكنة هي الحلول التي تحتوي على الأقل على متغيرين معدومين , أما باقي الحلول فهي غير ممكنة إذن :

كل حل قاعدي يحتوي على نوعين من المتغيرات :

. متغيرات ذات قيم معدومة تدعى **المتغيرات الغير القاعدية** (*variables hors base*) , و في الحلول الممكنة يجب أن يساوي عددها على الأقل عدد المتغيرات الحقيقية للنموذج , مثلا في الحل A , المتغيرين الغير قاعديين هما

X_2 و e_4 (قد يصادف أن يكون بعض المتغيرات القاعدية معدوم و هذا في حالة وجود حل متعدد فقط).

. متغيرات ذات قيم موجبة غير معدومة, و تدعى **المتغيرات القاعدية** (*variables de base*)و عددها يجب أن يساوي على الأكثر عدد المتغيرات الإضافية (e_i) , مثلا في A المتغيرات القاعدية هي $X_1 , e_1 , e_2 , e_3 , e_5$.

و بصفة عامة إذا كان النموذج يحتوى على m قيد و n متغير حقيقي أساسي , فلكي يقبل حل قاعدي يجب أن يتوفر على الشرطين التاليين :

. أن يكون حلا ممكنا.

. أن يحتوى على الأقل على n متغير غير قاعدي (معدوم) وعلى الأكثر على m متغير قاعدي .

2 . 3 . مراحل طريقة *simples* :

سوف نتطرق هنا فقط إلى الشكل العام لنماذج تعظيم دالة الهدف أين تكون جميع المتراجحات من الشكل أقل أو يساوي (≤) , أو لنماذج التدنية أين تكون المتراجحات من الشكل أكبر أو يساوي (≥) , أما الحالات أين نجد في نموذج واحد متراجحات من عدة أشكال (≥ , = , ≤) فسوف نأتي على ذكرها على حدى فيما بعد.

. **أولا :** البحث عن حل قاعدي

بداية تطبيقها يشترط وجود حل قاعدي يتم الانطلاق منه في عملية البحث عن الحل الأمثل (و الذي يكون حتما هو الأخر حل قاعدي) .

في مثالنا السابق يتم تحديد الحل القاعدي الأول بكل سهولة و هو ($X_1=0 , X_2=0$) , و في الحل الهندسي في الشكل السابق يمثل هذا الحل نقطة المبدأ (O) و يسمى هذا الحل بالحل الطبيعي , و في حالة نموذج لا يحتوى على حل طبيعي نبحث عن حل قاعدي أخر بإتباع الطريقة التالية :

. إذا كان لدينا نموذج يتكون من n معادلة و $m+n$ متغير (أساسي و إضافي) و لا يقبل حل طبيعي , نقوم باختيار n متغير بطريقة عشوائية و نفرضها ذات قيم معدومة , فيصبح النموذج على شكل جملة معادلة عدد متغيراتها يساوى عدد معادلاتها ويمكن حلها بالطرق الرياضية المعروفة (مثل طريقة *cramer*) , فإذا كان الحل يتوفر على الشرطين السابقين يمكن اعتباره حل قاعدي نستخدمه في البحث عن الحل الأمثل , و في حالة النفي نجرب متغيرات أخرى إلي أن نصل إلي حل قاعدي .

أما إذا عجزنا عن الحصول على هذا الحل مع كل المتغيرات نستخدم طريقة أخرى تعتمد على ما يسمى المتغيرات الاصطناعية (*variables artificiels*) سنأتي على ذكرها في مراحل لاحقة من هذا الكتاب.

. ثانيا : اختبار أمثلية الحل (*test d'optimalité*)

يتمثل الاختبار في البحث عن إمكانية تحسين قيمة دالة الهدف أو لا , فإذا كان بالإمكان فعل ذلك هذا يعني أننا لم نصل بعد إلى الحل الأمثل.

و لو أخذنا المثال السابق , عند الحل القاعدي الأول قيمة Z معدومة , والسؤال هل يمكن تحسينها ؟

لو فرضنا أن المتغير الغير قاعدي (معدوم)X_1 يتغير بقيمة موجبة صغيرة مع فرض باقي المتغيرات الغير قاعدية على حالها(في مثالنا بقاء $X_2=0$), هذا يعني أنه يتحتم على الأقل على أحد المتغيرات القاعدية أن يتغير بالمقابل لكي نحترم جميع قيود النموذج و قيود السلبية, والسؤال هو كيف يحدث ذلك؟

نعود إلى قيود نموذج المثال السابق :

لو فرضنا تغير X_1 بوحدة واحدة ($\Delta X_1=1$) :

من معادلة القيد (*1*) : $0.5\Delta X_1 + 0.2\Delta X_2+\Delta e_1 = 15000$

و بمأن $\Delta X_2=0$ (من الفرض) فإن : $\Delta e_1 = - 0.5\Delta X_1$

أي : $\Delta e_1 = - 0.5$

و نفس الشئ لباقي القيود يصبح لدينا:

. القيد (*1*) : $\Delta e_1 = - 0.5$

. القيد (*2*) : $\Delta e_2 = - 0.3$

. القيد (*3*) : $\Delta e_3 = - 0.2$

. القيد (*4*) : $\Delta e_4 = - 1$

. القيد (*5*) : $\Delta e_5 = 0$

أما بالنسبة للتغير الحاصل في دالة الهدف فهو :

$$Z = 300\Delta X_1+400\Delta X_2+0\Delta e_1+0\Delta e_2+0\Delta e_3+0\Delta e_4+0 e_5=300 \;\; ; \Delta Z >0$$

نستنتج مما سبق أنه يمكننا تحسين دالة الهدف لو أعطينا لـ X_1 قيمة موجبة غير معدومة, هذا يعني أن الحل القاعدي الأول ليس حل أمثل, و بالفعل فبزيادة وحدة واحدة منX_1 حصلنا على زيادة في دالة الهدف قدرها*300 دج*, و نقول هنا أننا أدخلنا X_1 إلى الحل القاعدي.

. ثالثا : استبدال الحل القاعدي (*changement de base*)

إن عملية استبدال الحل الحالي يجب أن تتم بطريقة تؤدي إلى سلوك أقصر طريق نحو الحل الأمثل و لفعل ذلك يجب إدخال متغير غير قاعدي له أكبر معامل في دالة الهدف في حالة التعظيم (و أصغر معامل في حالة التدنية)

ليصبح متغير قاعدي في الحل الجديد , و في مقابل ذلك يجب إخراج متغير قاعدي للحفاظ على خصائص الحل القاعدي الجديد.

في المثال السابق نفرض الآن أن المتغير الغير قاعدي X_2 هو الذي يتغير بوحدة واحدة بينما يبقى X_1 على حاله ماذا سيحدث لباقي المتغيرات القاعدية و دالة الهدف :

بإتباع نفس الأسلوب التغير الحاصل في قيود النموذج هو :

. **القيد** (1) : $\Delta e_1 = -0.2$

. **القيد** (2) : $\Delta e_2 = -0.6$

. **القيد** (3) : $\Delta e_3 = -0.2$

. **القيد** (4) : $\Delta e_4 = 0$

. **القيد** (5) : $\Delta e_5 = -1$

أما بالنسبة لدالة الهدف فالتغير هو :

$$Z = 300\Delta X_1+400\Delta X_2+0\Delta e_1+0\Delta e_2+0\Delta e_3+0\Delta e_4+0 e_5=400 \ ; \Delta Z >0$$

نلاحظ هنا أن قيمة Z ارتفعت بقيمة (400) وهي قيمة معامل X_2 في دالة الهدف , وهي أكبر من الارتفاع الذي سجلناه مع X_1 (300 دج و هي أيضا قيمة معامل X_1 في دالة الهدف) , لذلك و من أجل الوصول بطريقة أسرع نحو الحل الأمثل من الأفضل إدخال X_2 إلى الحل القاعدي , و كلما كانت قيمة X_2 أكبر ما يمكن كلما ارتفعت Z .

نحاول الآن معرفة أقصى قيمة يمكن أن تأخذها X_2 دون الإخلال بقيود النموذج , و بالعودة دائما إلى المثال السابق لدينا:

الحل القاعدي الأول هو ($X_1=0$, $X_2=0$) , لدينا معامل X_2 (400) أكبر من معامل X_1 (300) , إذن يتم اختيار X_2 لدخول الحل القاعدي الجديد, ولكن ما هي أقصى قيمة يمكن أن يأخذها هذا المتغير :

لدينا من القيد (1) : $0.5X_1 + 0.2X_2+ e_1 = 15000$

و بمأن $X_1=0$ فإن : $e_1 = 15000 - 0.2X_2$

ويستطيع المتغير X_2 أن يأخذ أقصى قيمة ممكنة مادام $e_1 \geq 0$

أي: $15000 - 0.2X_2 \geq 0$ ومنه: $X_2 \leq 75000$

إذن بالنسبة لهذا القيد أقصى قيمة ممكنة لـ X_2 هي 75000 وحصلنا عليها بقسمة الطرف الأيمن على معامل X_2 (أقصى قيمة للمتغير = الطرف الأيمن للقيد / معامل هذا المتغير في القيد).

ملاحظة : إذا كان معامل المتغير في القيد سالب أو معدوم فيمكنه أن يأخذ أي قيمة حقيقية ,و أقصى قيمة هي ∞ .

وبإتباع نفس الأسلوب مع باقي القيود نجد :

. القيد (*1*) : $X_2 = 15000/0.2 = 75000$

. القيد (*2*) : $X_2 = 12000/0.6 = 20000$

. القيد (*3*) : $X_2 = 11500/0.2 = 57500$

. القيد (*4*) : غير محدود لأن : $X_2 = 20000/0 = \infty$

. القيد (*5*) : $X_2 = 13000/1 = 13000$

إذن فأقصى قيمة ممكنة لـ X_2 يجب أن تحترم جميع القيود و نلاحظ أن ذلك يتحقق من أجل : $X_2 = 13000$

و بمأن $X_2 + e_5 = 13000$ حسب القيد (*5*) فإن $e_5 = 0$, و هذا يعني أن هذا المتغير كان قاعديا في الحل الأول أصبح الآن متغير غير قاعدي في الحل الجديد و نقول أنه خرج من الحل القاعدي.(إذن يخرج e_5 و يدخل X_2)

بعد ما حصلنا على حل قاعدي جديد نعيد نفس الخطوات بالعودة إلى المرحلة الثانية باختبار هذا الحل ثم استبداله و هكذا إلى أن نصل إلى الحل الأمثل , و نستطيع معرفة ذلك بسهولة إذا أصبحت كل معاملات دالة الهدف سالبة أو معدومة في حالة التعظيم , و كلها موجبة في حالة التدنية.

2 . 4 . تطبيق طريقة *simplex* :

سوف نطبق هذه الطريقة بأسلوبين, الأسلوب الجبري وهو أسلوب يفيدنا كثيرا من الناحية البيداغوجية لفهم خوارزمية *simplex* , والأسلوب الثاني هو أسلوب يستعين بالجداول وهو عملي أكثر والمستخدم في برامج الإعلام الآلي.

2 . 4 . 1 . الطريقة الجبرية : نأخذ نموذج المثال السابق :

. المرحلة الأولى :

$$Max\ Z = 300X_1 + 400X_2 + 0\,e_1 + \ldots\ldots + 0\,e_5$$

$$S.C$$

$$\begin{aligned}
&0.5X_1 + 0.2X_2 + e_1 = 15000 \text{ ----------------- } (1)\\
&0.3X_1 + 0.6X_2 + e_2 = 12000 \text{ ------------------ } (2)\\
&0.2X_1 + 0.2X_2 + e_3 = 11500 \text{ -------------------}(3)\\
&X_1 + e_4 \qquad\qquad = 20000 \text{ ------------------- } (4)\\
&X_2 + e_5 \qquad\qquad = 13000 \text{ -------------------- } (5)\\
&\quad X_j \geq 0\ ;\ j=1,2
\end{aligned}$$

1 . الحل القاعدي الأول هو الحل الطبيعي :

. المتغيرات الغير قاعدية : $X_1 = X_2 = 0$

. المتغيرات القاعدية : $e_1,\ e_2,\ e_3,\ e_4,\ e_5 \geq 0$

2 . هذا الحل لا يعتبر حلا أمثل لأنه توجد معاملات موجبة في دالة الهدف إذن يجب استبدال هذا الحل بحل قاعدي أخر:

بمأن معامل X_2 اكبر معامل موجب في دالة الهدف , سوف يتم إدخاله إلى الحل القاعدي الجديد ليصبح متغير قاعدي جديد و يتم تحديده كما يلي :

$$X_2 = Min\left[\frac{15000}{0.2}, \frac{12000}{0.6}, \frac{11500}{0.2}, \infty, \frac{13000}{1}\right] = 13000$$

من القيد (5) عندما $X_2 = 13000$ فإن $e_5 = 0$, إذن يتم إخراجه ويتحول إلى متغير غير قاعدي و يمكن إعادة كتابة هذا القيد كما يلي :

$$X_2 = 13000 - e_5$$

ونفعل نفس الشيء مع باقي القيود و ذلك بإعادة كتابة كل المتغيرات القاعدية بدلالة المتغيرات الغير القاعدية (في هذا المثال (X_1 , e_5) في كل قيد بالشكل التالي :

$$e_1 = 12400 - 0.5X_1 + 0.2e_5 \text{-------------} (1)$$
$$e_2 = 4200 - 0.3X_1 + 0.6e_5 \text{--------------} (2)$$
$$e_3 = 8900 - 0.2X_1 + 0.2e_5 \text{--------------} (3)$$
$$e_4 = 20000 - X_1 \text{-------------------------} (4)$$
$$X_2 = 13000 - e_5 \text{-------------------------} (5)$$

و نفعل نفس الشئ في دالة الهدف يجب أن تكتب فقط بدلالة المتغيرات الغير القاعدية :

$$Z = 300X_1+400(13000 – e_5)$$
$$Z = 300X_1 – 400e_5+5200000$$

و هكذا نكون قد حصلنا على حل قاعدي جديد هو :

. المتغيرات الغير قاعدية : $X_1=0 , e_5=0$

. المتغيرات القاعدية: $e_1=12400 , e_2=4200 , e_3=8900 , e_4=20000 , X_2=13000$

. يحقق ربح قدره : $Z = 5200000\ DA$

نلاحظ أن هذا الحل ليس حل أمثل لأن أحد معاملات دالة الهدف موجب و هو معامل X_1 , إذن نبحث عن حل قاعدي آخر.

. المرحلة الثانية:

بمأن معامل X_1 هو المعامل الوحيد الموجب فسوف ندخله في الحل الجديد , و باعتماد نفس الأسلوب السابق :

أكبر قيمة يمكن أن يأخذها X_1 مع احترام جميع القيود هي :

$$X_2 = Min\left[\frac{9900}{0.5}, \frac{4200}{0.3}, \frac{8900}{0.2}, \frac{20000}{1}, \infty\right] = 14000$$

من القيد (2) بعد تعويض ($X_1=14000 , e_5=0$) :

$$e_2 = 4200 - 0.3(14000)+0.6(0)=0$$

إذن يخرج من الحل المتغير e_2 و يصبح في الحل الجديد متغير غير قاعدي, وبنفس الطريقة نكتب جميع القيود بدلالة المتغيرات الغير القاعدية :

$$e_1 = 5400+(5/3)e_2 - 0.8e_5 \text{ -------------------- } (1)$$
$$X_1 = 14000 - (10/3)e_2+ 2e_5 \text{ ------------------- } (2)$$
$$e_3 = 6100+(2/3)e_2 - 0.2e_5 \text{ --------------------- } (3)$$
$$e_4 = 6000+(10/3)e_2 -2 e_5 \text{ --------------------- } (4)$$
$$X_2 = 13000 - e_5 \text{ ------------------------------- } (5)$$

و تصبح دالة الهدف على الشكل التالي :

$$Z = 300(14000 - (10/3)e_2+ 2e_5) - 400e_5+5200000$$
$$Z = 9400000 - 1000e_2+ 200e_5$$

و بهذا نكون قد حصلنا على حل جديد هو :

. المتغيرات الغير قاعدية : $e_2=0 , e_5=0$

. المتغيرات القاعدية: $e_1=5400 , X_1=14000 , e_3=6100 , e_4=6000 , X_2=13000$

. يحقق ربح قدره: $Z = 9400000 \text{ DA}$

نلاحظ هنا أيضا وجود معامل موجب في دالة الهدف وهو معامل e_5 , إذن نواصل من جديد البحث عن حل آخر بنفس الطريقة :

. المرحلة الثالثة:

أقصى قيمة يمكن أن يأخذها e_5 هي :

$$e_5 = Min\left[\frac{5400}{0.8},\infty,\frac{6100}{0.2},\frac{6000}{2},\frac{13000}{2}\right] = 3000$$

و هكذا من القيد (4) يخرج e_4 و يصبح الشكل الجديد للقيود كما يلي :

$$e_1 = 3000+(1/3)e_2+0.4e_4 \text{ -------------------------- } (1)$$
$$X_1 = 20000 - e_4 \text{ ------------------------------------- } (2)$$
$$e_3 = 5500+(1/3)e_2+0.4e_4 \text{ ------------------------- } (3)$$
$$e_5 = 3000+(5/3)e_2 - 0.5 e_4 \text{ ----------------------- } (4)$$
$$X_2 =10000 -(5/3) e_2+0.5 e_4 \text{ --------------------- } (5)$$

و تصبح دالة الهدف :

$$Z = 10000000 -(2000/3)e_2 - 100e_4$$

و يصبح الحل الجديد هو :

. المتغيرات الغير قاعدية : $e_2=0 , e_4=0$

. المتغيرات القاعدية: $e_1=3000 , X_1=20000 , e_3=5500 , e_5=3000 , X_2=10000$

. يحقق ربح قدره: $Z = 10000000 \text{ DA}$

نلاحظ هنا أن كل معاملات دالة الهدف سالبة و بالتالي يصبح الحل الأخير هو **الحل الأمثل** أين تحقق المؤسسة أقصى ربح ممكن(و في حالة التدنية نصل إلى الحل الأمثل لما كل معاملات دالة الهدف تصبح موجبة) و يتم ترجمته بكل سهولة كما يلي:

. $X_1=20000$: يجب على المؤسسة إنتاج *20000* وحدة من زيت الشعر.

. $X_2=10000$: يجب على المؤسسة إنتاج *10000* وحدة من زيت البشرة.

. $e_1=3000$: يبقى في مخازن المؤسسة *3000* وحدة من زيت الزيتون.

. $e_2=0$: يستهلك زيت الخروع كلية في العملية الإنتاجية.

. $e_3=5500$: يبقى في مخازن المؤسسة *5500* وحدة من زيت الجوز.

. $e_4=0$: يتم إشباع كل الطلب المتوقع على زيت الشعر.

. $e_5=3000$: يتبقى *3000* وحدة من الطلب على زيت البشرة لم يتم تلبيتها.

. $Z = 10000000$: تحقق المؤسسة باعتماد مخطط الإنتاج هذا أقصى ربح ممكن يقدر بـ *10000000* دج.

2 . 4 . 2 . طريقة الجداول :

في الحقيق لا يوجد فرق كبير بين الطريقتين , إلا أن هذه الطريقة أكثر سهولة و بساطة من سابقتها أين يتم اختصار كل الحسابات السابقة في جدول خاص يحتوي على الحل القاعدي لمرحلة معينة , و عند الانتقال إلى مرحلة أخرى يتم تغيير مكونات الجدول فقط.

. المرحلة الأولى :

في المثال السابق الحل القاعدي الأول (الحل الطبيعي) يتم تمثيله في الجدول التالي كما يلي :

الجدول 2−3 : الحل القاعدي الأول

(3) (4)

			X_1	X_2	e_1	e_2	e_3	e_4	e_5		(1)
			300	400	0	0	0	0	0		(2)
	e_1	0	0.5	0.2	1	0	0	0	0	15000	(5)
	e_2	0	0.3	0.6	0	1	0	0	0	12000	(6)
	e_3	0	0.2	0.2	0	0	1	0	0	11500	
	e_4	0	1	0	0	0	0	1	0	20000	
(8)	e_5	0	0	1	0	0	0	0	1	13000	(7)
	Z_j		0	0	0	0	0	0	0		
	$C_j - Z_j$		300	400	0	0	0	0	0	0	(9)

(1) : قائمة متغيرات النموذج.(ثابتة في كل الجداول)

(2) : معاملات المتغيرات في دالة الهدف الأصلية.(ثابتة في كل الجداول)

(3) : المتغيرات القاعدية في الحل القاعدي.(في كل جدول يخرج متغير واحد و يدخل آخر مكانه)

(4) : معاملات المتغيرات القاعدية في دالة الهدف الأصلية.(ثابتة حسب المتغيرات القاعدية الموجودة)

(5) : مصفوفة معاملات المتغيرات في القيود. (تتغير من جدول لآخر)

(6) : الطرف الأيمن للقيود.(تتغير من جدول لآخر)

(7) : Z_j المرتبط بالمتغير X_j أو e_j , و هي تمثل مقدار الانخفاض (الخسارة) في الأرباح لو أدخلنا وحدة واحدة من هذا المتغير (X_j) في هذا الحل , فمثلا Z_1 تمثل مقدار الانخفاض في أرباح الحل القاعدي الحالي ($X_1=0$, $X_2=0$) , و ذلك إذا أضفنا وحدة واحدة من X_1 (أي أن المؤسسة لو قررت إنتاج وحدة واحدة من زيت الشعر فهذا يستدعي استخدام 0.5 وحدة من زيت الزيتون , 0.3 وحدة من زيت الخروع , و 0.2 وحدة من زيت الجوز , و تلبية 1 وحدة من زيت الشعر , و لا شئ من الطلب على زيت البشرة) مقابل انتزاع 0.5 وحدة من e_1 , 0.3 وحدة من e_2 , 0.2 وحدة من e_3 , و 1 وحدة من e_4 , و 0 وحدة من e_5 من الحل القاعدي الحالي , و بمأن الربح الوحدوي لهذه المتغيرات هو 0 لكل متغير (العمود رقم (4) في الجدول) فإن الخسارة في الربح المسجلة من خروج هذه الوحدات هو :

$$Z_1=0.5(0)+0.3(0)+0.2(0)+0(1)+0(0)=0$$

و نفعل نفس الشئ مع Z_2 .... Z_5 .

ملاحظة :

تسمى عناصر عمود معين من المصفوفة (5) بمعاملات الإحلال , لأن هذه العناصر تمثل عدد الوحدات من كل متغير قاعدي التي يجب توفيرها من أجل إدخال وحدة واحدة من المتغير الغير قاعدي لهذا العمود.

إذن بصفة مباشرة يتم الحصول على كل قيمة من قيم هذا السطر و ذلك بجمع جداءات معاملات إحلال كل عمود مع قيم العمود(4).

(8) :إذا قمنا بطرح Z_j(وهي الخسارة الناجمة من إدخال وحدة واحدة منX_j) منC_j(الربح الوحدوي)نحصل على ربح صافي وحدوي($C_j - Z_j \geq 0$) أو خسارة صافية وحدوية ($C_j - Z_j \leq 0$) , فمثلا بإدخال وحدة واحدة من زيت الشعر (X_1) نحصل على ربح صافي وحدوي:

$$C_1 - Z_1 = 300 - 0 = 300 \quad (9)$$

و بطريقة مباشرة نحصل على قيم السطر (8) و ذلك بطرح قيم السطر (2) من قيم السطر (7).

ملاحظة : لا نقصد بالربح الصافي الوحدوي المعنى المحاسبي و هو الفرق بين سعر البيع و التكاليف , و لكن نقصد به التغير الصافي في الأرباح في الحل الحالي مقارنة مع الحل السابق , فإخراج وحدات من الحل القاعدي و التي كان من المفروض أنها كانت تحقق أرباحا , وإدخال متغيرات غير قاعدية التي هي الأخرى من المفروض أن تولد أرباحا , و بالتالي فإن كان هناك صافي أرباح إيجابي فنقول عن هذا التغيير أنه جاء بأرباح صافية إضافية و العملية مربحة.

(9) : وهي قيمة دالة الهدف باعتماد هذا الحل و يتم حسابه بجمع جداءات قيم العمود (4) مع العمود (6).

ملاحظة : هذه القيمة لا تعبر بالضرورة عن أرباح المؤسسة , فهناك حالات أين نحذف الحد الثابت إن وجد من دالة الهدف الأصلية لأنه لا يؤثر في قيم المتغيرات في حالة التعظيم (أو التدنية) و يجب إضافته لقيمة Z للحصول على أرباح المؤسسة (أو طرحه في حالة التدنية) في الأخير.

. المرحلة الثانية :

عملية الانتقال من جدول لآخر عملية سهلة و تتم حسب القواعد التالية :

1 . من الأعمدة تحديد المتغير الغير قاعدي الذي يتم إدخاله في الحل القاعدي الجديد, وهو يقابل أكبر قيمة موجبة في السطر (8) في حالة التعظيم (و أكبر قيمة سالبة في حالة التدنية), أي اختيار المتغير الذي يجلب أكبر ربح صافي وحدوي ($C_j - Z_j$).

2 . من الأسطر تحديد المتغير القاعدي الذي يجب إخراجه من الحل الجديد, الذي يقابل أدنى قيمة من ناتج حاصل قسمة كل قيم العمود (6) مع ما يقابلها في عمود (من المصفوفة (5)) المتغير الغير قاعدي الداخل. (نفعل نفس الشئ سواء في حالة التعظيم أو التدنية)

3 . تحديد ما يسمى بمفصل التحويل (*pivot de gausse*) , و هو نقطة تقاطع السطر و العمود الذين تم تحديدهما في ما سبق.

4 . تغيير مكونات العمود (3) بحذف المتغير الخارج و إضافة المتغير الداخل , وأيضا العمود (4) حذف معامل المتغير الخارج و إضافة معامل المتغير الداخل.

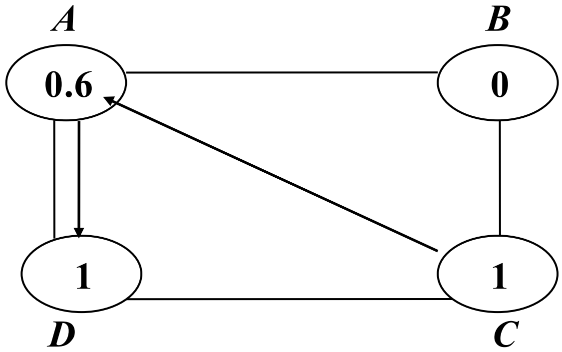
5 . تغيير مكونات المصفوفة (5) بالطريقة التالية :

. تقسيم كل قيم سطر المفصل على قيمة المفصل.

. وضع أصفار على كل عناصر عمود المفصل ما عدا المفصل أين نضع *1* .

. أما باقي عناصر المصفوفة (5) فيتم حسابها باستخدام ما يسمى آلية المستطيل, ولفهم كيفية عمل هذه الآلية من الأفضل الاستعانة بالمثال التالي :

نبحث عن القيمة الجديدة لمعامل e_5 في القيد الثاني (0) هذا العنصر في المصفوفة يصنع مع المفصل في الجدول السابق مستطيل باقي رأسيه (*1,0.6*) و ذلك بالشكل التالي :



إذن فالقيمة الجديدة للنقطة ***B*** في الجدول الجديد تحسب بالعلاقة التالية :

$$B - \frac{(AC)}{D} = 0 - \frac{(0.6*1)}{1} = -0.6$$

و هكذا نفعل مع باقي عناصر المصفوفة.

6 . القيام بالحسابات الضرورية لملأ السطرين (7) و (8) و أيضا حساب قيمة Z في الخانة (9).

و هكذا و بإتباع نفس الخطوات مع جميع الجداول نحصل على الحل الأمثل بعد 3 مراحل , نحصل على نفس النتائج التي تحصلنا عليها باستخدام الطريقة الجبرية.

ملاحظة : نصل إلى الحل الأمثل لما تكون كل قيم السطر (8) سالبة أو معدومة في حالة التعظيم , أو كلها موجبة أو معدومة في حالة التدنية.

الحل الأول :

الحل الثاني

		X_1	X_2	e_1	e_2	e_3	e_4	e_5	
		300	400	0	0	0	0	0	
e_1	0	0.5	0.2	1	0	0	0	0	**15000**
e_2	0	0.3	0.6	0	1	0	0	0	**12000**
e_3	0	0.2	0.2	0	0	1	0	0	**11500**
e_4	0	1	0	0	0	0	1	0	**20000**
e_5	0	0	$\boxed{1}$	0	0	0	0	1	**13000** ←
Z_j			0	0	0	0	0	0	
$C_j - Z_j$		300	400 ↑	0	0	0	0	0	**0**

		X_1	X_2	e_1	e_2	e_3	e_4	e_5	
		300	400	0	0	0	0	0	
e_1	0	0.5	0	1	0	0	0	-0.2	**12400**
e_2	0	$\boxed{0.3}$	0	0	1	0	0	-0.6	**4200** ←
e_3	0	0.2	0	0	0	1	0	-0.2	**8900**
e_4	0	1	0	0	0	0	1	0	**20000**
X_2	400	0	1	0	0	0	0	1	**13000**
Z_j		0	400	0	0	0	0	400	
$C_j - Z_j$		300 ↑	0	0	0	0	0	-400	**5200000**

الحل الثالث

←

X_1	X_2	e_1	e_2	e_3	e_4	e_5
300	400	0	0	0	0	0

e_1	0	0	0	1	-5/3	0	0	0.8	5400	←
X_1	300	1	0	0	10/3	0	0	-2	14000	
e_3	0	0	0	0	-2/3	1	0	0.2	6100	
e_4	0	0	0	0	-10/3	0	1	$\boxed{2}$	6000	←
X_2	400	0	1	0	0	0	0	1	13000	
Z_j		300	400	0	3000/3	0	0	-200		
$C_j - Z_j$		0	0	0	-3000/3	0	0	200 ↑	9400000	

الجدول 2−4 : الحل الرابع

2 . 5 . الحل الأمثل .

		X_1	X_2	e_1	e_2	e_3	e_4	e_5	
		300	400	0	0	0	0	0	
e_1	0	0	0	1	-1/3	0	-0.4	0	3000
X_1	300	1	0	0	0	0	1	0	20000
e_3	0	0	0	0	-1/3	1	-0.1	0	5500
e_5	0	0	0	0	-5/3	0	0.5	1	3000
X_2	400	0	1	0	5/3	0	-0.5	0	10000
Z_j		300	400	0	2000/3	0	100	0	
$C_j - Z_j$		0	0	0	-2000/3	0	-100	0	10000000

البحث عن الحل القاعدي الأول:

مثلما قلنا سابقا تشترط طريقة *simplex* وجود حل قاعدي أولي ننطلق منه في البحث عن حل أمثل , وقليلة هي النماذج التي تتوفر على حل طبيعي أين تكون كل المتراجحات من الشكل أقل أو يساوي ($\leq$) , و لكن في حالة ما إذا كانت أحد المتراجحات من الشكل أكبر أو يساوي($\geq$) أو وجود معادلة ضمن النموذج يصبح الحل الطبيعي غير ممكن.

لو قمنا بإجراء تعديل جزئي على مثالنا السابق حيث نفترض عدم وجود قيود على الطلب المتوقع ولكن المؤسسة حفاظا على حصتها في السوق من كل منتج يتوجب عليها إنتاج على الأقل *11000* وحدة من زيت الشعر , و إنتاج *9000* وحدة من زيت البشرة و يصبح النموذج بعد إدراج المتغيرات الإضافية كما يلي :

$$Max\ Z=300X_1+400X_2+0\ e_1+0\ e_2+0\ e_3+0\ e_4$$

$$S.C$$

$$\begin{aligned}
0.5X_1+0.2X_2+e_1 &= 15000\\
0.3X_1+0.6X_2+e_2 &= 12000\\
0.2X_1+0.2X_2+e_3 &= 11500\\
X_1 \qquad\quad - e_4 &= 11000\\
X_2 \qquad &= 9000\\
X_j\ ;\ e_j \geq 0 &
\end{aligned}$$

ويصبح الحل الطبيعي في هذه الحالة :

. المتغيرات الغير قاعدية : $X_1=0$

. المتغيرات القاعدية :; $e_1=15000$; $e_2=12000$; $e_3=11500$

$e_4= -11000$; $X_2=9000$

وهو حل غير مقبول لأنه لا يحترم قيود السلبية ($e_4= -12000$) , بالإضافة إلى عدم احترام العدد الضروري من المتغيرات غير القاعدية.

لذالك سوف نلجأ إلي طريقة جديدة لتحديد حل قاعدي أول تعتمد على ما يسمى **المتغيرات الاصطناعية** (*variables artificielles*) , وذلك بإضافة هذه المتغيرات إلي المتراجحات من الشكل أكبر أو يساوي (≥) أو المعادلات (=) , هذا في القيود .

أما في دالة الهدف فيتم إضافتها بمعاملات سالبة ذات أكبر قيمة مطلقة ليس من الضروري تحديده و لتكن ($-M$) في حالة التعظيم (وأكبر قيمة موجبة و لتكن (M) في حالة التدنية) , وذلك حتى نجبر هذه المتغيرات على الخروج أولا من الحلول من أجل عدم ظهورها في الحل الأمثل .

و بالعودة إلي المثال السابق يصبح النموذج بالمتغيرات الاصطناعية على الشكل التالي :

$$Max\ Z=300X_1+400X_2+0\ e_1+0\ e_2+0\ e_3+0\ e_4 - Ma_1 - Ma_2$$

S.C

$$\begin{aligned}
0.5X_1+0.2X_2 +e_1 &= 15000\\
0.3X_1+0.6X_2 +e_2 &= 12000\\
0.2X_1+0.2X_2 +e_3 &= 11500\\
X_1 \qquad - e_4+a_1 &= 11000\\
X_2 +a_2 &= 9000\\
X_j\ ;\ e_j\ ;\ a_j &\geq 0
\end{aligned}$$

و النموذج بهذا الشكل يقبل حل طبيعي هو :

. المتغيرات الغير قاعدية : $X_1 = 0\ ;\ X_2 = 0\ ;\ e_4 = 0$

. المتغيرات القاعدية:; $e_1=15000$; $e_2=12000$; $e_3=11500$

$a_1= 11000\ ;\ a_2 = 9000$

و يمكن اعتبار هذا الحل حل قاعدي , و باستخدام طريقة الجداول بديهي أنه كلما خرج متغير غير قاعدي اصطناعي فحتما سوف لن يعود مجددا في أي حل آخر لأنه يحقق أكبر خسارة في دالة الهدف : لذلك نقوم بشطب العمود المقابل له في المصفوفة كلية , و هكذا نفعل مع كل متغير اصطناعي آخر يخرج من الحل القاعدي إلى أن نصل إلي جدول لايحتوى على أي متغيرات اصطناعية , و عندها نواصل البحث عن الحل الأمثل بالطريقة المعتادة , ونقوم بعرض جداول الحل في مثالنا هذا كما يلي :

الحل الأول

		X_1	X_2	e_1	e_2	e_3	e_4	a_1	a_2	
		300	400	0	0	0	0	-M	-M	
e_1	0	0.5	0.2	1	0	0	0	0	0	**15000**
e_2	0	0.3	0.6	0	1	0	0	0	0	**12000**
e_3	0	0.2	0.2	0	0	1	0	0	0	**11500**
a_1	-M	1	0	0	0	0	-1	1	0	**11000**
a_2	-M	0	$\boxed{1}$	0	0	0	0	0	1	**9000**
Z_j		-M	-M	0	0	0	M	-M	-M	
$C_j - Z_j$		300+M	400+M	0	0	0	-M	0	0	**0**

الحل الثاني

		X_1	X_2	e_1	e_2	e_3	e_4	a_1	a_2	
		300	400	0	0	0	0	-M	-M	
e_1	0	0.5	0	1	0	0	0	0	-0.2	**13200**
e_2	0	0.3	0	0	1	0	0	0	-0.6	**6600**
e_3	0	0.2	0	0	0	1	0	0	-0.2	**9700**
a_1	-M	$\boxed{1}$	0	0	0	0	-1	1	0	**11000**
X_2	400	0	1	0	0	0	0	0	1	**9000**
Z_j		-M	400	0	0	0	M	-M	400	
$C_j - Z_j$		300+M	0	0	0	0	-M	M	- M-400	**3600000**

الحل الثالث

		X_1	X_2	e_1	e_2	e_3	e_4	a_1	a_2	
		300	400	0	0	0	0	-M	-M	
e_1	0	0	0	1	0	0	0.5	-0.5	-0.2	**7700**
e_2	0	0	0	0	1	0	$\boxed{0.3}$	-0.3	-0.6	**3300**
e_3	0	0	0	0	0	1	0.2	-0.2	-0.2	**7500**
X_1	300	1	0	0	0	0	-1	1	0	**11000**
X_2	400	0	1	0	0	0	0	0	1	**9000**
Z_j		300	400	0	0	0	-300	300	400	
$C_j - Z_j$		0	0	0	0	0	300	- M-300	- M-400	**6900000**

الجدول 2-5 : الحل الرابع .

الحل الأمثل

		X_1	X_2	e_1	e_2	e_3	e_4	
		300	400	0	0	0	0	
e_1	0	0	0	1	-5/3	0	0	**2200**
e_4	0	0	0	0	10/3	0	1	**11000**
e_3	0	0	0	0	-2/3	1	0	**5300**
X_1	300	1	0	0	10/3	0	0	**22000**
X_2	400	0	1	0	0	0	0	**9000**
Z_j		300	400	0	1000	0	0	
$C_j - Z_j$		0	0	0	-1000	0	0	**10200000**

نلاحظ هنا أننا حصلنا على حل قاعدي مقبول خالي من المتغيرات الاصطناعية في الحل الثالث ثم بعد ذلك بعد خطوة واحدة فقط حصلنا على الحل الأمثل في الحل الرابع.

ملاحظة :

إذا وصلنا إلى حل أمثل مع وجود متغير قاعدي اصطناعي هذا يعني ببساطة أنه لا يوجد حل أمثل للنموذج الأصلي ونتوقف عن البحث .

2 . 6 . الحل المضاعف (*Multiple*):

يمكن لنموذج ما أن يقبل مجموعة غير منتهية من الحلول المثلى (لها نفس قيمة دالة الهدف ولكن تختلف في قيم المتغيرات القاعدية) . نلاحظ في الجدول الأخير من المثال السابق الذي يحتوي على الحل الأمثل أن قيمة $(C_j - Z_j)$ المقابلة للمتغيرات القاعدية معدومة , بينما تلك المقابلة للمتغيرات الغير قاعدية هي ذات قيم سالبة غير معدومة (هذا في حالة التعظيم , أما في حالة التدنية تكون موجبة غير معدومة) كما يلي :

المتغيرات	X_1	X_2	e_1	e_2	e_3	e_4	e_5
$C_j - Z_j$	0	0	0	$-2000/3$	0	-100	0

و هذا يعني أن هذا النموذج يقبل حل أمثل وحيد.

أما في حالة ما إذا كان أحد المتغيرات الغير قاعدية تقابله $(C_j - Z_j)$ معدومة , فهذا يعني أن النموذج يقبل عدد لا نهائي من الحلول المثلى (هذه الحلول لها نفس قيمة دالة الهدف , و لكن تختلف في المتغيرات القاعدية) , و نقول أن للنموذج حل مضاعف (فلو فرضنا في نفس المثال السابق أن $(C_j - Z_j)$ المقابلة لـ (e_2) معدومة , نقول بوجود حل مضاعف).

2 . 7 . ملخص طريقة *simplex* :

عند حل نماذج تعظيم دالة الهدف(أو تدنية دالة الهدف) نتبع الخطوات التالية:

1) . تحديد حل قاعدي أول, وإذا وجدت قيمة " $C_j - Z_j \geq 0$ "

(أو " $C_j - Z_j \leq 0$ " في حالة التدنية) , فهذا الحل لا يعتبر حل أمثل و البحث عن حل قاعدي بديل.

2) . لتحديد حل قاعدي بديل نتبع القواعد التالية :

أ) . نحدد المتغير الغير قاعدي المقابل لأكبر قيمة $(C_j - Z_j)$ الذي سوف يدخل في الحل الجديد.

ب). نقسم عناصر العمود الذي يحتوي على قيم المتغيرات القاعدية (العمود رقم (6) في الجدول رقم$-20-$) على ما يقابلها من عناصر عمود المتغير الذي تم تحديده في (أ) (في المصفوفة رقم (5)) , و نختار المتغير القاعدي المقابل لأدنى حاصل قسمة الذي سوف يخرج من الحل القاعدي, ويدخل مكانه متغير (أ).

ملاحظة : إذا كانت هناك قيم متشابهة نختار أحد هذه المتغيرات القاعدية بطريقة عشوائية , أما إذا كانت كل قيم عمود المتغير الداخل سالبة أو معدومة , فالنموذج لا يقبل حل أمثل و نتوقف عن البحث.

ج)- نحدد المفصل (*pivot de gausse*) و هو نقطة تقاطع عمود المتغير الغير قاعدي الداخل و سطر المتغير القاعدي الخارج ,و بتطبيق آلية المستطيل نحدد جميع عناصر المصفوفة في الحل الجديد.

3) - إذا وجد متغير اصطناعي في الحل الأمثل فالنموذج الأصلي لا يقبل حل أمثل.

4) - إذا وجد متغير غير قاعدي في الحل الأمثل يقابله ($C_j - Z_j = 0$), فهذا يعني أن هناك حل مضاعف , هنا نتوقف عن البحث و نكتفي بأحد الحلول من بينها.

5) - إذا خرج أحد المتغيرات الاصطناعية من أحدد الحلول , فيستحيل أن يعود من جديد في حل آخر , و بالتالي يمكن تجاهله كلية في بقية البحث.

تمرينات :

تمرين رقم 2 . 1 :

حل هندسيا النموذج الموالي :

$$
\begin{aligned}
&Max\ Z = 6X_1+2X_2\\
&\quad S.C\\
&\qquad X_1+X_2 \le 10 \text{ ------ } (1)\\
&\qquad 2X_1+7X_2 \le 20 \text{ ------ } (2)\\
&\qquad X_1 , X_2 \ge 0
\end{aligned}
$$

تمرين رقم 2 . 2 :

أ) - حل هندسيا النموذج الموالي في حالة التعظيم ثم في حالة التدنية. ماذا تلاحظ ؟

$$
\begin{aligned}
&Z = 3X_1+6X_2\\
&\quad S.C\\
&\qquad X_1+ X_2 \le 12 \text{ ----- } (1)\\
&\qquad X_1 \ge 6 \text{ ------- } (2)\\
&\qquad X_2 \ge 6 \text{ ------- } (3)\\
&\qquad 6X_1+3X_2 \ge 5 \text{ -------- } (4)\\
&\qquad X_1 , X_2 \ge 0
\end{aligned}
$$

ب) - كيف سيتغير الحل الأمثل لو تغير القيد(1)كما يلي: $X_1+X_2 \le 11$ ؟

تمرين رقم 2 . 3 :

حل هندسيا النموذج الموالي :

$$Max\ Z = 2X_1+8X_2$$

$$S.C$$

$$X_1+X_2 \geq 9 \text{ ------ } (1)$$

$$X_1 - 2X_2 \leq 6 \text{ ------ } (2)$$

$$8X_1+2X_2 \geq 12 \text{ ---- } (3)$$

$$X_1 , X_2 \geq 0$$

تمرين رقم 2 . 4 :

ليكن لدينا النموذج التالي :

$$Max\ Z = 5X_1+9X_2+6X_3+5X_4$$

$$S.C$$

$$2X_1+7X_2+6X_3+9X_4 \leq 10$$

$$2X_1+3X_2+5X_3+4X_4 \leq 4$$

$$X_1 , X_2 , X_3 , X_4 \geq 0$$

أ) . ما هو عدد الحلول القاعدية لهذا النموذج ؟

ب) . أوجد جميع الحلول القاعدية الممكنة لهذا النموذج.

ت) . استخرج الحل القاعدي الأمثل من بينها.

ث) . باستخدام طريقة جداول *Simplex* , أوجد الحل الأمثل.

المحور الثالث : البرمجة الخطيةالشكل الثنائي وتحليل الحساسية.

1 . الشكل الثنائي :

إن نماذج البرمجة الخطية التي تطرقنا إليها في الفصول السابقة تسمى بالشكل الأولي للنموذج (*primal*) وهذا مقابل ما يسمى بالشكل الثنائي (*dual*)، وهوشكل آخر يمكن أن تكتب به نماذج البرمجة الخطية، حيث يمكن اشتقاق أحد الشكلين من الآخر بكل سهولة، وكلاهما يؤدي إلى نفس النتائج، لذلك فكثيرا ما ينصح بكتابة نماذج البرمجة الخطية على كلا الشكلين ثم اختيار الشكل الذي يؤدي إلى الحل بطريقة أسهلوأسرع.

1 . 1 اشتقاق الشكل الثنائي من الشكل الأولي :

لنأخذ عل سبيل المثال الشكل الأولي العام لنماذج مشاكل الإنتاج أين تحتاج المؤسسة إلى موارد أولية لإنتاج منتجات معينة :

$$MaxZ = \sum_{j=1}^{n} C_j X_j$$

$$S.C$$

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} X_j \le b_i \quad ; \quad i = 1,\ldots.,m$$

$$X_j \ge 0 \quad ; \quad j = 1,\ldots..,n$$

حيث :

C_j : الربح الوحدوي من المنتج (j).

a_{ij}:عدد الوحدات الضرورية من المورد(i)لإنتاج وحدة واحدة من المنتج (j).

b_i : الكميات المتاحة من المورد (i).

إن الحل الأمثل لهذا النموذج سوف يحدد لنا أفضل مخطط إنتاج لتعظيم أرباح المؤسسة (تعظيم دالة الهدف).

يمكن تفسير الحل الأمثل بطريقة أخرى، وهوأنه يحدد أفضل طريقة ممكنة لاستخدام مواردها المحدودة في العملية الإنتاجية، فلوفرضنا أن أحد المشترين بحاجة ماسة إلى الموارد الأولية التي هي بحوزة المؤسسة وقدم عرضا لشرائها، إذن فعرض الشراء هذا هوخيار آخر بالنسبة للمؤسسة، ويصبح لدى المؤسسة خيارين إما استخدام مواردها في الإنتاج، وإما بيعها مباشرة إلى هذا المشتري، وبالتالي فهي تختار عرض الشراء إذا كان ثمن هذه الصفقة يفوق الأرباح المحققة من خيار الإنتاج، بعبارة أخرى المشكلة محسومة بالنسبة للمؤسسة، فالأرباح المحسوبة في الحل الأمثل(وهوأقصى ربح يمكن أن تحققه) سوف تستخدمه للاختيار وذلك بمقارنته مع ثمن الصفقة.

أما بالنسبة للمشتري فمشكلته تكمن في تدنية تكاليف شراء هذه الموارد إلى أدنى حد ممكن، وفي نفس الوقت مقنع للمؤسسة لتبيعه هذه الموارد.

للوهلة الأولى يبد ووواضحا أن الحد الفاصل بين مصلحة المشتري ومصلحة المؤسسة هوأن يكون العرض مساويا لربح مؤسسة (ولكن لا ننسى أن قيمة هذا الربح لم يكن جاهزا وإنما قامت المؤسسة بحسابه باستخدام طريقة علمية وهي طريقة *simplex*).

لذلك فعلى المشترى أن يقوم بتدنية تكاليفه بطريقة علمية وسوف يستخدم هوالأخر طريقة *simplex*، وسوف نحاول معرفة كيف يتم ذلك .

يتمثل هذا العرض في عرض سعر شراء وحدوي لكل مورد وليكن :

Y_i : سعر شراء المورد i .

إذن تكلفة شراء كل الكمية المتاحة من المورد i هي : $b_i.y_i$.

وتصبح تكلفة الشراء الكلية لكل الموارد الأولية هي :

$$W = \sum_{i=1}^{m} b_i y_i \quad ; \quad i = 1,\ldots.,m$$

وتصبح مشكلة هذا المشتري هي تدنية دالة الهدف كما يلي :

$$Min W = \sum_{i=1}^{m} b_i y_i \quad ; \quad i = 1,\ldots.,m$$

أما بالنسبة لقيود هذا المشتري يمكن استخراجها كما يلي :

تحقق المؤسسة ربح قدره C_j من بيع وحدة واحدة من المنتج j، ولإنتاج هذه الوحدة تحتاج إلي :

a_{1j} : من المورد 1، a_{2j} : من المورد 2، ....، a_{ij} : من المورد i، ...، a_{mj} : من المورد m .

إذا فالمشتري يجب أن يكون ذكيا ويعرض أسعارا وحدوية لكل مورد بحيث تكون تكلفة شراء هذه الكميات المختلفة من هذه الموارد (a_{1j}، a_{2j}، ...، a_{ij}، ...، a_{mj}) أكبر أ ويساوى من ثمن المنتج j (وهوC_J) حتى تقتنع المؤسسة في بيعها (لأنه لوكان أقل فالمؤسسة لن تبيع وتفضل الإنتاج)، وهكذا نفعل مع باقي القيود ويتم تمثيل ذلك رياضيا كما يلي :

$$\sum_{i=1}^{m} a_{ij} y_i \geq \quad C_j \quad ; \quad i = 1;.....; m$$

أيضا مع مراعاة قيود السلبية نحصل على نموذج هذا المشتري :

$$MinW=\sum_{i=1}^{m} b_i y_i \quad ; \quad i=1,\ldots,m$$

$$S.C$$

$$\sum_{i=1}^{m} a_{ij} y_i \geq \; C_j$$

$$y_i \quad \geq 0 \quad ; \quad i=1;\ldots;m$$

هذا النموذج يسمى الشكل الثنائي لنموذج المؤسسة، ويمكن في الأخير كتابة كلا الشكلين على شكل المصفوفات كما يلي :

الشكل الأولي	**الشكل الثنائي**
$Max\ Z=CX$	$Min\ W= Yb$
$S.C$	$S.C$
$AX \leq b$	$YA \geq C$

من خلال هذين الشكلين يمكن اكتشاف العلاقة الموجودة بينهما بسهولة :

. مقابل m قيد في الشكل الأول، يوجد m متغير أساسي في الشكل الثنائي.

. مقابل n متغير أساسي في الشكل الأول، يوجد n قيد في الشكل الثنائي.

. الطرف الأيمن للقيود في الشكل الأول، يصبح معاملات دالة الهدف في الشكل الثنائي.

. معاملات دالة الهدف في الشكل الأول، تصبح الطرف الأيمن لقيود الشكل الثنائي.

يمكن تمثيل هذه العلاقات في الجدول الموالي :

الجدول 3-1

<table dir="rtl">
<tr><td colspan="3"></td><td colspan="2">الشكل الأولي</td><td></td></tr>
<tr><td colspan="3"></td><td>الطرف الأيمن</td><td>معاملات
$X_1 \geq 0$، $X_2 \geq 0$، .... ،$X_n \geq 0$</td><td></td></tr>
<tr><td rowspan="2">الشكل الثنائي</td><td>معاملات</td><td>$y_1 \geq 0$
$y_2 \geq 0$
.
.
.
$Y_m \geq 0$</td><td>$\leq b_1$
$\leq b_2$
.
.
.
$\leq b_m$</td><td>$a_{11} \quad a_{12}\ldots\ldots a_{1n}$
$a_{21} \quad a_{22}\ldots\ldots a_{2n}$
$\ldots\ldots$
$\ldots\ldots$
$\ldots\ldots$
$a_{m1} \quad a_{m2}\ldots\ldots a_{mn}$</td><td>معاملات دالة الهدف (تدنية)</td></tr>
<tr><td colspan="2">الطرف الأيمن</td><td></td><td>$\geq C_1$، $\geq C_2$، .... ،$\geq C_n$</td><td></td></tr>
<tr><td colspan="3"></td><td colspan="2">معاملات دالة الهدف (تعظيم)</td><td></td></tr>
</table>

ملاحظة : في أغلب نماذج البرمجة الخطية دائما أحد الشكلين أسهل من الآخر في الحل .

وفي حالة ما إذا كان أحد الشكلين يحتوي على قيود مختلطة (≤، ≥، =)، فالجدول الموالي يوضح طريقة الانتقال من شكل لآخر، وحتى في نماذج لا تشترط قيود السلبية.

الجدول 3−2

التعظيم	التدنية
. مصفوفة المعاملات التكنولوجية $(m.n)$. . الطرف الأيمن للقيود. . معاملات دالة الهدف.	. منقول مصفوفة المعاملات التكنولوجية $(n.m)$. . معاملات دالة الهدف. . الطرف الأيمن للقيود.
. عدد القيود. . القيد رقم i من الشكل (=). . القيد رقمiمن الشكل أقل أو يساوي(≤). . القيد رقمi من الشكل أكبر أويساوي (≥).	. عدد المتغيرات الأساسية. . المتغير رقم i غير مقيد. . المتغير رقمi أكبر أ ويساوي 0 $(y_i \geq 0)$. . المتغير رقم i أقل أ ويساوي 0 $(y_i \leq 0)$.
. عدد المتغيرات الأساسية. . المتغير رقم j غير مقيد. . المتغير رقمj أكبر أويساوي 0$(X_j \geq 0)$. . المتغير رقم j أقل أ ويساوي 0 $(X_j \leq 0)$.	. عدد القيود. . القيد رقم j من الشكل (=). . القيد رقم j من الشكل أكبر أويساوي (≥). . القيد رقم j من الشكل أقل أ ويساوي (≤).

مثال :

باستخدام دائما نموذج المثال السابق (مثال 2 . 1 ص 73)، ولكن بفرض عدم وجود قيود على الطلب المتوقع على كلا المنتجين (لتسهيل عملية تفسير عناصر الشكل الثنائي) كما يلي :

$$Max\ Z = 300X_1+400X_2$$

$$S.C$$

$$0.5X_1 + 0.2X_2 \leq 15000 \text{ ———— } (y_1)$$

$$0.3X_1 + 0.6X_2 \leq 12000 \text{ ———— } (y_2)$$

$$0.2X_1 + 0.2X_2 \leq 11500 \text{ ———— } (y_3)$$

$$X_j \geq 0 \ ;\ j=1،2$$

نحاول بناء الشكل الثنائي لهذا النموذج بالاعتماد على الجدول 3 . 2.

. يوجد في الشكل الأولي 3 قيود، إذن عدد متغيرات الشكل الثنائي 3 متغيرات أساسية $(y_3\ ،y_2\ ،y_1)$.

. معاملات دالة الهدف في الشكل الثنائي هي الطرف الأيمن لقيود الشكل الأولي أي أن دالة الهدف للشكل الثنائي هي:

$$W=15000\ y_1+12000\ y_2+11500\ y_3$$

. الطرف الأيمن، ومصفوفة المعاملات التكنولوجية، وعدد القيود في الشكل الثنائي، هي معاملات دالة الهدف، ومنقول مصفوفة المعاملات التكنولوجية، وعدد المتغيرات الأساسية على الترتيب في الشكل الأولي وتكتب :

$$0.5\ y_1+0.3\ y_2+0.2\ y_3 \geq 300$$

$$0.2\ y_1+0.6\ y_2+0.2\ y_3 \geq 400$$

. بمأن كل القيود في الشكل الأولي من الشكل أقل أ ويساوي (≤)، فإن المتغيرات الأساسية في الشكل الثنائي تكون :

$$Y_i \geq 0 \ \ ; i=1،2،3.$$

. وفي الأخير نحصل على الشكل الثنائي لهذا المثال كما يلي :

$$\begin{aligned} &Min\ W=15000\ y_1+12000\ y_2+11500\ y_3 \\ &S.C \\ &0.5\ y_1+0.3\ y_2+0.2\ y_3 \geq 300 \\ &0.2\ y_1+0.6\ y_2+0.2\ y_3 \geq 400 \\ &Y_i \geq 0 \ \ ; i=1،2،3. \end{aligned}$$

1 . 2 شرح وتحليل عناصر الشكل الثنائي :

أولا للقيام بذلك سوف نستعين بالجدول الموالي الذي يحتوى على الحل الأمثل للشكل الأولي لهذا المثال :

الجدول 3-3: الحل الأمثل. (الشكل الأولي)

		X_1	X_2	e_1	e_2	e_3	
		300	400	0	0	0	
X_1	300	1	0	2.5	-2.5/3	0	**27500**
X_2	400	0	1	-1.25	6.25/3	0	**6250**
e_3	0	0	0	-0.25	-0.25	1	**4750**
Z_j		300	400	250	1750/3	0	
$C_j - Z_j$		0	0	-250	-1750/3	0	**10750000**

نلاحظ هنا أن هذا المثال يتمتع بحل أمثلوحيد لأن كل قيم (c_j - z_j) المقابلة لكل المتغيرات القاعدية معدومة، أما نظيراتها المقابلة للمتغيرات الغير قاعدية كلها سالبة وغير معدومة، إذا من أجل تعظيم أرباحها ($Z=10750000$) على المؤسسة إنتاج *27500* وحدة من X_1 (زيت الشعر)، وإنتاج *6250* وحدة من X_2 (زيت البشرة).

1 . 2 . 1 شرح المتغيرات الثنائية:

إن هدف الشكل الثنائي (لا ننسى أنه نموذج المشتري المفترض)هوتدنية تكاليف الحصول على الموارد الأولية (وهودائما عكس هدف الشكل الأولي) y_1، y_2، وy_3، والتي تمثل تكلفة الشراء الوحدوية لكل من زيت الزيتون، زيت الخروع، وزيت الجوز على الترتيب.

إذن فهذه المتغيرات هي المتغيرات الأساسية للشكل الثنائي.

ملاحظة :

لا نقصد هنا بالتكاليف المعنى المحاسبي لها، وإنما تكاليف الفرصة البديلة بالنسبة للمؤسسة لواختارت بيع مواردها كبديل عن استخدامها في الإنتاج، فمثلا لوكانت $y_1=300$ أي تكلفة وحدة واحدة من زيت الزيتون هو300 دج هذا يعني أن المؤسسة لوقامت ببيع وحدة واحدة من زيت الزيتون فإن هذا سيكلفها ضياع الفرصة البديلة بـ 300 دج لوأنها اختارت أن تستخدمه في الإنتاج عوض بيعه.

2 . 2 . 1 شرح قيود الشكل الثنائي :

القيد الأول في هذا النموذج يقابل المتغير الأساسي X_1 (زيت الشعر) في الشكل الأولي ويترجم بالشكل التالي:

$$0.5\ y_1+0.3\ y_2+0.2\ y_3 \geq 300 \longrightarrow X_1$$

التكلفة الكلية للموارد الأولية اللازمة لإنتاج وحدة واحدة من زيت الشعر هي مجموع :

. تكلفة الوحدات اللازمة من زيت الزيتون : $0.5y_1$.

. تكلفة الوحدات اللازمة من زيت الخروع : $0.3y_2$.

. تكلفة الوحدات اللازمة من زيت الجوز : $0.2y_3$.

يجب أن تكون أكبر أ ويساوى من سعر بيع زيت الشعر (وإلا فالمؤسسة لن تبيع مواردها).

إذن فتكلفة الفرصة البديلة لإنتاج وحدة واحدة من زيت الشعر هي : إما تساوي الربح الوحدوي لهذا المنتج (في هذه الحالة المؤسسة تفضل إنتاج زيت الشعر)، أ وأكبر من الربح الوحدوي (وفي هذه الحالة المؤسسة تفضل بيع هذه الموارد الداخلة في إنتاج زيت الشعر عوض استخدامها في الإنتاج).

ونفس الشئ بالنسبة للقيد الثاني في الشكل الثنائي المقابل للمتغير الأساسي X_2 في الشكل الأولي (زيت البشرة).

ملاحظة:

نلاحظ هنا أيضا أن قيود الشكل الثنائي لا تسمح بأن تكون تكلفة الفرصة البديلة أقل من سعر البيع الوحدوي لكل منتج (لأنه في هذه الحالة المؤسسة لن تفكر في بيع هذه الموارد).

3 . 2 . 1 شرح دالة الهدف للشكل الثنائي :

كما قلنا سابقا فالمشتري المفترض ل موارد المؤسسة يبحث عن أقل تكلفة ممكنة لشراء هذه الموارد منها، ولفعل ذلك فهويلجأ إلى بناء نموذج برمجة خاص به هدفه تدنية التكاليف مقابل نموذج التعظيم الخاص بالمؤسسة، وبما أن كلاهما يبحث عن الحل الأمثل باستخدام نفس الطريقة العلمية (ولتكن

طريقة *simplex*)، فحتما سيصلان إلى الحد الفاصل أين تتساوى مصلحتيهما وهو،أن أقصى ربح للمؤسسة يساوي أدنى تكلفة لهذا المشتري المفترض أي أنه عند الحل الأمثل: $Z^*=W^*$

إذن فالتكلفة الكلية للحصول على موارد المؤسسة هي مجموع :

. تكلفة شراء كل الكمية المتاحة من المورد1 زيت الزيتون: $15000y_1$.

. تكلفة شراء كل الكمية المتاحة من المورد 2 زيت الخروع: $12000y_2$.

. تكلفة شراء كل الكمية المتاحة من المورد 3 زيت الجوز : $11500y_3$.

يجب أن تكون أقل ما يمكن.

1 . 3 حل الشكل الثنائي :

سوف نبدأ أولا بحل نموذج الشكل الثنائي بطريقة مستقلة، وذلك باستخدام طريقة *simplex*، ثم نقارن الحل الأمثل مع الحل الأمثل للشكل الأولي، وفيما بعد نستعرض كيفية اشتقاق هذا الحل من الحل الأمثل للشكل الأولي.

قبل البحث عن الحل الأمثل يجب تعديل نموذج الشكل الثنائي للمثال السابق وذلك بإضافة المتغيرات الإضافية والمتغيرات الاصطناعية كما يلي :

$$Min\ W=15000\,y_1+12000\,y_2+11500\,y_3+0\,e'_1+0\,e'_2+Ma_1+Ma_2$$

$$S.C$$

$$0.5\,y_1+0.3\,y_2+0.2\,y_3-e'_1+a_1=300$$

$$0.2\,y_1+0.6\,y_2+0.2\,y_3-e'_2+a_2=400$$

$$Y_i\geq 0\ ;\ i=1،2،3.\quad e'_i\geq 0\ ;\ i=1،2.\quad a_i\geq 0\ ;\ i=1،2.$$

وبتطبيق بطريقة *simplex* نبحث عن الحل الأمثلوسوف نكتفي بعرض الجدول الأخير الذي يحتوي عليه :

الجدول 3–4: الحل الأمثل. (الشكل الثنائي)

		y_1 15000	y_2 12000	y_3 11500	e'_1 0	e'_2 0	
y_1	15000	1	0	0.25	-2.5	1.25	**250**
y_2	12000	0	1	0.25	2.5/3	-6.25/3	**1750/3**
Z_j		15000	12000	6750	-27500	-6250	
C_j-Z_j		0	0	4750	27500	6250	**10750000**

1 . 4 شرح عناصر الحل الأمثل للشكل الثنائي:

الحل الأمثل للشكل الثنائي هو:

. المتغيرات الغير قاعدية : $e'_2=0$ ،$e'_1=0$ ،$y_3=0$

. المتغيرات القاعدية : $y_2=1750/3$ ،$y_1=250$

. قيمة دالة الهدف : $Z=10750000$

1 . 4 . 1 المتغيرات الأساسية :

لنأخذ قيم المتغيرات الثنائية في الحل الأمثل y_1، y_2 و y_3 :

$Y_1=250$، تعني أن تكلفة الفرصة البديلة لوحدة واحدة من زيت الزيتون هي 250 دج، أي أنه ما دام سعر زيت الزيتون في السوق أقل من 250 دج فالمؤسسة يمكنها شرائهوتحقق من وراء استخدامه أرباحا، ونفس الشئ بالنسبة لـ y_2 .

$Y_3=0$، تعني تكلفة الفرصة البديلة لوحدة واحدة من زيت الجوز معدومة، أي أن المؤسسة حتى لواستطاعت الحصول عليه مجانا فهذا لن يضيف لها أي ربح، وهذا في الحقيقة شئ منطقي لأنه أصلا تبقى في مخازن المؤسسة 4750 وحدة منه فلوكانت إضافته ستزيد أرباحها لاستخدمت ما لديها مجانا، وبالتالي فأي وحدة إضافية حتى ولوكانت مجانا لن تضيف شيئا للأرباح.

لوفرضنا الآن أن عدد وحدات زيت الزيتون ارتفعت بوحدة واحدة . وبقاء باقي المتغيرات ثابتة (نتذكر أنه في الحل الأمثل لم يتبقى للمؤسسة أي وحدة منه) وانتقل من 15000 إلى 15001، كيف سيغير ذلك في دالة الهدف :

$$\Delta Z=\Delta W=(15001-15000)y_1$$
$$\Delta Z=\Delta W= y_1= 250$$

إذن أرباح المؤسسة ارتفعت بنفس قيمة y_1، وهذا يعني أن المشتري (لا ننسى أن هذا النموذج الثنائي يخصه) لوأراد الحصول على وحدة واحدة من زيت الزيتون سوف يكلفه ذلك على الأقل 250 دج (لأنه بأقل من ذلك المؤسسة لن تبيعه)، لذلك تسمى هذه المتغيرات الثنائية **التكلفة الهامشية** في دالة الهدف هذه بالنسبة للمشتري.

أما بالنسبة للمؤسسة، فإمكانية بيع هذه الوحدة لهذا المشتري هي فرصة بديلة على الإنتاج، ولكن عليها أن لا تنسى أنها إذا قررت أن تبيعها فإن ذلك سيكلفها خسارة 250 دج من الأرباح لواختارت توظيفها في الإنتاج، لذلك بالنسبة للمؤسسة تسمى أيضا **تكلفة الفرصة البديلة.**

لوحاولنا الآن زيادة عدد وحدات زيت الجوز بوحدة واحدة لينتقل من 11500 إلى 11501، كيف ستتغير دالة الهدف:

$$\Delta Z=\Delta W=(11501-11500)y_3$$
$$\Delta Z=\Delta W= y_3= 0$$

بنفس المنطق فإن التكلفة الهامشية لزيت الجوز معدومة، ذلك منطقي لأن المؤسسة تستطيع بيع وحدة واحدة منه مجانا دون أن تؤثر على أرباحها، ذلك ببساطة لأنه توجد عدة وحدات منه في مخازنها لم تدخل أصلا في العملية الإنتاجية.

إذن يمكن تفسير التكلفة الهامشية للمتغير الثنائي في الحل الأمثل (y_i) على أنها مقدار التغير في القيمة المثلى لدالة الهدف لوأضفنا وحدة واحدة من المورد i .

يمكن استنتاج كل قيم المتغيرات الأساسية الثنائية في الحل الأمثل الثنائي مباشرة من جدول الحل الأمثل للشكل الأولي حيث :

Y_1 تساوي القيمة المطلقة لـ ($C_3 - Z_3= - 250$) المقابلة لـ e_1 وتعاكسها في الإشارة.

Y_2 تساوي القيمة المطلقة لـ ($C_4 - Z_4= - 1750/3$) المقابلة لـ e_2 وتعاكسها في الإشارة.

Y_3 تساوي القيمة المطلقة لـ ($C_3 - Z_3= 0$) المقابلة لـ e_3 وهي قيمة معدومة.

وبصفة عامة قيم المتغيرات الثنائية في الحل الأمثل المقابلة لقيود الشكل الأولي التي من الشكل أقل أ ويساوي ($\leq$) هي دائما تساوي بالقيمة المطلقة للقيم المثلى ($C_j - Z_j$) للمتغيرات الأساسية للشكل الأولي المقابلة لها، ولكن تعاكسها في الإشارة، أما في حالة ما إذا كانت قيود الشكل الأولي من الشكل أكبر أ ويساوي ($\geq$)، فإن القيم المثلى للمتغيرات الثنائية تساوي تماما قيم ($C_j - Z_j$) المقابلة لها.

1 . 4 . 2 المتغيرات الإضافية :

نحاول تفسير المتغيرات الإضافية الثنائية (متغيرات الفائض) "e'_1، e'_2 ".

لدينا e'_1 هوالمتغير الإضافي للقيد الأول في الشكل الثنائي وهويقابل المتغير الأساسي X_1 في الشكل الأولي، إذن e'_1 يقيس مقدار الخسارة في الفرصة البديلة للمؤسسة (بيع الموارد) عند إنتاج وحدة واحدة من X_1، ونفس الشئ بالنسبة للمتغير e'_2 الذي يقابل X_2.

في مثالنا السابق ($e'_1=0$، $e'_2=0$) أي أن الخسارة في الفرصة البديلة معدومة بالنسبة لكلا المنتجين.

يمكن استنتاج ذلك مباشرة من جدول الحل الأمثل للشكل الأولي حيث :

$C_1 - Z_1=0$، $C_2 - Z_2=0$.

ملاحظة : أن تكون الخسارة في الفرصة البديلة لمنتج معين معدومة ليست قاعدة، وإنما في هذا المثال فقط، فلوكانت مثلا $e'_1=150$، فهذا يعني خسارة الفرصة البديلة في الحل الأمثل بمقدار 150 دج عند إنتاج وحدة إضافية من X_1، وتكون $C_1 - Z_1= -150$ في جدول الحل الأمثل في الشكل الأولي.

بصفة عامة إذا كانت هناك خسارة في الفرصة البديلة (موجبة) المرتبطة بنشاط معين (متغير أساسي في الشكل الأولي)، هذا المتغير الأساسي سوف يكون معدوما في الحل الأمثل للشكل الأولي (متغير غير قاعدي)، والعكس في حالة ما إذا كانت الخسارة في الفرصة البديلة معدومة يكون المتغير الأساسي المقابل لها في الشكل الأولي متغير قاعدي.

وفي الأخير يمكن اختصار كل ما سبق في العلاقة الرياضية التالية :

$$X_1e'_1=X_2e'_2=y_1e_1=y_2e_2=y_3e_3=0$$

1 . 4 . 3 الخلاصة :

إذا كان لدينا نموذج تعظيم (أ وتدنية)، وكان القيد رقم i في هذا النموذج من الشكل أقل أ ويساوي ($\leq$)، وكان المتغير الإضافي لهذا القيد هوe_i، إذن فالقيمة المثلى للمتغير الثنائي y_i المقابلة لهذا المتغير الإضافي هي :

$Y_i = -(C_{n+i} - Z_{n+i}) \geq 0$ (أ و $Y_i = -(C_{n+i} - Z_{n+i}) \leq 0$ في حالة التدنية).

أما إذا كان القيد رقم i من الشكل أكبر أو يساوي ($\geq$)، فإن القيمة المثلى لـ y_i هي :

$Y_i = (C_{n+i} - Z_{n+i}) \leq 0$ (أ و $Y_i = (C_{n+i} - Z_{n+i}) \geq 0$ في حالة التدنية).

وفي الأخير يمكن اختصار ما سبق في الجدول الموالي :

الجدول 3−5

القيد رقم i من الشكل أقل أ ويساوي ($\leq$)		
المتغيرالإضافي للقيد i	القيمة المثلى للمتغير الثنائي المقابل له	إشارة المتغير الثنائي
e_i	$Y_i = -(C_{n+i} - Z_{n+i})$	حالة التعظيم : $y_i \geq 0$
		حالة التدنية : $y_i \leq 0$
القيد رقم i من الشكل أكبر أ ويساوي ($\geq$)		
المتغيرالإضافي للقيد i	القيمة المثلى للمتغير الثنائي المقابل له	إشارة المتغير الثنائي
e_i	$Y_i = C_{n+i} - Z_{n+i}$	حالة التعظيم : $y_i \leq 0$
		حالة التدنية : $y_i \geq 0$

2 . تحليل الحساسية :

ضمن الفصول السابقة اشترطنا عند تشكيلوحل نماذج البرمجة الخطية وجود فرضية ثبات معاملات النموذج(c_j ،b_i ،a_{ij})، ولكن عمليا هذه الفرضية غير واقعية وذلك لعدة أسباب أهمها أن جزئا كبيرا من المعلومات المتعلقة بمعطيات النموذج غير أكيدة بشكل تام، فطاقة الإنتاج أ والطلب المتوقع أ والأسعار ....الخ، إضافة إلى ذلك فقد يعمد متخذ القرار إلي تغيير بعض المعطيات كرفع أسعار بعض المنتجات أ ورفع طاقة الإنتاج أ وإطلاق حملة تسويقية للرفع من الطلب ....الخ.

والسؤال المطروح هوكيف ستؤثر هذه التغيرات في معاملات النموذج على الحل الأمثل ؟ والجواب على هذا السؤال يتم عن طريق تحليل حساسية الحل الأمثل (*Analyse de sensibilité*)، لذلك سوف نتطرق في هذا الجزء إلي حساسية الحل الأمثل جراء التغير في الطرف الأيمن للقيود (b_i)، بعبارة أخري سوف نبحث عن مجال تغير (b_i) بحيث لا يؤثر في الحل الأمثل ثم بعد ذلك ندرس مجال تغير كل من (c_j) و(a_{ij})

2 . 1 : تغيرات الكميات المتاحة (b_i) :

سوف نعتمد في ذلك على نموذج المثال السابق (مثال 2 . 1) ولكن مع عدم وجود قيود الطلب المتوقع :

$$
\begin{aligned}
&Max\ Z = 300X_1+400X_2\\
&S.C\\
&0.5X_1+0.2X_2 \le 15000 \text{ -------- } (1)\\
&0.3X_1+0.6X_2 \le 12000 \text{ -------- } (2)\\
&0.2X_1+0.2X_2 \le 11500 \text{ -------- } (3)\\
&X_j \ge 0\ ;\ j = 1\ ،2.
\end{aligned}
$$

نفترض الآن أن الطرف الأيمن للقيد الأول يتغير بمقدار S_1، ونفس الشيء بالنسبة للقيد الثاني والثالث S_2 وS_3 ويصبح النموذج بعد إضافة المتغيرات الإضافية كما يلي :

$$
\begin{aligned}
&Max\ Z = 300X_1+400X_2\\
&S.C\\
&0.5X_1+0.2X_2+e_1 = 15000+S_1 \text{ -------- } (1)\\
&0.3X_1+0.6X_2+e_2 = 12000+S_2 \text{ -------- } (2)\\
&0.2X_1+0.2X_2+e_3 = 11500+S_3 \text{ -------- } (3)\\
&X_1\ ،X_2\ ،e_1\ ،e_2\ ،e_3 \ge 0
\end{aligned}
$$

بما أن الاختلاف الوحيد هوالطرف الأيمن للقيود فإننا سوف نأخذ الجدول الأول مع الأخذ بعين الاعتبار هذه التغيرات :

الجدول 3 . 6 : الجدول الأول

		X_1	X_2	e_1	e_2	e_3		S_1	S_2	S_3
		300	400	0	0	0		0	0	0
e_1	0	0.5	0.2	1	0	0	**15000**	1	0	0
e_2	0	0.3	0.6	0	1	0	**12000**	0	1	0
e_3	0	0.2	0.2	0	0	1	**11500**	0	0	1
Z_j		300	400	250	1750/3	0				
$C_j - Z_j$		0	0	-250	-1750/3	0	**10750000**			

في الجدول 3 . 6 تم إضافة ثلاث أعمدة للمتغيرات S_1، S_2، S_3، ويمكن باعتماد طريقة *Simplex* البحث عن الحل الأمثل بكل سهولة ومعاملة هذه المتغيرات الجديدة بنفس الطريقة مع باقي المتغيرات. ولكن لوتأملنا قليلا في هذا الجدول فإنه يمكننا استنتاج جدول الحل الأمثل لهذا النموذج مباشرة من جدول الحل الأمثل للنموذج الأصلي.

بالفعل نلاحظ أن مصفوفة المتغيرات (S_1، S_2، S_3)تساوي مصفوفة المتغيرات الإضافية (e_1، e_2، e_3) وبمأن هاتين المصفوفتين تخضعان لنفس العمليات في سيرورة البحث عن الحل الأمثل فحتما هاتين المصفوفتين سوف يتساويان أيضا في الحل الأمثل، وبالتالي سوف نحصل على الحل الأمثل مباشرة من جدول الحل الأمثل للنموذج الأصلي :

الجدول 3 . 7 : الحل الأمثل

		X_1	X_2	e_1	e_2	e_3		S_1	S_2	S_3
		300	400	0	0	0		0	0	0
X_1	300	1	0	2.5	-2.5/3	0	**27500**	2.5	-2.5/3	0
X_2	400	0	1	-1.25	6.25/3	0	**6250**	-1.25	6.25/3	0
e_3	0	0	0	-0.25	-0.25	1	**4750**	-0.25	-0.25	1
Z_j		300	400	250	1750/3	0		250	1750/3	0
$C_j - Z_j$		0	0	-250	-1750/3	0	**10750000**			

من خلال هذا الجدول يمكن كتابة قيم المتغيرات القاعدية كما يلي :

$$\left.\begin{aligned} X_1 &= 27500+2.5S_1-2.5/3S_2+0S_3 \\ X_2 &= 6250-1.25S_1+6.25/3S_2+0S_3 \\ e_3 &= 4750-0.25S_1-0.25S_2+S_3 \end{aligned}\right\} \quad \text{----------} \ (1)$$

نلاحظ هنا أنه يمكن لـ S_1 وS_2، S_3 أن تأخذ أي قيمة حقيقية ما دام كل من X_1 وX_2 وe_3 تأخذ قيما حقيقية موجبة غير معدومة، بالتالي قاعدة الحل الأمثل لا تتغير (نقصد بقولنا أن قاعدة الحل الأمثل لا تتغير، هوأن هذا الجدول هوجدول الحل الأمثلولا نحتاج إلى الانتقال إلى جدول آخر، ولكن القيم المثلى للمتغيرات القاعدية سوف تتغير وقيمة دالة الهدف ستتغير هي الأخرى نتيجة تغير الطرف الأيمن للقيود) ورياضيا نكتب :

$$\left.\begin{array}{l} 27500+2.5S_1-2.5/3S_2+0S_3 \geq 0 \\ 6250-1.25S_1+6.25/3S_2+0S_3 \geq 0 \\ 4750-0.25S_1-0.25S_2+S_3 \geq 0 \end{array}\right\} \text{ ---------- } (2)$$

أما قيمة دالة الهدف فتصبح :

$$Z = 10750000+250S_1+1750/3S_2+0S_3$$

أ) . تغير الكمية المتاحة لقيد واحد فقط مع ثبات باقي القيود :

نفترض الآن أن $S_2 = 0$ و $S_3 = 0$ بينما $S_1 \geq 0$، أي أن هناك تغير في الكمية المتاحة لزيت الزيتون فقط بالتعويض في الجملة (2) يصبح لدينا :

$$\left\{\begin{array}{lcl} 27500+2.5S_1 \geq 0 & & S_1 \geq -11000 \\ 6250-1.25S_1 \geq 0 & \Rightarrow & S_1 \leq 5000 \\ 4750-0.25S_1 \geq 0 & & S_1 \leq 19000 \end{array}\right.$$

. أي أن مجال تغير S_1 هو : $[-11000\ ,\ 5000]$

وبنفس الطريقة نحصل على مجال تغير S_2 و S_3 :

. مجال تغير S_2 هو : $[-3000\ ,\ 19000]$

. مجال تغير S_3 هو : $[-4250\ ,\ +\infty[$

إذن بمأنه كان لدينا 15000 وحدة من زيت الزيتون، فإن قاعدة الحل الأمثل لا تتغير ما دامت الكميات المتاحة منه تتراوح بين 4000 و 20000 وحدة (هذا طبعا بفرض الكميات المتاحة لباقي الموارد ثابتة)، وهذا يعني أيضا أن التكلفة الهامشية الوحدوية لزيت الزيتون (المتغير الثنائي المقابل لقيد زيت الزيتون في الشكل الأولي) تبقى ثابتة 250 دج ما دامت الكميات المتاحة منه تتغير في المجال : $[4000\ ,\ 20000]$.

ونفس الشيء بالنسبة لزيت الخروع، فقاعدة الحل الأمثل لا تتغير ما دامت الكمية المتاحة منه تتغير ضمن المجال :

$[9000\ ,31000]$تكلفته الهامشية الوحدوية تبقى ثابتة وتساوي $1750/3$ دج.

أما زيت الجوز فيتغير ضمن المجال $]6750\ ;+\infty[$ وتكلفته الهامشية تبقى معدومة، وهذا منطقي لأن $e_3 \geq 0$ متغير قاعدي، وهذا يعني بقاء كمية منه لم تستخدم وبالتالي تكلفته الهامشية معدومة.

بصفة عامة عند محاولة معرفة مجال تغير الطرف الأيمن للقيد رقم i نستخدم معاملات عمود المتغير e_i في مصفوفة الحل الأمثل، فإذا كان هذا المتغير هومتغير عجز (القيد من النوع أقل أ ويساوي ($\leq$)) نستخدم هذه المعاملات مباشرة، أما إذا كان هذا المتغير متغير فائض (القيد من النوع أكبر أ ويساوي ($\geq$)) نستخدم هذه المعاملات بعد تغيير كل إشاراتها.

مثال *3 . 1* :

سوف نستعين بهذا المثال ذ وحجم أكبر لنستطيع فيما بعد استخدام قاعدة عامة.

تحتاج شركة سونلغاز إلى *7* أنواع مختلفة من المولدات في مختلف محطاتها، وللحصول عليها تستطيع، إما إنتاجها في أحد فروعها ولكن طاقتها الإنتاجية محدودة، أ وشراءها من السوق.

الجدول الموالي يوضح كل المعلومات الضرورية للحصول على هذه المولدات، فمثلا لإنتاج مولد واحد من النوع *3* تحتاج الشركة إلى: *1000*دج رأسمال، *3* ساعات عمل تصميم، *1* ساعة عمل في ورشة التصنيع، *4* ساعات عمل في ورشة التشطيب، *2* ساعة عمل للاختبار، حاجة الشركة من هذا النوع من المولدات *60* مولد، تكلفة إنتاجه الوحدوية *560000* دج، وتكلفة شراءه من السوق *1260000* دج.

الجدول 3 . 8 :

نوع المولدات	رأسمال (لكل:1000دج)	التصميم (سا/وحدة)	التصنيع (سا/وحدة)	التشطيب (سا/وحدة)	الاختبار (سا/وحدة)	الكمية المطلوبة	تكلفةالإنتاج (دج/وحدة)	تكلفة الشراء (دج/وحدة)
1	3	3	5	1	1	40	490000	1050000
2	5	1	2	1	0	34	420000	1225000
3	1	3	1	4	2	60	560000	1260000
4	1	2	3	0	3	40	385000	735000
5	2	2	1	5	2	20	630000	1540000
6	2	3	0	2	2	22	700000	1435000
7	4	1	2	1	1	16	420000	840000
المتاح	400	480	210	290	260			

تكمن مشكلة هذه الشركة في تحديد عدد المولدات الواجب إنتاجها، والمولدات الواجب شراءها من كل نوع.

يمكن معرفة ذلك بكل سهولة من خلال بناء نموذج برمجة خطية حيث تعبر دالة الهدف عن تدنية تكاليف الحصول على هذه المولدات.

. متغيرات القرار: نعبر عن عدد المولدات المنتجة من النوع j بالمتغير X_j.

. القيود : لدينا نوعين من القيود :

. قيود الكميات المتاحة من الموارد الأولية وهي :

. رأس المال : $3X_1+5X_2+X_3+X_4+2X_5+2X_6+4X_7 \leq 400$ ---- (1)

. التصميم : $3X_1+X_2+3X_3+2X_4+2X_5+3X_6+X_7 \leq 480$ ---- (2)

. التصنيع : $5X_1+2X_2+X_3+3X_4+X_5+0X_6+2X_7 \leq 210$ ---- (3)

. التشطيب : $X_1+X_2+4X_3+0X_4+5X_5+2X_6+X_7 \leq 290$ ---- (4)

. الاختبار : $X_1+0X_2+2X_3+3X_4+2X_5+2X_6+X_7 \leq 260$ ---- (5)

. قيود الكميات المطلوبة من المولدات :

$X_1 \leq 40$ ---- (6) ،$X_2 \leq 34$ ---- (7) ،$X_3 \leq 60$ ---- (8) ،$X_4 \leq 40$ ---- (9) ،

$X_5 \leq 20$ -- -- (10) $X_6 \leq 22$ ---- (11) ،$X_7 \leq 16$ ---- (12).

. دالة الهدف : وهي مجموع تكاليف الإنتاج وتكاليف الشراء وهي :

$$Z = 490000X_1+1050000(40-X_1)+420000X_2+\ldots\ldots+420000X_7+840000(16-X_7)$$

وبعد التعديلوجمع الحدود المتشابهة ووضع الحد الثابت (*264460000*) على حدى على :

$$Min\ Z=-\ 560000X_1 - 805000X_2 - 700000X_3 - 350000X_4 - 910000X_5 - 735000X_6 - 420000X_7$$

نلاحظ هنا أن معامل X_1 (*560000* −) هوالفرق بين تكلفة الإنتاج لمولد من النوع *1* (*490000* دج) وتكلفة الشراء (*1050000 دج*)، هذا يعني أن *560000* دج تمثل المبلغ المقتصد من طرف الشركة في حال فضلت إنتاج هذا النوع من المولدات عوض شرائه.

يمكن إعادة كتابة دالة الهدف السابقة بالشكل التالي :

$$MaxZ=560000X_1+805000X_2+700000X_3+350000X_4+910000X_5+735000X_6+420000X_7$$

فيما سبق كان الهدف تدنية التكاليف الكلية، أما الآن أصبح الهدف تعظيم المبالغ المقتصدة من طرف الشركة.

. النموذج : بعد جمع القيود ودالة الهدف وإضافة المتغيرات الإضافية نحصل على النموذج النهائي التالي :

$$MaxZ=560000X_1+805000X_2+700000X_3+350000X_4+910000X_5+735000X_6+420000X_7$$

$$S.C\begin{cases}
3X_1+5X_2+X_3+X_4+2X_5+2X_6+4X_7 \leq 400 \text{ ---- } (1)\\
3X_1+X_2+3X_3+2X_4+2X_5+3X_6+X_7 \leq 480 \text{ ---- } (2)\\
5X_1+2X_2+X_3+3X_4+X_5+0X_6+2X_7 \leq 210 \text{ ---- } (3)\\
X_1+X_2+4X_3+0X_4+5X_5+2X_6+X_7 \leq 290 \text{ ---- } (4)\\
X_1+0X_2+2X_3+3X_4+2X_5+2X_6+X_7 \leq 260 \text{ ---- } (5)\\
X_1 \leq 40 \text{ ---- } (6)\\
X_2 \leq 34 \text{ ---- } (7)\\
X_3 \leq 60 \text{ ---- } (8)\\
X_4 \leq 40 \text{ ---- } (9)\\
X_5 \leq 20 \text{ ---- } (10)\\
X_6 \leq 22 \text{ ---- } (11)\\
X_7 \leq 16 \text{ ---- } (12)\\
X_j \geq 0\ ;\ j = 1 ،2 ،3 ،4 ،5 ،6 ،7.
\end{cases}$$

الجدول 3 . 9 : الحل الأمثل

	X_1	X_2	X_3	X_4	X_5	X_6	X_7	e_1	e_2	e_3	e_4	e_5	e_6	e_7	e_8	e_9	e_{10}	e_{11}	e_{12}	
	560000	805000	700000	350000	910000	735000	420000	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	
e_1	1.17	0	0	0	0	0	0	1	0	-0.33	-0.17	0	0	-4.17	0	0	-0.83	-1.67	-3.17	36
e_2	-0.92	0	0	0	0	0	0	0	1	-0.67	-0.58	0	0	0.92	0	0	1.58	-1.83	0.92	208
X_4	1.58	0	0	0	0	0	0	0	0	0.33	-0.08	0	0	-0.58	0	0	0.08	0.17	-0.58	22
X_3	0.25	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0.25	0	0	-0.25	0	0	-1.25	-0.50	-0.25	24
e_5	-4.25	0	0	0	0	0	0	0	0	-1	-0.25	1	0	2.25	0	0	0.25	-1.50	1.25	46
e_6	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	40
X_2	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	34
e_8	-0.25	0	0	0	0	0	0	0	0	0	-0.25	0	0	0.25	1	0	1.25	0.50	0.25	36
e_9	-1.58	0	0	0	0	0	0	0	0	-0.33	0.08	0	0	0.58	0	1	-0.08	-0.17	0.58	18
X_5	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	20
X_6	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	22
X_7	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	16
z_j	729166.70									116666.70	145833.30			425833.30			64166.67	443333.3	40833.33	
$c_j - z_j$	-169166.70									-116666.70	-145833.30			-425833.30			-64166.67	-443333.3	-40833.33	92960

وباعتماد طريقة *Simplex* حصلنا على الحل الأمثل التالي :

الجدول 3 ـ 10 :

المولدات	الكمية المطلوبة	الكمية الواجب إنتاجها	الكمية الواجب شراءها
1	40	$X_1 = 0$	40
2	34	$X_2 = 34$	0
3	60	$X_3 = 24$	36
4	40	$X_4 = 22$	18
5	20	$X_5 = 20$	0
6	22	$X_6 = 22$	0
7	16	$X_7 = 16$	0

أما فيما يخص متغيرات العجز والتي تخص الموارد فهي :

الجدول 3 ـ 11 :

متغيرات العجز e_i	الكمية المتبقية
e_1	36
e_2	208
e_3	0
e_4	0
e_5	46

. بقي *36000* دج من رأس المال لم تستخدم.

. بقيت *208* ساعة عمل في ورشة التصميم.

. استهلاك كل زمن التصنيع.

. استهلاك كل زمن التشطيب.

. بقيت *46* ساعة عمل في ورشة الاختبار.

لنفترض الآن لوأنه حدث تغير في الكمية المتاحة لساعات العمل في ورشة التشطيب:

هذا القيد يقابل المتغير الإضافي e_4، وبمأنه متغير عجز فسوف نستخدم معاملات هذا المتغير في جدول الحل الأمثل كما هو،لذلك فمن أجل أن تكون كل قيم المتغيرات القاعدية موجبة يجب أن يكون :

$$e_1 = 36 - 0.17S_4 \Rightarrow 36 - 0.17S_4 \geq 0 \Rightarrow S_4 \leq 211.76$$
$$e_2 = 208 - 0.58S_4 \Rightarrow 208 - 0.58S_4 \geq 0 \Rightarrow S_4 \leq 358.62$$
$$X_4 = 22 - 0.08S_4 \Rightarrow 22 - 0.08S_4 \geq 0 \Rightarrow S_4 \leq 275$$
$$X_3 = 24 + 0.25S_4 \Rightarrow 24 + 0.25S_4 \geq 0 \Rightarrow S_4 \geq -96$$
$$e_5 = 46 - 0.25S_4 \Rightarrow 46 - 0.25S_4 \geq 0 \Rightarrow S_4 \leq 184$$
$$e_6 = 40 + 0S_4 \Rightarrow 40 + 0S_4 \geq 0 \Rightarrow \forall S_4$$

$$X_2 = 34+0S_4 \Rightarrow 34+0S_4 \geq 0 \Rightarrow \forall S_4$$
$$e_8 = 36 - 0.25S_4 \Rightarrow 36 - 0.25S_4 \geq 0 \Rightarrow S_4 \leq 144$$
$$e_9 = 18+0.08S_4 \Rightarrow 18+0.08S_4 \geq 0 \Rightarrow S_4 \geq -225$$
$$X_5 = 20+0S_4 \Rightarrow 20+0S_4 \geq 0 \Rightarrow \forall S_4$$
$$X_6 = 22+0S_4 \Rightarrow 22+0S_4 \geq 0 \Rightarrow \forall S_4$$
$$X_7 = 16+0S_4 \Rightarrow 16+0S_4 \geq 0 \Rightarrow \forall S_4$$

وبالنتيجة نحصل على مجال التغير :

$$Max\ \{-96\ ,\ -225\} \leq S_4 \leq Min\ \{211.76\ ,\ 385.62,275,184,144\ \}$$
$$-96 \leq S_4 \leq 144$$

وبمأن عدد ساعات العمل المتاحة في ورشة التشطيب هو: $b_4 = 290+S_4$ وبعد إضافة 290 إلى طرفي المتراجحة السابقة نجد :

$$(290 - 96) \leq (b_4 = 296+S_4) \leq 290+144$$
$$194 \leq b_4 \leq 434$$

إذن ما دامت ساعات العمل المتاحة في ورشة التشطيب تتراوح بين 194 ساعة و434 ساعة فقاعدة الحل الأمثل الحالية لا تتغير (هذا طبعا بفرض ثبات باقي القيود).

خلاصة :

بصفة عامة عند محاولة تحديد مجال تغير الكمية المتاحة لأحد الموارد يكفي أن نقسم قيم المتغيرات القاعدية للحل الأمثل على المعاملات المقابلة في عمود المتغير الإضافي لهذا القيد (بالطبع بعد تغيير الإشارة إذا كان متغير الفائض) ولتكن α أقل قيمة موجبة وβ أقل قيمة سالبة بالقيمة المطلقة وb الكمية الابتدائية لهذا المورد فإن مجال التغير هو: $]\ b - \alpha\ ;b - \beta\ [$، ونستخدم هذه القاعدة في المثال السابق كما يلي :

الجدول 3 . 12 :

قيم المتغيرات القاعدية A	معاملات المتغير e_4 B	النسبة A/B
36	-0.17	-211.76
208	-0.58	-358.62
22	-0.08	-275
24	0.25	$\alpha \rightarrow 96$
46	-0.25	-184
40	0	∞
34	0	∞
36	-0.25	$\beta \rightarrow -144$
18	0.08	225
20	0	∞
22	0	∞
16	0	∞

ويصبح مجال تغير الطرف الأيمن للقيد4هو: $]\ 290 - 96\ ;290+144\ [$ أي : $]194\ ;434[$.

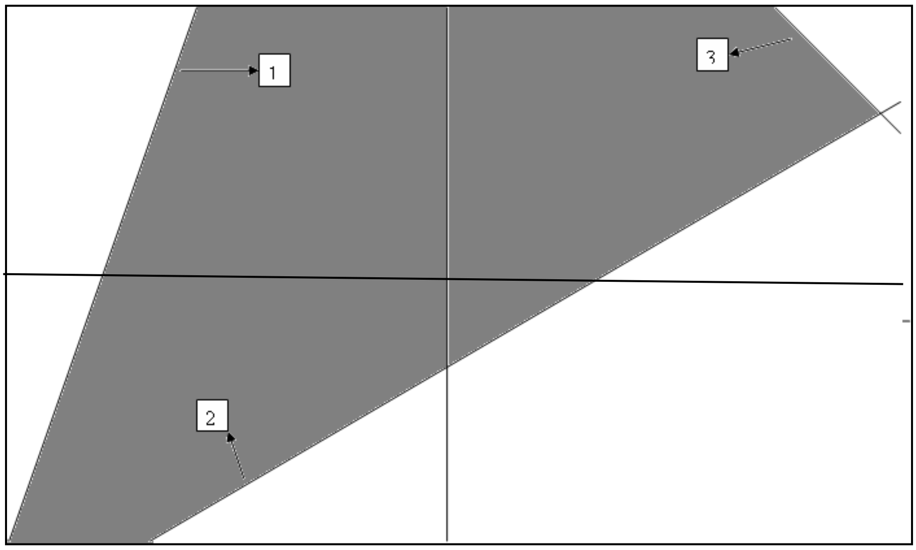
ب) . تغيرات الكميات المتاحة لعدة قيود معا :

فيما سبق افترضنا تغير الكمية المتاحة لقيد واحد فقط، أما الآن نفترض تغير الكميات المتاحة لقيدين معا ولنأخذ المثال السابق (مثال 2 . 1) ونفرض أن الكميات المتاحة للقيد الأولوالثاني تغيرت ($S_1 > 0$، $S_2 > 0$)، بينما القيد الثالث يبقي ثابتا $S_3=0$:

$$\begin{cases} 27500+2.5S_1 - 2.5/3S_2 \geq 0 \text{ --------------- } (1) \\ 6250 - 1.25S_1+6.25/3S_2 \geq 0 \text{ --------------- } (2) \\ 4750 - 0.25S_1 - 0.25S_2 \geq 0 \text{ --------------- } (3) \end{cases}$$

لدينا نظام يتكون من 3 متراجحات ومتغيرين يمكن حله بسهولة باستخدام الطريقة الهندسية، ومن الشكل الموالي المنطقة المضللة هي منطقة الحلول الممكنة وهي تمثل مجال تغير الطرف الأيمن للقيدين معا :

الشكل 3 . 1 :



2 . 2 تغيرات معاملات دالة الهدف :

هناك مشكلة أخرى تعترض سير المؤسسة وهي حساسية الحل الأمثل جراء تغيرات محتملة في معاملات دالة الهدف C_j (الربح الوحدوي أ والتكلفة الوحدوية)، كالتغير في سعر بيع أحد المنتجات، أ والتغير في تكاليف الإنتاج الداخلية ......إلخ.

باستخدام نفس المثال السابق (مثال 1.2 ص 73) ومثال شركة سونلغاز، سوف نحاول الإجابة على السؤال التالي:

إلى أي مدى يمكن أن تتغير معاملات دالة الهدف دون أن تتغير قاعدة الحل الأمثل ؟وللإجابة على ذلك نميز حالتين :

2 . 2 . 1 تغير C_j معامل X_jحيث X_j متغير غير قاعدي في الحل الأمثل:

نفترض أن C_j معامل X_j المتغير الغير قاعدي يتغير بقيمة معينة (بفرض ثبات باقي المعاملات)

أ) **. حالة التعظيم** : معيار أمثلية الحل في حالة التعظيم هوأن تكون كل قيم $(C_j - Z_j)$ سالبة أ ومعدومة، فإذا أخذ C_j قيمة أخرى C'_j، فجدول الحل الأمثل لن يتأثر ماعدا $(C_j - Z_j)$ التي سوف تصبح $(C'_j - Z_j)$، وبالتالي يبقى هذا الجدول يمثل الحل الأمثل مادام $C'_j - Z_j \leq 0$ أي :

$$- \infty \leq C'_j \leq Z_j$$

. لوأخذنا مثال شركة س ونلغاز وفرضنا حدوث تغير في C_1 معامل X_1 (متغير غير قاعدي) إلى أي مدى سيحدث هذا التغير دون أن يؤثر على قاعدة الحل الأمثل لدينا :

$C_1 = 560000$: هوالمبلغ المقتصد من عملية إنتاج مولد من النوع رقم 1 .

$Z_1 = 729166.70$: هي الخسارة في الأرباح لوأنتجنا وحدة واحدة من هذا النوع من المولدات.

إذن الحل الأمثل لن يتأثر مادام : $- \infty \leq C'_j \leq 729166.70$

إذن مادامت قيمة هذا المعامل لا تغطي الخسائر الناجمة عن إدخالوحدة واحدة من X_1، فهذا المتغير يبقى خارج القاعدة وبالتالي لن يتغير الحل الأمثل، وأما إذا تمت تغطية هذه الخسائر نبدأ في إنتاج مولد من النوع 1 وبالتالي حدوث تغير في الحل الأمثل.

ب) **. حالة التدنية** : معيار أمثلية الحل في حالة التدنية هي أن تكون كل قيم $(C_j - Z_j)$ موجبة أ ومعدومة، فإذا كانت C'_j هي القيمة الجديدة لمعامل X_j فإن الحل الأمثل لا يتغير مادام : $C'_j - Z_j \geq 0$ أي :

$$Z_j \leq C'_j \leq + \infty$$

2 . 2 . 2 تغير في C_j حيث X_j متغير قاعدي في الحل الأمثل (غير معدوم) :

في هذه الحالة يمكن استخدام الشكل الثنائي للنموذج بحيث تصبح معاملات دالة الهدف للشكل الأولي هي الطرف الأيمن لقيود الشكل الثنائي، ثم نقوم بدراستها مثلما سبق في الفقرة 2 . 1، ولكن هنا سوف نحاول دراستها مباشرة.

نأخذ المثال السابق (مثال 2 . 1) بفرض دائما عدم وجود قيود الطلب المتوقع ونفترض أن C_2 تتغير بمقدار Δ، في نفس جدول الحل الأمثل نضع $C_2+\Delta$ مكان C_2 لتصبح $(400+\Delta)$:

الجدول 3 . 13 :

		X_1	X_2	e_1	e_2	e_3	
		300	400+Δ	0	0	0	
X_1	300	1	0	2.5	-2.5/3	0	**27500**
X_2	400+Δ	0	1	-1.25	6.25/3	0	**6250**
e_3	0	0	0	-0.25	-0.25	1	**4750**
Z_j		300	400+Δ	250 – 1.25Δ	1750/3+6.25/3Δ	0	
$C_j – Z_j$		0	0	-250+1.25Δ	-1750/3-6.25/3Δ	0	**10750000+Δ**

سوف نستخدم من جديد معيار الأمثلية، وبمأننا في حالة تعظيم فإن هذا الجدول سوف يبقى يمثل قاعدة الحل الأمثل ما دام :

$$\begin{cases} -250+1.25\Delta \leq 0 \quad \Rightarrow \quad \Delta \leq 200 \\ -1750/3-(6.25/3)\Delta \leq 0 \quad \Rightarrow \quad \Delta \geq -280 \end{cases}$$

أي : $-280 \leq \Delta \leq 200$

ومنه : $120 \leq C_j \leq 600$

إذن هذا الجدول يبقى يمثل قاعدة الحل الأمثل ما دام مجال تغير C_j هو: $[120 ، 600]$.

نلاحظ هنا أن قيم المتغيرات القاعدية تبقى ثابتة بينما قيمة دالة الهدف تتغير لتصبح ($Z = 10750000+6250\Delta$) تنخفض بانخفاض Δ وترتفع بارتفاعه.

نحاول الآن تطبيق نفس التحليل على مثال شركة سونلغاز بفرض حدوث تغير في معامل X_4 (مولد النوع 4)، نبحث عن مجال تغير هذا المعامل، وبنفس الطريقة مع المثال السابق وبعد إجراء التعديلات اللازمة على جدول الحل الأمثل نحصل على ما يلي :

$$C_1 - Z_1 = -169166.70 - 1.58\Delta \leq 0 \Rightarrow \Delta \geq -107067.53$$
$$C_{10} - Z_{10} = -116666.70 - 0.33\Delta \leq 0 \Rightarrow \Delta \geq -353535.45$$
$$C_{11} - Z_{11} = -145833.30 + 0.08\Delta \leq 0 \Rightarrow \Delta \leq 1822916.25$$
$$C_{14} - Z_{14} = -425833.30 + 0.58\Delta \leq 0 \Rightarrow \Delta \leq 734195.34$$
$$C_{17} - Z_{17} = -64166.67 - 0.08\Delta \leq 0 \Rightarrow \Delta \geq -802083.37$$
$$C_{18} - Z_{18} = -443333.30 - 0.17\Delta \leq 0 \Rightarrow \Delta \geq -2607842.94$$
$$C_{19} - Z_{19} = -40833.33 + 0.58\Delta \leq 0 \Rightarrow \Delta \leq 70402.29$$

ومحققة في الباقي مهما يكن Δ، إذن يصبح لدينا مجال التغير التالي :

$$Max\{-107067.53 ، -353535.45 ، -802083.37 ، -2607842.94\} \leq \Delta \leq Min\{1822916.25 ، 734195.34 ، 70402.29\}$$

أ ي : $-107067.53 \leq \Delta \leq 70402.29$

ومنه : $242932.47 \leq C_j \leq 420402.29$

هذا التحليل يدعى تحليل حساسية معاملات دالة الهدف.

وبنفس الطريقة نحصل على مجال تغير جميع معاملات دالة الهدف :

الجدول 3 . 14 :

المتغير	قيمته الحالية	الحد الأدنى	C_j	الحد الأعلى
X_1	0	$-\infty$	560000	729166.70
X_2	34	379166.70	805000	$+\infty$
X_3	24	116666.70	700000	751333.30
X_4	22	243157.90	350000	420000
X_5	20	845833.30	910000	$+\infty$
X_6	22	291666.70	735000	$+\infty$
X_7	16	379166.70	420000	$+\infty$

هذا في حالة بقاء ثبات باقي المعاملات، أما في حالة تغير معاملين معا نحدد منطقة التقاطع هندسيا مثلما فعلنا سابقا.

2 . 3 إضافة نشاط جديد (إنتاج منتج جديد) :

في الجزء الأول من هذا الفصلوجدنا أن قيم المتغيرات الثنائية هي تكاليف الفرصة البديلة في استخدام المورد نح ووجهة أخرى عوض استخدامه في الإنتاج (بيعه مثلا)، يمكن استخدام هذه المتغيرات الثنائية لتقييم قرارات تتعلق بإضافة نشاطات جديدة.

نأخذ من جديد مثال شركة سونلغاز، ولنفترض أن المؤسسة بحاجة لمولد من نوع جديد (X_8)، مولد واحد من هذا النوع يحتاج إلى : *14000* دج رأسمال، *4* ساعات تصميم، *2* ساعة في ورشة التصنيع، *3* ساعة في ورشة التشطيب، *1* ساعة اختبار، المبلغ المقتصد عند إنتاج هذا المولد عوض شراءه *525000* دج.

إذن هذا المولد يحتاج إلى موارد منها ما قد استهلك تماما من قبل (مثل : زمن التصنيع، زمن التشطيب)، وبالتالي فأي وحدة من هاته الموارد الواجب تحويلها من العملية الإنتاجية لإنتاج هذا المولد يجب عل الأقل أن لا تخفض من الأرباح الكلية، وبمأن كلوحدة لها تكلفة هامشية، فإن قيمة هذه الأرباح (Z) سوف تنخفض بمقدار هذه التكلفة .

إذن يمكن معرفة تكلفة الفرصة البديلة الكلية المتعلقة بإنتاج هذا المولد وهي مجموع جداء كل الوحدات اللازمة من كل مورد في تكلفته الهامشية، والتي نحصل عليها بكل سهولة من الحل الأمثل للشكل الثنائي (أ ومن جدول الحل الأمثل للشكل الأولي وهي قيمة (c_j - z_j) المقابلة للمتغير e_i الخاص بالمورد رقم i).

الجدول 3 . 15 :

الموارد	التكلفة الهامشية	الوحدات اللازمة	تكلفة الفرصة البديلة الكلية
رأس المال	0	14	0
التصميم	0	4	0
التصنيع	116666.70	2	233333.40
التشطيب	145833.30	3	437499.90
الاختبار	0	1	0
			670833.30 دج

نلاحظ هنا أن تكلفة الفرصة البديلة أكبر من المبلغ المقتصد لهذا المولد (*525000* دج)، وهذا يعني أن هذا النشاط غير مربح بالنسبة للشركة، ومن الأفضل لها شراءه من السوق.

2 . 4 تغيرات المعاملات التكنولوجية (a_{ij}) :

من المهم بالنسبة لمسير المؤسسة أن يعرف مجال تغيرات هذه المعاملات دون أن تؤثر على الحل الأمثل، لأنه قد تصدر تشريعات معينة تجبر المؤسسة على أن تتجاوز نسبة أحد مكونات منتج معين نسبة معينة (مثلا أن تتجاوز نسبة المشمش *30%* في معجون المشمش).

نفرض أنه في أحد مشاكل الإنتاج طرأ تغير على أحد المعاملات التقنية لتنتقل من a_{ij} إلى a'_{ij} (حيث a_{ij} : عدد الوحدات اللازمة من المورد i لإنتاج وحدة واحدة من المنتج j)، والسؤال المطروح هوإلى أي مدى يمكن أن تتغير a_{ij} دون أن تؤثر على قاعدة الحل الأمثل.

للقيام بذلك نفترض أننا أمام نموذج حالة التعظيم كل قيوده من الشكل أقل أو يساوي ($\leq$) يتكون من m قيد و n متغير أساسي وسوف نميز *3* حالات :

1 . X_j متغير قاعدي، وكمية المورد i لم تستنفذ بالكامل.

2 . X_j متغير غير قاعدي.(ونميز حالة المورد i مستنفذ بالكاملوحالة لم يستنفذ بالكامل)

3 . X_j متغير قاعدي، وكمية المورد i استنفذت بالكامل.

2 . 4 . 1 : X_j متغير قاعدي والمورد i استنفذ بالكامل

إن هذا القيد يكتب :

$$a_{i1}X_1 + a_{i2}X_2 + \ldots + a_{ij}X_j + \ldots + a_{in}X_n + e_i = b_i \text{ ----- } (1)$$

حيث X_j هي قيم المتغيرات في الحل الأمثل.

بمأن هذا المورد استنفذ بالكامل هذا يعني أن : $e_i = 0$.

لنفترض الآن أن a_{ij} تغير بمقدار Δa_{ij}، هنا نميز حالتين :

أ) . إذا كان $\Delta a_{ij} \geq 0$ (تغير نح والارتفاع) فإن المعادلة السابقة لا يمكن تحقيقها لأن المورد i استنفذ بالكاملولا يمكن إضافة كمية جديدة.

ب) . إذا كان $\Delta a_{ij} \leq 0$ (تغير نح والانخفاض) هذا يعني أن $e_i \geq 0$، أي أنه سوف يتبقى لدينا فائض من هذا المورد، وبالتالي فإن تكلفته الهامشية (متغير الشكل الثنائي المقابل لهذا المورد) سوف تصبح معدومة بعدما كانت موجبة، وهذا يعني تغير في الحل الأمثل الحالي.

إذن مجال تغير a_{ij} معدوم : $0 \leq \Delta a_{ij} \leq 0$.

إذن في حالة ما إذا كان X_j متغير قاعدي والمورد i مستنفذ بالكامل، فإنه يستحيل تغيير a_{ij} دون تغير الحل الأمثل.

لنعد الآن إلى المثال السابق (مثال: 2 . 1 بدون قيود الطلب المتوقع)، لنأخذ المتغير القاعدي : $X_2=6250$ والمورد رقم 1 (زيت الزيتون) استنفذ بالكامل $e_1 = 0$، يجب أن يكون مجال تغير a_{12} معدوم ($0 \leq \Delta a_{12} \leq 0$)

حتى نحافظ على القاعدة الحالية للحل الأمثل.

2 . 4 . 2 : X_j متغير غير قاعدي

X_j متغير غير قاعدي، هذا يعني أنه ليس من الجيد إنتاج المنتج j، وإذا تم إنتاجه فسيؤدي ذلك إلى تراجع في الأرباح.

هذا المنتج حاليا يستخدم a_{ij} وحدة من المورد i، فلوارتفعت عدد وحدات a_{ij} اللازمة ($\Delta a_{ij} \geq 0$)، فمنطقيا سوف يؤدي إلى تراجع أكبر في الأرباح لوتم إنتاجه لأنه يستهلك وحدات أكبر من المورد i، وينتج عن ذلك أنه لا يتغير الحل الأمثل الحالي ما دام : $a'_{ij} \geq a_{ij}$ أي : $0 \leq \Delta a_{ij} \leq +\infty$.

أما في حالة ما إذا كان $\Delta a_{ij} \leq 0$، فهذا المنتج يستهلك وحدات أقل من المورد i، وبالتالي فإدخاله في الإنتاج قد يحقق ارتفاع في الأرباح، لأنه يستهلك وحدات أقل، ولمعرفة ذلك سوف نحتاج إلى قيد الشكل الثنائي المقابل للمنتج j

$$a_{1j}Y_1 + a_{2j}Y_2 + \ldots + (\Delta a_{ij} + a_{ij})Y_i + \ldots + a_{mj}Y_m \geq C_j \text{ --- } (2)$$

هنا نميز حالتين :

. إذا كان $Y_i = 0$: أي أن قيمة هذا المتغير في الحل الأمثل الثنائي معدومة، ولا ننسى أنه يقابل المورد i في الشكل الأولي وهذا يعني أن هذا المورد لم يستنفذ بالكامل، وبالتالي فإنه لا حدود لمجال التغير :

$$-\infty \leq \Delta a_{ij} \leq +\infty$$

. إذا كان $Y_i \geq 0$: أي أن المورد i استنفذ بالكامل، إذن من المعادلة السابقة نحصل على :

$$\Delta a_{ij} \geq \frac{C_j - \sum_{k=1}^{m} a_{kj} Y_k}{Y_i}$$

ومنه مجال تغير a_{ij} هو:
$$\frac{C_j - \sum_{k=1}^{m} a_{kj} Y_k}{Y_i} \leq \Delta a_{ij} \leq +\infty$$

لنأخذ الآن مثال شركة سونلغاز، X_1 متغير غير قاعدي، ولدينا المتغيرات الثنائية هي :

$Y_3 = 116666.7$.

$Y_4 = 145833.3$.

$Y_7 = 425833.3$.

$Y_{10} = 64166.67$.

$Y_{11} = 443333.3$.

$Y_{12} = 40833.33$.

. وباقي المتغيرات كلها معدومة

نفرض الآن حدوث تغير في المعامل التكنولوجي a_{31}، ندرس مجال تغيره بدراسة القاعدة السابقة :

$$\sum_{k=1}^{m} a_{k1}Y_k = a_{31}Y_3 + a_{41}Y_4 + a_{71}Y_7 + a_{101}Y_{10} + a_{111}Y_{11} + a_{121}Y_{12} + 0\ldots$$
$$= 5(116666.7) + 1(145833.3) + 0(425833.3) + 0(64166.67) + 0(443333.3)$$
$$+ 0(40833.33) = 729166.8$$

ومنه:

$$\frac{C_1 - \sum_{k=1}^{m} a_{k1}Y_k}{Y_3} = \frac{560000 - 729166.8}{116666.7} = -1.45$$

أي أن مجال التغير هو: $-1.45 \le \Delta a_{31} \le +\infty$

2 . 4 . 3 : X_j متغير قاعدي والمورد i لم يستنفذ بالكامل

إذا لم يستنفذ المورد i بالكامل فإن إضافة وحدات جديدة من هذا المورد لإنتاج المنتج j ممكنة بوجود هذا الفائض، وبالتالي فلن يكون هناك تغير في قاعدة الحل الأمثل ما دامت الوحدات المضافة لا تتجاوز الكمية المتبقية، وبالتالي فأي زيادة في a_{ij} يقابلها تناقص في قيمة المتغير الإضافي e_i .

أما في حالة نزع وحدات من a_{ij} لإنتاج المنتج j فسوف ترتفع الكمية المتبقية من هذا المورد، وبمأن تكلفتها الهامشية سوف تبقى معدومة ($Y_i = 0$) فهذا لن يؤثر في الحل الأمثل، وهكذا ومن المعادلة (I) يكون لدينا :

$$-\infty \le \Delta a_{ij} \le \frac{e_i}{X_j}$$

إذن فحسب X_j وe_i، قيم الحل الأمثل، هذه النسبة : $\left(\frac{e_i}{X_j}\right)$ تحدد الحد الأعلى لتغير a_{ij} قبل أن يصبح e_i معدوما وبالتالي أي إضافة أخرى تؤدي إلى تغير الحل الأمثل.

لنعد الآن إلى المثال السابق (مثال 2 . 1)، حيث لدينا ($X_2 = 6250$) متغير قاعدي والمورد رقم 3 ($e_3 = 4750$) لم يستنفذ بالكامل (زيت الجوز)، ولدينا أيضا ($a_{32} = 0.2$) إذن مجال تغير هذا المعامل التكنولوجي:

$$-\infty \le \Delta a_{32} \le \frac{e_3}{X_2} \Rightarrow -\infty \le \Delta a_{32} \le \frac{4750}{6250} \Rightarrow -\infty \le \Delta a_{32} \le 0.76$$

ومنه : $-\infty \le a_{32} \le 0.96$

تمرينات :

تمرين رقم 3 . 1 :

ليكن لدينا النموذج التالي :

$$\begin{aligned}
&Max\ Z = 4X_1 - 3X_2 + 8X_3\\
&S.C\\
&-2X_1 + X_2 + 7X_3 \geq 2\\
&X_1 + 3X_2 - 2X_3 = -1\\
&4X_1 - X_2 - 4X_3 \leq 3\\
&X_1 \geq 0 ،X_2 \leq 0 ، \forall X_3
\end{aligned}$$

أ) . استخرج الشكل الثنائي لهذا النموذج.

ب) . استخرج الشكل الثنائي للشكل الثنائي للسؤال (أ)، ما ذا تلاحظ ؟

تمرين رقم 3 . 2 :

استخرج الشكل الأولي المقابل للنموذج الثنائي التالي :

$$\begin{aligned}
&Max\ W = Y_1 + 3Y_2\\
&S.C\\
&-Y_1 + 2Y_2 + Y_3 \leq 3\\
&-Y_1 + Y_3 = 2\\
&Y_1 \geq 0 ، \forall Y_2 ،Y_3 \leq 0
\end{aligned}$$

تمرين رقم 3 . 3 :

ليكن لدينا النموذج التالي:

$$\begin{aligned}
&Max\ Z = X_1 + X_2\\
&S.C\\
&2X_1 + X_2 \leq 20\\
&X_1 + 4X_2 \leq 11\\
&X_1 ،X_2 \geq 0
\end{aligned}$$

أ) . حل النموذج باستخدام طريقة *Simplex* .

ب) . استخرج وحل الشكل الثنائي لهذا النموذج.

تمرين رقم 3 . 4 :

تقوم مؤسسة بإنتاج *3* أنواع من حديد البناء على شكال أسلاك (*Q10*، *Q6*، *Q20*)، تتم عملية تشكيل الأسلاك في الورشة *A*، وعملية سحبها في الورشة *B*، والجدول الموالي يوضح زمن تشكيلوسحب كل نوع من الحديد في كلورشة يوميا، والربح الصافي الوحدوي لكل طن، والزمن المتاح لكلورشة:

الجدول 3 . 16 :

الورشة	$Q10$ (طن)	$Q6$ (طن)	$Q20$ (طن)	الزمن المتاح (سا/يوميا)
A	4	3	8	3100
B	7	4	9	4400
الربح الصافي الوحدوي (دج/طن)	56000	35000	130000	

أ) . شكل النموذج الذي يعظم أرباح هذه المؤسسة.

ب) . حل هذا النموذج باعتماد طريقة *Simplex* .

ت) . استخرج الشكل الثنائي لهذا النموذج، واشرح متغيرات الشكل الثنائي.

ث) . اشتق قيم الحل الأمثل للشكل الثنائي من قيم الحل الأمثل للشكل الأولي.

ج) . هل من الأفضل الرفع من الزمن المتاح للورشة A أ والورشة B لتحسين الحل الحالي ؟ وما هي تكلفة الساعة الواحدة الذي تقبل المؤسسة بدفعه من أجل الرفع من أرباحها ؟

تمرين رقم 3 . 5 :

استخرج الشكل الثنائي للأمثلة التالية ثم اشتق الحل الأمثل من الحل الأمثل للشكل الأولي :

1 . المثال 1 . 1 .

2 . المثال 1 . 2 .

3 . المثال 1 . 3 .

4 . المثال 1 . 6 .

تمرين رقم 3 . 6 :

1 . أدرس تغيرات معاملات دالة الهدف للتمرين 1 . 4، والمعاملات التكنولوجية : a_{32}،، a_{21}، a_{12} .

2 . أدرس تغيرات الطرف الأيمن لقيود التمرين 1 . 5، والمعاملات التكنولوجية : a_{41}، a_{31}، a_{21}، a_{11} .

3 . أدرس تغيرات الطرف الأيمن لقيود التمرين 1 . 6 .

4 . أدرس تغيرات معاملات دالة الهدف للتمرين 1 . 7 .

تمرين رقم 3 . 7 :

تنتج مؤسسة *3* منتجات A، B، C، حيث يحتاج كل منتج إلى مادة أولية وساعات عمل، الجدول الموالي يوضح كمية المادة الأولية وساعات العمل اللازمة لكل منتج :

الجدول 3 . 17 :

المنتجات	المادة الأولية (كغ)	ساعات العمل (سا)
A	4	2
B	2	$1/2$
C	1	3

الكمية المتاحة من المادة الأولية 6000 كغ، وساعات العمل المتاحة 4000 سا.

الربح الصافي الوحدوي للمنتجات A، B، C هوعلى الترتيب 432 دج، 144 دج، 288 دج.

نظرا لمحدودية طاقة تخزين هذه المؤسسة لا تستطيع أن تنتج أكثر من 2500 وحدة إجمالية من المنتجات الثلاث.

أ) . شكل النموذج الملائم لهذه المؤسسة، ثم حل هذا النموذج .

ب) . حدد التكاليف الهامشية لكل مورد.

ت) . في أي مجال يمكن أن تتغير الكميات المتاحة للموارد دون أن تتغير تكاليفها الهامشية ؟

ث) . ما هوأثر انخفاض 500 ساعة عمل على الأرباح الكلية ؟

ج) . لنفترض أن المؤسسة بصدد إنتاج منتج جديد يحتاج إلى 1.5 كغ من المادة الأولية، و2.5 ساعة عمل، سعر تكلفة وحدة واحدة منه 504 دج، ما هوأدنى سعر بيع يمكن تطبيقه من أجل السماح بإنتاج هذا المنتج ؟

ح) . ما حدود تغير معاملات دالة الهدف من دون أن تتغير قاعدة الحل الأمثل.

خ) . في الحل الأمثل الحالي لا ينصح لهذه المؤسسة بإنتاج المنتج B، ومن أحد أسباب ذلك أن ربحه الصافي الوحدوي منخفض، إذن فما هوأدنى ربح يسمح بإدخاله في الإنتاج ؟ وإذا تم تحقيقه كيف سيتغير الحل الأمثل ؟

د) . لوفرضنا أن المؤسسة لا تستطيع التأثير على الربح الصافي للمنتج B، هل هناك إمكانية أخرى لإدخاله في الإنتاج ؟ إذا كان الجواب نعم، أذكرها وبين كيف يتم ذلك ؟

الحل :

حل التمرين رقم 3 . 1 :

نضع مقابل كل قيد متغير على الشكل التالي :

$$Max\ Z = 4X_1 - 3X_2 + 8X_3$$

$$S.C$$

$$Y_1 \longrightarrow -2X_1 + X_2 + 7X_3 \geq 2$$

$$Y_2 \longrightarrow X_1 + 3X_2 - 2X_3 = -1$$

$$Y_3 \longrightarrow 4X_1 - X_2 - 4X_3 \leq 3$$

$$X_1 \geq 0 \text{ ،} X_2 \leq 0 \text{ ، } \forall X_3$$

ونحصل على الشكل الثنائي بكل سهولة بالاعتماد على الجدول 3 . 2 :

$$\begin{aligned}
&Min\ W = 2Y_1 - Y_2 + 3Y_3\\
&S.C\\
&-2Y_1 + Y_2 + 4Y_3 \geq 4\\
&Y_1 + 3Y_2 - Y_3 \leq -3\\
&7Y_1 - 2Y_2 - 4Y_3 = 8\\
&Y_1 \leq 0 \text{ ، } \forall Y_2 \text{ ،} Y_3 \geq 0
\end{aligned}$$

حل التمرين رقم 3 . 2 :

يمكن إعادة كتابة الشكل الثنائي كما يلي :

$$\begin{aligned}
&Max\ W = Y_1 + 3Y_2 + 0Y_3\\
&S.C\\
&-Y_1 + 2Y_2 + Y_3 \leq 3\\
&-Y_1 + 0Y_2 + Y_3 = 2\\
&Y_1 \geq 0 \text{ ، } \forall Y_2 \text{ ،} Y_3 \leq 0
\end{aligned}$$

نحصل على الشكل المقابل له :

$$\begin{aligned}
&Min\ Z = 3X_1 + 2X_2\\
&S.C\\
&-X_1 - X_2 \geq 1\\
&2X_1 = 3\\
&X_1 + X_2 \leq 0\\
&X_1 \geq 0 \text{ ، } \forall X_2
\end{aligned}$$

حل التمرين رقم 3 . 3 : أ) . حل النموذج :

الجدول الأول :

		X_1	X_2	e_1	e_2	
		1	1	0	0	
e_1	0	$\boxed{2}$	1	1	0	20 ←
e_2	0	1	4	0	1	11
Z_j		0	0	0	0	
$C_j - Z_j$		1 ↑	1	0	0	**0**

الجدول الثاني :

		X_1	X_2	e_1	e_2	
		1	1	0	0	
X_1	1	1	1/2	1/2	0	10
e_2	0	0	$\boxed{7/2}$	-1/2	1	1 ←
Z_j		1	1/2	1/2	0	
$C_j - Z_j$		0 ↑	1/2	-1/2	0	**10**

الجدول الثالث :الحل الأمثل

		X_1	X_2	e_1	e_2	
		1	1	0	0	
X_1	1	1	0	4/7	-1/7	69/7
X_2	1	0	1	-1/7	2/7	2/7
Z_j		1	1	3/7	1/7	
$C_j - Z_j$		0	0	-3/7	-1/7	**71/7**

ب) . استخراج وحل الشكل الثنائي، وذلك بعد إضافة المتغيرات الإضافية والاصطناعية :

$Min\ W = 20Y_1+11Y_2$

$S.C$

$2Y_1+Y_2 \geq 1 \quad \Rightarrow \quad 2Y_1+Y_2 - e_1+a_1 = 1$

$Y_1+4Y_2 \geq 1 \quad \Rightarrow \quad Y_1+4Y_2 - e_2+a_2 = 1$

$Y_1 \text{ ،} Y_2 \geq 0$

الجدول الأول :

		Y_1	Y_2	e'_1	e'_2	a_1	a_2	
		20	11	0	0	M	M	
a_1	M	2	1	-1	0	1	0	1
a_2	M	1	$\boxed{4}$	0	-1	0	1	1 ←
Z_j		3M	5M	-M	-M	M	M	
$C_j - Z_j$		20 -3M	11 -5M	M	M	0	0	**0**

الجدول الثاني :

		Y_1	Y_2	e'_1	e'_2	a_1	a_2	
		20	11	0	0	M	M	
a_1	M	$\boxed{7/4}$	0	-1	1/4	1	0	3/4 ←
Y_2	11	1/4	1	0	-1/4	0	1	1/4
Z_j		11/4 +7/4M	11	-M	-11/4 +1/4M	M	M	
$C_j - Z_j$		69/4 -7/4M	0	M	11/4 -1/4M	0	0	11/4

الجدول الثالث : الحل الأمثل

		Y_1	Y_2	e'_1	e'_2	
		20	11	0	0	
Y_1	20	1	0	-4/7	1/7	3/7
Y_2	11	0	1	1/7	-2/7	1/7 ←
Z_j		20	11	-69/7	-2/7	
$C_j - Z_j$		0	0	69/7	2/7	**71/7**

نتائـج :

. كلى الشكلين لهما نفس قيمة دالة الهدف.

. قيم $(c_j - z_j)$ المقابلة لـ e'_1 وe'_2 للشكل الثنائي تساوي على الترتيب بالضبط قيم X_1 وX_2 المقابلة لها في الشكل الأولي.

. قيم $(c_j - z_j)$ المقابلة لـ e_1 و e_2 للشكل الأولي تساوي على الترتيب قيم Y_1 وY_2 المقابلة لها في الشكل الأولي ولكن تعاكسها في الإشارة.

حل التمرين رقم 3 . 4:

أ) . متغيرات هذه المسألة هي :

. X_1 : كمية الحديد $Q10$ المنتجة يوميا.

. X_2 : كمية الحديد $Q6$ المنتجة يوميا.

. X_3 : كمية الحديد $Q20$ المنتجة يوميا.

نموذج هذه المسألة بعد إضافة المتغيرات الإضافية (متغيرات العجز) :

$$Max\ Z = 56000X_1+35000X_2+130000X_3$$
$$S.C$$
$$4X_1+3X_2+8X_3+e_1 = 3100$$
$$7X_1+4X_2+9X_3+e_2 = 4400$$
$$X_1 ،X_2 ،X_3 \geq 0$$

ب) . حل النموذج :

الجدول الأول :

		X_1	X_2	X_3	e_1	e_2	
		56000	35000	130000	0	0	
e_1	0	4	3	$\boxed{8}$	1	0	3100
e_2	0	7	4	9	0	1	4400
Z_j		0	0	0	0	0	
$C_j - Z_j$		56000	35000	130000	0	0	**0**

الجدول الثاني : الحل الأمثل

		X_1	X_2	X_3	e_1	e_2	
		56000	35000	130000	0	0	
X_3	130000	1/2	3/8	1	1/8	0	775/2
e_2	0	5/6	5/8	0	-9/8	1	1825/2
Z_j		65000	48750	130000	16250	0	
$C_j - Z_j$		-9000	-13750	0	-16250	0	**50375000**

ت) . الشكل الثنائي لهذا النموذج :

$$\begin{aligned}
&Min\ W = 3100Y_1+4400Y_2\\
&S.C\\
&4Y_1+7Y_2 \geq 56000\\
&3Y_1+4Y_2 \geq 35000\\
&8Y_1+9Y_2 \geq 130000\\
&Y_1 ، Y_2 \geq 0
\end{aligned}$$

المتغيرات الثنائية يمكن تفسيرها على أنها التكلفة الهامشية الوحدوية لكل مورد، بعبارة أخرى لوتم تحويلوحدة واحدة من مورد معين من العملية الإنتاجية نح ووجهة أخرى (البيع مثلا) فسيؤدي ذلك إلى تراجع في الأرباح الكلية تساوي قيمة المتغير الثنائي المقابل لهذا المورد، لذلك فهي تسمى أيضا تكلفة الفرصة البديلة عن الإنتاج.

في هذه المسألة لدينا موردين، ساعات العمل في الورشة A، وساعات العمل في الورشة B أي أن :

Y_1 : التكلفة الهامشية لساعة عملواحدة في الورشة A.

Y_2 : " " B.

ث) . يمكن اشتقاق الحل الأمثل للشكل الثنائي مباشرة من الشكل الأولي بالاعتماد على الجدول 3 . 5 .

القيد (1) في الشكل الأولي يقابل المتغير الثنائي Y_1، وبمأن هذا القيد من الشكل أقل أ ويساوي ($\leq$) فإن : $Y_1 = -(C_{n+1} - Z_{n+1})$ إذن من جدول الحل الأمثل نحصل على: $Y_1 = 16250$، وبنفس الطريقة نحصل على:

$Y_2 = 0$، بطبيعة الحال الشكلين لهما نفس قيمة دالة الهدف :

$$Z = W = 50375000$$

إذن التكلفة الهامشية لساعة عملواحدة في الورشة A هي 16250 دج، وهذا يعني أن ساعات العمل في هذه الورشة مستنفذة بالكامل ($e_1 = 0$) والمؤسسة مستعدة لدفع ثمن يصل إلى 16250 دج للحصول على وحدة إضافية.

أما التكلفة الهامشية لساعة عملواحدة في الورشة B معدومة، وهذا يعني أن ساعات العمل في هذه الورشة لم تستنفذ بالكامل ($e_2 = 1825/2$)، والمؤسسة حتى ولوحصلت على وحدة إضافية مجانية فلن يضيف ذلك شيئا لأرباحها، ويمكن اشتقاق جدول الحل الأمثل للشكل الثنائي كاملا كما يلي :

جدول الحل الأمثل : الشكل الثنائي

		Y_1	Y_2	e'_1	e'_2	e'_3	
		3100	4400	0	0	0	
Y_1	3100	1	9/8	0	0	-1/8	16250
e'_1	0	0	-5/2	1	0	-1/2	9000
e'_2	0	0	-5/8	0	1	-3/8	13750
Z_j		3100	6975/2	0	0	-775/2	
$C_j - Z_j$		0	1825/2	0	0	775/2	**50375000**

ج) . ليس من الحكمة الرفع من زمن الورشة B لأنه أصلا يوجد فائض، لذلك يجب الرفع من زمن الورشة A إن أمكن ذلك لأن أي وحدة إضافية سوف تؤدي إلى زيادة في الأرباح بقيمة 16250 دج.

لوفرضنا زيادة الزمن المتاح في الورشة B بساعة واحدة فإن :

$$\Delta W = \Delta Z = (3101 - 3100) Y_2 = 0 .$$

بينما لوفرضنا زيادة الزمن المتاح في الورشة A فإن :

$$\Delta W = \Delta Z = (4401 - 4400) Y_1 = 16250 .$$

إذن تقبل المؤسسة بدفع مبلغ يصل إلى غاية 16250 دج مقابل الحصول على ساعة عملواحدة في الورشة A.

حل التمرين رقم 3 . 5:

1 . حل المثال 1 . 1 : نموذج الشكل الثنائي :

$$\begin{aligned}
&Min\ W = 7000Y_1+5000Y_2+4000Y_3\\
&S.C\\
&8Y_1+4Y_2+Y_3 \geq 70\\
&4Y_1+Y_2+Y_3 \geq 22\\
&2Y_1+6Y_2+Y_3 \geq 50\\
&Y_1 ، Y_2 ، Y_3 \geq 0
\end{aligned}$$

جدول الحل الأمثل : الشكل الأولي

		X_1	X_2	X_3	e_1	e_2	e_3	
		70	22	50	0	0	0	
X_1	70	1	0.55	0	0.15	-0.05	0	800
X_3	50	0	-0.2	1	-0.1	0.2	0	300
e_3	0	0	0.65	0	-0.05	-0.15	1	2900
z_j		70	28.5	50	5.5	6.5	0	
$c_j - z_j$		0	-6.5	0	-5.5	-6.5	0	**71000**

جدول الحل الأمثل : الشكل الثنائي

		Y_1	Y_2	Y_3	e'_1	e'_2	e'_3	
		7000	5000	4000	0	0	0	
Y_1	7000	1	0	0.05	-0.15	0	0.1	5.5
Y_2	5000	0	1	0.15	0.05	0	-0.2	6.5
e'_2	0	0	0	-0.65	-0.55	1	0.2	6.5
z_j		7000	5000	50	5.5	6.5	0	
$c_j - z_j$		0	0	2900	800	0	300	**71000**

2 . حل المثال 1 . 2 : نموذج الشكل الثنائي : لا ننسى أن القيد (2) من الشكل أكبر أ ويساوي ($\geq$) عند اشتقاق الحل الأمثل الثنائي من الحل الأمثل الأولي وذلك حسب الجدول3 .5، كما يمكن أيضا ضرب هذا القيد بـ(-1) ليتحول من الشكل أقل أ ويساوي ثم يعامل كباقي القيود :

$$MinW=510000Y_1+15Y_2+380000Y_3+35Y_4+25Y_5+35Y_6+30Y_7+25Y_8$$

$S.C$

$$3500Y_1+Y_2+3500Y_3+Y_4 \geq 1200$$
$$3000Y_1+Y_2+3000Y_3+Y_5 \geq 900$$
$$2500Y_1+Y_2+2500Y_3+Y_6 \geq 800$$
$$2000Y_1+Y_7 \geq 250$$
$$1800Y_1+Y_8 \geq 450$$
$$Y_1 ،Y_2 ،Y_4 ،Y_5 ،Y_6 ،Y_7 ،Y_8 \geq 0 \; ; \; Y_3 \leq 0$$

جدول الحل الأمثل : الشكل الأولي

		X_1	X_2	X_3	X_4	X_5	e_1	e_2	e_3	e_4	e_5	e_6	e_7	e_8	
		1200	900	800	250	450	0	0	0	0	0	0	0	0	
e_1	0	0	0	0	0	0	1	0	0	-3500	-3000	-2500	-2000	-1800	120000
X_1	1200	1	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	35
e_3	0	0	0	0	0	0	0	0	1	-3500	-3000	-2500	0	0	95000
e_2	0	0	0	0	0	0	0	1	0	1	1	1	0	0	80
X_2	900	0	1	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	25
X_3	800	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	35
X_4	250	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	1	0	30
X_5	450	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	1	25
Z_j		1200	900	800	250	450	0	0	0	1200	900	800	250	450	
$C_j - Z_j$		0	0	0	0	0	0	0	0	-1200	-900	-800	-250	-450	111250

جدول الحل الأمثل : الشكل الثنائي

		Y_1	Y_2	Y_3	Y_4	Y_5	Y_6	Y_7	Y_8	e'_1	e'_2	e'_3	e'_4	e'_5	
		510000	15	380000	35	25	35	30	25	0	0	0	0	0	
Y_4	35	3500	1	3500	1	0	0	0	0	-1	0	0	0	0	1200
Y_5	25	3000	1	3000	0	1	0	0	0	0	-1	0	0	0	900
Y_6	35	2000	1	2500	0	0	1	0	0	0	0	-1	0	0	800
Y_7	30	2000	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	-1	0	250
Y_8	25	1800	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	-1	450
Z_j		390000	95	285000	35	25	35	30	25	-35	-25	-35	-30	-25	
$C_j - Z_j$		120000	-80	95000	0	0	0	0	0	35	25	35	30	25	111250

3 . حل المثال 1 . 3 : نموذج الشكل الثنائي :

$$Max\ W = 60Y_1+3500Y_2+5000Y_3+2Y_4+75Y_5$$

$S.C$

$$34.2Y_1+690Y_2+1650Y_3+0.4Y_4+14.5Y_5 \geq 72$$
$$6.1Y_1+77Y_2+550Y_3+0.1Y_4 \geq 8$$
$$5.4Y_1+68Y_2+1470Y_3+0.2Y_4+25Y_5 \geq 45$$
$$100Y_1+1654Y_2+0.4Y_4 \geq 400$$
$$Y_1 ،Y_2 ،Y_3 ،Y_4 ،Y_5 \geq 0$$

جدول الحل الأمثل : الشكل الأولي

		X_1	X_2	X_3	X_4	e_1	e_2	e_3	e_4	e_5	
		72	8	45	400	0	0	0	0	0	
X_1	72	1	0.118	0	2.542	0	-0.002	0	0	0.004	5.06
e_4	0	0	-0.066	0	0.322	0	0.0004	0	1	-0.007	0.039
e_1	0	0	-2.423	0	-21.012	1	-0.048	0	0	-0.086	113.603
e_3	0	0	-455.62	0	2027.33	0	-1.226	1	0	-55.466	3449.951
X_3	45	0	-0.069	1	-1.475	0	0.001	0	0	-0.042	0.061
Z_j		72	5.433	45	116.697	0	-0.071	0	0	-1.608	
$C_j - Z_j$		0	2.567	0	283.303	0	0.071	0	0	1.608	367.548

جدول الحل الأمثل : الشكل الثنائي

		Y_1	Y_2	Y_3	Y_4	Y_5	e'_1	e'_2	e'_3	e'_4	
		60	3500	5000	2	75	0	0	0	0	
Y_2	3500	0.0478	1	1.226	0.0004	0	0.0015	0	-0.0009	0	1.608
Y_5	75	0.0861	0	55.466	0.0068	1	-0.0042	0	0.0424	0	0.071
e'_2	0	2.423	0	455.62	0.067	0	-0.1184	1	0.0686	0	2.567
e'_4	0	21.0119	0	-2027.33	-0.322	0	-2.5424	0	1.4746	1	283.303
Z_j		173.603	3500	8449.951	2.039	75	5.06	0	0.061	0	
$C_j - Z_j$		-113.603	0	-3449.951	-0.039	0	-5.06	0	-0.061	0	367.548

4 . حل المثال 1 . 6 : نموذج الشكل الثنائي :

$$Min\ W = 4000Y_1+2750Y_2+4230Y_3+0Y_4+0Y_5$$

$S.C$

$$Y_1 \geq 4.55$$
$$Y_1 - 15Y_4 \geq 4.91$$
$$Y_1 - 7Y_5 \geq 6.04$$
$$Y_2 \geq 4.55$$
$$Y_2 - 2Y_4 \geq 4.91$$
$$Y_2+6Y_5 \geq 6.04$$
$$Y_3 \geq 4.55$$
$$Y_3+3Y_4 \geq 4.91$$
$$Y_3+11Y_5 \geq 6.04$$
$$Y_1 ،Y_2 ،Y_3 ،Y_4 ،Y_5 \geq 0$$

جدول الحل الأمثل : الشكل الأولي

		X_{11}	X_{12}	X_{13}	X_{21}	X_{22}	X_{23}	X_{31}	X_{32}	X_{33}	e_1	e_2	e_3	e_4	e_5	
		4.55	4.91	6.04	4.55	4.91	6.04	4.55	4.91	6.04	0	0	0	0	0	
X_{13}	6.04	1	1	1	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	4000
X_{23}	6.04	0	0	0	1	1	1	0	0	0	0	1	0	0	0	2750
X_{31}	4.55	-0.64	4.36	0	0.55	1.21	0	1	0	0	-0.64	0.55	1	-0.33	-0.09	3184.55
X_{32}	4.91	0	-5	0	0	-0.67	0	0	1	0	0	0	0	0.33	0	0
X_{33}	6.04	0.64	0.64	0	-0.55	-0.55	0	0	0	1	0.64	-0.55	0	0	0.09	1045.45
Z_j		6.99	5.19	6.04	5.23	4.99	6.04	4.55	4.91	6.04	6.99	5.23	4.55	0.12	0.14	
$C_j - Z_j$		-2.44	-0.28	0	-0.68	-0.08	0	0	0	0	-6.99	-5.23	-4.55	-0.12	-0.14	**61574.23**

جدول الحل الأمثل : الشكل الثنائي

		Y_1	Y_2	Y_3	Y_4	Y_5	e'_1	e'_2	e'_3	e'_4	e'_5	e'_6	e'_7	e'_8	e'_9	
		4000	2750	4230	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	
Y_1	4000	1	0	0	0	0	0	0	-1	0	0	0	0.636	0	-0.636	6.99
Y_2	2750	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	-1	-0.545	0	0.545	5.23
Y_3	4230	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	-1	0	0	4.55
Y_4	0	0	0	0	1	0	0	0.067	-0.067	0	0	0	0.042	0	-0.042	0.12
Y_5	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0.091	0	-0.091	0.14
e'_1	0	0	0	0	0	0	1	0	-1	0	0	0	0.636	0	-0.636	2.44
e'_4	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	-1	-0.545	0	0.545	0.68
e'_5	0	0	0	0	0	0	0	-0.133	0.133	0	1	-1	-0.63	0	0.63	0.08
e'_8	0	0	0	0	0	0	0	0.2	-0.2	0	0	0	-0.873	1	-0.127	0
Z_j		4000	2750	4230	0	0	0	0	-4000	0	0	-2750	-3184.55	0	-1045.45	
$C_j - Z_j$		0	0	0	0	0	0	0	4000	0	0	2750	3184.55	0	1045.45	**61574.23**

حل التمرين رقم 3 . 6 :

1 . دراسة التمرين 1 . 4 :

أ) . دراسة تغيرا معاملات دالة الهدف :

أ . 1) مجال تغير C_1 معامل X_{11} :

. $X_{11}=0$:متغير غير قاعدي، و $C_1 = 1200$، إذن(حسب الفقرة 2 .1.2) فلو أنتجنا وحدة واحدة من هذا المنتج سيحدث تراجع في الأرباح قدره 1400 دج، وبالتالي فمجال تغير $C_1 = 1200$:

$$- \infty \leq C_1 \leq 1400$$

وبنفس الطريقة نحصل على مجال تغير معاملات باقي المتغيرات غير القاعدية :

$$X_{11} = 0 \quad \Rightarrow \quad - \infty \leq C_3 \leq 1166.67$$
$$X_{21} = 0 \quad \Rightarrow \quad - \infty \leq C_3 \leq 1166.67$$
$$X_{22} = 0 \quad \Rightarrow \quad - \infty \leq C_4 \leq 1200$$
$$X_{32} = 0 \quad \Rightarrow \quad - \infty \leq C_6 \leq 960$$

أ .2) $X_{12}=20$:متغير قاعدي، و $C_2 = 1200$، إذن (حسب الفقرة2.2.2):

نضع $C_2+\Delta$ في جدول الحل الأمثل ونجري التعديلات الضرورية كما يلي :

جدول الحل الأمثل :

		X_{11}	X_{12}	X_{21}	X_{22}	X_{31}	X_{32}	e_1	e_2	e_3	
		1200	$1200+\Delta$	800	800	700	700	0	0	0	
e_1	0	-8	0	-7.33	-1	0	3.4	1	-1.67	-0.4	20
X_{31}	700	2	0	1.67	0	1	0	0	0.33	0	28
X_{12}	$1200+\Delta$	0	1	0	1	0	0.8	0	0	0.2	20
Z_j		1400	$1200 +\Delta$	1166.67	$1200 +\Delta$	700	$960 +0.8\Delta$	0	0	$240 +0.2\Delta$	
$C_j - Z_j$		-200	0	-366.67	$-400 -\Delta$	0	$-260 -0.8\Delta$	0	-233.33	$-240 -0.2\Delta$	**$43600 +20\Delta$**

إذن حتى لا يحدث تغير في قاعدة الحل الأمثل الحالية يجب أن تكون كل قيم (C_j - Z_j) المتأثرة بالتغير سالبة وهنا لدينا :

$$C_4 - Z_4 = -400 -\Delta \ \leq 0 \quad \Rightarrow \quad \Delta \geq -400$$

$C_6 - Z_6 = -260 - 0.8\Delta \leq 0 \;\Rightarrow\; \Delta \geq -325 \;\Rightarrow\; \Delta \geq -325 \;\Rightarrow\; C_2 + \Delta \geq 875$
$C_9 - Z_9 = -240 - 0.2\Delta \leq 0 \;\Rightarrow\; \Delta \geq -1200$

ومنه مجال تغير C_2 : $875 \leq C_2 \leq +\infty$

وبنفس الطريقة مع C_5 معامل المتغير القاعدي الثاني X_{31} نحصل على مجال تغيره : $600 \leq C_5 \leq +\infty$

ب) . دراسة تغيرات المعاملات التكنولوجي a_{32}، a_{21}، a_{12} :

ب . 1) المعامل $a_{12} = 2$ هومعامل مرتبط بالمتغير القاعدي $X_{12} = 20$ والمورد 1،وهومورد لم يستنفذ بالكامل($e_1 = 20$)إذن(حسب الفقرة3.4.2):

بعدد الوحدات a_{12} الحالية يتم إنتاج X_{12} فما بالنا لوتم تخفيض هذه الوحدات فحتما سوف يستمر في إنتاجهوهذا يعني أن مجال تغير هذا المعامل في حالة الانخفاض : $-\infty \leq a_{12} \leq 0$

بينما في حالة ارتفاع a_{12} وما دام هذا الارتفاع يتم تغطيته من الفائض المتبقي من المورد 1 فلن تتغير قاعدة الحل الأمثل، ولكن لوتم تجاوز هذا الفائض سوف نضطر للانتقال إلى حل قاعدي آخر وبالتالي تغير في الحل الأمثل الحالي ومنه فإن مجال تغير هذا المعامل :

$$-\infty \leq \Delta a_{12} \leq \frac{e_1}{X_{12}} \Rightarrow -\infty \leq \Delta a_{12} \leq \frac{20}{20} \Rightarrow -\infty \leq \Delta a_{12} \leq 1$$

ومنه : $-\infty \leq a_{12} \leq 3$

ب . 2)المعامل $a_{21} = 6$ مرتبط بالمتغير غير القاعدي $X_{11}=0$ والمورد 2 مورد مستنفذ بالكامل ($e_2 = 0$) إذن (حسب الفقرة 2 . 4 . 2) فإن :

هذا المنتج يستهلك a_{21} وحدة من المورد 2 وحاليا لا ينصح بإنتاجه، فما بالنا لوارتفع a_{21} فحتما لن يتم إنتاجهوبالتالي فمجال تغيره نح والارتفاع غير محدود : $0 \leq a_{12} \leq +\infty$

أما في حالة الانخفاض فقد يصبح المنتج مربح ويمكن إدخاله في الإنتاج، ولمعرفة متى يحدث ذلك سوف نستعين بالمتغيرات الثنائية (من خلال التمرينات السابقة تعلمنا كيفية اشتقاق المتغيرات الثنائية بسهولة من الشكل الأولي) لدينا: $Y_3 = 240$ ،$Y_2 = 233.33$ ،$Y_1 = 0$

إذن وبتطبيق القاعدة على هذا المعامل : $$\frac{C_1 - \sum_{k=1}^{3} a_{k1} Y_k}{Y_2} \leq \Delta a_{21} \leq +\infty$$

إذن: $$\sum_{k=1}^{3} a_{k1} Y_k = a_{11}Y_1 + a_{21}Y_2 + a_{31}Y_3 = 2(0) + 6(233.33) + 0(240) = 1400$$

$$\frac{C_1 - \sum_{k=1}^{3} a_{k1} Y_k}{Y_2} = \frac{1200 - 1400}{233.33} = -0.875 \Rightarrow -0.875 \leq \Delta a_{21} \leq +\infty$$

ومنه : $5.143 \leq a_{21} \leq +\infty$

ب . 3) المعامل $a_{32} = 5$ مرتبط بالمتغير القاعدي $X_{12} = 20$ والمورد 3 مورد مستنفذ بالكامل($e_3=0$) إذن (حسب الفقرة1.4.2) فإن:تغير a_{32} نحو الارتفاع مستحيل لعدم وجود فائض من هذا المورد،أما تغيره نحو الانخفاض سيخلق فائض في كمية المورد 3 وهذا يعني أن$e_3 \geq 0$ وهذا يعني تغير قاعدة الحل الأمثل الحالية ومنه فإن مجال تغير هذا المعامل معدوم: $0 \leq \Delta a_{32} \leq 0$

إذن حتى لا يتغير الحل الأمثل يجب بقاء هذا المعامل ثابت.

2 . دراسة التمرين 1 . 5 :

أ) . دراسة تغيرات الطرف الأيمن للقيود :

نقوم بإضافة المتغيرات S_1 ،S_2 ،S_3 ،S_4 التي تعبر عن مقدار التغير في الطرف الأيمن للقيود الأربعة :

$$
\begin{aligned}
&Max\ Z = 35\ (X_1+X_2+X_3+X_4+X_5+X_6)\\
&S.C\ /4X_1+6X_2+2X_4+e_1 = 750+S_1\\
&\quad 12X_1+12X_5+e_2 = 520+S_2\\
&\quad 12X_2+17X_3+e_3 = 480+S_3\\
&\quad 8X_4+12X_6+e_4 = 400+S_4\\
&\quad X_j \geq 0\ ;\ j = 1 ،2 ،3 ،4 ،5 ،6.
\end{aligned}
$$

حسب الفقرة2 .1فإن المصفوفة$(e_1 e_2 e_3\ e_4)$ في الجدول الأول تساوي المصفوفة$(S_1\ S_2\ S_3\ S_4)$(جداول$Simplex$) وبمأن هاتين المصفوفتين تخضعان لنفس العمليات الحسابية أثناء عملية البحث عن الحل الأمثل فحتما سوف تكونان أيضا متساويتين في جدول الحل الأمثل :

الجدول الأول :

		X_1	X_2	X_3	X_4	X_5	X_6	e_1	e_2	e_3	e_4		S_1	S_2	S_3	S_4
		35	35	35	35	35	35	0	0	0	0		0	0	0	0
e_1	0	4	6	0	2	0	0	1	0	0	0	750	1	0	0	0
e_2	0	$\boxed{12}$	0	0	0	12	0	0	1	0	0	520	0	1	0	0
e_3	0	0	12	17	0	0	0	0	0	1	0	480	0	0	1	0
e_4	0	0	0	0	8	0	12	0	0	0	1	400	0	0	0	1
Z_j		0	0	0	0	0	0	0	0	0	0		0	0	0	0
$C_j - Z_j$		35	35	35	35	35	35	0	0	0	0	**0**				

جدول الحل الأمثل :

		X_1	X_2	X_3	X_4	X_5	X_6	e_1	e_2	e_3	e_4		S_1	S_2	S_3	S_4
		35	35	35	35	35	35	0	0	0	0		0	0	0	0
e_1	0	0	0	-8.5	0	-4	-3	1	-0.33	-0.5	-0.25	236.67	1	-0.33	-0.5	-0.25
X_1	35	1	0	0	0	$\boxed{1}$	0	0	0.083	0	0	43.33	0	0.083	0	0
X_2	35	0	1	1.42	0	0	0	0	0	0.083	0	40	0	0	0.083	0
X_4	35	0	0	0	1	0	1.5	0	0	0	0.125	50	0	0	0	0.125
Z_j		35	35	49.58	35	35	52.5	0	2.92	2.92	4.38		0	2.92	2.92	4.38
$C_j - Z_j$		0	0	-14.58	0	0	-17.5	0	-2.92	-2.92	-4.38	**4666.67**				

نحصل من الجدول الأخير على قيم المتغيرات القاعدية التالية :

$$
\begin{aligned}
e_1 &= 236.67+S_1 - 0.33S_2 - 0.5S_3 - 0.25S_4\\
X_1 &= 43.33+0S_1+0.083S_2+0S_3+0S_4\\
X_2 &= 40+0S_1+0S_2+0.083S_3+0S_4\\
X_4 &= 50+0S_1+0S_2+0S_3+0.125S_4
\end{aligned}
$$

إذن لا يتغير الحل الأمثل الحالي ما دامت المتغيرات القاعدية أكبر أويساوي0 : e_1، X_1، X_2، $X_4 \geq 0$

أ . 1) تغير الكمية المتاحة للمورد 1 (البرتقال : $b_1 = 750$) :

$$S_2 = S_3 = S_4 = 0$$

إذن تصبح جملة المعادلة السابقة كما يلي :

$$\begin{aligned}
&236.67+S_1 \geq 0 &&\Rightarrow\quad S_1 \geq -236.67\\
&43.33+0S_1 \geq 0 &&\Rightarrow\quad \forall S_1\\
&40+0S_1 \geq 0 &&\Rightarrow\quad \forall S_1\\
&50+0S_1 \geq 0 &&\Rightarrow\quad \forall S_1
\end{aligned}$$

ومنه مجال تغير الكمية المتاحة b_1 هو: $513.33 \leq b_1 \leq +\infty$

أ . 2) تغير الكمية المتاحة للمورد 2 (الخوخ : $b_2 = 520$) :

$$S_1 = S_3 = S_4 = 0$$

تصبح الجملة السابقة :

$$\begin{aligned}
&236.67-0.33S_2 \geq 0 &&\Rightarrow\quad S_2 \leq 710\\
&43.33+0.083S_2 \geq 0 &&\Rightarrow\quad S_2 \geq -520 \quad\Rightarrow\quad -520 \leq S_2 \leq 710\\
&40+0S_2 \geq 0 &&\Rightarrow\quad \forall S_2\\
&50+0S_2 \geq 0 &&\Rightarrow\quad \forall S_2
\end{aligned}$$

ومنه مجال تغير الكمية المتاحة b_2 هو: $0 \leq b_2 \leq 1230$

أ . 3) تغير الكمية المتاحة للمورد 3 (المشمش : $b_3 = 480$) :

$$S_1 = S_2 = S_4 = 0$$

تصبح الجملة السابقة :

$$\begin{aligned}
&236.67-0.5S_3 \geq 0 &&\Rightarrow\quad S_3 \leq 473.33\\
&43.33+0S_3 \geq 0 &&\Rightarrow\quad \forall S_3 \quad\Rightarrow\quad -480 \leq S_3 \leq 473.33\\
&40+0.083S_3 \geq 0 &&\Rightarrow\quad S_3 \geq -480\\
&50+0S_3 \geq 0 &&\Rightarrow\quad \forall S_3
\end{aligned}$$

ومنه مجال تغير الكمية المتاحة b_3 هو: $0 \leq b_3 \leq 953.33$

أ . 3) تغير الكمية المتاحة للمورد 4 (الموز : $b_4 = 400$) :

$$S_1 = S_2 = S_3 = 0$$

تصبح الجملة السابقة :

$$\begin{aligned}
&236.67-0.25S_4 \geq 0 &&\Rightarrow\quad S_4 \leq 946.67\\
&43.33+0S_4 \geq 0 &&\Rightarrow\quad \forall S_3 \quad\Rightarrow\quad -400 \leq S_4 \leq 946.67\\
&40+0S_4 \geq 0 &&\Rightarrow\quad \forall S_3\\
&50+0.125S_4 \geq 0 &&\Rightarrow\quad S_4 \geq -400
\end{aligned}$$

ومنه مجال تغير الكمية المتاحة b_4 هو: $0 \leq b_4 \leq 1346.67$

ب) . دراسة تغيرات المعاملات التكنولوجية : a_{25}، a_{15}، a_{21}، a_{11}

ب . 1) المعامل $a_{11} = 4$ مرتبط بالمتغير $X_1 = 43.33$ متغير قاعدي، والمورد 1 (البرتقال) لم يستنفذ بالكامل ($e_1 = 236.67$) إذن (حسب الفقرة 2 . 4 . 3) فإن :

$$-\infty \leq \Delta a_{11} \leq \frac{e_1}{X_1} \Rightarrow -\infty \leq \Delta a_{11} \leq \frac{236.67}{43.33} \Rightarrow -\infty \leq \Delta a_{11} \leq 5.462$$

ومنه مجال تغير المعامل التكنولوجي a_{11} هو: $-\infty \leq a_{11} \leq 9.462$

ب . 2) المعامل $a_{21} = 12$ مرتبط بالمتغير $X_1 = 43.33$ متغير قاعدي، والمورد 2 (الخوخ) استنفذ بالكامل ($e_2=0$) إذن (حسب الفقرة 2 . 4 . 1) يستحيل تغير هذا المعاملومنه فإن مجال تغير هذا المعامل معدوم :

$$0 \leq a_{21} \leq 0$$

ب . 3) المعامل $a_{15} = 0$ مرتبط بالمتغير $X_5 = 0$ متغير غير قاعدي، والمورد 1 (البرتقال) لم يستنفذ بالكامل ($e_1 = 236.67$) إذن (حسب الفقرة 2 . 4 . 2) المتغير الثنائي المقابل لهذا المورد معدوم $Y_1 = 0$ ومنه فإن مجال تغير هذا المعامل لا حدود له : $-\infty \leq a_{15} \leq +\infty$

ب . 3) المعامل $a_{25} = 12$ مرتبط بالمتغير $X_5 = 0$ متغير غير قاعدي، والمورد 2 (الخوخ) استنفذ بالكامل ($e_2=0$) إذن (حسب الفقرة 2 . 4 . 2) نطبق القاعدة التالية مباشرة :

$$\frac{C_5 - \sum_{k=1}^{5} a_{k1} Y_k}{Y_2} \leq \Delta a_{25} \leq +\infty$$

لدبنا المتغيرات الثنائية لهذا النموذج: $Y_1=0$، $Y_2=2.9167$، $Y_3 = 2.9167$، $Y_4 = 4.38$

إذن: $$\sum_{k=1}^{5} a_{k1} Y_k = a_{15}Y_1 + a_{25}Y_2 + a_{35}Y_3 + a_{45}Y_4 = 0(0) + 12(2.9167) + 0(2.9167) + 0(4.38) = 35$$

ومنه: $$\frac{35-35}{2.9167} \leq \Delta a_{25} \leq +\infty \Rightarrow 0 \leq \Delta a_{25} \leq +\infty$$

ومنه مجال تغير المعامل التكنولوجي a_{25} هو: $12 \leq a_{25} \leq +\infty$

3 . دراسة تغيرات الطرف الأيمن لقيود التمرين 1 . 6 :

أ) . مثلما فعلنا سابقا لدينا الجملة التالية :

$$X_2 = 600+S_1+0S_2+0S_3$$
$$e_2 = 600+S_1+S_2+0S_3$$
$$e_3 = 200 - S_1+0S_2+S_3$$

أ . 1) تغير الكمية المتاحة للقيد 1 : $b_1 = 600$ (ساعات العمل المتاحة) : $S_2 = S_3 = 0$

$$600+S_1 \geq 0 \quad \Rightarrow \quad S_1 \geq -600$$
$$600+S_1 \geq 0 \quad \Rightarrow \quad S_1 \geq -600 \quad \Rightarrow \quad -600 \leq S_1 \leq 200$$
$$200 - S_1 \geq 0 \quad \Rightarrow \quad S_1 \leq 200$$

ومنه فإن مجال تغير b_1 هو: $0 \leq b_1 \leq 800$

أ . 2) تغير الكمية المتاحة للقيد $b_2 = 0{:}2$ (فائض عينات الحدائق العمومية على عينات الخواص)
$S_1 = S_3 = 0$:

$$600+0S_2 \geq 0 \quad \Rightarrow \quad \forall S_2$$
$$600+S_2 \geq 0 \quad \Rightarrow \quad S_2 \geq -600 \quad \Rightarrow \quad S_2 \geq -600$$
$$200+0S_2 \geq 0 \quad \Rightarrow \quad \forall S_2$$

ومنه فإن مجال تغير b_2 هو: $-600 \leq b_1 \leq +\infty$

أ . 3) تغير الكمية المتاحة للقيد 3 : $b_3 = 800$ (فائض طاقة المختبر) : $S_1 = S_2 = 0$

$$600+0S_3 \geq 0 \quad \Rightarrow \quad \forall S_3$$
$$600+0S_3 \geq 0 \quad \Rightarrow \quad \forall S_3 \quad\quad \Rightarrow \quad S_3 \geq -200$$
$$200+S_3 \geq 0 \quad \Rightarrow \quad S_3 \geq -200$$

ومنه فإن مجال تغير b_3 هو: $600 \leq b_1 \leq +\infty$

4 . دراسة تغيرات معاملات دالة الهدف للتمرين 1 . 7 :

أ **. 1**) المعامل $C_1 = 27.72$ هومعامل $X_1 = 4000$ متغير قاعدي، وبمأن النموذج يعبر عن حالة تعظيم دالة الهدف فإن (حسب الفقرة2.2 .2) قيم $(C_j - Z_j)$ المتأثرة بهذا التغير هي (حل التمرين 1 . 7 ص 88) :

$$C_2 - Z_2 = -3.85 - 1.25\Delta \leq 0 \quad \Rightarrow \quad \Delta \geq -3.08$$
$$C_5 - Z_5 = -69.3 - 2.5\Delta \leq 0 \quad \Rightarrow \quad \Delta \geq -27.72 \quad \Rightarrow \quad \Delta \geq -3.08$$

ومنه مجال تغير المعامل C_1 هو: $24.64 \leq C_1 \leq +\infty$

أ **. 2**) المعامل $C_2 = 30.8$ هومعامل $X_2 = 0$ متغير غير قاعدي، وبمأن النموذج يعبر عن حالة تعظيم دالة الهدف فإن (حسب الفقرة 2 . 2 . 1) مجال تغير هذا المعامل هو: $-\infty \leq C_2 \leq Z_2 \Rightarrow -\infty \leq C_2 \leq 34.65$

حل التمرين رقم 3 . 7 :

أ) **.** يكتب نموذج هذه المسألة كما يلي :

$$Max\ Z = 432X_1+144X_2+288X_3$$
$$S.C$$
$$4X_1+2X_2+X_3 \leq 6000$$
$$2X_1+1/2X_2+3X_3 \leq 4000$$
$$X_1+X_2+X_3 \leq 2500$$
$$X_1 ، X_2 ، X_3 \geq 0$$

جدول الحل الأمثل :

		X_1 432	X_2 144	X_3 288	e_1 0	e_2 0	e_3 0	
X_1	432	1	0.5	0	0.3	-0.1	0	1400
X_3	288	0	0	1	-0.2	0.4	0	400
e_3	0	0	0.5	0	-0.1	-0.3	1	700
z_j		432	216	288	72	72	0	
$c_j - z_j$		0	-72	0	-72	-72	0	**720000**

ب) . التكاليف الهامشية للموارد هي المتغيرات الثنائية لهذا النموذج ويمكن اشتقاقها مباشرة من جدول الحل الأمثل السابق (Y_3 معدومة تعني وجود أماكن شاغرة لتخزين وحدات إضافية من المنتجات) :

$$Y_1 = 72\ (e_1)\ ،Y_2 = 72\ (e_2)\ ،Y_3 = 0\ (e_3)$$

ت) . نقصد بعبارة " دون تغير التكاليف الهامشية " دون تغير الحل الأمثلومثلما فعنا في التمرينات السابقة :

$$1400+0.3S_1 - 0.1S_2+0S_3 \geq 0$$
$$400 - 0.2S_1+0.4S_2+0S_3 \geq 0$$
$$700 - 0.1S_1 - 0.3S_2+S_3 \geq 0$$

ت . 1) تغير الكمية المتاحة للمادة الأولية $b_1 = 6000$: $S_2 = S_3 = 0$ إذن :

$1400+0.3S_1 \geq 0 \Rightarrow S_1 \geq -4666.667$
$400 - 0.2S_1 \geq 0 \Rightarrow S_1 \leq 2000 \qquad \Rightarrow -4666.667 \leq S_1 \leq 2000$
$700 - 0.1S_1 \geq 0 \Rightarrow S_1 \leq 7000$

ومنه مجال تغير الكميات المتاحة للمادة الأولية هو:

$$1333.334 \leq b_1 \leq 8000$$

ت . 2) تغير ساعات العمل المتاحة $b_2 = 4000$: $S_1 = S_3 = 0$ إذن :

$1400 - 0.1S_2 \geq 0 \Rightarrow S_2 \leq 14000$
$400+0.4S_2 \geq 0 \Rightarrow S_2 \geq -1000 \qquad \Rightarrow -1000 \leq S_2 \leq 23333.333$
$700 - 0.3S_2 \geq 0 \Rightarrow S_2 \leq 2333.333$

ومنه مجال تغير ساعات العمل المتاحة هو: $3000 \leq b_2 \leq 6333.333$

ت . 3) تغير في طاقة التخزين المتاحة $b_3 = 2500$: $S_1 = S_2 = 0$ إذن:

$1400+0S_3 \geq 0 \Rightarrow \forall S_3$
$400+0S_3 \geq 0 \Rightarrow \forall S_3 \qquad \Rightarrow -700 \leq S_3 \leq +\infty$
$700+S_3 \geq 0 \Rightarrow S_3 \leq -700$

ومنه مجال تغير طاقة التخزين المتاحة هو: $1800 \leq b_3 \leq +\infty$

ث) . لدينا $e_2 = 0$ **و**هذا يعني أن ساعات العمل استنفذت بالكامل وبالتالي فالتكلفة الهامشية لساعة عملواحدة هي:$Y_2 = 72$ وبالتالي فانخفاض 500 سا يعني تراجع في الأرباح بمقدار 3600 دج ($72 \times 500 = 3600$)

ج) . المنتج الجديد يحتاج إلى *1.5* كغ من المادة الأولية و*2.5* ساعة عمل (دون أن ننسى أنه يحتاج إلى مكان للتخزين)، إذن نستطيع معرفة إمكانية إنتاجه من عدمه بالاعتماد على المتغيرات الثنائية (حسب الفقرة 2 . 3)، ومنه فإن تراجع الأرباح الناجم عن تحويل هذه الموارد يجب تغطيته من الأرباح المتأتية من بيع هذا المنتج الجديد حتى يسمح بإنتاجه ورياضيا :

$1.5Y_1+2.5Y_2+Y_3 = 1.5(72)+2.5(72)+0=288$

وبمأن سعر التكلفة الوحدوي لهذا المنتج *504* دج، وبفرض سعر بيعه α، وإذن وحتى يسمح بإنتاجه يجب أن :

$$\alpha - 504 \geq 288 \quad \Rightarrow \quad \alpha \geq 792$$

إذن أدنى سعر بيع مقترح لهذه المنتج الجديد حتى يسمح بإنتاجه هو : *792* دج.

ح) . دراسة تغيرات معاملات دالة الهدف :

أ . 1) المعامل $C_1 = 432$ هومعامل $X_1 = 1400$ متغير قاعدي (حسب الفقرة 2 . 2 . 2) وبالاعتماد على جدول الحل الأمثل فإن :

$-72 - 0.5\Delta \leq 0 \quad \Rightarrow \quad \Delta \geq -144$

$-72 - 0.3\Delta \leq 0 \quad \Rightarrow \quad \Delta \geq -240 \quad \Rightarrow \quad -144 \leq \Delta \leq 720$

$-72+0.1\Delta \leq 0 \quad \Rightarrow \quad \Delta \leq 720$

ومنه مجال تغير المعامل C_1 هو : $288 \leq C_1 \leq 1152$

أ . 2) المعامل $C_2 = 144$ معامل $X_2 = 0$ متغير غير قاعدي، إذن (حسب الفقرة 2 . 2 . 1) ومن جدول الحل الأمثل لدينا : $Z_2 = 216$ ومنه فإن مجال تغير المعامل C_2 هو: $- \infty \leq C_2 \leq 216$

أ . 1) المعامل $C_3 = 288$ هومعامل $X_3 = 1400$ متغير قاعدي (حسب الفقرة 2 . 2 . 2) وبالاعتماد على جدول الحل الأمثل فإن :

$-72+0.2\Delta \leq 0 \quad \Rightarrow \quad \Delta \leq 360$

$-72 - 0.4\Delta \leq 0 \quad \Rightarrow \quad \Delta \geq -180 \quad \Rightarrow \quad -180 \leq \Delta \leq 360$

ومنه مجال تغير المعامل C_1 هو : $108 \leq C_3 \leq 648$

خ) . يمكن الجواب على هذا السؤال من جواب السؤال (ج . أ . 2)، فمجال تغير C_2 هو: $- \infty \leq C_2 \leq 216$

أي أن أدنى ربح يسمح بإدخال هذا المنتج في العملية الإنتاجية هو*216* دج، وإذا تم تحقيق هذا الربح بالضبط نحصل على حل متعدد، أين يصبح لدينا خيارين فإما الحفاظ عل الحل القاعدي الحالي وتحقيق أرباح قيمتها *720000* دج، أ وتغيير الحل القاعدي الحال حيث يمكن إدخال X_2 إلى الحل القاعدي الجديد وإخراج e_3، مع تحقيق نفس قيمة الأرباح كما يلي :

جدول الحل الأمثل القديم ($C_2 = 216$) :

		X_1 432	X_2 216	X_3 288	e_1 0	e_2 0	e_3 0	
X_1	432	1	0.5	0	0.3	-0.1	0	1400
X_3	288	0	0	1	-0.2	0.4	0	400
e_3	0	0	$\boxed{0.5}$	0	-0.1	-0.3	1	700
z_j		432	216	288	72	72	0	
$c_j - z_j$		0	0	0	-72	-72	0	**720000**

مثلما نلاحظ فإن قيمة $(C_2 - Z_2)$ المقابلة لـ X_3 متغير غير قاعدي معدومة وهذا دليل على وجود حل متعدد، وفي الجدول الموالي ننتقل نح وحل قاعدي جديد له نفس قيمة Z بعد إدخال X_2 و'خراج المتغير e_3 .

جدول الحل الأمثل :

		X_1 432	X_2 216	X_3 288	e_1 0	e_2 0	e_3 0	
X_1	432	1	0	0	0.4	0.2	-1	700
X_3	288	0	0	1	-0.2	0.4	0	400
X_2	216	0	1	0	-0.2	-0.6	2	1400
z_j		432	216	288	72	72	0	
$c_j - z_j$		0	0	0	-72	-72	0	**720000**

أما في حالة تجاوز الربح الصافي لهذا المنتج فسوف ننتقل إلى حل قاعدي آخر يختلف في قيمة دالة الهدف (ارتفاع في الأرباح).

د) . يمكن السماح بإنتاج المنتج B وذلك باعتماد إستراتيجية تخفيض عدد الوحدات الضرورية من الموارد، أي تخفيض المعاملات التكنولوجية، ولهذا المنتج 3 معاملات تكنولوجية هي : a_{32}، a_{22}، a_{12} ولكن دون أن تنعدم.

بمأن التكلفة الهامشية للمادة الأولية وساعات العمل متساوية (72) فإن إمكانية التخفيض لكليهما متساوية.

د . 1) المعامل $a_{12} = 2$ المرتبط بالمتغير $X_2 = 0$ متغير غير قاعدي والمورد 1 استنفذ بالكامل إذن (حسب الفقرة 2 . 4 . 2) :

$$\frac{C_2 - \sum_{k=1}^{3} a_{k2} Y_k}{Y_1} \le \Delta a_{12} \le +\infty$$

$$\sum_{k=1}^{3} a_{k1} Y_k = a_{12} Y_1 + a_{22} Y_2 + a_{32} Y_3 = 2(72) + 1/2(72) + 1(0) = 18$$

ومنه :

$$\frac{144 - 180}{72} \le \Delta a_{12} \le +\infty \Rightarrow -0.5 \le \Delta a_{12} \le +\infty$$

ومنه مجال تغير المعامل التكنولوجي a_{12} هو: $1.5 \le a_{12} \le +\infty$

إذن يتغير الحل الأمثل إذا أمكن تخفيض عدد الوحدات الضرورية من المادة الأولية تحت 1.5 كغ.

د . 2) المعامل $a_{22} = 1/2$ المرتبط بالمتغير $X_2 = 0$ متغير غير قاعدي والمورد 2 استنفذ بالكامل

إذن (حسب الفقرة 2 . 4 . 2) وبنفس الطريقة نجد مجال التغير : $-0.5 \leq \Delta a_{22} \leq +\infty$

ومنه مجال تغير المعامل التكنولوجي a_{22} هو: $0 \leq a_{22} \leq +\infty$

د . 3) المعامل $a_{32} = 1$ المرتبط بالمتغير $X_2 = 0$ متغير غير قاعدي والمورد 3 لم يستنفذ بالكامل

إذن (حسب الفقرة 2 . 4 . 1) لا حدود لتغير هذا المعامل :

ومنه مجال تغير المعامل التكنولوجي a_{32} هو: $-\infty \leq a_{32} \leq +\infty$

المحور الرابع : نماذج النقل

تعتبر نماذج النقل أحد الحالات الخاصة لنماذج البرمجة الخطية وبطبيعة الحال يمكن حلها باستخدام طريقة *simplex* ولكن نظرا لأنها تحتوى على عدد كبير من المتغيرات , والمعاملات التكنولوجية للقيود كلها إما تساوي *1* أو *0* , و تم اكتشاف طرق أكثر سهولة في حلها سوف نستعرضها فيما بعد و لكن في البداية سوف نتطرق إلى كيفية صياغة الشكل العام لنماذج النقل على الشكلين , الشكل الأولي و الشكل الثنائي , و لعل إعادة صياغتها على الشكل الثنائي لا تخلوا من فائدة عظيمة عند عملية شرح نتائجها كما تساعدنا في تسهيل الحصول على معلومات قيمة.

1 . صياغة الشكل العام لنماذج النقل : يمكن صياغتها على كلا الشكلين

1 . 1 الشكل الأولي (*Primale*) :

يحاول نموذج مشكلة النقل البحث عن أفضل المسارات لنقل سلع معينة من نقاط انطلاق معينة (مصانع إنتاج , مراكز تخزين .... الخ) عددها m , نحو نقاط وصول (مراكز تخزين , نقاط بيع ....الخ) n , و ذلك بأقل تكلفة كلية ممكنة إذن :

. نرمز لطاقة التموين من نقاط الانطلاق بالرمز : $K_i \; ; \; i = 1,\dots,m$

. نرمز لطاقة الاستيعاب في نقاط الوصول بالرمز : $D_j \; ; j = 1,\dots,n$

. نرمز لتكاليف النقل الوحدوية من نقطة الانطلاق نحو نقطة الوصول بالرمز : $C_{ij} \; ; \; i=1,..,m \; ; \; j=1,..,m$

و في الأخير نحصل على نموذج النقل على الشكل التالي :

$$MaxZ = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} C_{ij} X_{ij}$$

$$S.C$$

$$\sum_{j=1}^{n} X_{ij} \le K_i \quad ; \quad i = 1,\dots,m$$

$$\sum_{i=1}^{m} X_{ij} \le D_j \quad ; \quad j = 1,\dots,n$$

$$X_{ij} \ge 0 \quad ; i = 1,\dots,m \quad , \quad j = 1,\dots,n$$

نتائج :

. يوجد $m \times n$ متغير حقيقي أساسي.

. يوجد $m+n$ قيد.

. مصفوفة المعاملات التكنولوجية تتمتع بميزة خاصة لأن كل عناصرها عبارة عن *1* أو *0* خلافا لباقي نماذج البرمجة الخطية.

1 . 2 الشكل الثنائي ($Duale$) :

في الفصل 3 تعلمنا كيفية اشتقاق الشكل الثنائي لنموذج ما , و بنفس الطريقة سوف نفعل ذلك هنا و لكن باختلاف بسيط , حيث أننا نمنح لكل قيد نقطة انطلاق متغير ثنائي من نفس النوع و ليكن V_i ; $i=1,\dots,m$. و بنفس الطريقة نمنح لكل قيد نقطة وصول متغير من نفس النوع و ليكن W_j ; $j=1,\dots,n$.

و هكذا نحصل على الشكل العام الثنائي لنموذج نقل كما يلي :

$$MaxR = \sum_{i=1}^{m} K_i V_i + \sum_{j=1}^{n} D_j W_j$$

$$S.C$$

$$V_i + W_j \le C_{ij}$$

$$V_i \le 0 \;;\; i=1,\dots,m \;,\; \forall W_j \;;\; j=1,\dots,n$$

نتائج :

. إذا لم يستنفد القيد الثنائي (ij) في الحل الأمثل , و هذا يعني أن المتغير المقابل في الشكل الأولي $X_{ij} = 0$, أي أنه في الحل الأمثل لا ينصح بنقل أي وحدة عبر هذا المسار (ij) و رياضيا: $V_i+W_j \le C_{ij} \Rightarrow X_{ij} = 0$.

. يمكن تفسير V_i و W_j على أنها تكاليف هامشية , و هي التغير في التكاليف الكلية للنقل في حالة تغير وحدة واحدة من V_i أو من W_j و رياضيا: $V_i = \dfrac{\Delta Z}{\Delta K_i}$, $W_j = \dfrac{\Delta Z}{\Delta D_j}$

إن صياغة النموذج على الشكل الثنائي تسمح بمقارنة التكاليف الكلية لمسار معين , و مجموع التكلفتين الهامشيتين نتيجة التغير بوحدة واحدة في الكمية المتاحة لنقطة انطلاق هذا المسار و نقطة وصوله , فإذا تم نقل وحدة واحدة من نقطة الانطلاق i نحو نقطة الوصول j , هذا يعني أنه بقي في نقطة الانطلاق ($K_i - 1$) وحدة في انتظار النقل , و (D_j - 1) وحدة في انتظار استقبالها في نقطة الوصول , و هكذا تم حذف وحدة من العرض ووحدة من الطلب , يستحيل إعادة نقلها عبر مسار آخر , و بالتالي فإن عملية نقل هذه الوحدة سمح باقتصاد في التكاليف الكلية (أو تكلفة هامشية) يساوي V_i+W_j, هذه التكلفة المقتصدة يجب مقارنتها مع التكلفة الحقيقية لهذا المسار (ij),وهنا نميز 3 حالات:

1 . $V_i+W_j > C_{ij}$: الكلفة الكلية المقتصدة من نظام النقل ككل من خلال إرسال هذه الوحدة عبر هذا المسار(ij) أكبر من تكلفة النقل الوحدوية الحقيقية له, و هذا يعني أنه من الأفضل استعمال هذا المسار لأقصى حد ممكن.

2 . $V_i+W_j < C_{ij}$: الكلفة الكلية المقتصدة من نظام النقل ككل من خلال إرسال هذه الوحدة عبر هذا المسار (ij) أقل من تكلفة النقل الوحدوية الحقيقية له , و هذا يعني أنه لا ينصح بإرسال أي وحدة عبره أي أن $X_{ij} = 0$.

3 . $V_i+W_j = C_{ij}$: هذه الحالة تعكس حدوث توازن في كل المسارات المستعملة , ومن خلا هذه المسارات يتم تحديد قيم V_i و W_j التي تحدد الحل الأمثل.

ملاحظة : في الحل الأمثل نصادف فقط الحالتين 2 و 3 بينما الحالة الأولى دليل على عدم الوصول إلى الحل الأمثل.

لنأخذ الآن المثال 4 .1 و نقوم باشتقاق الشكل الثنائي كما يلي:

$$Min\ Z = 76X_{11}+55\,X_{12}+\ldots\ldots\ldots\ldots+20\,X_{33}+53\,X_{34}.$$

$$\begin{array}{lll}
S.C & & \\
V_1 \longrightarrow & X_{11}+X_{12}+X_{13}+X_{14} & = 7000 \\
V_2 \longrightarrow & X_{21}+X_{22}+X_{23}+X_{24} & = 6000 \\
V_3 \longrightarrow & X_{31}+X_{32}+X_{33}+X_{34} & = 2500 \\
W_1 \longrightarrow & X_{11}+X_{21}+X_{31} & = 1000 \\
W_2 \longrightarrow & X_{12}+X_{22}+X_{32} & = 5500 \\
W_3 \longrightarrow & X_{13}+X_{23}+X_{33} & = 4000 \\
W_4 \longrightarrow & X_{14}+X_{24}+X_{34} & = 5000 \\
 & X_{ij} \geq 0\ ;\ i = 1,2,3,\quad j = 1,2,3,4. &
\end{array}$$

لنحصل على النموذج الثنائي التالي :

$$MaxR=7000V_1+6000V_2+2500V_3+1000W_1+5500W_2+4000W_3+5000W_4$$

$$\begin{array}{ll}
S.C & \\
V_1+W_1 \leq 76 & V_2+W_3 \leq 53 \\
V_1+W_2 \leq 55 & V_2+W_4 \leq 29 \\
V_1+W_3 \leq 82 & V_3+W_1 \leq 31 \\
V_1+W_4 \leq 19 & V_3+W_2 \leq 19 \\
V_2+W_1 \leq 42 & V_3+W_3 \leq 20 \\
V_2+W_2 \leq 25 & V_3+W_4 \leq 53 \\
\forall V_i\ ;\ i=1,2,3. & \forall W_j\ ;\ j=1,2,3,4.
\end{array}$$

2 . حل نماذج النقل :

إن خصوصية هذه النماذج سمحت باكتشاف طرق أكثر سهولة في حلها من طريقة *simplex* , إلا أنه يشترط فيها أن تكون كل قيود النموذج على شكل معادلات (=) و أن يكون هذا النموذج متوازن أي أن مجموع الطلب يساوي مجموع العرض , و سوف نستعرض طريقتين الأكثر شيوعا , طريقة المسار المتعرج (*Stepping-stone*) , و طريقة الشكل المختلط (*Primal-dual*).

و لكن قبل ذلك فإن عملية حل نماذج النقل و بمأنها حالة خاصة من نماذج البرمجة الخطية فهي تحتاج إلى حل قاعدي ابتدائي يتم الانطلاق منه في عملية البحث عن الحل الأمثل.

2 . 1 تحديد حل قاعدي ابتدائي :

هناك عدة طرق في تحديد حل ابتدائي من أهمها على الإطلاق :

2 . 1 . 1 الركن الشمالي الغربي :

تعتبر من أسهل الطرق تعتمد على ما يعرف بتقنية الركن الشمالي الغربي , و للقيام بذلك نقوم أولا بتشكيل جدول النقل الأساسي الموالي , و لشرح ذلك بأسلوب سهل نعتمد على المثال السابق دائما (المثال 1 . 4 طبعا) :

	S_1	S_2	S_3	S_4	K_i
P_1					7000
P_2					6000
P_3					2500
D_j	1000	5500	4000	5000	15500

نبدأ بالخانة الواقعة في الركن الشمالي الغربي (في أعلى اليسار) المتعلقة بالمتغير X_{11} و نشبعها بأقصى ما يمكن من الوحدات , و يكون هذا العدد المخصص هو *1000* لأنه أقل العددين *7000* و هو الكمية المتاحة في العرض , و *1000* وهو الكمية المتاحة من الطلب أي : $Min\{K_1 = 7000 , D_1 = 1000\}$, و بالتالي تصبح نقطة الوصول S_1 مشبعة بالكامل و منه فإن : $X_{31} = 0 , X_{21} = 0 , X_{11} = 1000$ و نحصل على الجدول الموالي:

	S_1	S_2	S_3	S_4	K_i
P_1	1000				~~7000~~ 6000
P_2					6000
P_3					2500
D_j	~~1000~~ 0	5500	4000	5000	15500

ننتقل نحو الخانة المجاورة إلى اليمين المتعلقة بالمتغير X_{12} و نشبعها بأقصى ما يمكن من الوحدات , و يكون العدد المخصص لها هو *5500* لأنه أقل العددين *5500* و *6000* أي : $Min\{K_1 -1000 = 6000 , D_2 = 5500\}$, و بالتالي تصبح نقطة الوصول S_2 مشبعة بالكامل و منه فإن : $X_{32} = 0 , X_{22} = 0 , X_{12} = 5500$ و نحصل على الجدول الموالي:

	S_1	S_2	S_3	S_4	K_i
P_1	1000	5500			~~7000~~ ~~6000~~ 500
P_2					6000
P_3					2500
D_j	~~1000~~ 0	~~5500~~ 0	4000	5000	15500

الآن ننتقل نحو الخانة المجاورة إلى اليمين المتعلقة بالمتغير X_{13} , و يكون العدد المخصص لها هو 500 لأنه أقل العددين 500 و 4000 أي : $Min\{K_1 - 6500 = 500\ ,\ D_3 = 4000\}$ و يتم إشباع P_1 بالكامل و منه فإن : $X_{14} = 0\ ,\ X_{13} = 500$ و نحصل على الجدول الموالي :

	S_1	S_2	S_3	S_4	K_i
P_1	1000	5500	500		~~7000~~ ~~6000~~ ~~500~~ 0
P_2					6000
P_3					2500
D_j	~~1000~~ 0	~~5500~~ 0	~~4000~~ 3500	5000	15500

ننتقل الآن إلى الخانة المجاورة إلى الأسفل المتعلقة بالمتغير X_{23} و يكون العدد المخصص هو 3500 لأنه أقل العددين

$Min\{K_3 = 6000\ , D_3 - 500 = 3500\}$ و يتم إشباع S_3 بالكامل و منه : $X_{33} = 0\ ,\ X_{23} = 3500$ و نحصل على الجدول الموالي :

	S_1	S_2	S_3	S_4	K_i
P_1	1000	5500	500		~~7000~~ ~~6000~~ ~~500~~ 0
P_2			3500		~~6000~~ 2500
P_3					2500
D_j	~~1000~~ 0	~~5500~~ 0	~~4000~~ ~~3500~~ 0	5000	15500

ننتقل الآن إلى الخانة المجاورة إلى اليمين المتعلقة بالمتغير X_{24} و يكون العدد المخصص هو 2500 لأنه :

$Min\{K_2 - 3500 = 2500\ , D_3 = 5000\}$ و يتم إشباع P_2 بالكامل و منه : $X_{24} = 2500$, ثم نملأ الخانة الأخيرة و نحصل على الجدول الأخير الموالي الذي يمثل حل قاعدي ابتدائي :

الجدول 4 . 1 :الحل الابتدائي بطريقة الركن الشمالي الغربي

	S_1	S_2	S_3	S_4	K_i
P_1	1000	5500	500		~~7000~~ ~~6000~~ ~~500~~ 0
P_2			3500	2500	~~6000~~ ~~2500~~ 0
P_3				2500	~~2500~~ 0
D_j	~~1000~~ 0	~~5500~~ 0	~~4000~~ ~~3500~~ 0	~~5000~~ ~~2500~~ 0	15500

ملاحظة : من مميزات هذه الطريقة أنها تضمن لنا عدم الوقوع في حل مفكك (*dégénérescence*)وهو حل يقع لما يكون عدد المتغيرات القاعدية($m \times n$) أقل من عدد القيود ناقص واحد ($m+n-1$) و في مثالنا هذا عدد المتغيرات القاعدية يساوي عدد القيود ناقص واحد و يساوي 6 أي أنه حل غير مفكك.
إلا أن من عيوبها أن الحل الابتدائي الذي نحصل عليه بهذه الطريقة في غالب الأحيان يكون بعيدا عن الحل الأمثل مما يؤدي إلى عدد كبير من المراحل المتعاقبة للوصول إليه.

2 . 1 . 2 التكلفة الدنيا :

من خلال جدول التكاليف الموالي :

4 – 2 : جدول تكاليف النقل الوحدوية

الوحدة: دج

		نقاط الوصول			
		الجزائر	*وهران*	*عنابه*	*غرداية*
نقاط الانطلاق	***تيارت***	76	55	82	19
	الجلفة	42	25	53	29
	سعيدة	31	19	20	53

نقوم باختيار الخانة ذات أقل تكلفة و في المثال السابق (المثال 4 . 1) لدينا الخانتين (1.4) و (3.2) نختار عشوائيا إحداهما و لتكن (1.4) , نقوم بإشباع هذه الخانة بأقصى ما يمكن و بنفس الأسلوب مع الطريقة السابقة يكون العدد المخصص هو 5000 لأنه : $Min\{K_1 = 7000\ ,\ D_4 = 5000\}$, أي أنه يتم إشباع S_4 بالكامل و منه فإن : $X_{14} = 5000\ ,\ X_{24} = 0\ ,\ X_{34} = 0$ و نحصل على الجدول الموالي :

	S_1	S_2	S_3	S_4	K_i
P_1	76	55	82	19 5000	~~7000~~ 2000
P_2	42	25	53	29	6000
P_3	31	19	20	53	2500
D_j	1000	5500	4000	~~5000~~ 0	15500

نختار الخانة الموالية الأقل تكلفة و لتكن (3.2) و يكون العدد المخصص لها هو 2500 لأنه : $Min\{K_3 = 2500\ ,\ D_2 = 5500\}$, و هكذا نفعل و بنفس الأسلوب حتى نحصل على الجدول الأخير الموالي :

الجدول 4 . 3 :الحل الابتدائي بطريقة التكلفة الدنيا

	S_1	S_2	S_3	S_4	K_i
P_1	76	55	82 2000	19 5000	~~7000~~ ~~2000~~ 0
P_2	42 1000	25 3000	53 2000	29	~~6000~~ ~~3000~~ ~~2000~~ 0
P_3	31	19 2500	20	53	~~2500~~ 0
D_j	~~1000~~ 0	~~5500~~ ~~3000~~ 0	~~4000~~ ~~2000~~ 0	~~5000~~ 0	15500

ملاحظة : عكس الطريقة السابقة هذه الطريقة تضمن لنا الاقتراب أكثر من الحل الأمثل إلا أنها لا تضمن لنا عدم الوقوع في حالة تفكك , و في هذا المثال لم نقع في هذه الحالة و لكن لو صادف أن كانت الكمية المتاحة لأحد نقاط الوصول تساوي إلى الكمية المتاحة لأحد نقاط الانطلاق لكنا ربما وقعنا في حالة تفكك , و لو أجرينا تعديلا طفيفا على المثال السابق حيث نجعل $K_1 = D_4 = 7000$ و نجعل أيضا $D_3 = 2000$ لنحترم توازن العرض مع الطلب, إذن و باستخدام طريقة التكلفة الدنيا نحصل على الحل الابتدائي التالي :

الجدول 4 . 4 :حالة تفكك الحل

	S_1	S_2	S_3	S_4	K_i
P_1	76	55	82	19 7000	7000
P_2	42 1000	25 3000	53 2000	29	6000
P_3	31	19 2500	20	53	2500
D_j	1000	5500	2000	7000	15500

نلاحظ أنه يوجد في هذا الحل 5 ($m \times n = 5$) متغيرات قاعدية و هي أقل من : $m+n-1 = 6$ و بالتالي وقعنا في حالة تفكك و فيما بعد سوف نتعلم كيفية التخلص من حالة التفكك.

2 . 1 . 3 طريقة الجزاء (*Vauguel*) :

تعتبر من أهم الطرق لأنها تضمن الوصول إلى الحل الأمثل بأسرع ما يمكن و لكنها تحتاج إلى عمليات حسابية أكبر , و بالاعتماد على المثال السابق دائما سوف نشرح كيفية عمل هذه الطريقة , و من جدول التكاليف 4 . 1 نقوم بحساب ما يعرف بتكاليف الجزاء لكل صف و لكل عمود في جدول

النقل الموالي و التي هي حاصل فرق أقل كلفتين في كل صف و في كل عمود , ثم نحدد من بين الصفوف و الأعمدة معا صاحب أكبر تكلفة جزاء (أكبر عدد في خانات الفروقات) و من الجدول الموالي يبدوا واضحا أننا نختار الخانة ذات الأقل تكلفة (P_1-S_4) من الصف P_1 و بنفس الأسلوب السابق يكون العدد المخصص *1000* و بذلك يتم إشباع العمود S_4 ومنه يمكن حذفه كلية من الجدول و نكرر العملية من جديد متجاهلين الخانات المحذوفة إلى أن نملأ الجدول كاملا

الجدول 4 . 5 :الحل الابتدائي بطريقة تكاليف الجزاء

	S_1	S_2	S_3	S_4	K_i	Diff
P_1	76	55 500	82 1500	19 5000	~~7000~~ ~~2000~~ ~~1500~~ 0	**36** 21 21 27
P_2	42 1000	25 5000	53	29	~~6000~~ ~~5000~~ 0	4 17 17
P_3	31	19	20 2500	53	~~2500~~ 0	1 1
D_j	~~1000~~ 0	~~5500~~ ~~500~~ 0	~~4000~~ ~~1500~~ 0	~~5000~~ 0	15500	
diff	11 11 **34**	6 6 30 **30**	33 **33** 29 29	10		

2 . 2 البحث عن الحل الأمثل :

من بين الطرق الأكثر شيوعا هناك طريقتين , طريقة المسار المتعرج (*Stepping-stone*) و طريقة الشكل المختلط (*Peimal-dual*).

2 . 2 . 1 طريقة المسار المتعرج : (*Stepping-stone*)

مثل طريقة *Simplex* تحتاج هذه الطريقة إلى حل قاعدي ابتدائي , لشرح كيفية عمل هذه الطريقة سوف نعتمد على المثال السابق دائما (المثال 4 . 1) , كما أننا سوف نأخذ الحل الابتدائي المستخرج بطريقة الركن الشمالي الغربي (الجدول 4 . 1) مع الحرص طبعا على أن لا يكون حل مفكك (*dégénérée*).

بصفة عامة نموذج خطي غير مفكك يحتوي على k قيد مستقل خطيا (و ليس عدد القيود الذي هو أكبر أو يساوي k)

و يحتوي على k متغير قاعدي , و في مثالنا السابق لدينا 7 قيود من بينها 6 قيود مستقلة خطيا , و بالتالي فأي حل غير مفكك يجب أن يحتوي على 6 متغيرات قاعدية (في جدول النقل 6 خانات مملوءة) , بعبارة أخرى 6 مسارات مستعملة.

إذن الحل الابتدائي الذي بحوزتنا حل غير مفكك يحتوي على 6 مسارات مستعملة هي :

$X_{11}=1000$, $X_{12}=5500$, $X_{13}=500$, $X_{23}=3500$, $X_{24}=2500$, $X_{34}=2500$

بطبيعة الحال الحل الابتدائي هو حل لمشكلة النقل هذه , و لكن هل يمكن أن يوجد هناك حل آخر أفضل من هذا الحل يخفض التكاليف الكلية الحالية , في الحقيقة يمكن معرفة ذلك عن طريق إجراء اختبار للمسارات غير المستعملة و ذلك بإجراء تعديل طفيف على الحل الحالي عن طريق تمرير وحدة واحدة عبر أحد المسارات غير المستعملة و مراقبة النتائج.

لنختر مثلا المسار (3.3) و نمرر وحدة واحدة عبره : $X_{33} =1$, إذن و من أجل احترام جميع القيود يجب التخفيض بوحدة واحدة الكميات المرسلة عبر المسار (2.3) و المسار (3.4) و إضافة وحدة واحدة إلى المسار (2.4) , نلاحظ أن هذه العملية مفيدة لأنها استطاعت تخفيض التكاليف الكلية :

$$C_{33} - C_{23}+C_{24} - C_{34} = 20 - 53+29 - 53 = -57$$

تمرير وحدة واحدة عبر السمار (3.3) سمح بتخفيض التكاليف الكلية بـ 57 دج , إذن من مصلحتنا تمرير أقصى ما يمكن من الوحدات من أجل تخفيض التكاليف بأكبر ما يمكن , و منه مع احترام جميع القيود نستطيع تمرير 2500 وحدة كحد أقصى و بالتالي نحصل على حل جديد أفضل من الحل السابق (الجدول الثاني) لأنه خفض التكاليف الكلية بحوالي 124500دج.

و هكذا نكرر العملية من خلال البحث عن مسارات غير مستعملة مجدية حتى نعجز عن إيجاد ذلك المسار عندها نكون قد وصلنا إلى الحل الأمثل (الجدول الأخير) :

1) . **الجدول الأول** :الحل الابتدائي بطريقة الركن الشمالي الغربي

	S_1	S_2	S_3	S_4	K_i
P_1	76 1000	55 5500	82 500	19	7000
P_2	42	25	53 – 3500	29 + 2500	6000
P_3	31	19	20 +	53 – 2500	2500
D_j	1000	5500	4000	5000	15500

2 .

	S_1	S_2	S_3	S_4	K_i
P_1	$\boxed{76}$ 1000	$\boxed{55}$ 5500	$\boxed{82}$ − 500	$\boxed{19}$ +	7000
P_2	$\boxed{42}$	$\boxed{25}$	$\boxed{53}$ + 1000	$\boxed{29}$ − 5000	6000
P_3	$\boxed{31}$	$\boxed{19}$	$\boxed{20}$ 2500	$\boxed{53}$	2500
D_j	1000	5500	4000	5000	15500

3).

	S_1	S_2	S_3	S_4	K_i
P_1	$\boxed{76}$ − 1000	$\boxed{55}$ 5500	$\boxed{82}$	$\boxed{19}$ + 500	7000
P_2	$\boxed{42}$ +	$\boxed{25}$	$\boxed{53}$ 1500	$\boxed{29}$ − 4500	6000
P_3	$\boxed{31}$	$\boxed{19}$	$\boxed{20}$ 2500	$\boxed{53}$	2500
D_j	1000	5500	4000	5000	15500

4).

	S_1	S_2	S_3	S_4	K_i
P_1	$\boxed{76}$	$\boxed{55}$ − 5500	$\boxed{82}$	$\boxed{19}$ + 1500	7000
P_2	$\boxed{42}$ 1000	$\boxed{25}$ +	$\boxed{53}$ 1500	$\boxed{29}$ − 3500	6000
P_3	$\boxed{31}$	$\boxed{19}$	$\boxed{20}$ 2500	$\boxed{53}$	2500
D_j	1000	5500	4000	5000	15500

5).

	S_1	S_2	S_3	S_4	K_i
P_1	$\boxed{76}$	$\boxed{55}$ − 2000	$\boxed{82}$ +	$\boxed{19}$ 5000	7000
P_2	$\boxed{42}$ 1000	$\boxed{25}$ + 3500	$\boxed{53}$ − 1500	$\boxed{29}$	6000
P_3	$\boxed{31}$	$\boxed{19}$	$\boxed{20}$ 2500	$\boxed{53}$	2500
D_j	1000	5500	4000	5000	15500

6. **الجدول الأخير** : الحل الأمثل

	S_1	S_2	S_3	S_4	K_i
P_1	$\boxed{76}$	$\boxed{55}$ 500	$\boxed{82}$ 1500	$\boxed{19}$ 5000	7000
P_2	$\boxed{42}$ 1000	$\boxed{25}$ 5000	$\boxed{53}$	$\boxed{29}$	6000
P_3	$\boxed{31}$	$\boxed{19}$	$\boxed{20}$ 2500	$\boxed{53}$	2500
D_j	1000	5500	4000	5000	15500

نلاحظ أنه لا يوجد أي مسار آخر يمكن أن يخفض من التكاليف الكلية للنقل و منه نكون قد وصلنا إلى الحل الأمثل و تكون قيمة التكاليف الكلية *462500* دج لأن :

$$500(55)+1500(82)+5000(19)+1000(42)+500(25)+2500(20)=462500$$

2 . 2 . 2 طريقة الشكل المختلط (*Peimal-dual*):

خلافا للطريقة السابقة فإن هذه الطريقة تسمح بتحديد أفضل مسار غير مستعمل بطريقة حسابية (أوتوماتيكية) كما تحتوي على اختبار أمثلية الحل المحصل عليه في كل مرحلة.

تعتمد هذه الطريقة على استخدام القيود الثنائية ($V_i+W_j = C_{ij}$) , حيث يتم حساب قيم V_i و W_j من المسارات المستعملة , ثم تطبيقها فيما بعد على المسارات غير المستعملة , و بعد ذلك يتم اختيار أفضل مسار غير مستعمل (ij) الذي له أكبر قيمة $V_i+W_j - C_{ij}$ مقارنة مع باقي المسارات غير المستعملة , و إذا وجدنا في نهاية مرحلة ما أن كل هذه القيم($V_i+W_j - C_{ij}$) سالبة أو معدومة نكون قد وصلنا إلى الحل الأمثل (و هذا هو اختبار الأمثلية).

الآن و باستخدام المثال السابق و بالانطلاق من الحل الابتدائي السابق أيضا :

1) . الجدول الأول : الحل الابتدائي

	S_1	S_2	S_3	S_4	K_i
P_1	$\boxed{76}$ 1000	$\boxed{55}$ 5500	$\boxed{82}$ 500	$\boxed{19}$	7000
P_2	$\boxed{42}$	$\boxed{25}$	$\boxed{53}$ − 3500	$\boxed{29}$ + 2500	6000
P_3	$\boxed{31}$	$\boxed{19}$	$\boxed{20}$ +	$\boxed{53}$ − 2500	2500
D_j	1000	5500	4000	5000	15500

من خلا هذا الجدول لدينا :

$$V_1+W_1 = 76$$
$$V_1+W_2 = 55$$
$$V_1+W_3 = 82$$
$$V_2+W_3 = 53$$
$$V_2+W_4 = 29$$
$$V_3+W_4 = 53$$

لدينا هنا جملة معادلة تتكون من 6 معادلات و 7 متغيرات , نضع عشوائيا $V_1 = 0$ و بالتعويض نحصل على :

$V_1=0 ,W_1=76 ,W_2=55 ,W_3=82V_2 = - 29 ,W_4 =58 ,V_3 = - 5$

و بتطبيق هذه القيم على باقي المسارات غير المستعملة نحصل على :

$V_i+W_j - C_{ij}$	**المسارات غير المستعملة**
$0+58-19 = 39$	1.4
$-29+76-42 = 5$	2.1
$-29+55-25 = 1$	2.2
$-5+76-31 = 40$	3.1
$-5+55-19 = 31$	3.2
$-5+82-20 = 57$	3.3

نلاحظ أن أفضل مسار غير مستعمل هو المسار (3.3) نخصص أكبر عدد ممكن بإتباع نفس الأسلوب المطبق مع الطريقة السابقة نحصل عل الجدول (2) كما يلي :

2) .

	S_1	S_2	S_3	S_4	K_i
P_1	$\boxed{76}$ 1000	$\boxed{55}$ 5500	$\boxed{82}$ $-$ 500	$\boxed{19}$ $+$	7000
P_2	$\boxed{42}$	$\boxed{25}$	$\boxed{53}$ $+$ 1000	$\boxed{29}$ $-$ 5000	6000
P_3	$\boxed{31}$	$\boxed{19}$	$\boxed{20}$ 2500	$\boxed{53}$	2500
D_j	1000	5500	4000	5000	15500

نكرر نفس العملية السابقة : $V_1+W_1 = 76$

$$V_1+W_2 = 55$$
$$V_1+W_3 = 82$$
$$V_2+W_3 = 53$$
$$V_2+W_4 = 29$$
$$V_3+W_3 = 20$$

$V_1 = 0 ,\ W_1=76 ,W_2= 55,W_3 = 82 ,V_2= - 2 ,W_4=58,V_3 = - 62$

$V_i+W_j - C_{ij}$	**المسارات غير المستعملة**
$0+58-19 = 39$	1.4
$-29+76-42 = 5$	2.1
$-29+55-25 = 1$	2.2
$-62+76-31 = -17$	3.1
$-62+55-19 = -26$	3.2
$-62+58-53 = -57$	3.4

أفضل مسار هو المسار (1.4) , ننتقل إلى الجدول (3) :

3) .

	S_1	S_2	S_3	S_4	K_i
P_1	76 $-$ 1000	55 5500	82	19 $+$ 500	7000
P_2	42 $+$	25	53 1500	29 $-$ 4500	6000
P_3	31	19	20 2500	53	2500
D_j	1000	5500	4000	5000	15500

لدينا :

$V_1+W_1 = 76$
$V_1+W_2 = 55$
$V_1+W_4 = 19$
$V_2+W_3 = 53$
$V_2+W_4 = 29$
$V_3+W_3 = 20$
$V_1 =0 ,W_1 =76 ,W_2 =55 ,W_4 =19 ,V_2 =10,W_3 =43 ,\ V_3 = -23$

$V_i+W_j - C_{ij}$	**المسارات غير المستعملة**
$0+43-82 = -39$	1.3
$10+76-42 = 44$	2.1
$10+55-25 = 40$	2.2
$-23+76-31 = 22$	3.1
$-23+55-19 = 13$	3.2
$-23+19-53 = -57$	3.4

أفضل مسار هو المسار (*2.1*) , ننتقل إلى الجدول (*4*) الموالي:

4) .

	S_1	S_2	S_3	S_4	K_i
P_1	76	55 $-$ 5500	82	19 $+$ 1500	7000
P_2	42 1000	25 $+$	53 1500	29 $-$ 3500	6000
P_3	31	19	20 2500	53	2500
D_j	1000	5500	4000	5000	15500

لدينا :

$$V_1+W_2 = 55$$
$$V_1+W_4 = 19$$
$$V_2+W_1 = 42$$
$$V_2+W_3 = 53$$
$$V_2+W_4 = 29$$
$$V_3+W_3 = 20$$

$$V_1 = 0 , W_2 = 55 , W_4 = 19 , V_2 = 10 , W_1 = 3 , W_3 = 43 , V_3 = -23$$

$V_i+W_j - C_{ij}$	**المسارات غير المستعملة**
$0+32-76 = -44$	1.1
$0+43-82 = -39$	1.3
$10+55-25 = 40$	2.2
$-23+32-31 = -22$	3.1
$-23+55-19 = 13$	3.2
$-23+19-53 = -57$	3.4

أفضل مسار هو المسار (*2.2*) , ننتقل إلى الجدول (*5*) الموالي:

5) .

	S_1	S_2	S_3	S_4	K_i
P_1	76	55 − 2000	82 +	19 5000	7000
P_2	42 1000	25 + 3500	53 − 1500	29	6000
P_3	31	19	20 2500	53	2500
D_j	1000	5500	4000	5000	15500

لدينا :

$$V_1+W_2 = 55$$
$$V_1+W_4 = 19$$
$$V_2+W_1 = 42$$
$$V_2+W_2 = 25$$
$$V_2+W_3 = 53$$
$$V_3+W_3 = 20$$

$$V_1 = 0, W_2 = 55 , W_4 = 19 , V_2 = -30, W_1 = 72 , W_3 = 83 , V_3 = -63$$

المسارات غير المستعملة	$V_i+W_j - C_{ij}$
1.1	$0+72-76 = -4$
1.3	$0+83-82 = 1$
2.4	$-30+19-29 = -40$
3.1	$-63+72-31 = -22$
3.2	$-63+55-19 = -27$
3.4	$-63+19-53 = -97$

أفضل مسار هو المسار (*1.3*) , ننتقل إلى الجدول (*6*) الموالي:

6) .

	S_1	S_2	S_3	S_4	K_i
P_1	76	55 / 500	82 / 1500	19 / 5000	7000
P_2	42 / 1000	25 / 5000	53	29	6000
P_3	31	19	20 / 2500	53	2500
D_j	1000	5500	4000	5000	15500

لدينا :

$$V_1+W_2 = 55$$
$$V_1+W_3 = 82$$
$$V_1+W_4 = 19$$
$$V_2+W_1 = 42$$
$$V_2+W_2 = 25$$
$$V_3+W_3 = 20$$

$$V_1 =0 ,W_2 =55 ,W_3 =82,W_4 =19 ,V_2 =-30,W_1= 72 ,V_3 = -62$$

المسارات غير المستعملة	$V_i+W_j - C_{ij}$
1.1	$0+72-76 = -4$
2.3	$0+82-53 = -1$
2.4	$-30+19-29 = -40$
3.1	$-62+72-31 = -21$
3.2	$-62+55-19 = -26$
3.4	$-62+19-53 = -96$

إذن الجدول (*6*) يمثل الحل الأمثل لأن كل قيم ($V_i+W_j - C_{ij}$) سالبة أو معدومة , لا ننسى (الفقرة 1 . 2) أنه عند الحل الأمثل نصادف في كل المسارات حالتين فقط ($V_i+W_j < C_{ij}$ و $V_i+W_j = C_{ij}$).

2 . 3 حالات خاصة :

إن الطرق التي استعرضناها سابقا تضمن الحصول على حل أمثل , و لكن تحت عدة شروط منها أن يكون النموذج متوازن أي أن العرض يساوي الطلب , و في الحقيقة هذه الحالة نادرة الوقوع إذ في أغلب الأحيان هناك عدم توازن بين العرض و الطلب.

أيضا من أهم ما تواجهه مشاكل النقل أن يكون الحل الابتدائي حل مفكك يعرقل كلية عملية التقدم نحو الحل الأمثل حيث نجد أنفسنا ندور في حلقة مفرغة و نعود إلى نفس الحلول.

2 . 3 . 1 حالة عدم التوازن :

عندما يكون مجموع العرض $(\sum K_i)$ يختلف عن مجموع الطلب $(\sum D_j)$, فإنه يتم استخدام تقنية بسيطة تعيد مشكلة النقل إلى حالة التوازن و ذلك من خلال إضافة نقطة وصول وهمية أو نقطة انطلاق وهمية.

لنعد إلى المثال السابق بإجراء تعديل طفيف حيث نضع $K_3 = 3000$ (عوض 2500) , و بهذا تصبح طاقة العرض الكلية (16000) أكبر من طاقة الطلب الكلية (15500) , ومنه فإن جزءا من طاقة العرض (500) لن يتم نقله (أو لن يتم إنتاجه أصلا) لذلك سوف نخصص له نقطة وصول وهمية S_5 طاقتها $D_5 = 500$ إلى جدول النقل الأساسي و منه نحصل على جدول التكاليف الوحدوية الموالي :

الجدول 4 . 6 : تكاليف النقل الوحدوية (حالة عدم التوازن)

الوحدة : دج

	نقاط الوصول					
وهمي	غرداية	عنابه	وهران	الجزائر		
0	19	82	55	76	تيارت	نقاط الانطلاق
0	29	53	25	42	الجلفة	
0	53	20	19	31	سعيدة	

ثم بعد ذلك نقوم باستخدام أحد الطرق السابقة في الحل بطريقة معتادة لنحصل في الأخير على جدول الحل الأمثل التالي :

الجدول 4 . 7 :الحل الأمثل (حالة عدم التوازن)

	S_1	S_2	S_3	S_4	S_5	K_i
P_1	76	55 500	82 1000	19 5000	0 500	7000
P_2	42 1000	25 5000	53	29	0	6000
P_3	31	19	20 3000	53	0	3000
D_j	1000	5500	4000	5000	500	16000

و هذا الحل يعني أن *500* وحدة من مصنع الإنتاج P_1 لن يتم نقلها (أو لن يتم إنتاجها).

2 . 3 . 2 حالة تفكك (*Dégénérescence*) :

إن كل حل قاعدي مفكك عدد متغيراته القاعدية أقل من عدد القيود المستقلة خطيا ($m.n<m+n-1$) , و يمكن أن تحدث هذه الحالة عندما تكون طاقة أحد نقاط الانطلاق تساوي طاقة أحد نقاط الوصول ($K_i = D_j$) , مثلما حدث في الجدول 4 . 4 , و ذلك لأن عملية اختيار X_{ij} في خانة التقاطع قد يؤدي إلى إشباع القيدين معا (K_i , D_j) , كما يمكن حدوثها أيضا عندما يكون مجموع l ($l<m$) نقطة انطلاق يساوي مجموع h ($h<n$) نقطة وصول.

عندما تواجه مشكلة نقل حالة مثل هذه فإن طريقة الشكل المختلط لا يمكن تطبيقها , أما طريقة المسار المتعرج فهي الأخرى تواجه خطر الدوران في حلقة مغلقة , لذلك و من أجل تجنبها تستخدم تقنية بسيطة تساعدنا على التخلص منها و تكمن في إضافة كمية ضئيلة و لتكن e إلى أحد المسارات غير مشبعة (فارغة) ثم نقوم باستخدام إحدى الطرق السابقة في الحل بطريقة عادية , و عندما نصل إلى الحل الأمثل ننزع e .

يتم تطبيق هذه التقنية و باستخدام طريقة المسار المتعرج كما يلي :

1) . جدول الحل الابتدائي :

	S_1	S_2	S_3	S_4	K_i
P_1	76	55	82 e	19 7000	7000
P_2	42 1000	25 + 3000	53 − 2000	29	6000
P_3	31	19 − 2500	20 + 	53	2500
D_j	1000	5500	2000	7000	15500

2) .

	S_1	S_2	S_3	S_4	K_i
P_1	76	55	82 e	19 7000	7000
P_2	42 − 1000	25 + 5000	53	29	6000
P_3	31 + 	19 − 500	20 2000	53	2500
D_j	1000	5500	2000	7000	15500

3) .

	S_1	S_2	S_3	S_4	K_i
P_1	76	55	82 e	19 7000	7000
P_2	42 500	25 5500	53	29	6000
P_3	31 500	19	20 2000	53	2500
D_j	1000	5500	2000	7000	15500

و في الجدول الأخير ننزع e و نحصل على جدول الحل الأمثل

جدول الحل الأمثل :

	S_1	S_2	S_3	S_4	K_i
P_1	76	55	82	19 7000	7000
P_2	42 500	25 5500	53	29	6000
P_3	31 500	19	20 2000	53	2500
D_j	1000	5500	2000	7000	15500

المراجع:

1- ابراهيم العيد، استخدام الاساليب الكمية عن القرارات الادارية، قسم ادارة الاعمال، جامعة الاسكندرية،2004.

2- احمد محمد غنيم، المفاهيم العلمية والتطبيقات الادارية، الجزء الاول، كلية التجارة جامعة المنصورة 2009-2010.

3- دلال صادق الجواد، حميد ناصر الفتال، بحوث العمليات،عمان، الاردن، طبعة 2008.

4-الكواز احمد، برنامج تدريبي "أسلوب متابعة تنفيذ المشروعات"، المعهد العربي للتخطيط، 1998.