جامعة الجزائر 03

كلية العلوم الاقتصادية والعلوم التجارية وعلوم التسيير

قسم العلوم التجارية

مطبوعة دروس مقدمة لطلاب السنة الاولى ماستر

تخصص مالية المؤسسة

تحت عنوان:

بحوث العمليات

من إعداد الأستاذ: العايب ياسين

السنة الدراسية: 2019/2018

الفهرس

مقدمة:

هذا العمل عبارة عن مطبوعة دروس موجهة لطلاب السنة الأولى ماستر ، كما أن هذا العمل المتواضع يدخل في صدد تذليل بعض العقبات و العراقيل التي تصادف طلبتنا الجامعيين في بعض المقاييس الكمية، و لعل من أهمها مقياس بحوث العمليات و الذي تكمن صعوبته في اعتماده على الطرق الرياضية بشكل شبه مطلق مما يتطلب تركيزا أدق و جهدا أكبر.

و لقد قسمنا هذا العمل إلى محورين من هذا المقياس ، ففي المحور الأول عرضنا نماذج برمجة الأعداد الصحيحة مع بعض الأمثلة الأكثر شيوعا ، ثم في المحور الثاني استعرضنا الشبكات طرق و خوارزميات حلها و حتى و إن كانت هناك خوارزميات متوفرة على شكل برامج معلوماتية لحلها إلا أننا لا نستطيع الاستغناء عن معرفة كيفية عملها ، ذلك لأن فهمها يساعدنا في تحليل و شرح النتائج فيما بعد.

و لترسيخ كل الدروس التي وردت في هذه المطبوعة عمدنا إلى حل عدد معتبر من الأمثلة و التمرينات بطريقة منهجية و مبسطة إلى غاية الحدود .

و في الأخير نرجو من الله العلي القدير أن يكون قد و فقنا في إخراج هذا العمل المتواضع إلى النور و أن يستفيد منه من يحتاج إليه سواء كانوا طلابا أو أساتذة أو غيرهم و نعتذر مسبقا عن كل الأخطاء التي قد ترد ضمن هذه المطبوعة

.

المحور الاول : نماذج برمجة الأعداد الصحيحة

في نماذج البرمجة الخطية من بين فرضياتها اشتراط مبدأ التجزيء , و الذي يعني أن قيم المتغيرات الأساسية يمكن أن تأخذ أي قيم حقيقية مستمرة موجبة , إلا أنه في حالات كثيرة يجب أن تكون قيم الحل الأمثل عبارة عن أعداد صحيحة , فمثلا مخطط إنتاج أمثل لمؤسسة تصنع السيارات يقودنا إلى إنتاج *65.13* سيارة و *25.74* شاحنة غير مقبول.

في الحقيقة قد يقترح البعض تجاوز هذه المشكلة بتقريب هذه القيم إلى أقرب عدد صحيح (مثلا إنتاج *65* سيارة و *26* شاحنة) , لكن هذه الطريقة لا تضمن لنا أن يكون هذا الحل حلا أمثل (لأنه قد يخترق أحد القيود و خاصة إذا كان أحد القيود معادلة) , بالإضافة إلى ذلك قد يكون هناك حلا آخر ذو أعداد صحيحة و أفضل من هذا الحل المقرب (فمثلا قد يكون الحل الأمثل هو إنتاج *73* سيارة و *20* شاحنة) , و حتى إذا تجاوزنا هذه المشاكل فهناك بعض الحالات أين يستحيل معها تقريب القيم إلى أعداد صحيحة و خاصة إذا كان أحد أو بعض المتغيرات الأساسية للنموذج متغيرات من النوع (*binaire 0 , 1*) .

بمأن نماذج البرمجة الخطية تضمن فقط عدم سلبية المتغيرات في حين أننا نشترط في هذه النماذج أن تكون بالإضافة إلى عدم السلبية أعداد صحيحة , فإننا بحاجة إلى طرق و تقنيات جديدة تأخذ هذا الشرط الجديد بعين الاعتبار.

إذن فنماذج برمجة الأعداد الصحيحة ما هي إلا نماذج برمجة خطية معتادة مضافا إليها شرطية العدد الصحيح لمتغيرات الحل الأمثل :

نموذج برمجة أعداد صحيحة	≡ نموذج برمجة خطية +	X_i عدد صحيح

إذن في هذا الفصل سوف نستعرض أمثلة عن بعض أهم تطبيقات هذا النوع من النماذج , ثم نستعرض أهم الطرق المستعملة في حلها , و لكن قبل ذلك سوف نتطرق إلى الشكل العام لنماذج برمجة الأعداد الصحيحة.

1 . الشكل العام لنماذج برمجة الأعداد الصحيحة :

هو عبارة عن نموذج برمجة خطية مضافا إليه شرط العدد الصحيح لأحد أو بعض أو كل المتغيرات الأساسية :

$Max\ (\ ou\ Min)\ Z = c_1X_1 + c_2X_2 + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots + c_nX_n$.

S.C

$$\sum_{j=1}^{n} aijX_j \left(\le, =, \ge\right)\ b_i \qquad i=1,\ldots\ldots,m$$

$X_j \ge 0\ ,\ j=1,2,\ldots\ldots\ldots,n.$

X_j **entier (عدد صحيح) ; $j = 1,..,p$ ($p \le n$)**

نلاحظ أن الفرق الوحيد بين النموذجين هو الشرط الأخير, فإذا كان ($p = n$) يسمى هذا النموذج نموذج برمجة الأعداد الصحيحة, أما إذا كان ($p < n$) يسمى نموذج برمجة أعداد صحيحة جزئي .(*partiel*)

2 . بعض تطبيقات برمجة الأعداد الصحيحة:

هناك تطبيقات لا حصر لها في برمجة الأعداد الصحيحة و سوف نستعرض هنا بعض الأمثلة لنتعلم كيفية تشكيل هذه النماذج , و خاصة كيفية ترجمة قيود أي مسألة رياضيا :

2 . 1 مشاكل تقييم المشاريع :

في الفصل السابق تطرقنا إلى مشاكل النقل أين يتم نقل سلع من نقاط انطلاق (مصانع إنتاج مثلا) نحو نقاط وصول (مخازن مثلا) , و حصلنا على شكله العام كما يلي :

$$MaxZ = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} C_{ij} X_{ij}$$

S.C

$$\sum_{j=1}^{n} X_{ij} \le K_i \quad ; \quad i = 1,\ldots,m$$

$$\sum_{i=1}^{m} X_{ij} = D_j \quad ; \quad j = 1,\ldots,n$$

$$X_{ij} \ge 0 \quad ; i = 1,\ldots..,m \quad , \quad j = 1,\ldots..,n$$

لنفترض أنه لدينا في هذا النموذج m مصنع يمول n مخزن , المصنع رقم i طاقته الإنتاجية K_i و المخزن رقم j طاقة استيعابه D_j , و هدفنا في هذا النموذج هو تدنية التكاليف إلى أدنى ما يمكن و لتكن Z , و C_{ij} تكلفة نقل وحدة واحدة من المصنع رقم i نحو المخزن رقم j , و في الأخير X_{ij} عدد الوحدات المنقولة عبر هذا المسار.هذا النموذج يعبر ببساطة عن مشكلة نقل سلع من نقاط انطلاق نحو نقاط وصول فقط , في حين أنه يمكن استغلاله في حساب تكاليف أخرى عدا تكاليف النقل.

لنفترض أن مؤسسة ما قيد الإنشاء لديها m قطعة أرض موزعة جغرافيا في مناطق مختلفة من أجل أن تبني عليها مصانع إنتاج منتج ما حيث أن كل قطعة منها تكفي لبناء مصنع واحد , الكميات المنتجة من هذه المنتج يتم نقلها فيما بعد إلى عدد من المخازن المتفرقة التي قامت بشرائها هذه المؤسسة مؤخرا , إذن فكلما تم بناء عدد أكبر من المصانع كلما انخفضت تكلفة النقل الكلية نحو المخازن , و لكن عملية بناء مصنع ليست بالأمر الهين و على هذه المؤسسة أن تختار أي الأماكن الواجب اختيارها لإقامة هذه المصانع من أجل تخفيض تكاليف البناء و النقل معا.

لنفترض أيضا أن المصنع i طاقته الإنتاجية K_i و مجموع تكاليف بنائه و تشغيله F_i , و بالإضافة إلى تكاليف النقل المعتادة C_{ij} هناك تكاليف الصيانة حيث أن تكلفة كل مسار (ij) هي E_{ij} و هي تكلفة ثابتة (مستقلة عن عدد الوحدات المنقولة) موجبة في حالة استعمال المسار , و معدومة في حالة عدم استعمال المسار كلية أي :

$$X_{ij} > 0 \Rightarrow E_{ij} > 0$$

$$X_{ij} = 0 \Rightarrow E_{ij} = 0$$

نلاحظ في هذا المثال أن نشاطات هذه المؤسسة تنقسم وفق مرحلتين متعاقبتين , نشاطات تتعلق بعملية بناء المصانع ثم في مرحلة موالية نشاطات متعلقة بنقل المنتجات , و عملية اتخاذ القرار الخاص بنشاطات المرحلة الأولى هو ضرورة الاختيار بين بناء أو عدم بناء المصنع i و للتعبير عن ذلك رياضيا نستعين بالمتغيرات الثنائية (لا نقصد هنا متغيرات الشكل الثنائي و إنما متغيرات من النوع $(0\ ,\ 1)$ و لتكن $Y_i\ ;\ i=1,\dots,m$ حيث :

. $Y_i = 1$: بناء المصنع i .

. $Y_i = 0$: عدم بناء المصنع i .

أما فيما يخص نشاطات المرحلة الثانية فعملية اتخاذ القرار تتعلق باختيار أي المسارات الواجب استعمالها , و هذا يعني أننا سوف نبقي على المتغيرات السابقة X_{ij} و التي نفترض أنها لا يشترط أن تكون ذات أعداد صحيحة.

الآن نقوم ببناء دالة الهدف التي يجب أن تأخذ بعين الاعتبار قرارات البناء و قرارات النقل معا , و لكن عملية ربط تكاليف الصيانة E_{ij} مع عدد الوحدات المنقولة X_{ij} تبدوا صعبة نوعا ما لأننا لا نعرف مسبقا إن كان هذا المسار سوف يستعمل أم لا , و لتجاوز هذه المشكلة سوف نضطر إلى إضافة متغيرات ثنائية جديدة $(0\ ,\ 1)$ و لتكن t_{ij} حيث :

. $t_{ij} = 1$: إذا تم استعمال المسار ij .

. $t_{ij} = 0$: إذا لم يستعمل المسار ij .

الآن يمكن الحصول على دالة الهدف الجديدة كما يلي :

$$MinZ = \sum_{i=1}^{m} F_i Y_i + \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}\left(C_{ij} X_{ij} + E_{ij} t_{ij}\right)$$

فيما يخص قيود النموذج السابق فإن قيود العرض (طاقة الإنتاج) يتم إجراء تعديل طفيف عليها كما يلي :

$$\sum_{j=1}^{n} X_{ij} \le K_i Y_i \quad ; \quad i = 1,\dots,m$$

إن قيود العرض بهذا الشكل تعني أنه إذا تم بناء المصنع i يصبح $Y_i = 1$ للقيد رقم i و بالتالي نحصل على القيد السابق $\sum_{j=1}^{n} X_{ij} \le K_i$, أما إذا لم يتم بناء هذا المصنع فإن $Y_i = 0$ و $X_{ij} = 0$ (لأنه لن يحصل أي نقل من مصنع غير موجود) و منه يصبح هذا القيد ($0 \le 0$) غير موجود.

أما فيما يخص قيود الطلب (نقاط الوصول) و قيود السلبية تبقى على حالها لا تتغير :

$$\sum_{i=1}^{m} X_{ij} = D_j$$

في الأخير القيود الخاصة بالمتغيرات الثنائية التي تم إضافتها إلى دالة الهدف يتم ترجمتها رياضيا كما يلي $(Y_i\ ,\ t_{ij})$:

. قيد المتغير t_{ij} : $X_{ij} \le M t_{ij}$, حيث M أكبر عدد ممكن موجب.

إذا كان $X_{ij} > 0$ فإن $t_{ij} > 0$ (لأن $M > 0$) و بمأن t_{ij} متغير ثنائي يأخذ قيمتين فقط 1 أو 0 فحتما $t_{ij} = 1$.

أما إذا كان $X_{ij} = 0$ فإن $t_{ij} \ge 0$ و هذا يعني أن $t_{ij} = 1$ أو $t_{ij} = 0$, ولكن بمأن دالة الهدف هي تدنية التكاليف فإنه يستحيل في الحل الأمثل اختيار $t_{ij} = 1$ و منه يكون $t_{ij} = 0$, إذن رياضيا نكتب :

$$X_{ij} > 0 \Rightarrow t_{ij} = 1$$

$$X_{ij} = 0 \Rightarrow t_{ij} = 0$$

و نحصل في الأخير بعد جمع دالة الهدف و كل القيود السابقة على النموذج التالي :

$$MinZ = \sum_{i=1}^{m} F_i Y_i + \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} \left(C_{ij} X_{ij} + E_{ij} t_{ij} \right)$$

$S.C$

$$\sum_{j=1}^{n} X_{ij} \le K_i Y_i \quad ; \quad i = 1, \ldots., m$$

$$\sum_{i=1}^{m} X_{ij} = D_j \quad ; \quad j = 1, \ldots., n$$

$$X_{ij} \le Mt_{ij}$$

$$Y_i = 1 , 0 \qquad ; \quad i = 1, \ldots., m$$

$$t_{ij} = 1 , 0$$

$$X_{ij} \ge 0 \quad ; \quad i = 1, \ldots., m \ , \ j = 1, \ldots., n$$

نلاحظ أن هذا نموذج برمجة أعداد صحيحة جزئي , لأنه يشترط أن تكون قيم المتغيرات Y_i و t_{ij} في الحل الأمثل أعداد صحيحة , بينما لا يشترط ذلك في المتغيرات X_{ij} (متغير حقيقي مستمر).

2 . 2 مشاكل الاختيار الثنائي (*choix dichotomique*) :

لفهم كيفية تشكيل هذا النوع من المشاكل سوف نستعين بالمثال التالي :

مثال . 1 :

لنفترض لدى مؤسسة ما سلسلة إنتاج عبر تمرير *3* منتجات مختلفة و لتكن *C , B , A* عبر *4* آلات مختلفة بطريقة متتالية كل منها تنجز عملا مختلفا مرقمة من *1* إلى *4* , الجدول الموالي يوضح الوقت اللازم لكل منتج على كل آلة (الوحدة : سا) :

الجدول . 1 :

	1	2	3	4
A	7	0	5	3

2	0	5	4	B
0	3	6	0	C

فمثلا المنتج B يستغرق 4 ساعات على الآلة 1 , و 5 ساعات على الآلة 2 , و لا يمر عبر الآلة 3 , و في الأخير ساعتين على الآلة 4 .

كل آلة لا تستطيع أن تشتغل على أكثر من منتج , و على كل منتج أن يمر عبر الآلات المبرمجة في مخطط إنتاجه حسب الجدول بالتسلسل , و بطبيعة الحال يمكن لآلة ما أن تكون في حالة انتظار استقبال منتج معين.

من خلال عرض هذه المسألة يبدوا واضحا أننا نبحث عن كيفية ترتيب تقديم مختلف المنتجات على مختلف الآلات من أجل إنهاء العمل في أقل وقت ممكن (في الفصل القادم سوف نتطرق إلى طرق خاصة و أكثر سهولة في كيفية تشكيل و حل هذا النوع من المشاكل).

لتكن X_{ij} نقطة في معلم أزمنة مبدأه النقطة $t = 0$, حيث X_{ij} هي لحظة دخول المنتج i إلى الآلة j .$(i=1,2,3\ ;\ j=1,2,3,4)$

أولا : سوف نقوم ببناء القيود التي تضمن ترتيب كل منتج بالتسلسل على الآلات المبرمجة, فمثلا المنتج A يمر أولا عبر الآلة 1 ثم الآلة 2 ثم الآلة 4, و نعبر عن ذلك رياضيا كما يلي :

$$X_{11}+7 \le X_{13}$$
$$X_{13}+5 \le X_{14}$$

و هكذا نفعل أيضا مع المنتج B و C :

$$X_{21}+4 \le X_{22}$$
$$X_{22}+5 \le X_{24}$$
$$X_{32}+6 \le X_{33}$$

ثانيا : الآن سوف نقوم ببناء القيود التي تضمن لنا أن كل آلة لا تشتغل على أكثر من منتج , فمثلا الآلة 1 لا تستقبل المنتج B إلا بعد الانتهاء من المنتج A أو العكس , و هذا يعني أنه عند دخول الآلة 1 إما المنتج A يسبق B أو أن المنتج B يسبق A و نعبر عن ذلك رياضيا عبر القيدين التاليين :

$$X_{21}+4 \le X_{11} \quad \text{أو} \quad X_{11}+7 \le X_{21}$$

في الحقيقة ما زالت هنا مشكلة الاختيار بين القيود فعبارة (**أو**) بين القيدين يجب ترجمتها هي الأخرى رياضيا , و للقيام بذلك سوف نستعين بالمتغيرات الثنائية $(0\ ,\ 1)$ و لتكن Y_j كما يلي :

$$X_{11}+7 - X_{21} \le MY_1$$

$$X_{21}+4 - X_{11} \le M(1 - Y_1)$$

إذن لو تم اختيار القيد الأول أي أن المنتج A يسبق المنتج B , فيجب أن تكون $Y_1 = 0$ و منه يصبح هذا القيد : $X_{11}+7 \le X_{21}$

أما القيد الثاني فيصبح : $X_{21}+4 - X_{11} \le M$ و هي محققة دائما مهما يكن X_{ij} (لأن M أكبر عدد ممكن) .

و بمأنه لدينا 4 آلات سوف نحتاج إلى 3 متغيرات ثنائية أخرى Y_2 , Y_3 , Y_4 للتعبير عن باقي القيود كما يلي :

$$X_{22}+5 - X_{32} \le MY_2$$

$$X_{32}+6 - X_{22} \le M(1 - Y_2)$$

$$X_{33}+3 - X_{13} \le M(1 - Y_3)$$

$$X_{14}+3 - X_{24} \le MY_4$$

$$X_{24}+2 - X_{14} \le M(1 - Y_4)$$

و من أجل بناء دالة الهدف نلاحظ أن المنتج A يصبح جاهزا كلية في اللحظة $X_{14}+3$, و المنتج B في اللحظة $X_{24}+2$, و المنتج C في اللحظة $X_{33}+3$, و منه تصبح دالة الهدف على الشكل التالي :

$$Min\ Z = max\ \{X_{14}+3\ ,\ X_{24}+2\ ,\ X_{33}+3\}$$

واضح أن هذه الدالة غير خطية و غير مقبولة في نماذج البرمجة الخطية و لا في نماذج برمجة الأعداد الصحيحة لذلك سوف نعيد صياغتها على الشكل الخطي كما يلي :

$Min\ Z = X$

$S.C$

$X \ge X_{14}+3$

$X \ge X_{24}+2$

$X \geq X_{33}+3$

$X \geq 0$

و بجمع هذه القيود و القيود السابقة نحصل على النموذج الكامل الموالي :

$$Min\ Z = X$$

$$S.C$$

$$\begin{array}{ll}
X_{11}+7 \leq X_{13} & X_{11}+7 - X_{21} \leq MY_1 \\
X_{13}+5 \leq X_{14} & X_{21}+4 - X_{11} \leq M(1 - Y_1) \\
X_{21}+4 \leq X_{22} & X_{22}+5 - X_{32} \leq MY_2 \\
X_{22}+5 \leq X_{24} & X_{32}+6 - X_{22} \leq M(1 - Y_2) \\
X_{32}+6 \leq X_{33} & X_{13}+5 - X_{33} \leq MY_3 \\
X \geq X_{14}+3 & X_{33}+3 - X_{13} \leq M(1 - Y_3) \\
X \geq X_{24}+2 & X_{14}+3 - X_{24} \leq MY_4 \\
X \geq X_{33}+3 & X_{24}+2 - X_{14} \leq M(1 - Y_4)
\end{array}$$

$$Y_j = 1 , 0 \ ; j = 1,2,3,4.$$

$$X_{ij} \geq 0 \quad ; i = 1,2,3 \ , \ j = 1,2,3,4.$$

2 . 3 الحالات الأكثر شيوعا لاستخدام المتغيرات الثنائية ($Y_i = 1 , 0$) :

في المثال السابق تعلمنا كيف نعبر رياضيا و على الشكل الخطي عملية الاختيار بين قيدين , و هذه الحالة ما هي إلا حالة خاصة من عدد لا حصر له من الحالات التالية :

أ) بصفة عامة عندما نكون بصدد اختيار K قيد من بين m قيد يمكن ترجمتها رياضيا بسهولة وذلك بالاستعانة بالمتغيرات الثنائية Y_i كما يلي :

. $Y_i = 0$: إذا تم اختيار القيد i .

. $Y_i = 1$: إذا تم رفض القيد i .

و نحصل على القيود المعدلة كما يلي :

$$f_i(X_1 , X_2 ,..,X_n) \leq b_i+MY_i \quad ; \quad i = 1,\ldots,m$$

$$Y_1+Y_2+\ldots\ldots Y_m = m - K$$

ب) في قيد معين لو كنا بصدد اختيار قيمة معينة للطرف الأيمن لهذا القيد (b_i) من بين عدة قيم و لتكن l قيمة مختلفة:

$$f(X_1 , X_2 , ..., X_n) \le b_1 , b_2 , ..., \text{ أو } b_l$$

و دائما بالاستعانة بالمتغيرات الثنائية Y_i عددها l $(i=1,..,l)$ كما يلي:

. $Y_i = 1$: الطرف الأيمن للقيد i هو b_i.

. $Y_i = 0$: الطرف الأيمن للقيد i هو قيمة أخرى.

يمكن الآن ترجمة الاختيار رياضيا كما يلي :

$$f(X_1, X_2, ..., X_n) \le \sum_{i=1}^{l} b_i Y_i$$

$$Y_1+Y_2+.........+Y_l = 1$$

ت) إن عملية اتخاذ قرارات إنجاز استثمارات معينة من عدمها تعتبر أفضل الحالات التي يتم فيها الاستعانة بنماذج برمجة الأعداد الصحيحة و مثلما فعلنا سابقا سوف نحتاج إلى المتغيرات الثنائية عددها بعدد الاستثمارات المراد إنجازها كما يلي :

. $Y_i = 1$: إنجاز الاستثمار رقم i .

. $Y_i = 0$: عدم إنجاز الاستثمار i .

ت . 1) لا نستطيع إنجاز أكثر من K من بين m استثمار مقترح , و نترجم هذا رياضيا كما يلي :

$$\sum_{i=1}^{m} Y_i \le K$$

ت . 2) لا يتم إنجاز الاستثمار 4 مثلا إذا لم يتم إنجاز الاستثمار 3 , رياضيا نكتب :

$$Y_4 \le Y_3$$

ت . 3) الاستثمار 3 و الاستثمار 4 متنافيين , أي أنه إذا تم إنجاز الاستثمار 3 فلن ينجز الاستثمار 4 و العكس , تكتب : $Y_3+Y_4 \le 1$

ت . 4) الاستثمار 5 لا ينجز إلا إذا أنجز أحد الاستثمارين 3 أو 4 , نكتب رياضيا :

$$Y_5 \le Y_3+Y_4$$

3 . حل نماذج برمجة الأعداد الصحيحة :

3 . 1 الحل الهندسي لنموذج برمجة الأعداد الصحيحة :

من أجل فهم طرق حل هذا النوع من النماذج سوف نستعين بالمثال البسيط التالي و هو نموذج برمجة أعداد صحيحة :

مثال . 2 : $Max\ Z = 3X_1+4X_2$

$S.C$

$X_1+3X_2 \le 13$ ------ (1)

$5X_1+2X_2 \le 20$ ------ (2)

$X_1 , X_2 \ge 0$

X_1 , X_2 أعداد صحيحة

أولا سوف نقوم بحل هذا النموذج هندسيا بنفس الطريقة التي نحل بها نماذج البرمجة الخطية , فإذا وجدنا أن قيم المتغيرات الأساسية للنموذج في الحل الأمثل أعداد صحيحة فهو أيضا الحل الأمثل لنموذج برمجة الأعداد الصحيحة , أما في حالة حصلنا على أعداد غير صحيحة , هنا تدخل التقنيات الجديدة التي سوف نتطرق لها في هذا الفصل للبحث عن حل أمثل قيم متغيراته أعداد صحيحة.

إذن من الشكل الموالي المنطقة المضللة *OABC* تمثل منطقة الحلول الممكنة (غير مشروطة أن تكون أعداد صحيحة) و الحل الأمثل لهذا النموذج هو نقطة تقاطع مستقيم القيدين (*1*) و (*2*) :

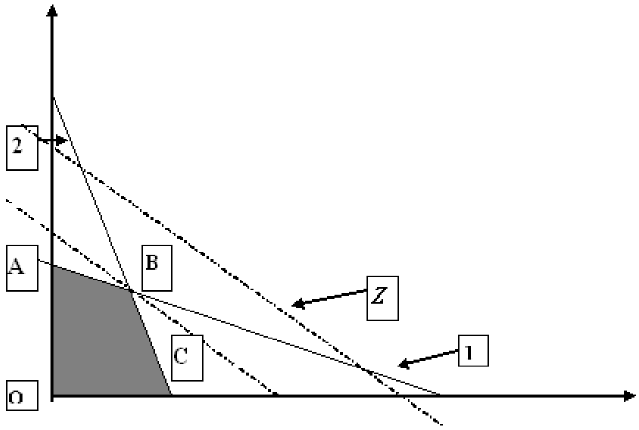
$Z = 282/13\ ,\ X_2 = 45/13\ ,\ X_1 = 34/13$.

قد يعمد البعض إلى تقريب هذه القيم إلى عدد صحيح لنحصل على حل أمثل ذو أعداد صحيحة مقبول وهو: $Z = 18\ ,\ X_2 = 3\ ,\ X_1 = 2$ (النقطة $D(2,3)$ في الشكل), لكن لو حاولنا إزاحة خط دالة الهدف في الشكل نحو نقطة المبدأ فإن أول نقطة سوف يشملها إحداثياتها أعداد صحيحة هي النقطة *E* و نحصل عندها على الحل الموالي :

$Z = 19\ ,\ X_2 = 4\ ,\ X_1 = 1$, و هذا يعني أن النقطة *E* هي التي تمثل الحل الأمثل ذو أعداد صحيحة و ليس الحل المقرب (النقطة *D*).

ملاحظة : نلاحظ أن قيمة دالة الهدف لنموذج برمجة أعداد صحيحة دائما أقل أو يساوي من قيمة دالة الهدف لنموذج البرمجة الخطية المقابل له.

الشكل . 1 :



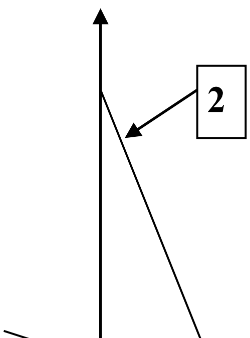
و باستخدام طريقة *simplex* نحصل على الحل الأمثل في الجدول الموالي:

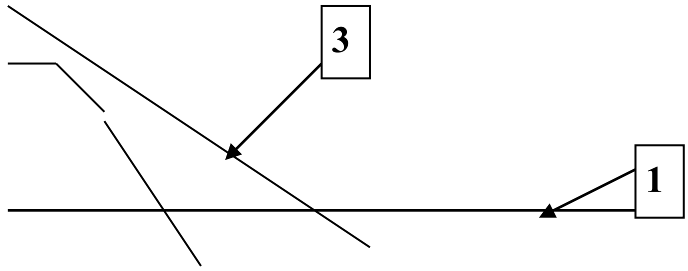
الجدول – 2 : الحل الأمثل

		X_1	X_2	e_1	e_2	
		3	4	0	0	
X_2	4	0	1	15/39	-1/13	**45/13**
X_1	3	1	0	-2/13	3/13	**34/13**
Z_j		3	4	42/39	5/13	
$C_j - Z_j$		0	0	-42/39	-5/13	**282/13**

في الحقيقة إن الحل بالطريقة الهندسية لهذا النوع من النماذج يعتبر أفضل و أسهل الحلول , و لكن بمجرد أن يتجاوز عدد متغيرات النموذج متغيرين تصبح غير قابلة للتطبيق و نضطر إلى اللجوء إلى طرق أخرى في الحل سوف نتطرق لها الآن :

الشكل . 2 :





3 . 2 طريقة المستوي القاطع (*Plan sécant*) :

سنحاول أولا فهم مبدأ هذه الطريقة هندسيا من خلال الشكل 5 . 2 , قلنا فيما سبق أن المنطقة المضللة *OABC* هي منطقة الحلول الممكنة لنموذج البرمجة الخطية الموافق (دون شرط العدد الصحيح) , و الحل الأمثل هو أحد الحلول التي تقع على رؤوس هذا المضلع , و من بين هذه الرؤوس نلاحظ أن النقطتين *O* و *C* فقط تمثل حل ذو أعداد صحيحة.

فرضا لو قمنا بإنشاء مضلع آخر داخل المضلع السابق (*OABC*) بحيث يحتوي على كل الحلول ذات الأعداد الصحيحة و ليكن المضلع (*OFEDC*) , هذا يعني أنه يمكن إيجاد حل أمثل لنموذج برمجة أعداد صحيحة باستخدام طريقة *Simplex* فقط بإضافة القيود الضرورية التي تعبر عن حدود المضلع الجديد , وهي القيود ذات المستقيمات الجديدة *DC , ED , FE* , و النموذج المتحصل عليه يتمتع بالخاصيتين التاليتين :

أ) كل حل ممكن ذو أعداد صحيحة للنموذج الخطي الموافق هو أيضا حل ممكن لنموذج برمجة الأعداد الصحيحة.

ب) كل رؤوس مضلع الحلول الممكنة لنموذج برمجة الأعداد الصحيحة هي حلول ذات أعداد صحيحة ممكنة.

نستنتج من هاتين الخاصيتين أن الحل الأمثل لنموذج برمجة أعداد صحيحة هو حل أمثل ذو أعداد صحيحة لنموذج البرمجة الخطية الموافق.

عمليا ليس من السهل إنشاء المضلع الذي يحتوي على كل الحلول العددية الصحيحة في نماذج تحتوي على عدد كبير من المتغيرات , فالطريقة السابقة تعمل على إنشاء قيد جديد (أو مستوي قاطع)

انطلاقا من الحل الأمثل الأساسي (الذي لا يحتوي على أعداد صحيحة) , ثم حل النموذج المتحصل عليه بطريقة *Simplex* , و هكذا نكرر العملية إلى حين الحصول في الحل الأمثل على كل القيم العددية الصحيحة التي نحتاجها , و هذا يعني أننا بحاجة إلى عدة مستويات قاطعة تتمتع بالخصائص التالية :

أ) تخفض عدد الحلول الممكنة لنموذج البرمجة الخطية الموافق.

ب) مستقيمات القيود الإضافية تمر عبر حلول عددية صحيحة ممكنة.

ت) منطقة الحلول الممكنة تشمل جميع الحلول العددية الصحيحة لنموذج البرمجة الخطية الموافق.

ث) بعد عدة مراحل متدرجة من تطبيق المستويات القاطعة نحصل في الأخير على نموذج يحتوي على حل أمثل عددي صحيح.

إذن بقي لنا الآن معرفة كيفية التوصل إلى العبارة الرياضية للقيود الإضافية, و للقيام بذلك سوف نستعين بالمثال السابق (مثال 5 . 2) و لنأخذ الحل الأمثل (الجدول 5 . 2) , سوف نقوم بإنشاء أول قيد إضافي من خلال شكل أحد القيود في الحل الأمثل و ذلك كما يلي :

أولا نقوم باختيار المتغير القاعدي الذي قيمته في الحل الأمثل تحتوي على أكبر جزء كسري وليكنX_1,

والقيد المتعلق بهذا المتغير في الحل الأمثل هو:

$$X_1+0X_2-(2/13)e_1+(3/13)e_2 = 34/13$$

ملاحظة :

نسمي الجزء الصحيح لعدد حقيقي هو أكبر عدد صحيح أقل أو يساوي هذا العدد , فمثلا الجزء الصحيح للعدد 3.8 هو 3 , -7.3 هو -8 و هكذا مع كل عدد حقيقي , و نسمي الجزء الكسري لعدد حقيقي الفرق بين هذا العدد و جزئه الصحيح , فمثلا الجزء الكسري للعدد 3.8 هو $0.8 = 3 - 3.8$ وللعدد -7.3 هو $0.7 = (-8) - 7.3 -$, و هذا يعني أن الجزء الكسري يكون دائما موجب. نقوم بفصل كل معامل من معاملات هذا القيد إلى جزء صحيح و جزء كسري كما يلي :

$$X_1+(-1+11/13)e_1+(0+3/13)e_2 = (2+8/13)$$

$$X_1 = (1 - 11/13)e_1+ (0 - 3/13)e_2+(2+8/13)$$

الآن نقوم بفصل الأجزاء الصحيحة عن الأجزاء الكسرية كما يلي :

$$X_1 = (e_1+0\ e_2+2)+(-11/13\ e_1-3/13\ e_2+8/13)$$

إذن من أجل حل عددي صحيح الحد $(e_1+0\ e_2+2)$ سوف يكون عدد صحيح , و منه إذا أردنا أن يكون X_1 عدد صحيح يجب أن يكون الحد الثاني $(-11/13\ e_1-3/13\ e_2+8/13)$ عبارة عن عدد

صحيح , هنا نلاحظ أن العدد($8/13$) عدد موجب أقل من الواحد والعبارة ($-11/13\ e_1 - 3/13\ e_2$) هي عدد سالب, فإذا كانت العبارة ($-11/13\ e_1 - 3/13\ e_2+8/13$) هي عدد موجب فحتما سوف تكون عدد كسري أقل من الواحد و بالتالي يستحيل أن تكون عدد صحيح , لذلك فإذا أردنا أن تكون هذه العبارة عدد صحيح فلدينا حظ أوفر لو جعلناها سالبة أي :

$$-11/13\ e_1 - 3/13\ e_2+8/13 \leq 0$$

بهذه الطريقة نكون قد حددنا أول مستوي قاطع و قبل إدخالها كقيد في النموذج الجديد يجب تعويض المتغيرات الإضافية بالمتغيرات الحقيقية للنموذج , لدبنا من النموذج الأساسي :

$$X_1+3X_2+e_1 = 13 \quad \Rightarrow \quad e_1 = 13 - X_1 - 3X_2$$

$$5X_1+2X_2+e_2 = 20 \quad \Rightarrow \quad e_2 = 20 - 5X_1 - 2X_2$$

بالتعويض في العبارة السابقة نحصل على القيد الجديد التالي :

$$-11/13(13 - X_1 - 3X_2) - 3/13(20 - 5X_1 - 2X_2)+8/13 \leq 0$$

$$2X_1+3X_2 \leq 15 \text{ ----- } (3)$$

نلاحظ في الشكل 5 . 2 كيف أن هذا القيد الجديد استطاع أن يخفض منطقة الحلول الممكنة وذلك بحذف جزء كبير من الحلول ذات أعداد غير صحيحة.

الآن نقوم بحل النموذج الجديد (مع القيد الإضافي) بطريقة *Simplex* دائما :

$Max\ Z = 3X_1+4X_2$

$S.C$

$X_1+3X_2 \leq 13$ ------ (1)

$5X_1+2X_2 \leq 20$ ------ (2)

$2X_1+3X_2 \leq 15$ ----- (3)

$X_1 , X_2 \geq 0$

بعد تطبيق طريقة *Simplex* نحصل على الحل الأمثل :

الجدول – 3 : الحل الأمثل

		X_1	X_2	e_1	e_2	e_3	
		3	4	0	0	0	
X_2	4	0	1	0	-2/11	5/11	**35/11**
e_1	0	0	0	1	3/11	-13/11	**8/11**
X_1	3	1	0	0	3/11	-2/11	**30/11**

Z_j	3	4	0	1/11	14/11	
$C_j - Z_j$	0	0	0	-1/11	-14/11	**230/11**

نختار من جديد مستوي قاطع آخر و ذلك باختيار X_1 من جديد لأن له أكبر جزء كسري و كما فعلنا سابقا نختار القيد:

$$X_1 + (3/11)e_2 - (2/11)e_3 = 30/11$$

$$X_1 + (0+3/11)e_2 + (-1+9/11)e_3 = 2+8/11$$

$$X_1 = (e_3+2) + (-3/11e_2 - 9/11e_3 + 8/11)$$

و منه نحصل على القيد الجديد : $-3/11e_2 - 9/11e_3 + 8/11 \leq 0$

و بالتعويض بالقيم الحقيقية للنموذج نحصل على القيد :

$$3X_1 + 3X_2 \leq 17 \text{ ----- } (4)$$

و بعد إضافته إلى النموذج السابق نحصل على النموذج الجديد :

$$Max\ Z = 3X_1 + 4X_2$$

$$S.C$$

$$X_1 + 3X_2 \leq 13 \text{ ------ } (1)$$

$$5X_1 + 2X_2 \leq 20 \text{ ------ } (2)$$

$$2X_1 + 3X_2 \leq 15 \text{ ----- } (3)$$

$$3X_1 + 3X_2 \leq 17 \text{ ----- } (4)$$

$$X_1 , X_2 \geq 0$$

و نحصل على جدول الحل الأمثل :

الجدول – 4 : الحل الأمثل

		X_1	X_2	e_1	e_2	e_3	e_4	
		3	4	0	0	0	0	
X_2	4	0	1	0	0	1	-2/3	**11/3**
e_2	0	0	0	0	1	3	-11/3	**8/3**
X_1	3	1	0	0	0	-1	1	**2**
e_1	0	0	0	1	0	-2	1	**0**
Z_j		3	4	0	0	1	1/3	
$C_j - Z_j$		0	0	0	0	-1	-1/3	**62/3**

نلاحظ هنا أننا حصلنا على حل أمثل فيه قيمة X_1 عدد صحيح , نواصل من جديد و نأخذ المتغير القاعدي X_2 و القيد المتعلق به , و بإتباع نفس الخطوات السابقة نحصل على القيد الجديد :

$$X_1+X_2 \leq 5 \text{ ---- } (5)$$

نضيف هذا القيد لنحصل على النموذج الجديد :

$$Max\ Z = 3X_1+4X_2$$

$S.C$

$$X_1+3X_2 \leq 13 \text{ ------ } (1)$$
$$5X_1+2X_2 \leq 20 \text{ ------ } (2)$$
$$2X_1+3X_2 \leq 15 \text{ ----- } (3)$$
$$3X_1+3X_2 \leq 17 \text{ ----- } (4)$$
$$X_1+X_2 \leq 5 \text{ ---- } (5)$$
$$X_1 , X_2 \geq 0$$

و في الأخير نحصل على جدول الحل الأمثل الموالي :

الجدول – 5 : الحل الأمثل

		X_1	X_2	e_1	e_2	e_3	e_4	e_5	
		3	4	0	0	0	0	0	
X_2	4	0	1	1/2	0	0	0	-1/2	**4**
e_2	0	0	0	3/2	1	0	0	-13/2	**7**
e_3	0	0	0	-1/2	0	1	0	-3/2	**1**
e_4	0	0	0	0	0	0	1	-3	**2**
X_1	3	1	0	-1/2	0	0	0	3/2	**1**
Z_j		3	4	1/2	0	0	0	5/2	
$C_j - Z_j$		0	0	-1/2	0	0	0	-5/2	**19**

الآن فقط وصلنا إلى حل أمثل كل قيمه عبارة عن أعداد صحيحة (بما في ذلك المتغيرات الإضافية, و في الحقيقة كنا نكتفي لو حصلنا فقط على أعداد صحيحة للمتغيرات الأساسية للنموذج فقط X_1 و X_2).

3 . 3 طريقة الفصل و إعادة التقييم (*Séparations et évaluations progressives*) :

مثل الطريقة السابقة فهذه الطريقة تبحث عن حل أمثل عددي صحيح انطلاقا من الحل الأمثل لنموذج البرمجة الخطية الموافق (أي دون شرط العدد الصحيح) , فإذا كانت قيمه أعداد صحيحة فهو نفسه الحل الأمثل الذي نبحث عنها , و في حالة العكس نقوم بما يلي :

ليكن X_h أحد متغيرات النموذج التي كان من المفترض أن تكون قيمتها عدد صحيح في الحل الأمثل , ولكن جاءت على شكل عدد كسري , نرمز لجزئه الكسري بالرمز $[X_h]$ هذا يعني أن :

$$[X_h] \leq X_h \leq [X_h]+1$$

و بطبيعة الحال هذا المجال لا يحتوي على أي قيمة ذات عدد صحيح لأن X_h محصور بين عددين صحيحين متتاليين , و هذا يعني أنه حتى يكون X_h عدد صحيح يجب أن يكون إما : $X_h \leq [X_h]$ أو : $X_h \geq [X_h]+1$.

إذن نستطيع الآن فصل النموذج السابق إلى نموذجين جديدين حيث يحتوي كل نموذج على أحد هذين القيدين (و متنافيين لأن القيدين الجديدين متنافيين حل أحدهما يستحيل أن يكون حلا للآخر) , هذه الطريقة طبعا مثل سابقتها إذ أنها تعمل على حذف عدد لا بأس به من الحلول ذات الأعداد غير الصحيحة.

نقوم بحل كل نموذج على حدى بطريقة *Simplex* مثلا متجاهلين الأخذ بشرط العدد الصحيح , فإذا حصلنا في أحدهما على حل عددي صحيح نأخذه كحل أمثل لهذا النموذج الجزئي و نواصل العمل على النموذج الجزئي الآخر حيث نأخذ متغير كسري كان من المفترض أن يكون عدد صحيح نكرر العملية من جديد و نستخدمه لفصل هذا النموذج الجزئي إلى نموذجين آخرين, فإذا حصلنا في أحد هذين النموذجين عل حل عددي أفضل من الحل العددي السابق نعتمده كحل امثل بدل الحل السابق و نتوقف عنده , ثم نأخذ النموذج الآخر و نواصل العملية إلى أن تكون حلول كل النماذج الجزئية أعداد صحيحة و نأخذ كحل أمثل أفضل حل.

الآن سوف نعمل على كيفية تطبيق هذا المبدأ على المثال السابق :

$$Max\ Z = 3X_1+4X_2$$

$S.C$

$$X_1+3X_2 \leq 13 \text{ ------ } (1)$$

$$5X_1+2X_2 \leq 20 \text{ ------ } (2)$$

$X_1 , X_2 \geq 0$

X_1 , X_2 أعداد صحيحة

الخطوة الأولى : وجدنا الحل الأمثل التالي للنموذج الخطي الموافق (دون شرط العدد الصحيح) :

$Z = 282/13 ,\ X_2 = 45/13 ,\ X_1 = 34/13 .$

نأخذ مثلا العدد الكسري X_1 و نقوم بفصل النموذج بإضافة كل قيد من القيدين التاليين إلى النموذج الأصلي :

$$X_1 \leq 2 \ ,\ X_1 \geq 3$$

و نحصل على النموذجين الجزئيين التاليين :

النموذج الجزئي 1

$Max\ Z = 3X_1+4X_2$

$S.C$

$X_1+3X_2 \leq 13$ ------ (1)

$5X_1+2X_2 \leq 20$ ------ (2)

$X_1 \leq 2$ ------- (3)

$X_1 , X_2 \geq 0$

النموذج الجزئي 2

$Max\ Z = 3X_1+4X_2$

$S.C$

$X_1+3X_2 \leq 13$ ------ (1)

$5X_1+2X_2 \leq 20$ ------ (2)

$X_1 \geq 3$ ------ (3)

$X_1 , X_2 \geq 0$

لتسهيل عملية البحث سوف نقوم بتمثيل عملية البحث عن حل أمثل عددي صحيح على شكل شجرة كما في الشكل :

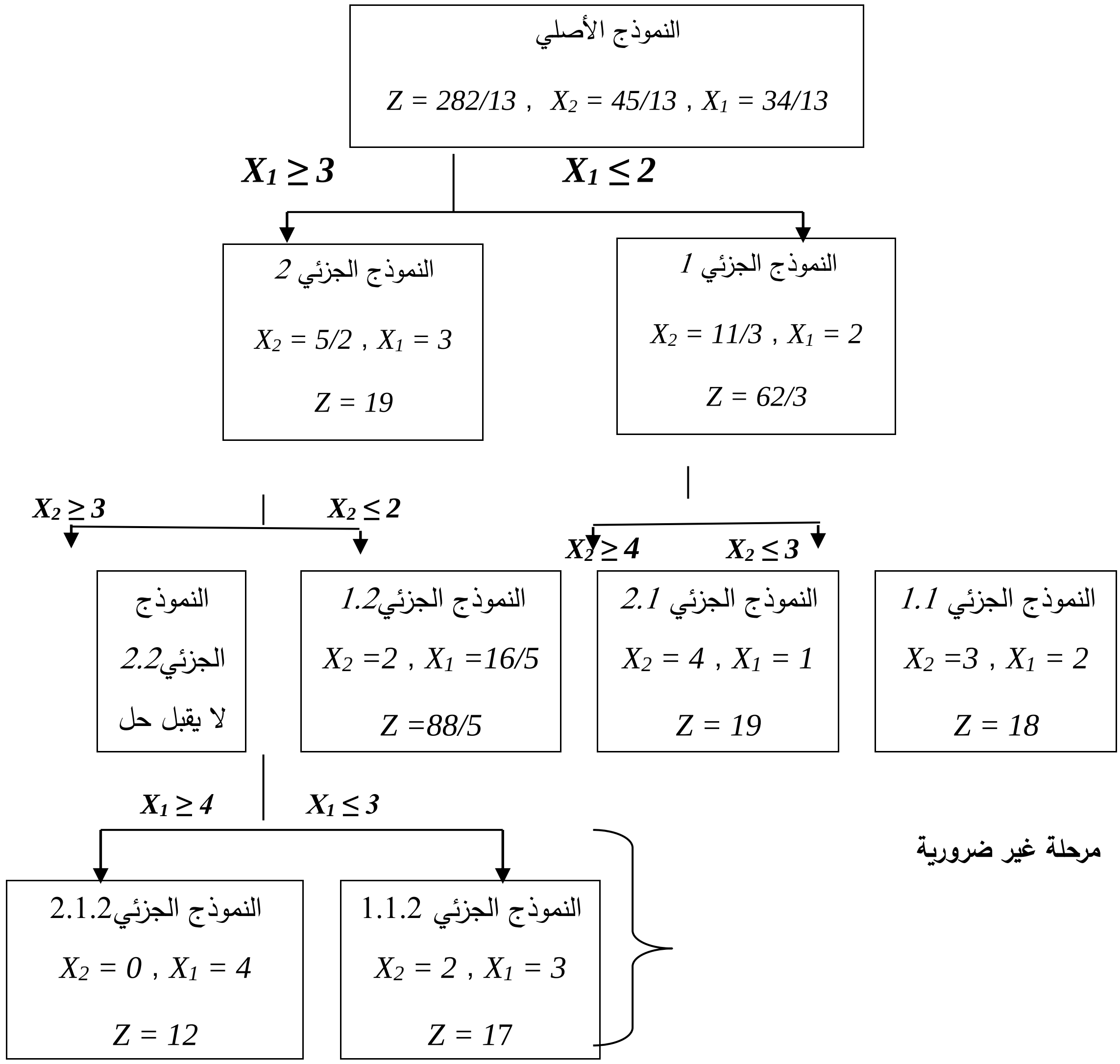
إن البحث عن الحل الأمثل عبر فروع هذه الشجرة يتوقف عند توفر أحد الشروط التالية :

أ) النموذج الجزئي لهذا الفرع لا يقبل حل .(كما هو الحال في النموذج الجزئي 2.2)

ب) النموذج الجزئي لهذا الفرع يقبل حل عددي صحيح (كما هو الحال في النماذج *1.1* , *2.1* , *1.1.2* , *2.1.2*)

ت) في حالة نموذج تعظيم قيمة دالة الهدف للنموذج الجزئي لهذا الفرع أقل أو يساوي من قيمة دالة الهدف لأي فرع آخر يحتوي على حل أمثل عددي صحيح (كما هو الحل للنموذج الجزئي *1.2* أقل من النموذج الجزئي *2.1* لذلك يجب أن نتوقف عند هذا الفرع) , أما في حالة التدنية فالعكس أي أننا نتوقف لما تكون قيمة دالة الهدف لهذا الفرع أكبر أو يساوي قيمتها في فرع آخر.

الشكل . 3 :



لدينا في النموذج الجزئي 1.2 قيمة $Z = 88/5 = 17.6$ و هي قيمة أقل من قيمة Z في النموذج الجزئي 2.1 $(Z=19)$ و من المفترض أن نتوقف عنده و لكن أكملت البحث حتى أثبت للقارئ أن الحلول العددية الصحيحة التي سوف نحصل عليها حتما ستكون أقل لأن هناك قيود إضافية.

إذن فالحل الأمثل لهذا النموذج هو نفسه الحل الأمثل المتحصل عليه بالطرق السابقة و هو :

. $Z = 19$, $X_2 = 4$, $X_1 = 1$.(النموذج الجزئي 2.1)

تمرينات

تمرين رقم . 1 :

ليكن لدينا نموذج برمجة الأعداد الصحيحة التالي :

$$Max\ Z = 3000X_1+2000X_2$$

$S.C$

$3X_1+X_2 \leq 15$

$X_1+X_2 \leq 10$

$X_1 \leq 3$

$X_1 , X_2 \geq 0$

X_1 , X_2 أعداد صحيحة

المطلوب :

حل هذا النموذج بطريقة المستوي القاطع ثم بطريقة الفصل و إعادة التقييم.

تمرين رقم . 2 :

ليكن لدينا نموذج برمجة الأعداد الصحيحة التالي :

$$Max\ Z = 4X_1+6X_2$$

$S.C$

$X_1+2X_2 \leq 11$

$7X_1+X_2 \leq 21$

$X_1 , X_2 \geq 0$

X_1 , X_2 أعداد صحيحة

المطلوب : حل هذا النموذج بطريقة المستوي القاطع ثم بطريقة الفصل و إعادة التقييم.

تمرين رقم . 3 :

ليكن لدينا نموذج برمجة الأعداد الصحيحة التالي :

$$Max\ Z = 2X_1+3X_2$$

$S.C$

$1/2X_1+X_2 \leq 5/4$

$X_1 , X_2 \geq 0$

X_1 , X_2 أعداد صحيحة

المطلوب :

أ) حل هذا النموذج باستخدام طريقة المستوي القاطع. ماذا تلاحظ ؟

ب) ماذا نفعل لتجاوز هذه المشكلة؟

تمرين رقم . 4 :

ليكن لدينا نموذج برمجة الأعداد الصحيحة التالي :

$Max\ Z = 4X_1+6X_2$

$S.C$

$4/7X_1+2/7X_2 \leq 2$

$X_1+2X_2 \leq 7$

X_1 , X_2 أعداد صحيحة

المطلوب :

حل النموذج باستخدام طريقة الفصل و إعادة التقييم.

تمرين رقم . 5 :

قامت أحد مؤسسات البناء بدراسة حول جدوى الاستثمار في *6* مشاريع سكنية معينة خلال الثلاث سنوات القادمة , الجدول الموالي يوضح تكاليف إنجازها المتوقعة و كذا المداخيل المتوقعة من بيعها (الوحدة : مليون دج) :

المشاريع	التكاليف المتوقعة			الأرباح المتوقعة
	السنة *1*	السنة 2	السنة *3*	
1	*8*	*14*	*11*	*39*
2	*5*	*7*	*12*	*36*
3	*17*	*4*	*3*	*31*
4	*10*	*15*	*5*	*38*
5	*12*	*10*	*12*	*46*
6	*9*	*6*	*13*	*34*

و في الأخير المبلغ السنوي المخصص للاستثمار في هذه المشاريع هو *42* مليون دج .

المطلوب :

أ) شكل و حل النموذج الذي يسمح باختيار أفضل المشاريع من أجل تحقيق أقصى الأرباح.

ب) شكل النموذج مع الأخذ بعين الاعتبار الشروط التالية :

ب . 1) يجب اختيار على الأقل *4* مشاريع إجباريا من بين هذه المشاريع.

ب . 2) المشاريع *4 , 5* , و *6* مشاريع متنافية (أي إذا تم اختيار أحدهما فيمنع اختيار الآخرين).

ب . 3) لا يمكن اختيار المشروع *3* إلا إذا تم اختيار المشروع *2* .

ب . *4*) يجب اختيار إما المشاريع الثلاثة *1 , 5* , و *6* معا أو لا يتم اختيار أي منهم.

ب . 5) لا يمكن اختيار المشروع *1* إلا إذا تم اختيار المشروعين *3* و *4* معا.

ملاحظة :

الأسئلة من (ب . *1*) إلى (ب . *5*) مستقلة عن بعضها البعض.

تمرين رقم . 6 :

قررت مؤسسة حمود بوعلام لإنتاج المشروبات الغازية الشروع في إطلاق مشروع استثمار ضخم من أجل بناء *10* وحدات إنتاج عبر مناطق الوطن (الشمال , الجنوب , الغرب , الشرق) , و بعد دراسة السوق تبين أن المدن الموضحة في الجدول الموالي هي أفضل المدن المرشحة لبناء هذه الوحدات , كما يوجد أيضا في الجدول تكاليف البناء و الأرباح المتوقعة خلال السنة القادمة (الوحدة : مليون دج):

المدن	تكاليف البناء المتوقعة	الأرباح المتوقعة
<u>الشمال :</u>		
الجزائر	*28*	*9*
البليدة	*25.5*	*7*
<u>الغرب :</u>	*30*	*8.5*
وهران	*28*	*8.6*
مستغانم	*25.5*	*7*
سيدي بلعباس		
<u>الشرق :</u>	*33*	*8*
قسنطينة	*35.5*	*9.5*
سطيف	*23*	*6*
باتنة		
<u>الجنوب :</u>	*18.5*	*6*
ورقلة	*16*	*5*
غرداية		

حجم المبالغ التي رصدها مالك هذه المؤسسة لهذا الاستثمار *200* مليون دج , و لكنه اشترط على المدراء التنفيذيين لمؤسسته ما يلي :

أ) بناء على الأقل وحدة إنتاج واحدة في كل من منطقة الشمال و منطقة الجنوب.

ب) بناء على الأقل وحدتين في منطقة الشرق.

ت) إما بناء الوحدات الثلاث في منطقة الغرب , أو لا نبني أي وحدة.

المطلوب :

شكل النموذج الذي يساعد المؤسسة في تحدد المخطط الأمثل في البناء من أجل تعظيم أرباحها المتوقعة.

تمرين رقم . 7 :

تقوم مؤسسة بإنتاج ثلاث منتجات و لتكن A , B , C , كل منتج يحتاج إلى مادة أولية , و ساعات عمل يدوية , و ساعات عمل على الآلة , أصيبت الآلة الرئيسية التي تنتج هذه المنتجات بعطل كبير عملية إصلاحه تستغرق وقتا طويل مما أجبر المؤسسة على كراء آلة أخرى مكانها , و لكن وجدت المؤسسة نوعين من هذه الآلة للكراء M_1 و M_2 , الخصائص التقنية لكل آلة مبينة في الجدول الموالي :

المنتجات	المادة الأولية (كغ)	ساعات العمل اليدوية (سا)	ساعات العمل على الآلة M_1 (سا)	ساعات العمل على الآلة M_2 (سا)	الربح الصافي الوحدوي
A	4	2	2	1	576
B	2	1/2	1	3	288
C	1	3	4	5	432
الكميات المتاحة	1000	500	350	400	

تكاليف الكراء الشهرية لكل من M_1 و M_2 هي على الترتيب *6480* دج/شهريا , و *7200* دج/شهريا , أما الأرباح الصافية المتوقعة فهي ثابتة و مستقلة عن نوع الآلة المستخدمة.

المطلوب :

شكل النموذج الذي يساعد المؤسسة في اختيار أحد هاتين الآلتين , و ما هو مخطط إنتاجها الأمثل.

تمرين رقم . 8 :

قامت إدارة الجمارك ببيع *4* حاويات من السلع في المزاد العلني على أساس وزن الحاويات , و رست هذه المزايدة على *4* زبائن حيث حصل كل زبون i على حاوية وزنها P_i $(i=1,2,3,4)$, و في شروط صفقة البيع تتكفل هذه الإدارة بنقل هذه الحاويات إلى مقرات هؤلاء الزبائن , و تمتلك *3* شاحنات حيث أن طاقة استيعاب الشاحنة j هي K_j $(j=1,2,3)$ و تكلفة استخدامها C_j.

المطلوب :

أ) شكل نموذج برمجة الأعداد الصحيحة لهذه الإدارة الذي يساعدها في اختيار الشاحنات من أجل تخفيض التكاليف الكلية للتأجير مع تسليم كل الحاويات.

ب)أكتب القيود التي تضمن أن الحاويات 1 و3 لن يتم نقلهما في نفس الشاحنة.

ت) أعد صياغة دالة الهدف في السؤال (أ) حيث نأخذ بعين الاعتبار تكاليف إضافية و لتكن c_{ij} عندما نستعمل الشاحنة j لنقل الحاوية i .

ث) أكتب القيود التي تضمن أن كل شاحنة لا يمكن أن تقوم بأكثر من رحلتين.

تمرين رقم . 9 :

تواجه مؤسسة مشكلة اختيار مكان لبناء مصنع جديد (لنأخذ نموذج الفقرة 2 . 1) و لنفترض أنها بصدد P نموذج مصنع لـ m مكان , لتكن C_{ik} و F_{ik} على الترتيب طاقة إنتاج مصنع من النوع K لبنائه في المكان i و مجموع تكاليف بنائه و تشغيله $(i=1,..,m \ ; j=1,...,P)$, أما باقي التكاليف فهي مستقلة عن نوع المصنع و المكان المختار.

المطلوب :

أعد صياغة نموذج الفقرة 2 . 1 حيث يأخذ بعين الاعتبار المعطيات الجديدة في هذه المسألة.

تمرين رقم . 10 :

توجد في أحد الورشات الصناعية 3 آلات مختلفة C , B , A , استقبلت هذه الورشة طلبيتين P_1 و P_2 , كل طلبيه يجب أن تمر عبر الآلات الثلاث وفق ترتيب معين و في وقت معلوم كما هو مبين في الجدول الموالي :

الطلبيات	**3**	**2**	**1**
P_1	$B(6)$	$A(4)$	$C(9)$
P_2	$A(9)$	$C(6)$	$B(5)$

فمثلا الطلبية P_1 تمر أولا عبر الآلة B لمدة 6 ساعات , ثم عبر الآلة A لمدة 4 ساعات و في الأخير عبر الآلة C لمدة 9 ساعات.

المطلوب :

شكل النموذج الذي يسمح باختيار الترتيب الملائم للطلبيات على مختلف الآلات من أجل إنهاء العمل في أقل وقت ممكن.

الحل :

حل التمرين رقم . 1 :

أ) حل النموذج بطريقة المستوي القاطع :

أولا نقوم بحل نموذج البرمجة الخطية الموافق و هو في الجدول الموالي :

جدول الحل الأمثل

		X_1	X_2	e_1	e_2	e_3	
		3000	2000	0	0	0	
X_1	3000	1	0	1/2	-1/2	0	**5/2**
X_2	2000	0	1	-1/2	3/2	0	**15/2**
e_3	0	0	0	-1/2	1/2	1	**1/2**
Z_j		3	4	500	1500	0	
$C_j - Z_j$		0	0	-500	-1500	0	**22500**

نختار عشوائيا المتغير القاعدي X_1 , أي أننا نأخذ قيد هذا المتغير في الحل الأمثل :

$X_1+1/2e_1 - 1/2e_2 = 5/2$

$X_1+(0+1/2)e_1+(-1+1/2)e_2 = 2+1/2$

$X_1 = (0 - 1/2)e_1+(1 - 1/2)e_2 +(2+1/2)$

$X_1 = (e_2+2)+(- 1/2e_1 - 1/2e_2+1/2)$

و منه نحصل على القيد : $- 1/2e_1 - 1/2e_2+1/2 \leq 0$

و بعد تعويض المتغيرات الإضافية بالمتغيرات الحقيقية للنموذج نحصل على القيد الجديد : $2X_1+X_2 \leq 12$

و بعد إضافة هذا القيد و حل النموذج باستخدام طريقة *Simplex* نحصل على جدول الحل الأمثل التالي :

جدول الحل الأمثل

		X_1	X_2	e_1	e_2	e_3	e_4	
		3000	2000	0	0	0	0	
e_1	0	1	0	1	1	0	-2	**1**
X_2	2000	0	1	0	2	0	-1	**8**
e_3	0	0	0	0	1	1	-1	**1**
X_1	3000	0	0	0	-1	0	1	**2**
Z_j		3	4	0	1000	0	1000	
$C_j - Z_j$		0	0	0	-1000	0	-1000	**22000**

نلاحظ أنه بمجرد العمل على المتغير X_1 استطعنا الحصول على أعداد صحيحة لكل باقي المتغيرات القاعدية.

ب) الحل بطريقة الفصل و إعادة التقييم :

من الحل الأمثل للنموذج الأصلي نأخذ دائما المتغير $X_1 = 5/2$ و نقوم بفصل النموذج إلى نموذجين جزئيين هما بعد إنشاء القيدين الجديدين من هذا المتغير $(X_1 \le 2 \;,\; X_1 \ge 3)$:

النموذج الجزئي 2

$$Max\ Z = 3000X_1+2000X_2$$

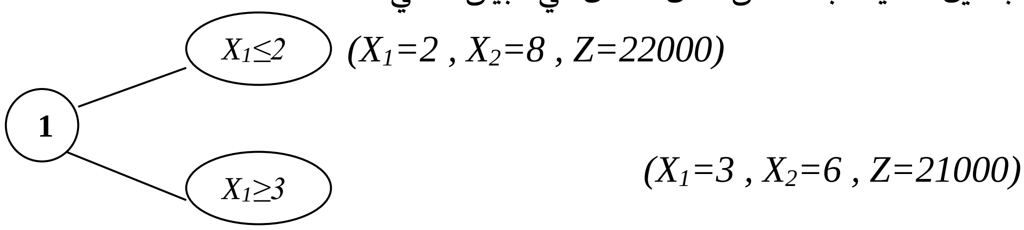
S.C
$$3X_1+X_2 \le 15 \text{ ------ } (1)$$
$$X_1+X_2 \le 10 \text{ ------ } (2)$$
$$X_1 \le 2 \text{ ------- } (3)$$
$$X_1 , X_2 \ge 0$$

النموذج الجزئي 1

$$Max\ Z = 3000X_1+2000X_2$$

S.C
$$3X_1+X_2 \le 15 \text{ ------ } (1)$$
$$X_1+X_2 \le 10 \text{ ------ } (2)$$
$$X_1 \ge 3 \text{ ------ } (3)$$
$$X_1 , X_2 \ge 0$$

نقوم بتمثيل عملية البحث عن الحل الأمثل في البيان التالي :



يبدو واضحا أن الحل العددي الأول هو الحل الأمثل و هو نفسه الحل الأمثل بالطريقة السابقة.

حل التمرين رقم . 2 :

أ) الحل بطريقة المستوي القاطع :

الجدول الموالي يحتوي على الحل الأمثل لنموذج البرمجة الخطية الموافق :

جدول الحل الأمثل

		X_1	X_2	e_1	e_2	
		4	6	0	0	
X_2	6	0	1	7/13	-1/13	**56/13**
X_1	4	1	0	-1/13	2/13	**31/13**
Z_j		4	6	38/13	2/13	
$C_j - Z_j$		0	0	-38/13	-2/13	**460/13**

لإنشاء القيد الجديد نختار المتغير القاعدي X_1 (لأنه صاحب أكبر جزء كسري) , قيد هذا المتغير في الحل الأمثل هو :

$$X_1 - 1/13e_1+2/13e_2 = 31/13$$

نفصل الأجزاء الصحيحة عن الأجزاء الكسرية نحصل على :

$$X_1+(-1+12/13)e_1+(0+2/13)e_2 = (2+5/13)$$
$$X_1 = (1 - 12/13)e_1+(0 - 2/13)e_2+(2+5/13)$$
$$X_1 = (e_1+2)+(- 12/13e_1 - 2/13e_2 +5/13)$$

و منه نحصل على القيد الجديد :

$$- 12/13e_1 - 2/13e_2 +5/13 \leq 0$$

و بالتعويض في المتغيرات الحقيقية للنموذج نحصل على القيد التالي :

$$2X_1+2X_2 \leq 13$$

بعد إضافة هذا القيد إلى النموذج السابق نحصل على الحل الأمثل التالي :

جدول الحل الأمثل

		X_1	X_2	e_1	e_2	e_3	
		4	6	0	0	0	
X_2	6	0	1	1	0	-1/2	**9/2**
e_2	0	0	0	6	1	-13/2	**5/2**
X_1	4	1	0	-1	0	1	**2**
Z_j		4	6	2	1	1	
$C_j - Z_j$		0	0	-2	0	-1	**35**

نأخذ الآن المتغير القاعدي الكسري X_2 و بنفس الطريقة السابقة نحصل على القيد الجديد التالي :

$$X_1+X_2 \leq 6$$

و بعد إضافة هذا القيد إلى النموذج الأخير نحصل على الحل الأمثل في الجدول التالي :

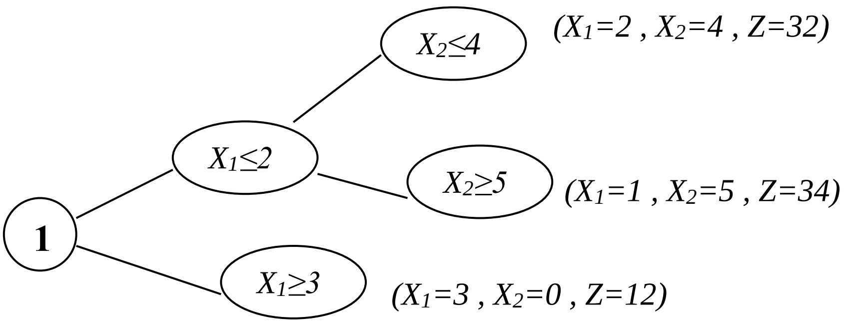
جدول الحل الأمثل

		X_1	X_2	e_1	e_2	e_3	e_4	
		4	6	0	0	0	0	
X_2	6	0	1	1	0	0	-1	**5**
e_2	0	0	0	6	1	0	-13	**9**
e_3	0	0	0	0	0	1	-2	**1**
X_1	4	1	0	-1	0	0	2	**1**
Z_j		4	6	2	0	0	2	
$C_j - Z_j$		0	0	-2	0	0	-2	**34**

في الأخير نكون قد حصلنا على حل أمثل عددي صحيح.

ب) الحل بطريقة الفصل و إعادة التقييم :

البيان الموالي يوضح عملية البحث عن الحل الأمثل العددي الصحيح :



و نكون قد حصلنا على الحل الأمثل .

حل التمرين رقم . 3 :

أ) جدول الحل الأمثل لنموذج البرمجة الخطية الموافق هو:

		X_1	X_2	e_1	
		2	3	0	
X_1	2	1	2	2	10/4
Z_j		2	4	4	
$C_j - Z_j$		0	-1	-4	5

بمأن X_1 متغير قاعدي كسري نأخذ القيد المرافق له في الحل الأمثل :

$$X_1+2X_2+2e_1 = 10/4$$

و لدينا $X_2 = 0$ في الحل الأمثل إذن : $X_1+2e_1 = 10/4$

و بعد جمع الأجزاء الصحيحة على جهة و الأجزاء الكسرية على جهة نحصل على :

$$X_1 = (2e_1+2)+(1/2)$$

نلاحظ أن الجزء الكسري $(1/2)$ يستحيل أن يكون أقل من 0 , و نستنتج أنه لا يمكن تطبيق طريقة المستوي القاطع.

و لكن لو أجرينا تعديلا طفيف على القيد الوحيد في النموذج بحيث تكون كل معاملاته التكنولوجية و الطرف الأيمن عبارة عن أعداد صحيحة , إذن لنضرب طرفي القيد بالعدد 4 لنحصل على القيد الجديد :

$$2X_1+4X_2 \leq 5$$

في هذه الحالة نحصل عل الحل الأمثل في الجدول الموالي :

		X_1	X_2	e_1	
		2	3	0	
X_1	2	1	2	0.5	10/4
Z_j		2	4	1	
$C_j - Z_j$		0	-1	-1	5

و منه القيد المرافق هو (بعد فصل و جمع الأجزاء الصحيحة عن الأجزاء الكسرية):

$$X_1 = (2)+(- 1/2e_1+1/2)$$

و منه : $-1/2e_1+1/2 \leq 0$

و بعد التعويض نحصل على القيد الجديد : $X_1+2X_2 \leq 2$

و في الأخير نحصل على الحل الأمثل العددي الصحيح لهذا النموذج :

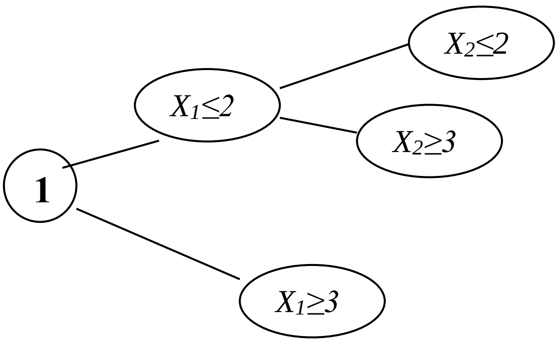
$$(X_1 = 2 \; , X_2 = 0 \; , Z = 4)$$

ملاحظة :

بصفة عامة و حتى يمكن تطبيق طريقة المستوي القاطع يجب أن تكون المعاملات التكنولوجية و ال"رف الأيمن للقيود عبارة عن أعداد صحيحة.

حل التمرين رقم . 4 :

الحل الأمثل موضح في البيان الموالي :



$(X_1=2 \; , X_2=2 \; , Z=20)$

$(X_1=1 \; , X_2=3 \; , Z=22)$

$(X_1=3 \; , X_2=1 \; , Z=18)$

يبدو واضحا أن الحل الأمثل العددي الصحيح هو :

$$(X_1=1 \; , X_2=3 \; , Z=22)$$

حل التمرين رقم . 5 :

أ . 1) تشكيل النموذج :

متغيرات القرار: هذه المسألة هي متغيرات ثنائية و لتكن X_i

حيث $(i = 1,2,3,4,5,6)$:

. $X_i = 1$: اختيار المشروع i .

. $X_i = 0$: عدم اختيار المشروع i .

القيود:تعبر عن المبالغ المالية السنوية المرصودة لإنجاز المشاريع المختارة:

. السنة 1 : $8X_1+5X_2+17X_3+10X_4+12X_5+9X_6 \leq 42$

. السنة 2 : $14X_1+7X_2+4X_3+15X_4+10X_5+6X_6 \leq 42$

. السنة 3 : $11X_1+12X_2+3X_3+5X_4+12X_5+13X_6 \leq 42$

دالة الهدف : و هي حاصل طرح مجموع المداخيل المتوقعة من مجموع التكاليف المتوقعة :

. تكاليف البناء الكلية المتوقعة :

$$(8+14+11)X_1+(5+7+12)X_2+.....+(9+6+13)X_6$$

. المداخيل الكلية المتوقعة : $39X_1+36X_2+....+34X_6$

ومنه نحصل على دالة الهدف : $Z = 6X_1+12X_2+7X_3+8X_4+12X_5+6X_6$

و يكون شكل النموذج الكامل كما يلي :

$$Max\ Z = 6X_1+12X_2+7X_3+8X_4+12X_5+6X_6$$

$$S.C$$

$$8X_1+5X_2+17X_3+10X_4+12X_5+9X_6 \leq 42$$

$$14X_1+7X_2+4X_3+15X_4+10X_5+6X_6 \leq 42$$

$$11X_1+12X_2+3X_3+5X_4+12X_5+13X_6 \leq 42$$

$X_1 , ..., X_6 = 1 , 0$ (متغيرات ثنائية)

أ . 2) حل النموذج :

لحل هذا النموذج يجب أولا العودة إلى نموذج البرمجة الخطية الموافق له حيث لا يوجد أي شرط على نوع المتغيرات لذلك سوف نحذف الشرط الأخير من النموذج السابق , و نقوم بإضافة قيود جديدة على الأقل تحصر المتغيرات في المجال $[1 , 0]$ و بمأنه لدينا قيود السلبية فيكفي أن نضع القيود كما يلي : $X_1 \leq 1 , ..., X_6 \leq 1$ و نحصل على النموذج الخطي الغير مشروط بالعدد الصحيح التالي :

$$Max\ Z = 6X_1+12X_2+7X_3+8X_4+12X_5+6X_6$$

$$S.C$$

$$8X_1+5X_2+17X_3+10X_4+12X_5+9X_6 \leq 40$$

$$14X_1+7X_2+4X_3+15X_4+10X_5+6X_6 \leq 40$$

$$11X_1+12X_2+3X_3+5X_4+12X_5+13X_6 \leq 40$$

$$X_1 \leq 1 , ..., X_6 \leq 1$$

$$X_1 , ..., X_6 \geq 0$$

و من الحل الأمثل لهذا النموذج ننطلق في البحث عن الحل الأمثل العددي الصحيح باستخدام طريقة الفصل و إعادة التقييم كما هو موضح في الشكل الموالي و الحل الأمثل العددي الصحيح هو :

$Z = 33\ ,\ X_6 = 0,\ X_5 = 0,\ X_4 = 1,\ X_3 = 1,\ X_2 = 1, X_1 = 1$.

ب .1) يترجم هذا الشرط رياضيا كما يلي: $X_1+X_2+X_3+X_4+X_5+X_6 \leq 4$

ب . 2) " " " : $X_4+X_5+X_6 \leq 1$

ب . 3) " " " : $X_3 \leq X_2$

ب . 4) يعبر عن اختيار المشاريع الثلاث معا أو لا واحد بالقيدين المتنافيين التاليين :

$X_1+X_5+X_6 \geq 3$ أو $X_1+X_5+X_6 \leq 0$

نعبر عن هذين القيدين رياضيا بدل استخدام عبارة (أو) وذلك بالاستعانة بالمتغير الثنائي الجديد Y حيث :

. $Y = 0$: اختيار المشاريع الثلاث معا.

. $Y = 1$: لا يتم اختيار أي من هذه المشاريع.

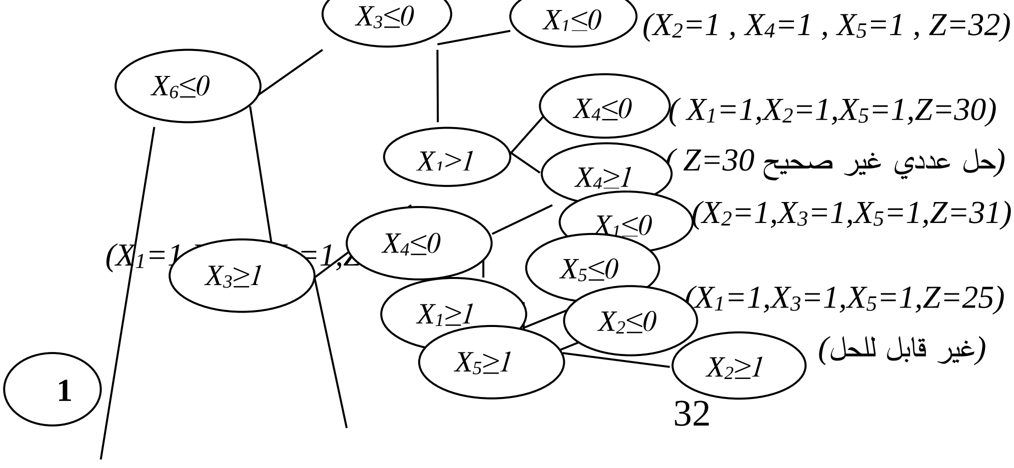
و نعيد صياغة القيدين السابقين كما يلي (حيث M أكبر عدد ممكن) :

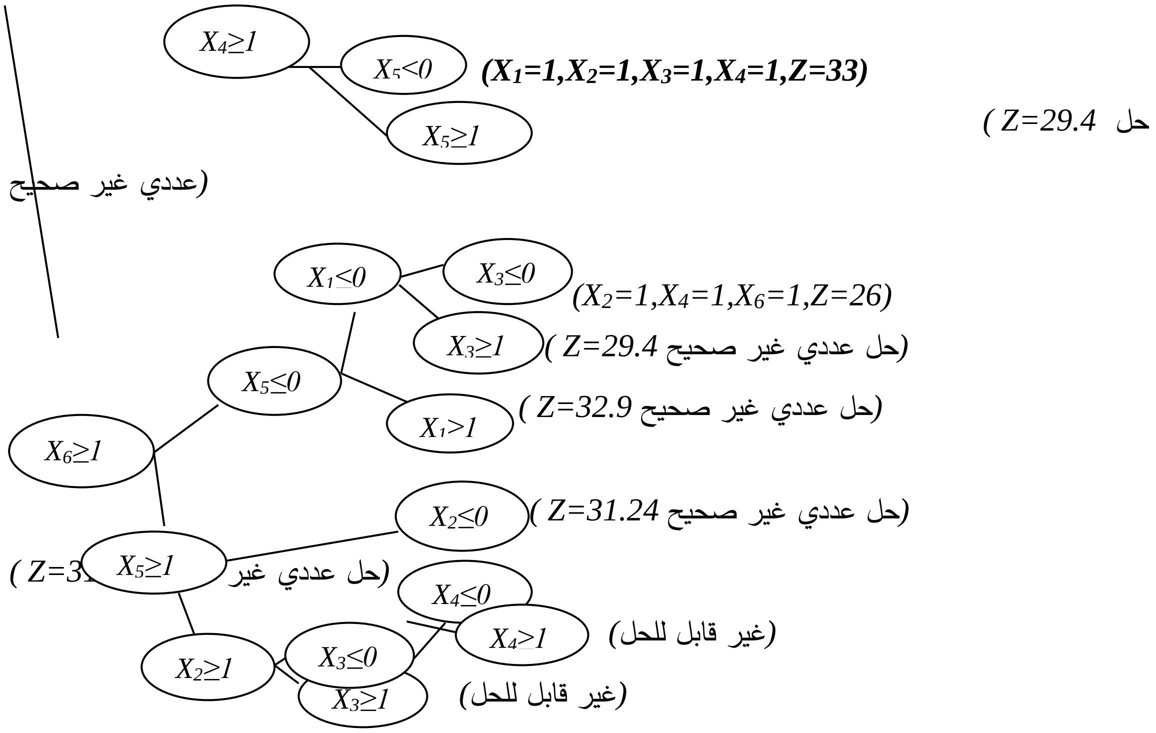
$$- X_1 - X_5 - X_6+3 \leq MY$$

$$X_1+X_5+X_6 \leq M(1 - Y)$$

ب . 5) يترجم هذا الشرط رياضيا بالقيدين التاليين: $X_1 \leq X_3$, $X_1 \leq X_4$.

الشكل . 4 :





حل التمرين رقم . 6 :

نضع المتغيرات الثنائية X_i $(i=1,\ldots,10)$ حيث :

$X_i = 1$: بناء وحدة في المدينة i .

$X_i = 0$: عدم بناء وحدة في المدينة i .

القيود : قي حجم الأموال المرصودة :

$$28X_1+25.5X_2+30X_3+28X_4+25.5X_5+33X_6+35.5X_7+23X_8+18.5X_9+16X_{10} \leq 200$$

أ) بناء على الأقل وحدة في الشمال و وحدة في الجنوب نكتب هذين القيدين رياضيا كما يلي :

$$X_1+X_2 \geq 1$$

$$X_9+X_{10} \geq 1$$

ب) بناء على الأقل وحدتين في الشرق : $X_6+X_7+X_8 \geq 2$

ت) بناء الوحدات الثلاث معا في الغرب أو لا نبني أي وحدة :

$$X_3+X_4+X_5 \geq 3 \quad \text{أو} \quad X_3+X_4+X_5 \leq 0$$

لترجمة عبارة (أو) رياضيا نستعين بمتغير ثنائي آخر و ليكن Y , و أكبر عدد ممكن M حيث :

$Y = 0$: بناء الوحدات الثلاث معا .

$Y = 1$: لا نبني أي وحدة .

و نحصل على القيدين على الشكل التالي :

$$- X_3 - X_4 - X_5 + 3 \leq MY$$

$$X_3 + X_4 + X_5 \leq M(1 - Y)$$

النموذج : في الأخير نحصل على النموذج التالي :

$$MaxZ = 9X_1 + 7X_2 + 8.5X_3 + 8.6X_4 + 7X_5 + 8X_6 + 9.5X_7 + 6X_8 + 6X_9 + 5X_{10}$$

$S.C$

$$28X_1 + 25.5X_2 + 30X_3 + 28X_4 + 25.5X_5 + 33X_6 + 35.5X_7 + 23X_8 + 18.5X_9 + 16X_{10} \leq 200$$

$$X_1 + X_2 \geq 1$$

$$X_9 + X_{10} \geq 1$$

$$X_6 + X_7 + X_8 \geq 2$$

$$- X_3 - X_4 - X_5 + 3 \leq MY$$

$$X_3 + X_4 + X_5 \leq M(1 - Y)$$

$$X_1, \ldots, X_{10}, Y = 1, 0$$

حل التمرين رقم 7 . :

لتكن X_1 , X_2 , X_3 عدد الوحدات المنتجة من المنتجات A , B , C على الترتيب , و لتكن لدينا المتغيرات الثنائية Y_1 و Y_2 حيث :

$Y_1 = 1$: كراء الآلة M_1 . $Y_2 = 1$: كراء الآلة M_2 .

$Y_1 = 0$: عدم كراء الآلة M_1 . $Y_2 = 0$: عدم كراء الآلة M_2 .

القيود :

. قيد المادة الأولية : $4X_1 + 2X_2 + X_3 \leq 1000$

. قيد ساعات العمل اليدوية : $2X_1 + 1/2X_2 + 3X_3 \leq 500$

. قيد ساعات العمل على الآلة M_1 (في حالة كرائها) أو الآلة M_2 (في حالة كرائها) :

$$2X_1 + X_2 + 4X_3 \leq 350 \text{ --- } (a)$$

أو $X_1 + 3X_2 + 5X_3 \leq 400 \text{ ---} (b)$

لترجمة عبارة (أو) رياضيا نستعين بالمتغير الثنائي رياضيا نستعين بالمتغير الثنائي Y حيث :

$Y = 0$: نستخدم القيد (a) (أي كراء الآلة M_1).

$Y = 1$: نستخدم القيد (b) (أي كراء الآلة M_2).

و نحصل على القيدين الجديدين :

$$2X_1+X_2+4X_3-350 \le MY$$

$$X_1+3X_2+5X_3-400 \le M(1-Y)$$

دالة الهدف : هي عبارة عن فرق الأرباح الكلية و تكاليف الكراء :

$$Z = 576X_1+288X_2+432X_3-6480(1-Y)-7200Y$$

النموذج : نحصل في الأخير على النموذج التالي :

$$\begin{aligned}
&Max\ Z = 576X_1+288X_2+432X_3-6480(1-Y)-7200Y\\
&S.C\\
&\quad 4X_1+2X_2+X_3 \le 1000\\
&\quad 2X_1+1/2X_2+3X_3 \le 500\\
&\quad 2X_1+X_2+4X_3-350 \le MY\\
&\quad X_1+3X_2+5X_3-400 \le M(1-Y)\\
&\quad X_1\ ,\ X_2\ ,\ X_3 \ge 0\\
&\quad Y = 1\ ,\ 0
\end{aligned}$$

حل التمرين رقم . 8 :

أ) لتكن متغيرات هذا النموذج هي المتغيرات الثنائية التالية :

$X_{ij} = 1$: استخدام الشاحنة j لنقل الحاوية i . $(i=1,2,3,4\ ;\ j=1,2,3)$

$X_{ij} = 0$: عدم استخدام الشاحن j لنقا الحاوية i .

القيود :

. قيود تضمن أن كل حاوية يتم تسليمها , و أيضا أن لا يتم نقل الحاوية مرتين (عددها *4* قيود) :

$X_{i1}+X_{i2}+X_{i3} = 1$ ---- (1)

. قيود تضمن أن كل شاحنة لا تحمل أكثر من طاقتها (عددها *12* قيد):

$$P_i\, X_{ij} \le K_j \text{ ---- } (2)$$

هذا القيد يعني أنه إذا كان $P_i \le K_j$ فإن $X_{ij} \le 1$ أي أن قيمتها يتم اختيارها وفق دالة الهدف , أما إذا كان $P_i \ge K_j$ وهذا يعني أن الشاحنة j لا تستطيع نقل الحاوية i و بالتالي حتى يتحقق القيد (*2*) يجب أن يكون $X_{ij} \le 0$

النموذج : و نحصل في الأخير على النموذج التالي (*16* قيد) :

$$MaxZ = \sum_{j=1}^{3} C_j \sum_{i=1}^{4} X_{ij}$$

$$\begin{aligned}
&S.C\\
&\quad X_{i1}+X_{i2}+X_{i3} = 1
\end{aligned}$$

$P_i\, X_{ij} \leq K_j$

$X_{ij} = 1\ ,\ 0 \quad ;\ i=1,2,3,4 \quad ,\quad j=1,2,3$

ب) القيود التي تضمن أن الحاويات *1* و *3* لن يتم نقلهما في نفس الشاحنة (*3* قيود) :

$X_{3j}+X_{1j} \leq 1$

ت) تكتب دالة الهدف الجديدة كما يلي :

$$MaxZ = \sum_{j=1}^{3} C_j \sum_{i=1}^{4} c_{ij} X_{ij}$$

ث) كل شاحنة لا تقوم أكثر من رحلتين (*3* قيود) :

$$X_{1j}+X_{2j}+X_{3j}+X_{4j} \leq 2$$

حل التمرين رقم . 9 :

النموذج الذي يأخذ المعطيات الجديدة لهذه المسألة هو :

$$MinZ = \sum_{i=1}^{m}\sum_{k=1}^{p} F_{ik}Y_{ik} + \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}\left(C_{ij}X_{ij} + E_{ij}t_{ij}\right)$$

S.C

$$\sum_{j=1}^{n} X_{ij} \leq \sum_{k=1}^{p} C_{ik}Y_{ik} \quad ; \quad i=1,....,m$$

$$\sum_{i=1}^{m} X_{ij} = D_j \quad ; \quad j=1,....,n$$

$$X_{ij} \leq Mt_{ij}$$

$Y_{ik} = 1\ ,0$; $i = 1,....,m$, $k = 1,....,p$

$t_{ij} = 1\ ,0$

$X_{ij} \geq 0$; $i = 1,....,m$, $j = 1,....,n$

حل التمرين رقم . 10 :

ليكن X_{ij} لحظة دخول المنتج i إلى الآلة j .

القيود : . قيود ترتيب المنتجات على الآلات :

. المنتج P_1 : $X_{12}+6 \leq X11$

$X_{11}+4 \leq X_{13}$

. المنتج P_2 : $X_{21}+9 \leq X_{23}$

$X_{23}+6 \leq X_{22}$

. قيود تضمن أن كل آلة لا تشتغل على طلبيتين في نفس الوقت :

. الآلة A : $X_{11}+4 \leq X_{21}$ أو $X_{21}+9 \leq X_{11}$

و لترجمة عبارة (أو) رياضيا نستعين بالمتغير الثنائي Y_1 حيث :

$Y_1 = 0$: نختار القيد الأول أي أن الآلة A تشتغل على الطلبية P_1 أولا.

$Y_1 = 1$: نختار القيد الثاني أي أن الآلة A تشتغل على الطلبية P_2 أولا.

و بأخذ M أكبر عدد ممكن نكتب القيدين رياضيا كما يلي :

$$X_{11}+4 - X_{21} \leq MY_1$$

$$X_{21}+9 - X_{11} \leq M(1 - Y_1)$$

و بنفس الطريقة نحصل على قيود باقي الآلات :

$$X_{12}+6 - X_{22} \leq MY_2$$

$$X_{22}+5 - X_{12} \leq M(1 - Y_2)$$

$$X_{13}+9 - X_{23} \leq MY_3$$

$$X_{23}+6 - X_{13} \leq M(1 - Y_3)$$

دالة الهدف : تكتب كما يلي :

$$Z = Max\ \{X_{13}+9\ ,\ X_{23}+6\}$$

هذه الدالة ليست خطية لذلك نعيد صياغتها بالشكل التالي :

$$Min\ Z = X$$

$$S.C$$

$$X \geq X_{13}+9$$

$$X \geq X_{23}+6$$

النموذج : في الأخير نحصل على النموذج التالي :

$$Min\ Z = X$$

$$S.C$$

$$X \geq X_{13}+9$$

$$X \geq X_{23}+6$$

$$X_{12}+6 \leq X11$$

$$X_{11}+4 \leq X_{13}$$

$$X_{21}+9 \leq X_{23}$$

$$X_{23}+6 \leq X_{22}$$

$$X_{11}+4 - X_{21} \leq MY_1$$

$$X_{21}+9 - X_{11} \leq M(1 - Y_1)$$

$$X_{12}+6 - X_{22} \leq MY_2$$

$$X_{22}+5 - X_{12} \leq M(1 - Y_2)$$

$$X_{13}+9 - X_{23} \leq MY_3$$

$$X_{23}+6 - X_{13} \leq M(1 - Y_3)$$

$$X_{ij} \geq 0 \ ; \ i=1,2 \quad , \quad j=1,2,3$$

$$Y_1 , Y_2 , Y_3 = 1 , 0$$

المحور الثاني : الشبكات

الشبكة هي عبارة عن رسم تخطيطي يعرض مشكلة ما بطريقة سهلة و بسيطة , بل و حتى حلها باستخدام بعض الخوارزميات الملائمة لهذا النوع من العروض , كما يمكن اعتبارها كنموذج مبسط للمشكلة المدروسة.

هناك مشاكل لا حصر لها يمكن عرضها و حلها على شكل شبكات على سبيل المثال مشاكل النقل و مشاكل التخصيص التي استعرضناها في ما سبق , و مشاكل أخرى سنتطرق إليها في هذا الفصل

مثلا : مشاكل تحديد أقصر طريق , و التدفقات , و تخطيط المشاريع ....الخ , و قبل ذلك يجب عرض مفاهيم و مبادئ عمل الشبكات.

1 . مبادئ و مفاهيم عامة :

1 . 1 مفهوم الشبكة :

هي عبارة عن رسم تخطيطي يحتوي على مجموعة من النقاط تسمى **رؤوس** أو **عقد** يرمز لها بالرمز $X = x_1,..,x_n$ متصلة مع بعضها البعض (حسب ضرورة المشكلة) بواسطة قطع مستقيمة تسمى **الوصلات** يرمز لها بالرمز $\boldsymbol{U} = u_1,\dots,u_m$, و هكذا يرمز إلى هذه الشبكة بالرمز $G(X , U)$ أو $H(X , U)$ و هكذا , و من بين الحالات العملية للشبكات نجد على سبيل المثال لا الحصر :

. الطرق

. شبكات المواصلات.

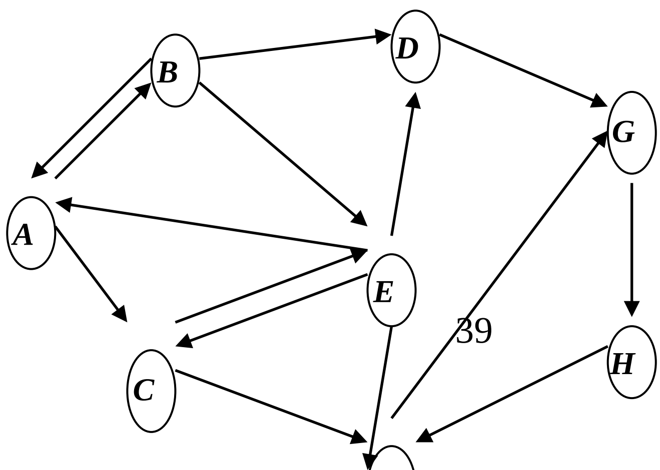
. شبكات الكهرباء.

. العلاقات بين أشخاص أو إدارات أو أي وحدات أخرى ....الخ.

مثال . 1 :

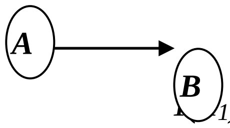
لتكن الشبكة التالية التي تمثل شبكة الطرق لأحد المدن الجزائرية :

الشكل 6 . 1 :



أ) **الشبكة الموجهة** : تكون الشبكة موجهة إذا كانت كل وصلاتها موجهة (الشكل السابق) :

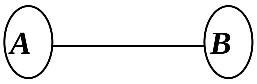
. **وصلة موجهة** (*arc orienté*): u_1



نرمز إلى نقطة بداية الوصلة u_1 بالرمز $I(u_1)$ و لدينا هنا : $I(u_1) = A$

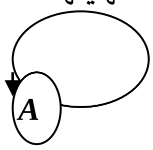
و نرمز إلى نقطة نهاية الوصلة u_1 بالرمز $T(u_1)$ و لدينا هنا : $T(u_1) = B$

. **وصلة غير موجهة** (*arc non orienté*) :

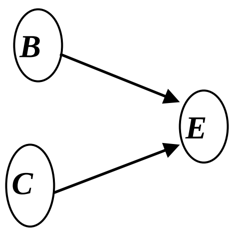


ب) **الشبكة الغير موجهة** : تكون الشبكة غير موجهة إذا كانت كل وصلاتها غير موجهة.

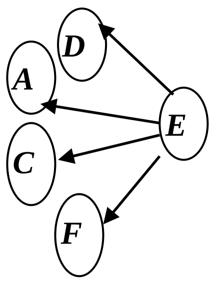
1 . 2 الحلقة (*boucle*): هي وصلة نقطة بدايتها هي نفسها نقطة نهايتها :



1 . 3 الرؤوس السوابق (*prédécesseurs*) : سوابق الرأس E هي مجموعة الرؤوس التي تسبق مباشرة هذا الرأس من حيث الاتجاه و نرمز لها بالرمز $(E)^+$ و هنا لدينا $(E)^+ = \{B , C\}$



1 . 4 الرؤوس اللواحق (*successeurs*) : لواحق الرأس E هي مجموعة الرؤوس التي تأتي مباشرة بعد هذا الرأس و نرمز لها بالرمز $(E)^-$ و هنا لدينا $(E)^- = \{A , C , D , F\}$



ملاحظة :

في شبكة موجهة مجموع كل سوابق الرؤوس يساوي مجموع لواحق كل الرؤوس.

ملاحظة :

يكتب جدول السوابق و اللواحق للشكل السابق كما يلي (الجدول . 1) :

المجموع	H	G	F	E	D	C	B	A	
15	*1*	*2*	*3*	*2*	*2*	*2*	*1*	*2*	$(x)^-$
15	*1*	*1*	*1*	*4*	*1*	*2*	*3*	*2*	$(x)^+$

1 . 5 مصفوفة الأسبقية المباشرة (*matrice d'antériorité immédiate*) :

هي مصفوفة مربعة عدد أسطرها أو أعمدتها يساوي عدد رؤوس الشبكة , و هي ذات أهمية بالغة في تسهيل عملية رسم الشبكات (و خاصة الشبكات التي عدد رؤوسها كبير) , فعندما يسبق الرأس x_1 الرأس x_2 نضع رمز معين و ليكن (×) في خانة الالتقاء كما هو الحل في مصفوفة الشكل السابق الموالية:

الجدول . 2 :

A	B	C	D	E	F	G	H
	X	X					
X			X	X			
				X	X		
						X	

A

B

C

D

E

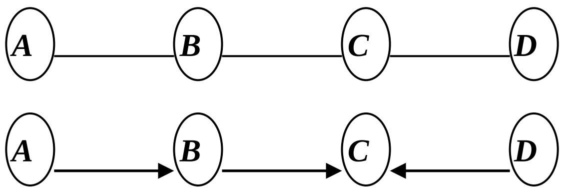
X		X	X		X		
						X	
							X
					X		

F

G

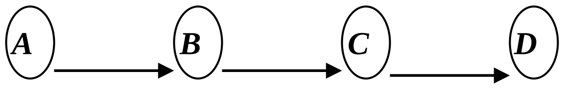
H

1 . 6 السلسلة (*la cha îne*): هي عبارة عن مجموعة من الرؤوس المتصلة مع بعضها البعض بطريقة متسلسلة و بواسطة وصلات غير موجهة أو وصلات موجهة و لكن دون أن نشترط أن تكون في نفس الاتجاه :



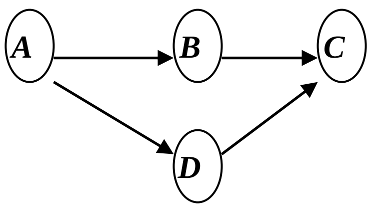
1 . 7 المسار (*le chemin*) :

هي عبارة عن مجموعة من الرؤوس المتصلة مع بعضها البعض بطريقة متسلسلة و بواسطة وصلات موجهة في نفس الاتجاه :



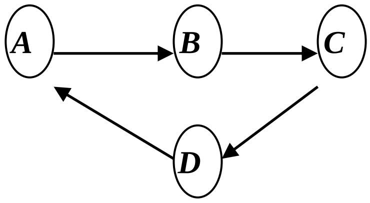
1 . 8 الدارة (*le cycle*) :

هي عبارة عن سلسلة مغلقة تلتقي فيها بداية السلسلة مع نهايتها (لا يهم الاتجاه):



1 . 9 الدارة الموجهة (*le circuit*) :

هي عبارة عن مسار مغلق تلتقي فيه بداية المسار مع نهايته (نفس الاتجاه) :



2 . أمثلة حول مشاكل الشبكات :

سوف نتطرق في هذا الجزء إلى أكثر الحالات التي يمكن حلها عن طريق الشبكات شيوعا و سنبدأ أولا بعرض مشاكل الشجرة الدنيا أو الشجرة القصوى , ثم بعد ذلك نستعرض مشاكل تحديد أقصر طريق و في ما بعد نتطرق إلى مشاكل التدفقات بنوعيها (التدفق الأعظمي , و تدفق التكاليف الدنيا), وفي الأخير نخصص جزء خاص لمشاكل تحديد المسار الحرج (وتعرف أيضا بشبكات تخطيط الأعمال) نظرا لاستخداماتها الكثيرة في جميع القطاعات الاقتصادية.

2 . 1 مشاكل الشجرة ذات التكاليف الدنيا :

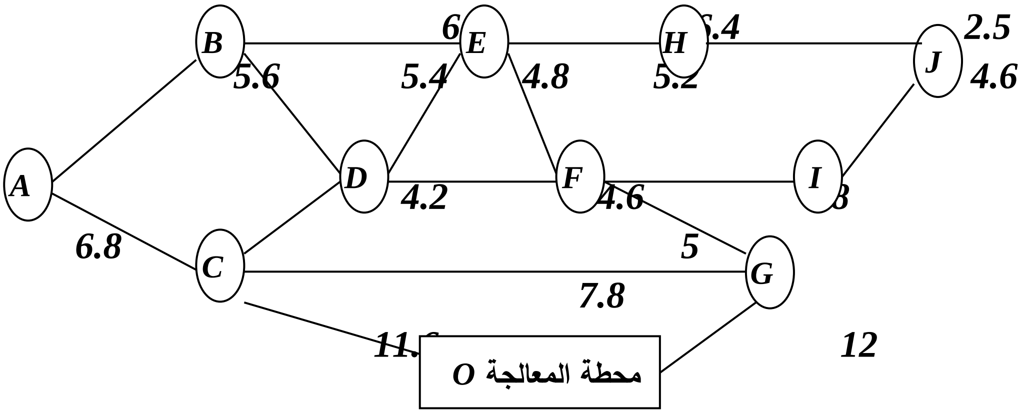
يستخدم هذا النوع من المشاكل في عرض عدد كبير من الظواهر منها, عملية بناء فهرس كتاب من عنوان ثم فصول إلى مباحث ثم مطالب , أيضا في التقسيم الإداري للدولة من عاصمة ثم ولايات ثم دوائر ثم بلديات, وأيضا في الشجرة الوراثية العائلية .....الخ.

ولفهم هذا النوع من المشاكل بطريقة أسهل نستعين بالمثال التالي :

مثال . 2 :

أرادت شركة سونا طراك تجهيز أحد حقولها البترولية في الجنوب بشبكة قنوات لنقل البترول من الآبار *10* المتواجدة في هذا الحقل في أماكن مختلفة بمحطة المعالجة لذلك قامت بدراسة أولية لتكاليف كل قناة محتملة لهذا المشروع كما هو موضح في الشكل الموالي :

الشكل . 2 :



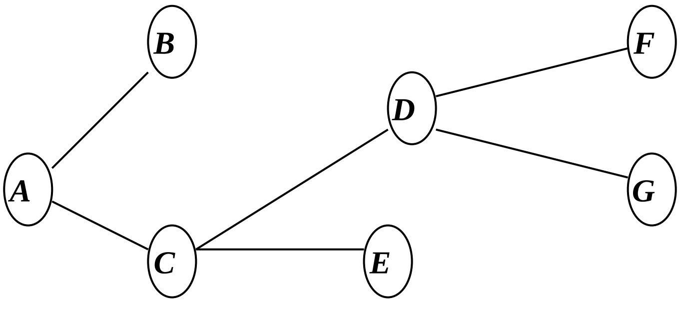
إذن الشركة تبحث عن تخفيض تكاليف تركيب القنوات لنقل البترول من الآبار نحو محطة المعالجة , و هذا طبعا بفرض أن القنوات كبيرة كفاية لنقل كل الكميات المتدفقة من الآبار.

حل هذه المشكلة هو تحديد القنوات الواجب ربطها مع بعضها عند كل بئر لنحصل في الأخير على قناة واحدة تربط جميع الآبار بمحطة المعالجة , و يمثل هذا هندسيا على شكل شجرة , و بالتالي فعملية البحث عن حل هو البحث عن شجرة ذات أقل تكاليف , لذلك يسمى هذا النوع من المشاكل الشجرة ذات التكاليف الدنيا.

في الحقيقة يمكن حل هذه المشاكل بخوارزمية *Simplex* , و لكن هناك خوارزميات خاصة بمشاكل الشبكات أكثر بساطة و سهولة , و لحل مشاكل الشجرة الدنيا نستخدم خوارزمية خاصة بهذا النوع تدعى خوارزمية *Kruskal* , و لكن قبل ذلك نستعرض بعض المفاهيم.

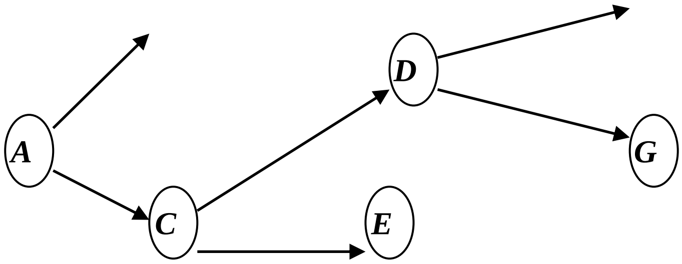
أ) الشجرة (*Arbre*) :

هي عبارة عن شبكة و لتكن *G(X , U)* خالية من أي دارة , أي أن عدد وصلاتها يساوي عدد رؤوسها ناقص واحد ($m = n - 1$) :



ب) الشجرة الموجهة (*Arborescence*) :

هي شجرة كل وصلاتها موجهة في نفس الاتجاه و لها جذر وحيد :



ت) جذر الشجرة (*Racine*) :

نقول عن أحد رؤوس الشجرة أنه جذر إذا و فقط إذا وجد مسار يربط بين هذا الرأس و باقي كل الرؤوس , في المثال السابق الرأسA هو جذر الشجرة و هو جذر وحيد (الرأس B مثلا ليس جذر لأنه لا يوجد مسار مع D مثلا).

الحل باستخدام خوارزمية *Kruskal* :

لإيجاد الشجرة الدنيا نتبع الخطوات التالية ونقوم بتطبيقها على المثال السابق:

1 . أولا نقوم بترتيب وصلات الشكل تصاعديا حسب تكلفة كل وصلة , ثم نقوم بمحو جميع الوصلات من الشكل و نترك الرؤوس فقط .

2 . نختار الوصلة الأقل تكلفة و نضعها على الشكل.

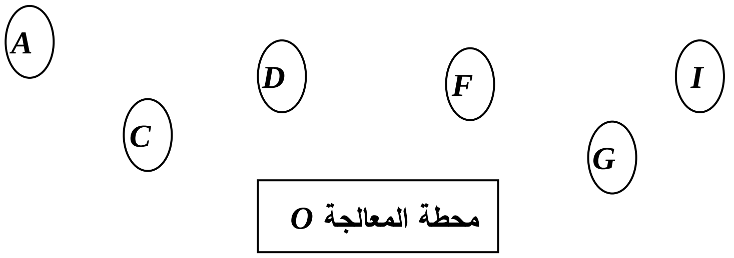
3 . نختار الوصلة الثانية في الترتيب و نضعها في الشكل.

4 . نختار الوصلة الثالثة في الترتيب و نضعها في الشكل فإذا صنعت دارة يتم حذفها و الانتقال إلى الوصلة الموالية و هكذا نكمل مع باقي الوصلات و بمجرد أن تصنع أي وصلة دارة يتم حذفها و الانتقال إلى الوصلة الموالية.

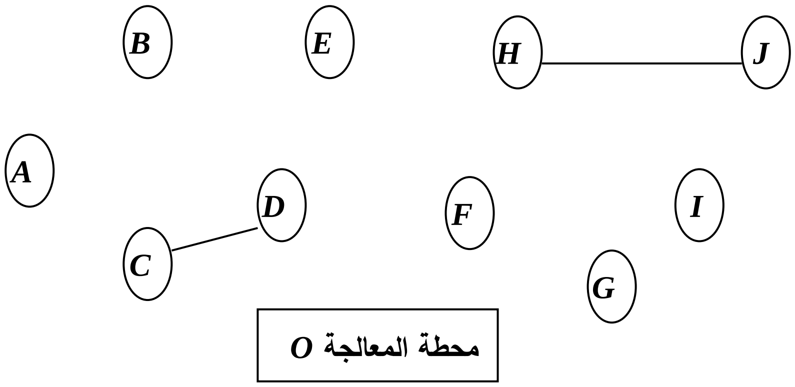
الآن نقوم بتطبيق هذه الخطوات :

1 . نقوم بترتيب كل الوصلات في الجدول الموالي , و حسب الجدول نضع الوصلة (***HJ***) :

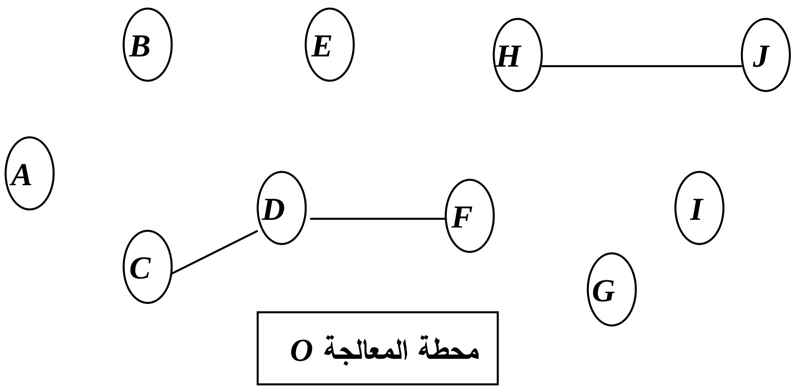
HJ	***CD***	***DF***	***IJ***	***DE***	***FG***	***EF***	***BD***	***AB***	***BE***	***EH***	***AC***	***FI***	***CG***	***CO***	***GO***
2.5	*4.2*	*4.6*	*4.6*	*4.8*	*5*	*5.2*	*5.4*	*5.6*	*6.2*	*6.4*	*6.8*	*6.8*	*7.8*	*11.6*	*12*



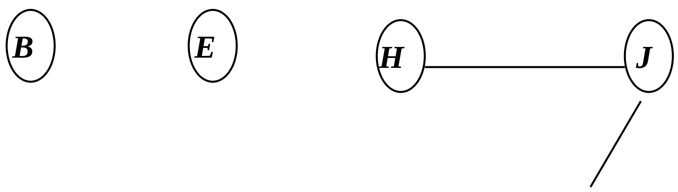
2 . نضيف الوصلة (CD) :

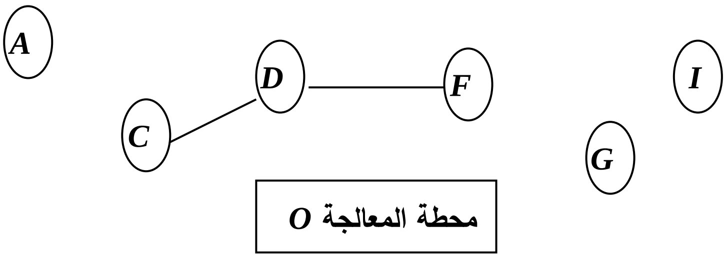


3 . نضيف الوصلة (DF) :

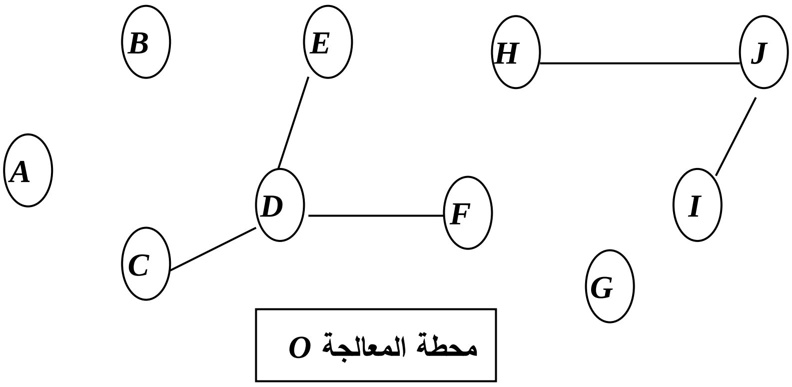


4 . نضيف الوصلة (IJ) :

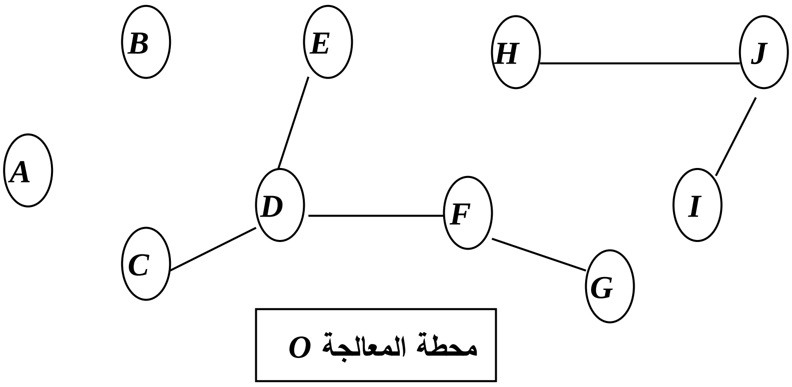




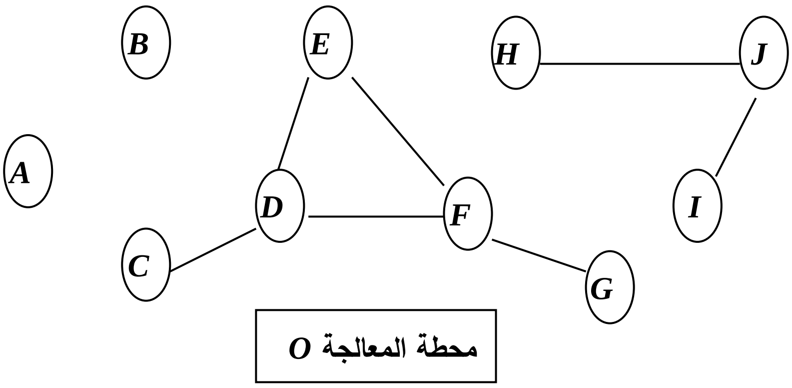
5 . نضيف الوصلة (DE) :



6 . نضيف الوصلة (FG) :

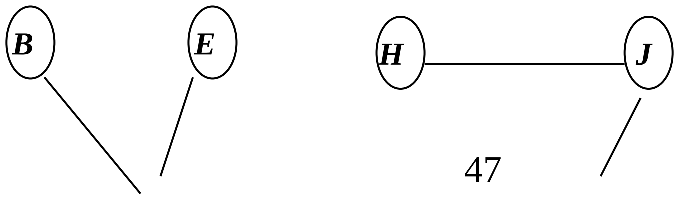


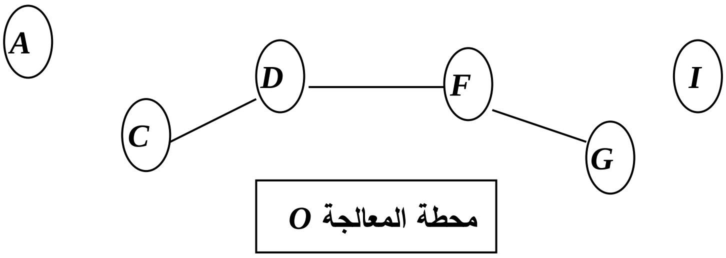
7 . نضيف الوصلة (EF) :



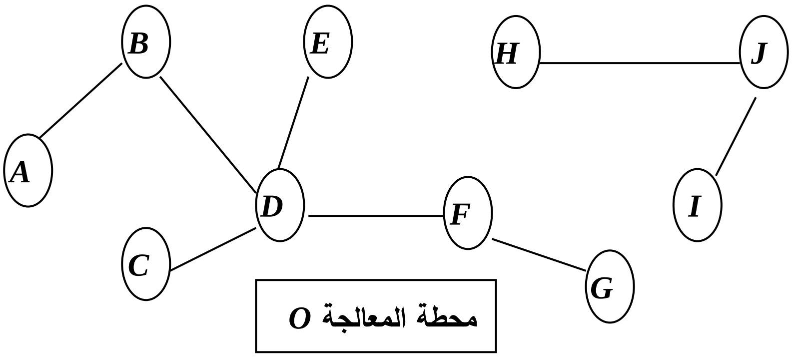
نلاحظ أن الوصلة (EF) صنعت دارة في الشكل إذن يجب حذفها و الانتقال إلى الوصلة الموالية.

8 . نحذف الوصلة (EF) و نضيف الوصلة (BD) :

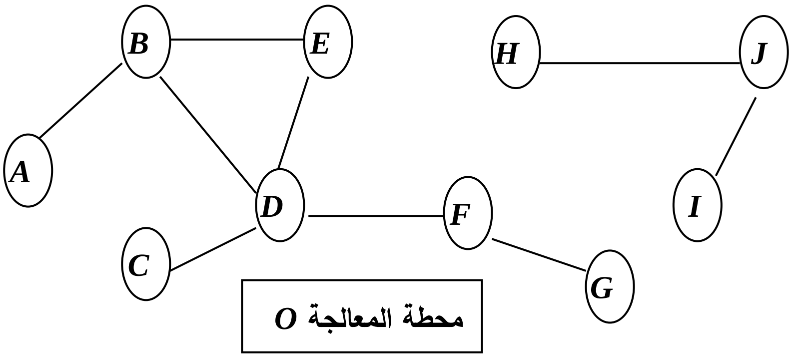




9 . نضيف الوصلة (AB) :

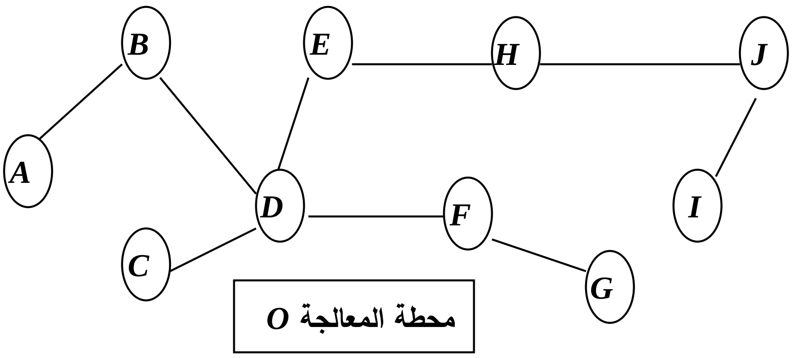


10 . نضيف الوصلة (BE) :

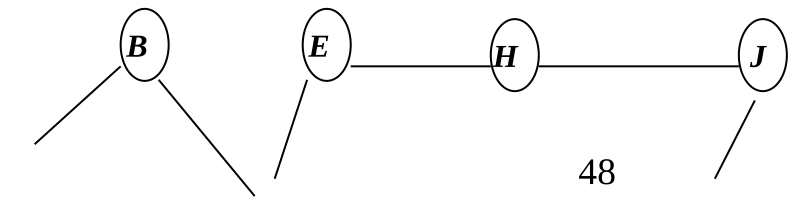


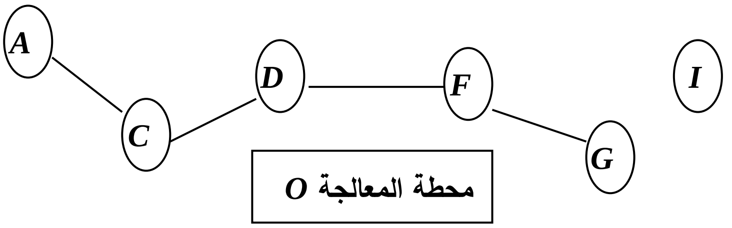
نلاحظ أن هذه الوصلة صنعت دارة

11 . نحذف الوصلة (BE) و نضيف الوصلة (EH) :



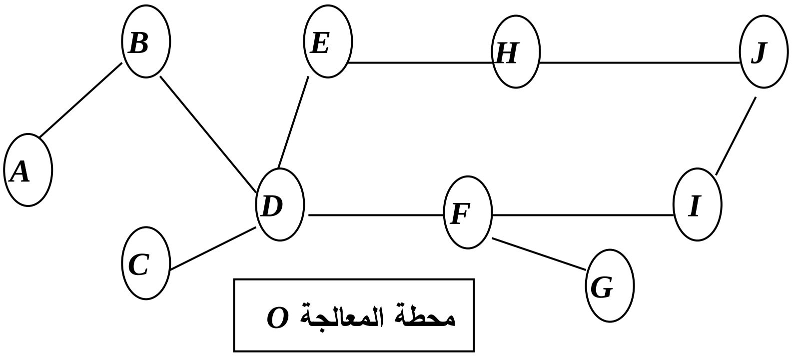
12 . نضيف الوصلة (AC) :





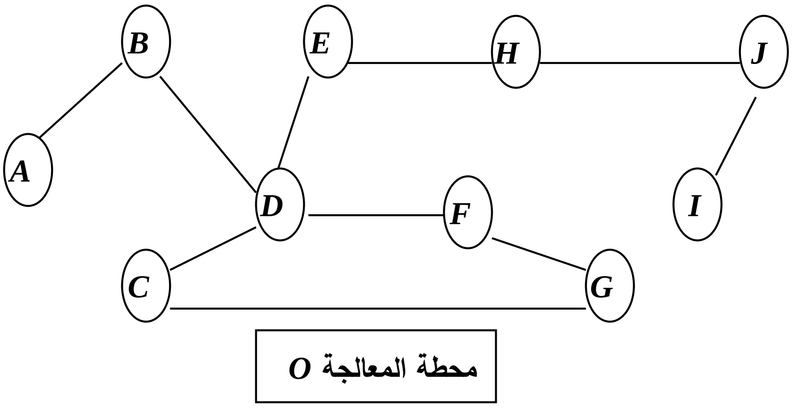
هذه الوصلة صنعت دارة .

13 . نحذف الوصلة (AC) و نضيف الوصلة (FI) :



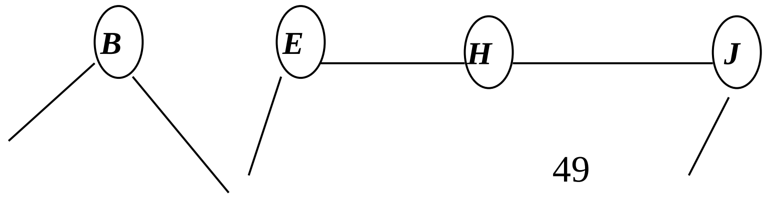
نلاحظ أن هذه الوصلة أيضا تصنع دارة.

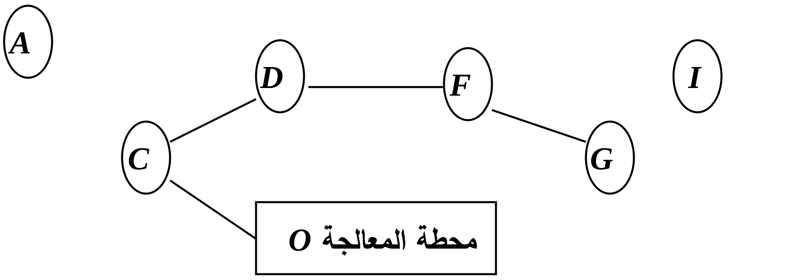
14 . نحذف الوصلة (FI) و نضيف الوصلة (CG) :



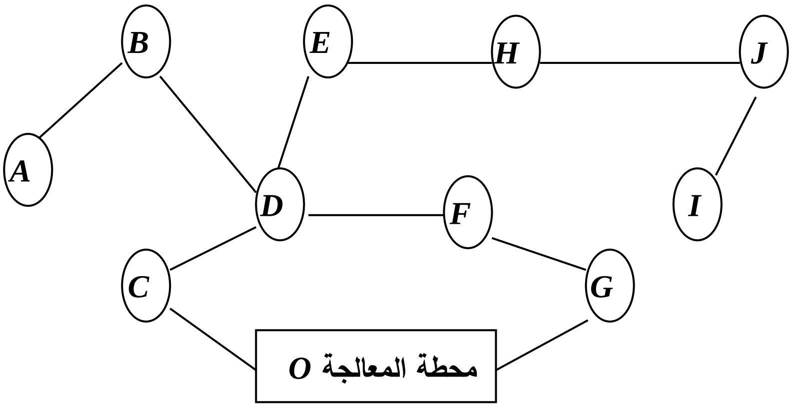
هذه الوصلة أيضا تصنع دارة.

15 . نحذف الوصلة (CG) و نضيف الوصلة (CO) :

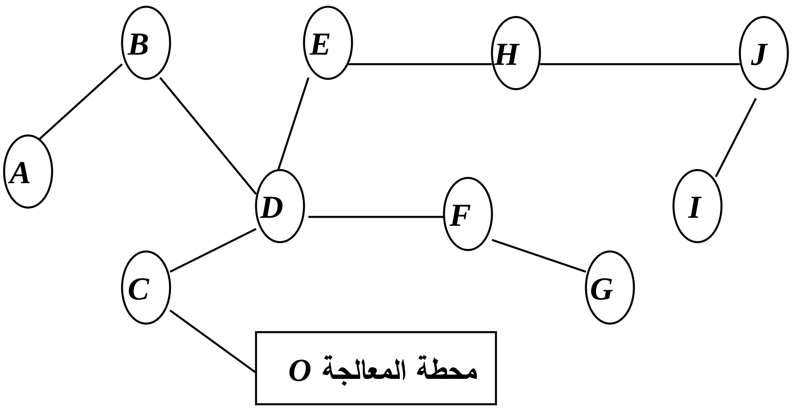




16 . نضيف الوصلة الأخيرة (**GO**) :



نلاحظ أن هذه الوصلة صنعت دارة نحذفها و نحصل في الأخير على الشجرة الدنيا التالية :



و التكاليف الكلية هي مجموع تكاليف القنوات الظاهرة في الشكل *54.7* مليون دج.

ملاحظة :

نستخدم نفس الطريقة للبحث عن الشجرة القصوى , إلى أن الفرق يكمن فقط في أننا في هذه الحالة نرتب الوصلات تنازليا (و ليس تصاعديا كما في حالة الشجرة الدنيا) و نكمل العمل بنفس الطريقة.

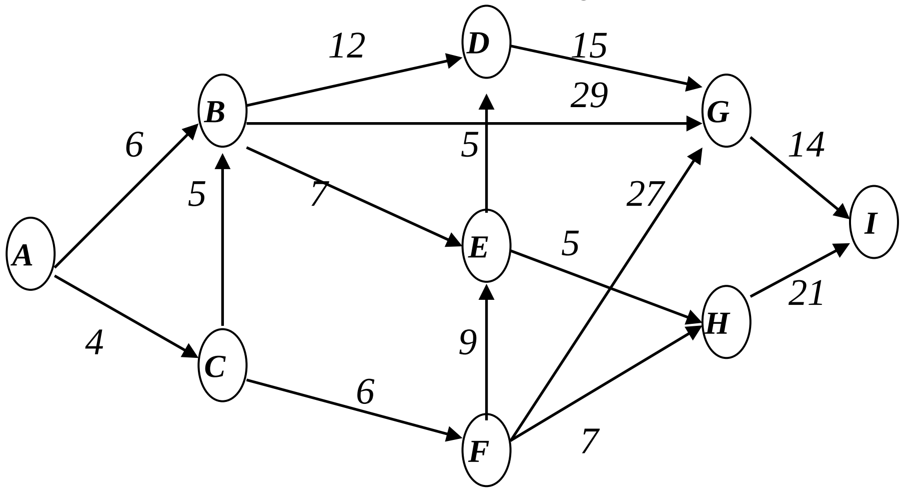
2 . 2 مشاكل تحديد أقصر مسار :

هنا أيضا سوف نستعين بالمثال التالي

مثال 6 . 3 :

أراد سائق سيارة أجرة نقل أحد الزبائن من محطة الحافلات نحو المطار , و هناك عدة مسارات (طرق ذات اتجاه وحيد) تمر عبر عدة أحياء تربط محطة الحافلات عبر المطار , و قبل أن ينطلق أخذ هذا السائق خارطة المدينة كما هو مبين في الشكل الموالي و حاول أن يبحث عن أقصر مسار ممكن (الوحدة كلم):

الشكل . 3 :



الحل باستخدام خوارزمية *Belman* :

هذه الخوارزمية التي سوف نستخدمها في شبكات النقل تشترط أن يكون طول وصلاتها أعداد موجبة غير سالبة و خالية من أي دارة, و هي ترتكز على مبدأ الأمثلية لـ *Belman* هذا المبدأ يقول :

مهما تكن الحالة الابتدائية و القرار الابتدائي المتخذ , يجب أن تكون القرارات الموالية قرارات مثلى بالنسبة للحالة الناتجة عن أول قرار متخذ , و ليس بالنسبة للحالة الابتدائية , ففي حالة ما إذا كان القرار الابتدائي (أو أحد القرارات الوسطى) غير أمثل و القرارات الموالية كلها مثلى بالنسبة للحالة الناتجة عن القرار الابتدائي (أو الناتجة عن أحد القرارات الوسطى) فلن نصل إلى الهدف الأمثل لأن القرار الابتدائي (أو القرار الأوسط) غير أمثل بعبارة أخرى , للوصول إلى الهدف الأمثل يجب أن تكون كل القرارات الجزئية قرارات مثلى.

لعرض هذه الخوارزمية بطريقة أسهل نطبق خطواتها على المثال السابق:

. الخطوة 1 :

بمأننا نبحث عن أقصر مسار يربط الجذر A و الرأس الأخير D , إذن فحتما A ينتمي إلى هذا المسار لذلك سوف نرمز إلى المجموعة التي تحتوي على هذا الرأس بالرمز S و كل عنصر يتم

اختباره نضيفه إلى هذه المجموعة, في هذه المرحلة $S=\{A\}$, نقوم أولا بالبحث عن كل لواحق عناصر S شرط أن لا تنتمي إلى S و أن لا تكون إحداها لاحقة لأخرى و إلا تحذف و هكذا كلما اختبرنا أحد المسارات نضيفه إلى هذه المجموعة.

لدينا لواحق S أي لواحق A (لأن $S=\{A\}$) هي الرؤوس (B , C) و لكن بمأن B لاحقة C تحذف B و نحصل على (C) فقط , ثم نقوم بإنشاء الجدول الموالي :

الجدول *1* :

لواحق S	المسارات الممكنة	المسافة	أقصر مسار
C	AC	4	AC

العمود الأول يحتوي على كل لواحق S و التي لا تنتمي إلى S , و أن لا تكون إحداها لاحقة لأخرى .

العمود الثاني يحتوي عل كل المسارات الممكنة لكل لاحقة.

العمود الثالث طول كل مسار.

أما في العمود الأخير من الجدول نختار أقصر مسار لكل لاحقة من هذه اللواحق .

. الخطوة *2* :

الآن نحصل على المجموعة الجديدة $S = \{A , C\}$

لواحق S هي الرؤوس (B , F) و منه نحصل على الجدول الثاني :

الجدول *2* :

لواحق S	المسارات الممكنة	المسافة	أقصر مسار
B	AB ACB	6 9	AB
F	ACF[1]	10	ACF

([1] : $AC = 4$ أقصر مسار إلى C من الجدول *1*)

. الخطوة *3* :

نحصل على المجموعة الجديدة $S = \{A , C , B , F\}$

لواحق S هي الرؤوس (D , G , E , H) , نحذف G لأنها لاحقة D , و نحذف D لأنها لاحقة E , و نحذف H لأنها لاحقة E إذن يبقى لدينا فقط (E) و نحصل على الجدول الثالث :

الجدول *3* :

لواحق S	المسارات الممكنة	المسافة	أقصر مسار
E	ABE[2] $ACFE$[3]	13 19	ABE

([2] : $AB = 6$ أقصر مسار إلى B من الجدول *2*)

([3] : $ACF = 10$ أقصر مسار إلى F من الجدول *2*).

. الخطوة *4* :

نحصل على المجموعة الجديدة $S = \{A , C , B , F , E\}$

لواحق S هي الرؤوس (D , G , H) , نحذف G لأنها لاحقة D , إذن يبقى لدينا (D , H) و نحصل على الجدول الرابع :

الجدول *4* :

لواحق S	المسارات الممكنة	المسافة	أقصر مسار
D	ABD $ABED$[4]	18 18	ABD $ABED$
H	$ABEH$ $ACFH$[5]	18 17	$ACFH$

([4] : $ABE = 13$ أقصر مسار إلى E من الجدول *3*)

([5] : $ACF = 10$ أقصر مسار إلى F من الجدول *2*)

. الخطوة *5* :

نحصل على المجموعة الجديدة $S = \{A , C , B , F , E , D , H\}$

لواحق S هي الرؤوس (I , G) , نحذف I لأنها لاحقة G , إذن يبقى لدينا (G) و نحصل على الجدول الخامس :

الجدول *5* :

لواحق S	المسارات الممكنة	المسافة	أقصر مسار

G	$ABDG$	33	$ABDG$
	$ABEDG$	33	$ABEDG$
	ABG	35	
	$ACFG$	37	

. الخطوة *6* :

نحصل على المجموعة الجديدة $S = \{A , C , B , F , E , D , H , G\}$

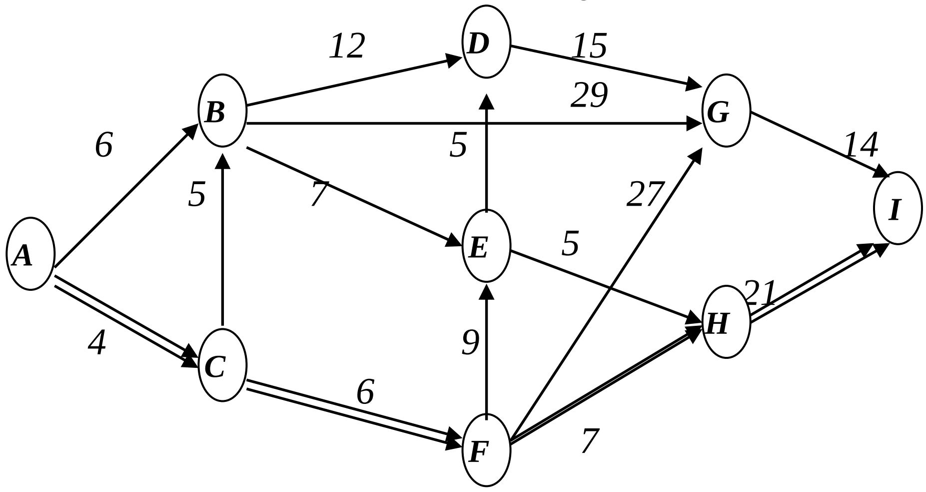
لواحق S هي الرأس الأخير (I) , إذن نحصل على الجدول السادس :

الجدول *6* :

لواحق S	المسارات الممكنة	المسافة	أقصر مسار
I	$ABDGI$	47	
	$ABEDGI$	47	$ACFHI$
	$ACFHI$	38	

في نهاية هذه المرحلة نكون قد وصلنا إلى نقطة النهاية و أقصر مسار هو المسار $ACFHI$ بمسافة قدرها *38 كلم*.

الشكل . 4 :



2 . 3 مشاكل التدفق الأعظمي :

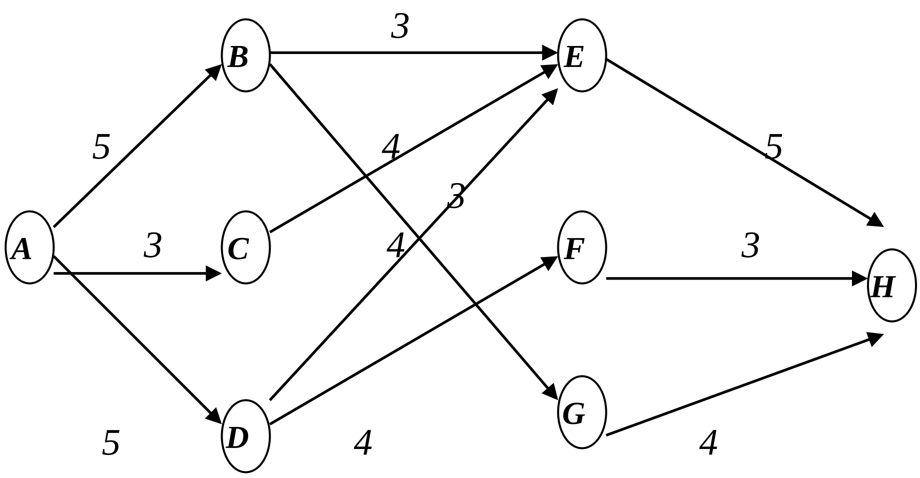
هناك عدة حالات يمكن تمثيلها عن طريق شبكات التدفق الأعظمي , من بينها نقل أكبر كمية ممكنة من سلع عبر أحد وسائل النقل كالشاحنات أو القطارات أو البواخر التي لها طاقات نقل محدودة , أو شبكات توزيع الغاز أو الماء عبر المدن.

مثلما فعلنا سابقا سوف نستعين بالمثال التالي :

مثال . 4 :

تقوم مؤسسة الرياض سطيف لإنتاج السميد باستيراد القمح من روسيا (A), يتم نقله عبر السكك الحديدية إلى مخازنها في كل من: ميناء *Marseille* بفرنسا (B), ميناء *Gênes* بإيطاليا (C), وميناء *Héraklion* باليونان (D), ثم بعد ذلك يتم نقله عبر البواخر إلى مخازنها في كل من: عنابه(E), جيجل(F), بجاية(G), ليصل في الأخير إلى مطحنتها في سطيف(H), طاقة مختلف وسائل النقل هذه مبينة في الشكل الموالي (الوحدة: لكل *1000* طن):

الشكل 6 . 5 :



قبل أن نقوم بحل هذا المثال سوف نستعرض بعض المفاهيم و الرموز التي تخص مشاكل التدفقات.

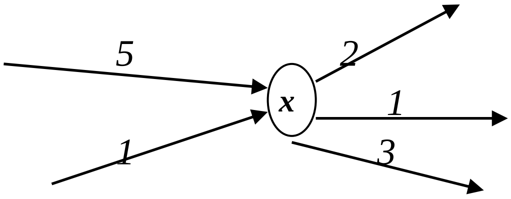
أ) التدفق :

هو عبارة عن شبكة نقل بدون حلقة (*boucle*) , و صلاتها تحتمل طاقة نقل قصوى نرمز لها بالرمز $C(u)$ أما التدفق الحقيقي الذي يمر عبر كل وصلة نرمز له بالرمز $f(u)$ حيث ($0 \leq f(u) \leq C(u)$), لها رأس بدون أي سابقة يسمى مدخل التدفق (*la source*) , و رأس آخر بدون أي لاحقة يسمى مخرج التدفق (*le puit*) , في المثال السابق الرأس A هو مدخل التدفق , و الرأس H هو مخرج التدفق , و الأرقام التي على الوصلات هي الطاقة القصوى لكل وصلة:

$$X_i \xrightarrow{C(u):\ f(u)} X_j$$

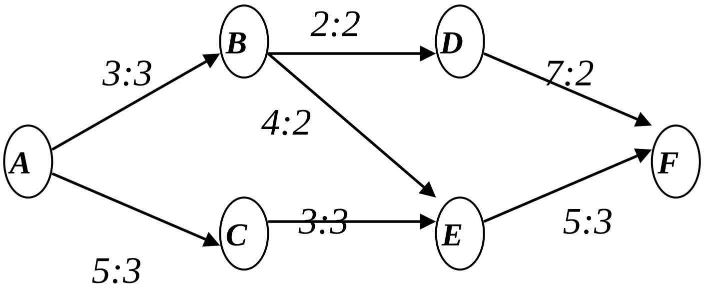
ب) قاعدة انحفاظ التدفق (*la règle de kirchoff*) :

مجموع تدفقات الوصلات الداخلة إلى رأس معين يجب أن تساوي مجموع تدفقات الوصلات الخارجة من هذا الرأس :



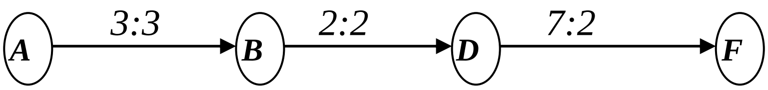
ت) التدفق الأعظمي :

يكون التدفق أعظمي إذا كانت كل المسارات التي تربط المدخل مع المخرج تحتوي عل الأقل على وصلة مشبعة ($C(u) = f(u)$) :

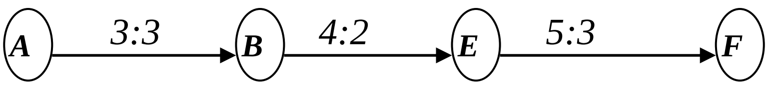


في هذا الشكل لدينا *3* مسارات تربط المدخل *A* بالمخرج *F* كلها تحتوي على الأقل على وصلة مشبعة و منه هذا التدفق أعظمي :

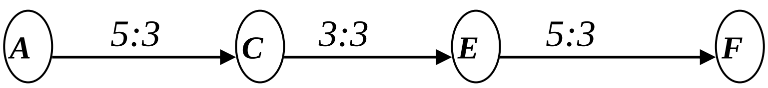
. المسار *1* (الوصلة *AB* و الوصلة *BD* مشبعتين) :



. المسار *2* (الوصلة *AB* مشبعة) :

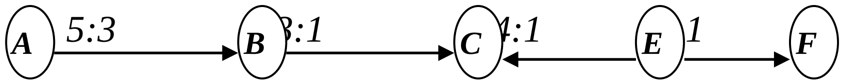


. المسار *3* (الوصلة *CE* مشبعة) :



ث) السلسلة القابلة للزيادة (*augmentante*) :

تكون السلسلة قابلة للزيادة عندما يكون تدفق وصلاتها التي في الاتجاه المباشر أقل من طاقتها القصوى $(f(u) < C(u))$ و نرمز لمجموعة هذه الوصلات بالرمز S^+ , و يكون تدفق وصلاتها التي في الاتجاه المعاكس موجب غير معدوم $(f(u) > 0)$ و نرمز لمجموعة هذه الوصلات بالرمز S^-:



. الوصلات في الاتجاه المباشر (AB , BC , EF) تدفقها لم يبلغ طاقتها القصوى $(f(u) < C(u))$.

. الوصلات التي في الاتجاه المعاكس (CE) تدفقها موجب غير معدوم $(f(u) > 0)$.

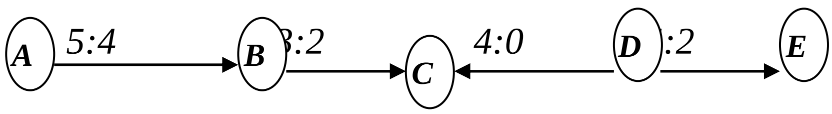
و يمكن تحسين التدفق في هذه السلسلة بفرض أن التدفق الإضافي هو e بالشكل التالي :

$$e = Min\ \{(C(u) - f(u) / u \in S^+) , (f(u) / u \in S^-)\}$$

$$= Min\ \{(5\text{-}3 , 3\text{-}1 , 4\text{-}1) , (1) \}$$

$$= Min\ \{(2 , 2 , 3) , (1)\} = 1$$

إذن نقوم بزيادة تدفق الوصلات في الاتجاه المباشر بـ 1 , و خفض الوصلات في الاتجاه المعاكس بـ 1 و نحصل على التدفق الجديد :



الآن أصبحت هذه السلسلة غير قابلة للزيادة.

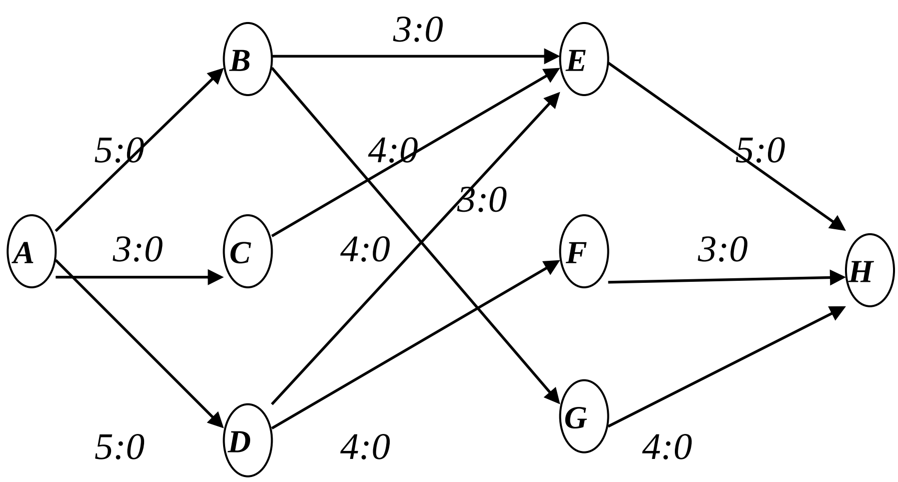
الحل باستخدام خوارزمية *Ford et Fulkerson* :

فكرة هذه الخوارزمية هي تمرير تدفق معين بطريقة عشوائية و أسهل تدفق عشوائي هو التدفق المعدوم (لكن التدفق المعدوم هو اختيار مقبول و لكنه بعيد عن التدفق الأعظمي , و إن أمكن اختيار تدفق آخر يكون أفضل) , ثم تحسين هذا التدفق شيئا فشيئا من خلال البحث عن كل السلاسل القابلة للزيادة إلى أن نصل إلى التدفق الأعظمي , و لنكون أكثر منهجية سوف نبحث عن كل السلاسل ذات الاتجاه المباشر القابلة للزيادة (أي المسارات) ثم نبحث عن باقي السلاسل (على الأقل أحد وصلاتها في الاتجاه المعاكس).

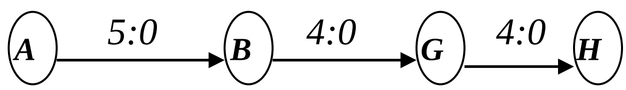
الآن سوف نقوم بإتباع خطوات هذه الخوارزمية في مثالنا السابق كما يلي :

. الخطوة *1* :

نفترض أن التدفق المبدئي هو التدفق المعدوم :



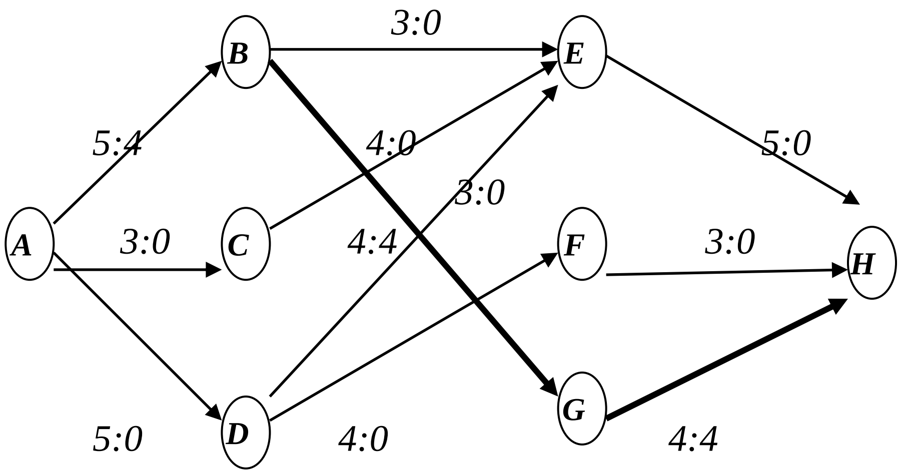
في هذا التدفق نبحث عن مسار معين ثم نختبره إن كان قابل للزيادة أم لا (إن أمكن نختار المسار صاحب أكبر زيادة) و ليكن (في المثال) :



نلاحظ أن هذا المسار قابل للزيادة , إذن يمكن تحسين التدفق في هذه السلسلة بالشكل التالي :

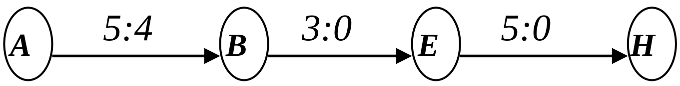
$$e = Min \{(C(u) - f(u) / u \in S^{+}) , (f(u) / u \in S^{-})\}$$
$$= Min \{5\text{-}0 , 4\text{-}0 , 4\text{-}0 \}$$
$$= Min \{5 , 4 , 4 \} = 4$$

إذن يمكن إضافة تدفق إضافي من خلال هذه المسار هو *4* و تشبع الوصلتين (*BG*) و (*GH*) :



. الخطوة *2* :

نبحث عن مسار آخر و ليكن :



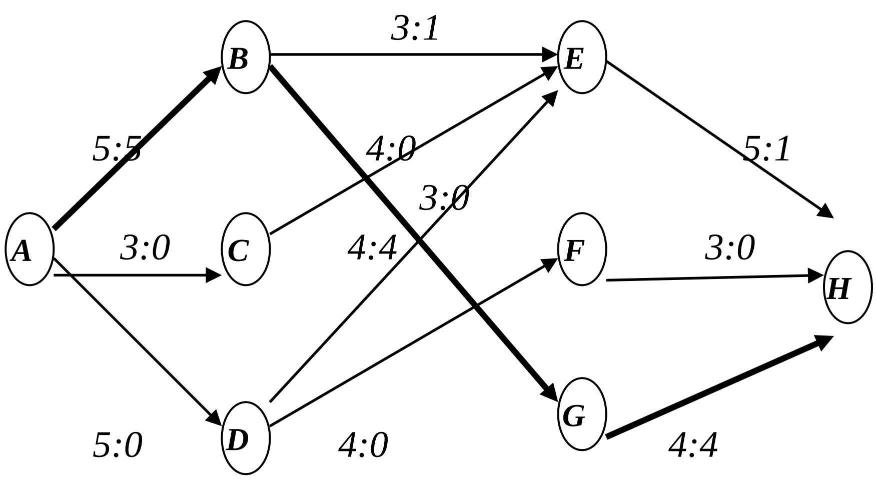
نلاحظ أن هذا المسار قابل للزيادة , إذن يمكن تحسين التدفق في هذه السلسلة بالشكل التالي :

$$e = Min\ \{(C(u) - f(u) / u \in S^{+}) , (f(u) / u \in S^{-})\}$$

$$= Min\ \{5\text{-}4 , 3\text{-}0 , 5\text{-}0 \}$$

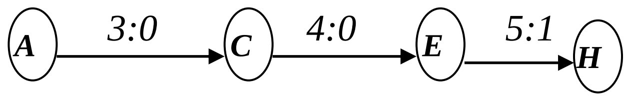
$$= Min\ \{1 , 3 , 5 \} = 1$$

إذن يمكن إضافة تدفق إضافي من خلال هذه المسار هو *1* و تشبع الوصلة (*AB*) :



. الخطوة 3 :

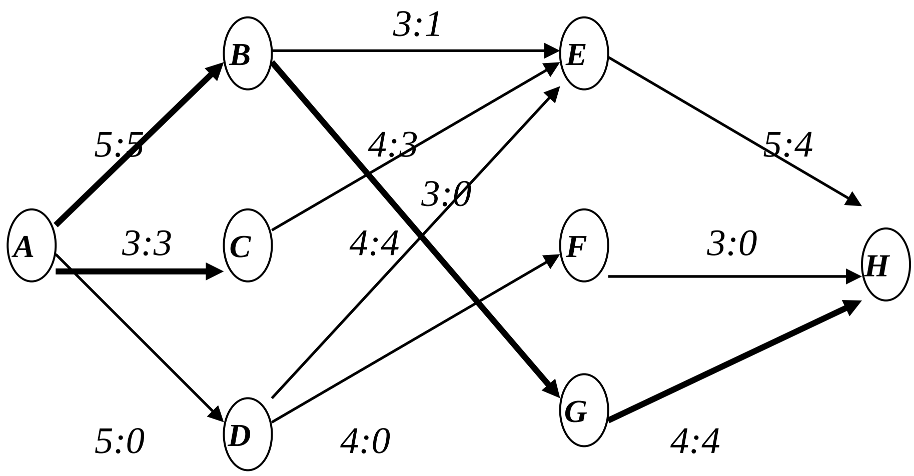
نبحث عن مسار آخر و ليكن :



نلاحظ أن هذا المسار قابل للزيادة , إذن يمكن تحسين التدفق في هذه السلسلة بالشكل التالي :

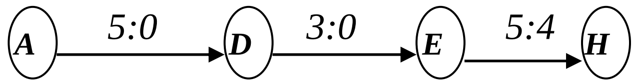
$$e = Min\ \{(C(u) - f(u) / u \in S^{+})\ ,\ (f(u) / u \in S^{-})\}$$
$$= Min\ \{3\text{-}0\ ,\ 4\text{-}0\ ,\ 5\text{-}1\ \}$$
$$= Min\ \{3\ ,\ 4\ ,\ 4\ \}\ =\ 3$$

إذن يمكن إضافة تدفق إضافي من خلال هذه المسار هو 3 و تشبع الوصلة (AC) :



. الخطوة 4 :

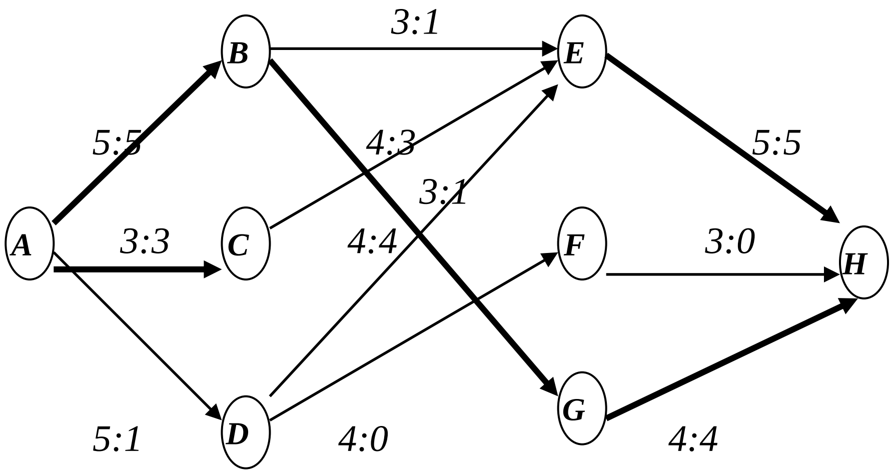
نبحث عن مسار آخر و ليكن :



نلاحظ أن هذا المسار قابل للزيادة , إذن يمكن تحسين التدفق في هذه السلسلة بالشكل التالي :

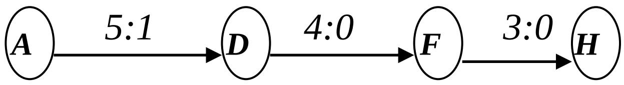
$$e = Min\ \{(C(u) - f(u) / u \in S^{+}) , (f(u) / u \in S^{-})\}$$
$$= Min\ \{5\text{-}0 , 3\text{-}0 , 5\text{-}4 \}$$
$$= Min\ \{5 , 3 , 1 \} = 1$$

إذن يمكن إضافة تدفق إضافي من خلال هذه المسار هو *1* و تشبع الوصلة (*EH*) :



. الخطوة *5* :

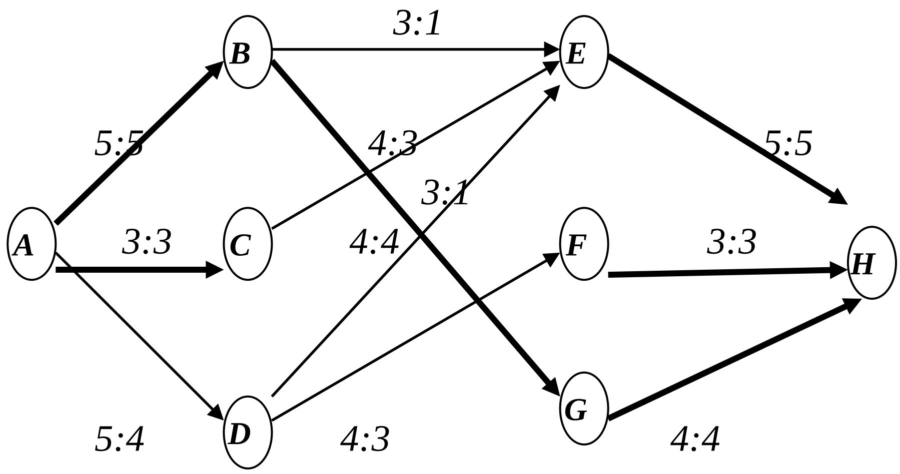
نبحث عن مسار آخر و ليكن :



نلاحظ أن هذا المسار قابل للزيادة , إذن يمكن تحسين التدفق في هذه السلسلة بالشكل التالي :

$$e = Min\ \{(C(u) - f(u) / u \in S^{+}) , (f(u) / u \in S^{-})\}$$
$$= Min\ \{5\text{-}1 , 4\text{-}0 , 3\text{-}0 \}$$
$$= Min\ \{4 , 4 , 3 \} = 3$$

إذن يمكن إضافة تدفق إضافي من خلال هذه المسار هو *3* و تشبع الوصلة (*FH*) :



نلاحظ أن كل وصلات المخرج (H) مشبعة و هذا يعني أنه لا يمكن تحسين هذا التدفق و بهذا نكون قد صلنا إلى التدفق الأعظمي لهذا المثال و هو 12 .

3 . مشاكل تحديد المسار الحرج :

نجد هذا النوع من المشاكل في عملية برمجة النشاطات الضرورية لبلوغ هدف معين خلال مرحلة زمنية معينة , فعملية إطلاق منتج جديد مثلا تتطلب عدة نشاطات تبدأ بجمع المعلومات , إعداد المخططات , شراء الآلات , إلى غاية إنتاج المنتج , و سيرورة مختلف هذه النشاطات يستدعي بطبيعة الحال مراقبتها من أجل بلوغ الهدف النهائي في أقل وقت ممكن.

إن استخدام الشبكات في هذا النوع من المشاكل يعود إلى الخمسينات من القرن الماضي مع اكتشاف طريقة *PERT*

(*Program Evaluation and Review Technique*) من طرف البحرية الأمريكية , و اكتشاف طريقة *CPM*

(*Critical Path Method*) من طرف شركة أمريكية (*Remington Rand Univac*) , و هاتين الطريقتين متشابهتين تماما لذلك نجد ما يسمى طريقة *PERT – CPM* , و في نفس الوقت تم اكتشاف طريقة أخرى مختلفة قليلا عن الطريقتين السابقتين و هي طريقة *MPM* (*Méthode des Potentiels Méra*) من طرف شركة فرنسية (*SEMA*) .

3 . 1 تشكيل شبكة النشاطات :

عملية تشكيل نشاطات مشروع معين تختلف باختلاف الطريقة المستخدمة (طريقة *PERT- CPM* أو طريقة *MPM*) ولكن كلاهما يستدعي مسبقا تحديد مختلف النشاطات الضرورية للمشروع و كذا مدة كل نشاط , و في الحقيقة عملية تفكيك مشروع معين إلى نشاطاته الجزئية و تحديد زمن كل نشاط ليس بالأمر الهين و يتطلب دقة و خبرة كبيرتين.

1 . تحليل المشروع :

إن عملية تحليل المشاريع تتم وفق ثلاث مراحل متتالية :

أ) المرحلة الأولى :

أول مرحلة في عملية دراسة و تحليل مشروع معين هي إعداد قائمة نشاطاته الجزئية , حيث أن كل نشاط منها يتطلب زمن معين و يستهلك موارد أولية , و بالإضافة إلى هذه النشاطات الحقيقية نحتاج في بناء الشبكات إلى نشاطات وهمية لا تتطلب زمن و لا تستهلك موارد , يتم إدراجها فقط لتحديد علاقات الأسبقية بين النشاطات.

فمثلا مشروع إطلاق منتج معين , يمكن تفكيكه إلى نشاطاته الجزئية التالية (أو بعبارة أخرى نقول أنه يحتاج إلى النشاطات التالية):

. إعداد نموذج مصغر عن هذا المنتج.

. اختباره و ذلك بعرضه على المستهلك لإبداء رأيه.

. استخراج براءة الاختراع.

. دراسة السوق.

. القيام بالإعلانات الضرورية.

. إعداد و تجهيز ورشة الإنتاج.........الخ.

كما يمكن أيضا تفكيك كل نشاط من هذه النشاطات إلى نشاطات جزئية أخرى فمثلا دراسة السوق تتطلب النشاطات التالية :

A . تحديد أهداف الدراسة.

B . إعداد مخططات الدراسة.

C . إعداد دراسات نظرية.

D . اختيار الموظفين الأكفأ للقيام بعملية سبر الآراء عن طريق الاختبار.

E . تكوين و تأهيل الموظفين الذين تم اختيارهم.

F . إعداد استمارات سبر الآراء.

G . تحديد عينة الدراسة.

H . طباعة و نسخ استمارة سبر الآراء.

I . القيام بالعمل الميداني (ملأ الاستمارات).

J . دراسة و تحليل النتائج.

K . خلاصة الدراسة.

في الحقيقة يمكن اختصار كل هذه النشاطات الجزئية في نشاط دراسة السوق و الزمن الذي يستغرقه يتم تقييمه حسب أزمنة هذه النشاطات و الموارد التي يستهلكها هي مجموع الموارد التي تستهلكها , و لكن كلما فككنا المشروع إلى نشاطات جزئية أكثر كلما حددنا بدقة الزمن الكلي للمشروع.

ب) المرحلة الثانية :

بعد تحديد قائمة النشاطات تأتي المرحلة الثانية من تحليل المشاريع و فيها يتم تحديد أزمنة كل نشاط , و تحديد الأزمنة ليست بالأمر السهل فمثلا قد تكون مرتبطة بعوامل خارجة عن سيطرة صاحب المشروع كالاضطرابات الجوية أو عدم احترام المورد مواعيد تسليم المواد الأولية التي تعرقل وصولها , أيضا قد لا يستطيع صاحب المشروع تحديد زمن نشاط جديد معين لأنه لم يسبق له أن اشتغل على هذا النشاط.

في طريقة $PERT$ و في حالة عدم التأكد يتم تقسيم زمن كل نشاط إلى 3 أزمنة :

. الزمن المعتاد للنشاط و نرمز له بالرمز (m) و هو الزمن الأكثر احتمال.

. الزمن المتفائل و نرمز له بالرمز (a) بحيث يكون من الصعب الحصول على زمن أقل منه.

. الزمن المتشائم و نرمز له بالرمز (b) بحيث يكون من المستبعد الحصول على زمن أطول منه.

ت) المرحلة الثالثة :

في هذه المرحلة تأتي عملية تحديد مختلف القيود , و هناك نوعين من القيود , قيود تتعلق بالزمن , و أخرى تتعلق بالموارد

ت . 1) قيود الزمن :

هذه القيود تحدد تواريخ بدأ النشاطات و هناك :

. قيود الأسبقية التي تفرض على بعض النشاطات الانتظار إلى حين انتهاء نشاطات أخرى فمثلا في مجال بناء العمارات , يستحيل بناء الجدران قبل بناء القواعد أو دهن الجدران قبل بنائها.

. قيود تفرض تواريخ معينة على بعض النشاطات فمثلا القيام بإعلان على القناة التلفزيونية يتم في تاريخ محدد لا يحتمل التأجيل أو التأخير.

. قيود تنفي حدوث نشاطين مختلفين في زمن واحد فمثلا هذين النشاطين يحتاجان إلى نفس الآلة , و لكن المؤسسة تمتلك نسخة واحدة منها.

ت . 2) قيود الموارد :

هذه القيود تعمل على مراقبة و توفير الموارد الأولية مع تطور المشروع عبر الزمن , فمثلا مجموع الموارد المستخدمة خلال مرحلة معينة (مثلا *3* أشهر الأولى من عمر المشروع) يجب أن لا تتجاوز الكميات المتاحة منها لدى المؤسسة.

ملاحظة :

في هذا العمل نتجاهل قيود الموارد و نفترض أنه لا مشكلة لدى المؤسسة في الحصول على الموارد الضرورية في كل مرحلة من مراحل المشروع , و نكتفي فقط بالانشغال بقيود الزمن فقط.

3 . 2 طريقة $PERT - CPM$:

باستخدام هذه الطريقة وصلات الشبكة تعبر عن النشاطات حيث تعبر بداية الوصلة عن بداية النشاط و نهايتها نهاية النشاط , و لفهم كيفية بناء هذه الشبكات نستعين بمثال دراسة السوق السابق حيث نعتبره كمشروع مفكك إلى *11* نشاطا جزئيا , هذه النشاطات يجب أن تحترم التتابع الزمني فيما بينها (أي أن هذا المثال يحتوي على قيود الأسبقية فقط) كما يلي :

. إعداد مخططات الدراسة (B) يتطلب تحديد أهداف الدراسة (A) أولا.

. لا يمكن بدأ الدراسات النظرية (C) إلا بعد الانتهاء من مخططات الدراسة, ونفس الشئ بالنسبة لاختيار الموظفين (D) لأن عددهم مرتبط بمخططات الدراسة.

. إعداد الاستمارة (F) حتما سيأتي بعد الدراسات النظرية (C).

. طباعة و نسخ الاستمارة (H) و تأهيل الموظفين (E) , حتما سيأتيان بعد إعداد الاستمارة (F).

. تأهيل الموظفين (E) بطبيعة الحال يتطلب اختيارهم أولا (D).

. تحديد عينة الدراسة (G) يأتي بعد إعداد الاستمارة (F).

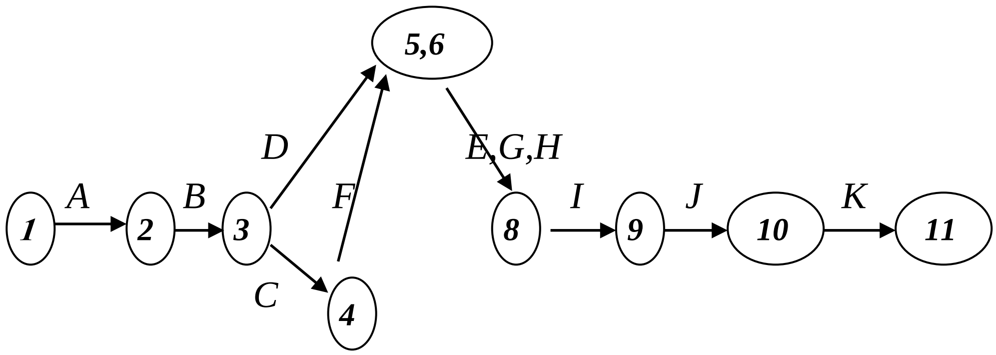
. لا يمكن أن يبدأ العمل الميداني (I) قبل طباعة و نسخ الاستمارة (H) و تأهيل الموظفين (E) و تحديد عينة الدراسة (G).

. الحصول على خلاصة الدراسة (K) حتما سيأتي بعد دراسة و تحليل النتائج (J).

. دراسة و تحليل النتائج (J) غير ممكن دون العمل الميداني (I).

الآن و من خلال هذه المعطيات نقوم ببناء الشبكة الملائمة , و نقترح الشكل التالي :

الشكل . 6 : شكل خاطئ

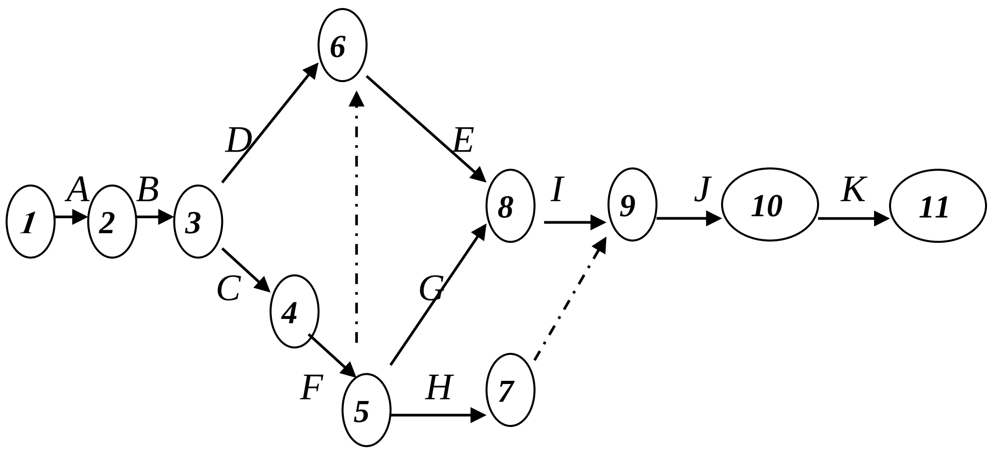


إن عملية بناء هذه الشبكة بهذا الشكل عمل خاطئ لأنه يبدو من خلاله أن تحديد عينة الدراسة (G) و طباعة و نسخ الاستمارة (H) ليس من الضرورة أن يأتي حتما بعد اختيار الموظفين (D) لأنه من الأفضل أن يحدث ذلك في نفس الوقت .

إذن لتجاوز هذه المشكلة نستعين بما يعرف بالنشاطات الوهمية و هي وصلات صفرية , لذلك سوف نضع وصلة جديدة لـ (G) و أخرى لـ (H) تأتيان بعد الوصلة (F), ثم نضع وصلة وهمية تبين أن (F) يسبق أيضا (E)

و نحصل على الشكل الصحيح للشبكة كما يلي :

الشكل . 7 : شكل صحيح



هذه الطريقة المباشرة في بناء الشبكات تبدو سهلة فقط في حالة عدد بسيط من النشاطات أما في حالة مشاريع ذات أعداد كبيرة من النشاطات الجزئية نستعين في بنائها بمصفوفة الأسبقية المباشرة(التي ذكرناها في الفقرة1 . 5) في المثال السابق نحصل على مصفوفة الأسبقية المباشرة التالية :

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K
A		x									
B			x	x							
C						x					
D					x						
E									x		
F					x		x	x			
G									x		
H									x		
I										x	
J											x
K											

. إذا كان أحد الأعمدة خالي من أي علامة هذا يدل على أن هذا النشاط لا يسبقه أي نشاط آخر و هو نشاط بداية المشروع , في المثال تحديد أهداف الدراسة (A) هو بداية المشروع.

. إذا كان أحد الأسطر خالي من أي علامة هذا يدل على أن هذا النشاط لا يسبق أي نشاط آخر , و هو نشاط نهاية المشروع , في المثال خلاصة الدراسة (K) هو نهاية المشروع.

. إذا كان أحد الأعمدة يحتوي على عدة علامات هذا يعني أن هذا النشاط تسبقه عدة نشاطات فمثلا عمود النشاط(I)تسبقه النشاطات(E)و (G) و (H).

. إذا كان أحد الأسطر يحتوي على عدة علامات هذا يعني أن هذا النشاط يسبق عدة نشاطات.

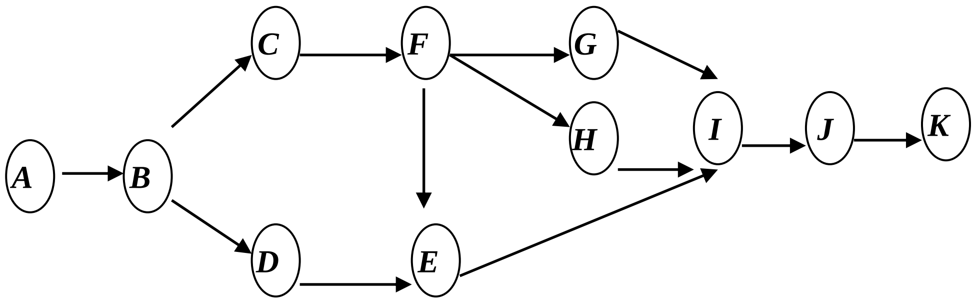
ملاحظة :

في الحقيقة عند استخدام طريقة *PERT-CPM* و حتى مع استخدام مصفوفة الأسبقية المباشرة عملية بناء الشبكة تزداد صعوبة كلما زاد عدد الأنشطة و تكمن الصعوبة عند عملية إدراج الوصلات الوهمية , في حين أن هذا المشكل غير مطروح مع طريقة *MPM* التي سوف نستعرضها الآن و التي لا تحتاج إلى أي وصلة وهمية.

3 . 3 طريقة *MPM* :

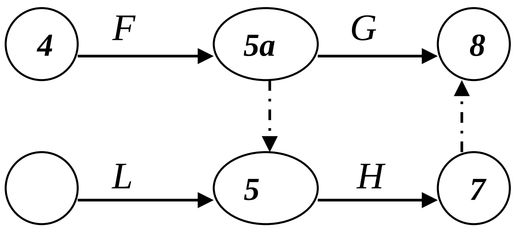
باستخدام هذه الطريقة و بخلاف الطريقة السابقة رؤوس الشبكة هي التي تمثل النشاطات بينما الوصلات تحدد فقط شروط الأسبقية بين مختلف النشاطات , و عملية بناء الشبكة يتم استنتاجها مباشرة من مصفوفة الأسبقية المباشرة , و بالاستعانة بنفس المثال السابق نحصل على الشكل الموالي :

الشكل . *8* :

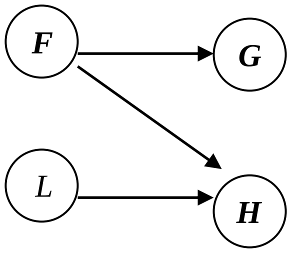


كما لاحظنا فقد قمنا برسم هذه الشبكة بطريقة أسهل من الطريقة السابقة و لا نحتاج فيها إلى أي وصلات وهمية , و حتى في حالة إضافة نشاطات جديدة بطريقة *MPM* يمكن إضافتها دون أي مشاكل , في حين أن إضافة نشاطات جديدة في شبكة *PERT-CPM* ستكون أكثر صعوبة لأنه سيتطلب أحيانا إعادة رسم جزء من الشبكة.

لنفترض أنه تم إضافة شرط على النشاط طباعة و نسخ الاستمارة (H) و هي أن هذا النشاط لن يبدأ قبل شهر (وفق موعد استلام آلة النسخ) , إذن هذا الشرط يتم ترجمته عبر نشاط جديد و هو استلام آلة النسخ (L) , إذن في شبكة *PERT-CPM* نهاية هذا النشاط هي الرقم (5) و لكن هذا الرقم هو نفسه بداية النشاط (G) الغير مرتبط بالنشاط الجديد, إذن يتم خلق حدث جديد هو الرقم ($5a$) و وصلة وهمية جديدة تربط الحدثين($5a$) و (5) كما يلي :



أما في شبكة *MPM* فيتم إضافة النشاط الجديد (L) مباشرة و دون تغيير في أي جزء من المنحنى كما يلي :



3 . 4 تحديد الأزمنة :

إن الزمن الكلي الذي يستغرقه أي مشروع ليس بالضرورة أن يكون حاصل جمع أزمنة نشاطاته الجزئية لأن بعض النشاطات قد تنجز معا, وفي الحقيقة الهدف الأساسي الذي بنيت من أجله هذه الشبكات هو التنبؤ بالزمن الكلي لإنجاز المشروع , و لكن أيضا تستخدم في مراقبة تطور إنجاز المشروع من خلال حساب زمن و هوامش حرية كل نشاط و التي سوف نقوم بحسابها بطبيعة الحال في حالة التأكد , ثم في حالة عدم التأكد.

3 . 4 . 1 حساب زمن المشروع :

كلا الطريقتين (*PERT-CPM* و *MPM*) تسمح بحساب زمن المشروع , إلا أن طريقة (*PERT-CPM*) تستعين إجباريا بالشبكة , بينما طريقة (*MPM*) قد تستغني عن الشبكة و يمكن حساب زمن المشروع جبريا (عن طريق جدول حساب).

أ) طريقة *PERT-CPM* :

عملية تحديد زمن المشروع هو تحديد أطول مسار في الشبكة يربط مدخل الشبكة مع مخرج الشبكة , و يسمى هذا المسار بالمسار الحرج , و للقيام بذلك سوف نقوم بحساب التاريخ المبكر لحصول كل حدث من أحداث الشبكة (رؤوس الشبكة) بالتتابع من مدخل الشبكة إلى مخرج الشبكة , ثم بعد ذلك نقوم بطريقة عكسية بحساب التاريخ المتأخر لحصول كل حدث و لكن قبل ذلك نحتاج تعريف بعض الرموز :

. نرمز لنشاط بدايته الحدث (i) و نهايته الحدث (j) بالرمز (ij).

. نرمز للتاريخ المبكر لبداية النشاط (ij) بالرمز T_i .

. نرمز للتاريخ المتأخر لبداية النشاط (ij) بالرمز T_i^*

. نرمز للتاريخ المبكر لحصول الحدث (j) بالرمز t_j .

. نرمز للتاريخ المتأخر لحصول الحدث (j) بالرمز t_j^* .

. نرمز لزمن النشاط (ij) بالرمز t_{ij} .

. نرمز لمجموع الأحداث التي تسبق الحدث(j)مباشرة بالرمز X_j^-.

. نرمز لمجموع الأحداث اللاحقة للحدث(j)مباشرة بالرمز X_j^+.

أ . 1) حساب التاريخ المبكر لبداية الأنشطة :

لمعرفة التاريخ المبكر لبداية الأنشطة يجب حساب التاريخ المبكر لحصول الأحداث , و حتى يحصل الحدث (j) يجب أن تكون كل الأنشطة التي تسبقه قد تم إنجازها و بالتالي فالتاريخ المبكر لحصوله هو يوافق تاريخ انتهاء آخر نشاط و يعني هذا رياضيا :

$$t_j = max\ (t_i+t_{ij}) \quad ; \quad i \epsilon X_j^-$$

لنفترض أن أزمنة نشاطات المثال السابق هي كما يلي :

النشاطات	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K
الأزمنة	1	3	10	5	3	3	1	2	20	4	5

إذن بالاستعانة بشبكة الشكل . 7 نقوم بحساب زمن المشروع :

. نضع مبدأ الأزمنة عند الحدث 1 و هو بداية أول نشاط في الشبكة و هو النشاط (A) أي : $t_1 = 0$.

. التاريخ المبكر للحدث 2 , نهاية النشاط (A) هو :

$$t_2=max(t_1+t_{12})=max(0+1)=1$$

. التاريخ المبكر للحدث 3 , نهاية النشاط (B) هو :

$$t_3=max(t_2+t_{23})=max(1+3)=4$$

. التاريخ المبكر للحدث 4 , نهاية النشاط (C) هو :

$$t_4=max(t_3+t_{34})=max(4+10)=14$$

. التاريخ المبكر للحدث 5 , نهاية النشاط (F) هو :

$$t_5=max(t_4+t_{45})=max(14+3)=17$$

. التاريخ المبكر للحدث 6، نهاية آخر نشاط من بين النشاطين(D)و(F)هو :

$$t_6=max(t_3+t_{36}\ ,\ t_5+t_{56})=max(4+5\ ,\ 17+0)=(9\ ,\ 17)=17$$

. التاريخ المبكر للحدث 7 , نهاية النشاط (H) هو :

$$t_7=max(t_5+t_{57})=max(17+2)=19$$

. التاريخ المبكر للحدث 8, نهاية آخر نشاط من بين(E) و (G) و(H) هو :

$$t_8=max(t_6+t_{68} , t_5+t_{58} , t_7+t_{78})=max(17+3 , 17+1 , 19+0)=20$$

. التاريخ المبكر للحدث 9 , نهاية النشاط (I) هو :

$$t_9=max(t_8+t_{89})=max(20+20)=40$$

. التاريخ المبكر للحدث 10 , نهاية النشاط (J) هو :

$$t_{10}=max(t_9+t_{9\,10})=max(40+4)=44$$

. التاريخ المبكر للحدث 11 , نهاية النشاط (K) هو :

$$t_{11}=max(t_{10}+t_{10\,11})=max(44+5)=49$$

إذن بمأن التاريخ المبكر لحصول الحدث 11 و هو نهاية آخر نشاط في المشروع فهو نفسه التاريخ المبكر لنهاية المشروع أي بعد 49 يوم أي أنه أقل زمن ممكن أن ينجز فيه المشروع , و الآن يمكن معرفة التاريخ المبكر لبداية الأنشطة , و التاريخ المبكر لبداية كل نشاط هو التاريخ المبكر لحصول حدث بداية هذا النشاط و يكتب رياضيا:

$$T_{ij} = t_i \qquad T_A = t_1 = 0 \qquad T_B = t_2 = 1$$

$$T_C = t_3 = 4 \qquad T_D = t_3 = 4 \qquad T_E = t_6 = 17$$

$$T_F = t_4 = 14 \qquad T_G = t_5 = 17 \qquad T_H = t_5 = 17$$

$$T_I = t_8 = 20 \qquad T_J = t_9 = 40 \qquad T_K = t_{10} = 44$$

$$T_{Fin} = t_{11} = 49$$

أ . 2) التاريخ المتأخر لبداية الأنشطة :

في هذه الحالة سنقوم بحساب التواريخ المتأخرة لحصول الأحداث بطريقة عكسية و ننطلق من الحدث الأخير (11) .

و التاريخ المتأخر للحدث (j) يوافق بداية آخر نشاط لاحق لهذا الحدث و رياضيا نكتب :

$$t_j^* = \min(t_i^* - t_{ji}) \quad ; \quad i \epsilon X_j^+$$

. التاريخ المتأخر للحدث 11 يوافق التاريخ المبكر له لذلك نضع : $t_{11}^* = t_{11} = 49$

. التاريخ المتأخر للحدث 10 , بداية النشاط (K) هو :

$$t_{10}^* = \min(t_{11}^* - t_{10,11}) = \min(49 - 5) = 44$$

. التاريخ المتأخر للحدث *9* , بداية النشاط (J) هو :

$$t_9^* = \min(t_{10}^* - t_{9,10}) = \min(44 - 4) = 40$$

. التاريخ المتأخر للحدث *8* , بداية النشاط (I) هو :

$$t_8^* = \min(t_9^* - t_{89}) = \min(40 - 20) = 20$$

. التاريخ المتأخر للحدث *7* , بداية النشاط الوهمي *(78)* هو :

$$t_7^* = \min(t_8^* - t_{78}) = \min(20 - 0) = 20$$

. التاريخ المتأخر للحدث *6* , بداية النشاط (E) هو :

$$t_6^* = \min(t_8^* - t_{68}) = \min(20 - 3) = 17$$

. التاريخ المتأخر للحدث *5* , بداية آخر نشاط لاحق من بين النشاطات *(56)* و (G) و (H) هو :

$$t_5^* = \min(t_6^* - t_{56}, t_8^* - t_{58}, t_7^* - t_{57}) = \min(17 - 0, 20 - 1, 20 - 2) = 17$$

. التاريخ المتأخر للحدث *4* , بداية النشاط (F) هو :

$$t_4^* = \min(t_5^* - t_{45}) = \min(17 - 3) = 14$$

. التاريخ المتأخر للحدث *3*, بداية آخر نشاط من بين(D)و (C)هو:

$$t_3^* = \min(t_4^* - t_{34}, t_6^* - t_{36}) = \min(14 - 10, 17 - 5) = 4$$

. التاريخ المتأخر للحدث *2* , بداية النشاط (B) هو :

$$t_2^* = \min(t_3^* - t_{23}) = \min(4 - 3) = 1$$

. التاريخ المتأخر للحدث *1* , بداية النشاط (A) هو :

$$t_1^* = \min(t_2^* - t_{12}) = \min(1 - 1) = 0$$

أما بالنسبة للتواريخ المتأخرة لبداية الأنشطة , فالتاريخ المتأخر لنشاط معين هو التاريخ المتأخر لحدث نهاية هذا النشاط ناقص زمن هذا النشاط و تكتب بالعلاقة الرياضية التالية :

$$T_{ij}^* = t_j^* - t_{ij}$$

$$T_K^* = t_{11}^* - t_K = 49 - 5 = 44$$

$$T_J^* = t_{10}^* - t_J = 44 - 4 = 40$$

$$T_I^* = t_9^* - t_I = 40 - 20 = 20$$

$$T_H^* = t_7^* - t_H = 20 - 2 = 18$$

$$T_G^* = t_8^* - t_G = 20 - 1 = 19$$

$$T_F^* = t_5^* - t_F = 17 - 3 = 14$$

$$T_E^* = t_8^* - t_E = 20 - 3 = 17$$

$$T_D^* = t_6^* - t_D = 17 - 5 = 12$$

$$T_C^* = t_4^* - t_C = 14 - 10 = 4$$

$$T_B^* = t_3^* - t_B = 4 - 3 = 1$$

$$T_A^* = t_2^* - t_A = 1 - 1 = 0$$

نعيد تمثيل التواريخ المبكرة و المتأخرة لبداية الأنشطة و تحديد الأنشطة الحرجة في الجدول التالي :

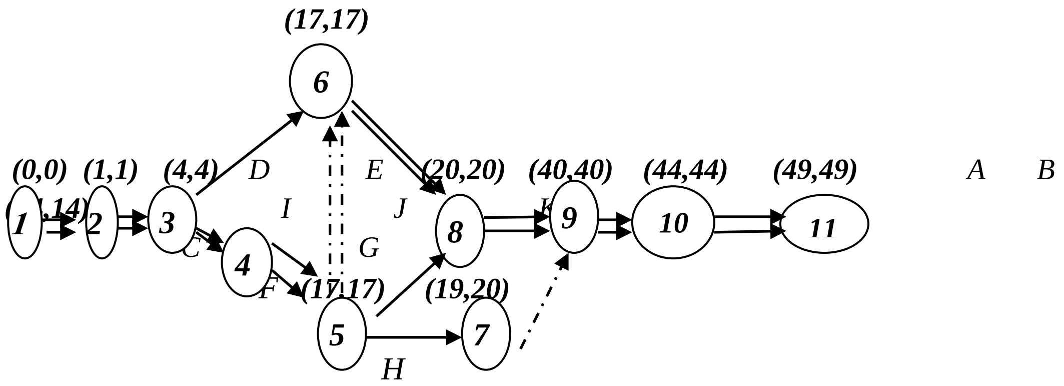
T^*

الجدول . 2 :

الأنشطة	**A**	**B**	**C**	**D**	**E**	**F**	**G**	**H**	**I**	**J**	**K**
التاريخ المبكر (T)	*0*	*1*	*4*	*4*	*17*	*14*	*17*	*17*	*20*	*40*	*44*
التاريخ المتأخر (T^*)	*0*	*1*	*4*	*12*	*17*	*14*	*19*	*18*	*20*	*40*	*44*
الأنشطة الحرجة	A	B	C		E	F			I	J	K

الآن يمكن أن نحدد المسار الحرج على الشبكة بكل سهولة , و هو المسار الذي يمر عبر الأنشطة الحرجة و هي التي يتساوى تاريخ بدايتها المبكر مع تاريخها المتأخر في الشكل الوصلات البارزة بخطين مضاعفين

الشكل . 9 :



ب) طريقة MPM :

بخلاف الطريقة السابقة التي تعتمد في حساب زمن المشروع على الشبكة نقوم بحساب زمن المشروع بهذه الطريقة جبريا و ذلك باستخدام جدول تخصص كل خانة منه إلى نشاط معين , و سواء تم إدخال النشاطات بطريقة مرتبة أو لا لن يؤثر على نتيجة الحساب , و في مثالنا السابق نستخدم الخانة الأولى للنشاط (A) و الثانية للنشاط (B) و هكذا الخانة الأخيرة للنشاط الأخير (K) , كل خانة يتم إنشائها بالشكل التالي :

TD_i	i
TD_j	$j \epsilon X_i^-; dj$

i : إسم النشاط.

$j \epsilon X_i^-$: إسم الأنشطة السابقة للنشاط i .

d_j : زمن النشاط j .

TD_i : يتم حسابها بطريقة متتابعة انطلاقا من بداية أول نشاط (A) (حيث : $TD_A = 0$) , و تحسب بالعلاقة الرياضية التالية :

$$; \; j \epsilon X_i^- \; TD_i = \max(TD_j + d_j)$$

و هكذا نحصل على زمن المشروع (49 يوم) و هو نفسه بالطريقة السابقة من الجدول الموالي :

الجدول . 2 :

0	*A*	*1*	*B*	*4*	*C*	*4*	*D*	*17*	*E*	*14*	*F*
0	*- , 0*	*0*	*A ; 1*	*1*	*B ; 3*	*1*	*B ; 3*	*4* *14*	*D ; 5* *F ; 3*	*4*	*C ; 10*
17	*G*	*17*	*H*	*20*	*I*	*40*	*J*	*44*	*K*	*49*	*Fin*
14	*F ; 3*	*14*	*F ; 3*	*17* *17* *17*	*E ; 3* *C ; 1* *H ; 2*	*20*	*I ; 20*	*40*	*J ; 4*	*44*	*K ; 5*

3 . 4 . 2 حساب الهوامش :

عندما يكون هدف المؤسسة مثلا يتعلق بزمن المشروع , يصبح من الضروري معرفة هوامش حرية المؤسسة في إنجاز بعض النشاطات , و في حالة مثالنا السابق كان زمن المشروع هو *49* يوم و لنفترض أن كل نشاطات هذا المشروع تبدأ في تاريخها المبكر فما هي هوامش حرية المشروع ؟

أ) هامش الحركة (*Intervalle de flottement*):

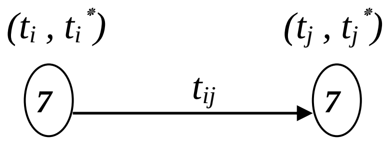
هامش حركة نشاط معين هو الفرق بين التاريخ المبكر لبداية هذا النشاط (T_{ij}) و التاريخ المتأخر لبدايته (T_{ij}^*) , و هذا يعني أنه مادام تاريخ بداية هذا النشاط يقع ضمن هذا المجال فإن هذا النشاط لن يؤثر على الزمن الكلي لنهاية المشروع , و نلاحظ هنا أن نشاطات المسار الحرج يتساوى فيه التاريخ المبكر مع التاريخ المتأخر لبدايتها , و هذا يعني أن هامش حركة هذه النشاطات معدوم و أي تغير في تاريخ بدايتها سوف يؤثر مباشرة في زمن إنجاز المشروع أي أنها نشاطات حرجة يجب مراقبتها بدقة إذا أردنا الالتزام بمدة إنجاز المشروع و منها جاءت تسمية المسار الحرج و رياضيا

هامش الحركة : $MM\,(ij) = T_{ij}^* - T_{ij}$

ب) الهامش الحر (*La marge libre*) :

و هو أقصى تأخير مسموح به لبداية نشاط معين دون أن يؤثر ذلك على التاريخ المبكر لأي نشاط لاحق له و نرمز له بالرمز *ML(ij)* و يحسب بالعلاقة الرياضية التالية :

$$ML(ij) = t_j - t_i - t_{ij}$$



ت) الهامش الكلي (*La marge totale*) :

و هو أقصى تأخير مسموح به لبداية نشاط معين دون أن يؤثر ذلك على تاريخ نهاية إنجاز المشروع , و لكن يتم إزاحة النشاطات اللاحقة لتبدأ في أقرب تاريخ متأخر من بينها و يحسب رياضيا كما يلي :

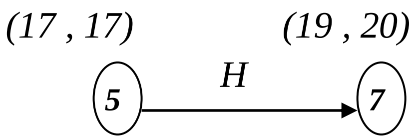
$$MT\,(ij) = t_j^* - t_i - t_{ij}$$

ث) الهامش الأكيد (*La marge certaine*) :

و هو أقصى تأخير مسموح به لبداية نشاط معين دون أن يؤثر ذلك على التاريخ المبكر لبداية أي نشاط لاحق , و لكن بفرض أن كل نشاط سابق قد بدأ في تاريخه المتأخر و رياضيا يحسب بالعلاقة التالية :

$$MC\,(ij) = t_j - t_i^* - t_{ij}$$

مثال : نقوم بحساب هوامش النشاط (H) :



أ) هامش الحركة : $MM\,(H) = T_H^* - T_H = 18 - 17 = 1$

ب) الهامش الحر : $ML(H) = t_7 - t_5 - t_H = 19 - 17 - 2 = 0$

ت) الهامش الكلي : $MT(H) = t_7^* - t_5 - t_H = 20 - 17 - 2 = 1$

ث) الهامش الأكيد : $MC(H) = t_7 - t_5^* - t_H = 19 - 17 - 2 = 0$

نقوم الآن بحساب جميع هوامش المثال السابق في الجدول الموالي :

الجدول . 3 :

$MC(ij)$	$MT(ij)$	$ML(ij)$	$MM(ij)$	T_{ij}^*	T_{ij}	t_j^*	t_j	t_i^*	t_i	الأزمنة t_{ij}	الأنشطة (ij)
0	0	0	0	0	0	1	1	0	0	1	A(1.2)
0	0	0	0	1	1	4	4	1	1	3	B(2.3)
0	0	0	0	4	4	14	14	4	4	10	C(3.4)
8	8	8	8	12	4	17	17	4	4	5	D(3.6)
0	0	0	0	17	17	20	20	17	17	3	E(6.8)
0	0	0	0	14	14	17	17	14	14	3	F(4.5)
0	0	0	-	-	-	17	17	17	17	0	(5.6)
2	2	2	2	19	17	20	20	17	17	1	G(5.8)
0	1	0	1	18	17	20	19	17	17	2	H(5.7)
0	1	1	-	-	-	20	20	20	19	0	(7.8)
0	0	0	0	20	20	40	40	20	20	20	I(8.9)
0	0	0	0	40	40	44	44	40	40	4	J(9.10)
0	0	0	0	44	44	49	49	44	44	5	K(10.11)

3 . 5 حساب زمن المشروع في حالة عدم التأكد :

فيما سبق افترضنا معرفة زمن كل نشاط بصفة أكيدة , و لكن مثلما قلنا فيما سبق في الواقع العملي من الصعب جدا تحديد الأزمنة بشكل دقيق و مؤكد لأنه قد يخضع إلى عوامل خارج سيطرة المؤسسة , لذلك سوف نقبل نسبة معينة من درجة دقة أزمنة النشاطات.

إذن في هذه الحالة سينصب هدفنا في تحديد متوسط الزمن المتوقع (التوقع الرياضي) للمشروع و ليكن $E(T)$, أو احتمال أن يتجاوز هذا الزمن حد معين سلفا , و هذا يعني أننا سوف نفترض أن زمن كل نشاط (t_{ij}) هو متغير عشوائي بتوقع رياضي $E(t_{ij})$ و تباين $V(t_{ij})$, و بالتالي فالتوقع الرياضي لزمن المشروع هو مجموع التوقعات الرياضية لأزمنة النشاطات الحرجة (التي تقع على المسار الحرج) , و تباين زمن المشروع هو أيضا مجموع تباينات أزمنة النشاطات الحرجة و هذا طبعا بفرض استقلالية أزمنة النشاطات فيما بينها (أي أن عملية حساب زمن نشاط معين لا تؤثر في حساب زمن نشاط آخر و في الحقيقة هي فرضية معقولة).

في الحقيقة يمكن لنا أن نرفق بكل نشاط التوزيع الاحتمالي لزمن هذا النشاط , و للقيام بذلك نفترض أن هذا الزمن يتوزع على ثلاث قيم محتملة a , b و m (من الفقرة 3 . 1 . ب) , و بفرض أن الأزمنة متغيرات عشوائية تتبع توزيع بيتا (b êta) نحصل على توقعاتها الرياضية و تبايناتها كما يلي :

$$E(t_{ij}) = \frac{a+4m+b}{6} \qquad ; \qquad V(t_{ij}) = \left(\frac{b-a}{6}\right)^2$$

نعود إلى المثال السابق و لنفترض أن زمن كل نشاط ينقسم إلى *3* أزمنة a , m و b , إذن و بتطبيق العلاقتين السابقتين نحصل على التوقع الرياضي و تباين زمن كل نشاط كما هو مبين في الجدول الموالي :

الجدول . 4 :

الأنشطة (ij)	a	m	b	$E(t_{ij})$	$V(t_{ij})$
A(1.2)	2	2	3	2.17	0.03
B(2.3)	2	4	5	3.83	0.25
C(3.4)	7	11	13	10.67	1
D(3.6)	4	6	8	6	0.44
E(6.8)	3	4	5	4	0.11
F(4.5)	3	4	6	4.17	0.25
G(5.8)	2	2	3	2.17	0.03
H(5.7)	2	3	3	2.83	0.03
I(8.9)	16	21	23	20.50	1.36
J(9.10)	3	5	6	4.83	0.25
K(10.11)	4	6	8	6	0.44

الآن و بنفس الطريقة السابقة في البحث عن المسار الحرج , و الفرق هنا أننا نأخذ زمن كل نشاط توقعه الرياضي (نترك للقارئ البحث عن المسار الحرج) , المسار الحرج في هذه الحالة هو نفسه المسار الحرج السابق (ليس دائما) و النشاطات الحرجة مبينة باللون القاتم في الجدول السابق. (K , J , I , F , E , C , B , A)

إذن فالتوقع الرياضي للمشروع هو مجموع التوقعات الرياضية للنشاطات الحرجة : $E(T) = 56.17$

و بنفس الطريقة نحصل على تباين زمن المشروع و هو مجموع تباينات النشاطات الحرجة : $V(T) = 3.69$

بمأن أزمنة النشاطات الحرجة متغيرات عشوائية , و زمن المشروع هو مجموع هذه الأزمنة , فإنه يمكن القول أن زمن المشروع يتبع التوزيع الطبيعي (بالتقريب) , و كلما كان عدد الأنشطة أكبر كلما كان ذلك أدق.

فلو فرضنا أن صاحب المشروع وضع هدفا محدد و ذلك بوضع حد لزمن المشروع و ليكن T^0 الذي لا يمكن تجاوزه إلا في حدود احتمال ضئيل بتجاوزه , إذن فالقيمة الاحتمالية المجدولة في جدول قانون التوزيع الطبيعي $P(Z \leq Z^0)$ يجب أن تحترم هذا الشرط حيث :

$$Z^0 = \frac{T^0 - E(T)}{\sqrt{V(T)}}$$

مثال :

لو فرضنا أن صاحب المشروع و ضع حدا لزمن المشروع هو *60* يوما : $T^0 = 60$, فإن قيمة Z^0 هي :

$$Z^0 = \frac{60 - 56.17}{1.92} = 2$$

و منه القيمة الاحتمالية المجدولة (بفرض *5%* احتمال خطأ) نجد :

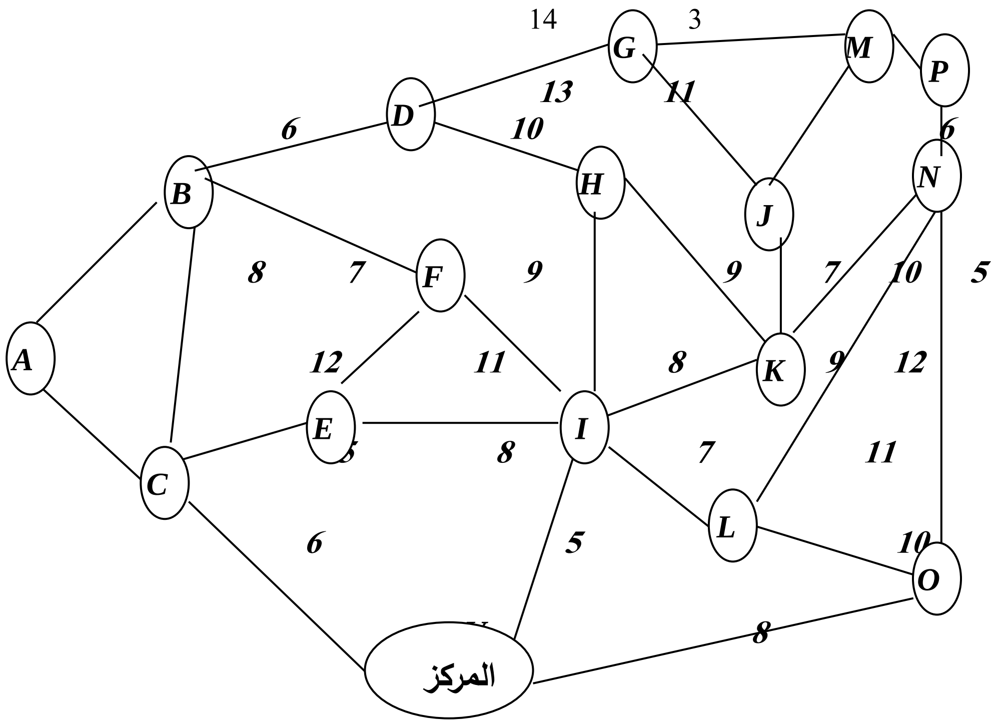
$$P(Z \leq 2) = 0.9798$$

إذن فاحتمال أن لا يتجاوز زمن المشروع *60* يوما هو بالتقريب *97.7%*.

تمرينات :

التمرين رقم . 1 :

أرادت أحد شركات المواصلات بناء شبكة هاتف أرضية في أحد القرى, وبعد دراسة ميدانية تم حساب تكاليف جميع الخطوط المحتملة المبينة في الشكل الموالي (الوحدة : *10000* دج) :

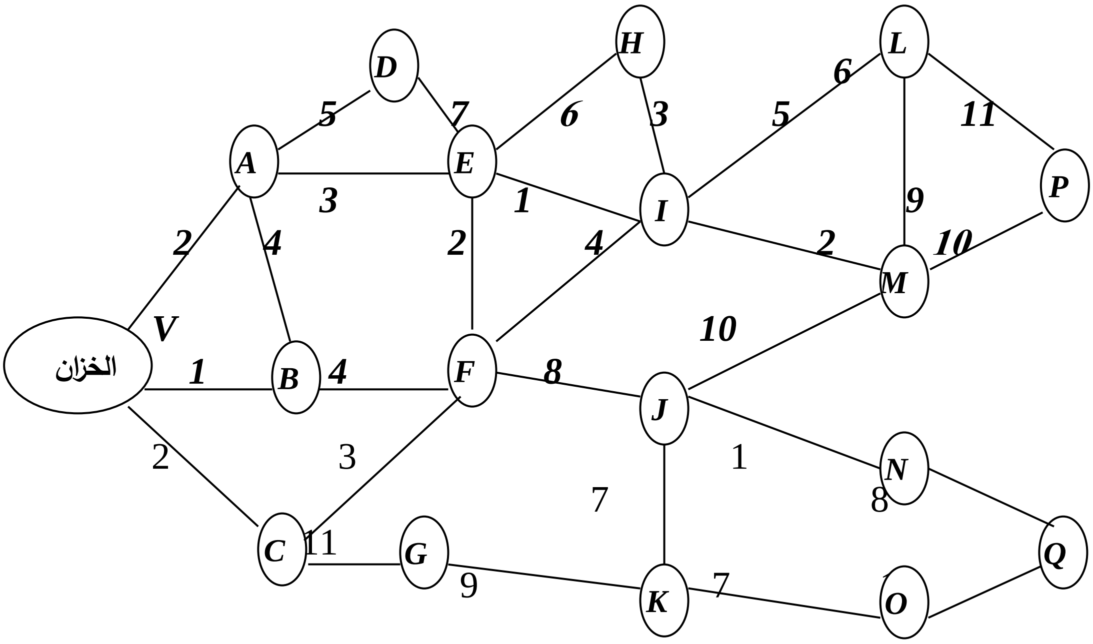


المطلوب :

حدد نوع الشبكة الواجب استخدامها ثم حلها باستخدام الخوارزمية المناسبة ؟

التمرين رقم . 2 :

كلفت شركة توزيع المياه أحد المقاولات بإنشاء شبكة لتوزيع المياه في أحد القرى الجديدة , و تركت لها خيار تمديد هذه الخطوط بشرط توصيل المياه إلى جميع الأحياء , و الشكل الموالي يبين أرباح هذه المقاولة عن كل قناة محتملة الإنشاء (الوحدة : *10000* دج) :

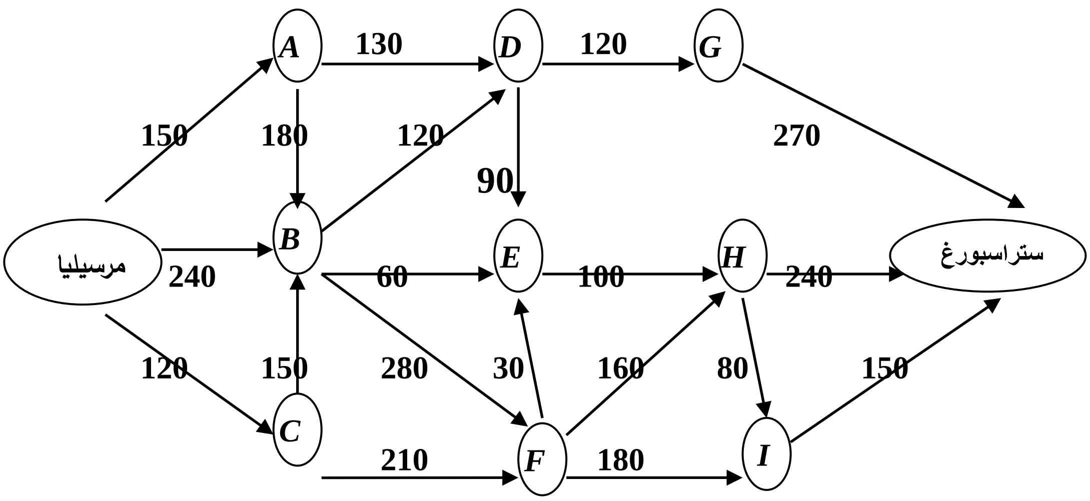


المطلوب :

حدد نوع الشبكة الواجب استخدامها ثم حلها باستخدام الخوارزمية المناسبة ؟

التمرين رقم . 3 :

وصل سائح جزائري إلى ميناء مرسيليا بفرنسا و أراد التوجه نحو ألمانيا بسيارته الخاصة, و حسب الخريطة توجد عدة طرق لبلوغ مدينة ستراسبورغ في حدود ألمانيا و عليه أن يختار أقصر طريق ممكن (الوحدة : كلم) :



المطلوب :

حدد نوع الشبكة الواجب استخدامها ثم حلها باستخدام الخوارزمية المناسبة ؟

التمرين رقم 4 . :

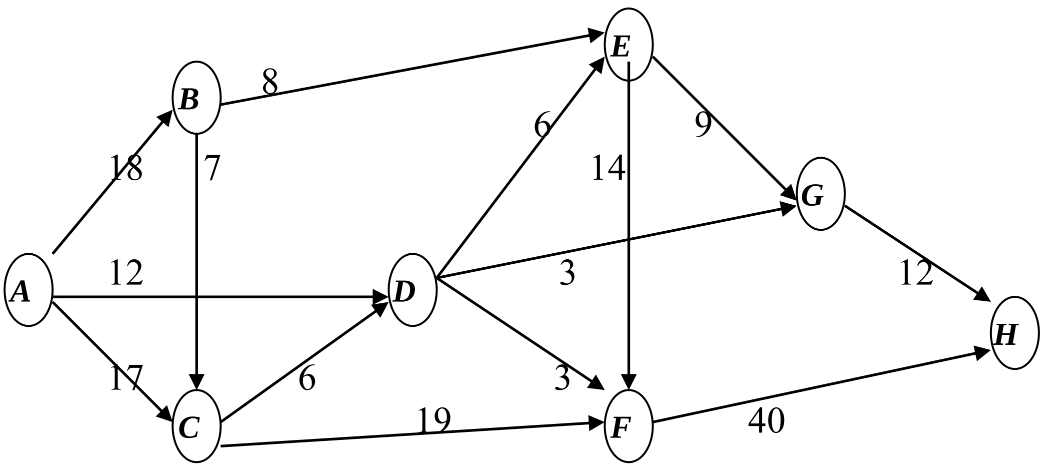
نأخذ معطيات المثال (6 . 4) ، و نفترض أن هذه المؤسسة تمتلك مطحنة أخرى في مدينة بجاية بالإضافة إلى المطحنة السابقة طاقة إنتاجها مساوية للمطحنة السابقة 6000 طن , بالإضافة لذلك هناك وسيلة نقل تربط عنابة ببجاية طاقة استيعابها القصوى 3000 طن.

المطلوب :

أعد تشكيل هذه الشبكة ثم حلها باستخدام الخوارزمية المناسبة.

التمرين رقم 5 . :

ضرب زلزال عنيف منطقة إيزمير التركية (H) و استقبلت الحكومة التركية مساعدات دولية من مواد غذائية و أغطية و غيرها عبر المطار (A) و الذي تفصله عن المنطقة المتضررة شبكة من السكك الحديدية و الطرق، وتريد الحكومة إيصال أكبر كمية ممكنة ، و الشكل الموالي يوضح طاقة نقل هذه الشبكة (1000 طن):



التمرين رقم . 6 :

ليكن لدينا الجدول الموالي الذي يمثل نشاطات مشروع معين (وحدة الزمن : الأيام) :

النشاطات	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J
النشاطات السابقة	-	A	A	B ; C	B ; C	C	C	D	E ; F ; G	G
زمن الأنشطة	6	7	9	8	5	10	6	12	11	8

المطلوب :

1) . حدد المسار الحرج و أحسب زمن المشروع و كل الهوامش (هامش الحركة ، الهامش الحر ، الهامش الكلي ، الهامش الأكيد) و ذلك باستخدام طريقة *PERT* .

2) . لو رفعنا زمن النشاط *E* إلى *4* أيام كيف سيؤثر ذلك على الزمن الكلي للمشروع ؟

التمرين رقم . 7 :

ليكن لدينا جدول النشاطات التالي لمشروع معين :

الأنشطة	V	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K
الأنشطة السابقة	-	V	V	A;B	B	C	C;G	D	E	F;G;H	H;I	J
زمن الأنشطة	8	6	4	5	9	11	9	8	11	10	8	13

المطلوب :

. حدد المسار الحرج و أحسب زمن المشروع الكلي باستخدام طريقة *MPM*.

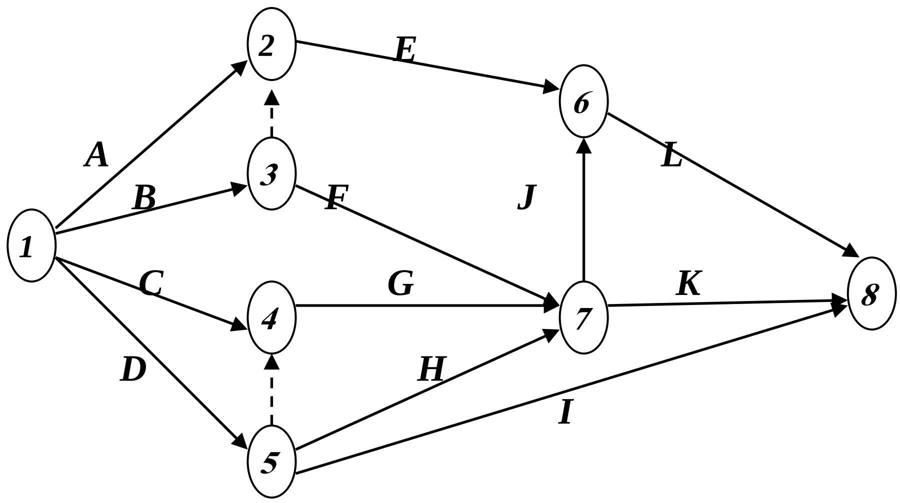
التمرين رقم . 8 :

ليكن لدينا جدول نشاطات مشروع معين في حالة عدم التأكد كما يلي :

الأنشطة (ij)	الأنشطة السابقة	a	m	b
A	-	4	6	7
B	-	3	4	5
C	-	3	5	6
D	-	2	5	6
E	A ; B	5	9	13
F	B	4	7	8
G	C ; D	2	3	5
H	D	2	4	5
I	D	7	12	14
J	F;G;H	4	5	7
K	F;G;H	4	7	10
L	E ; J	4	6	7

المطلوب :

. مثل هذا الجدول على شبكة باستخدام طريقة *PERT* ثم حدد المسار الحرج و أحسب زمن المشروع الكلي.



الحل :

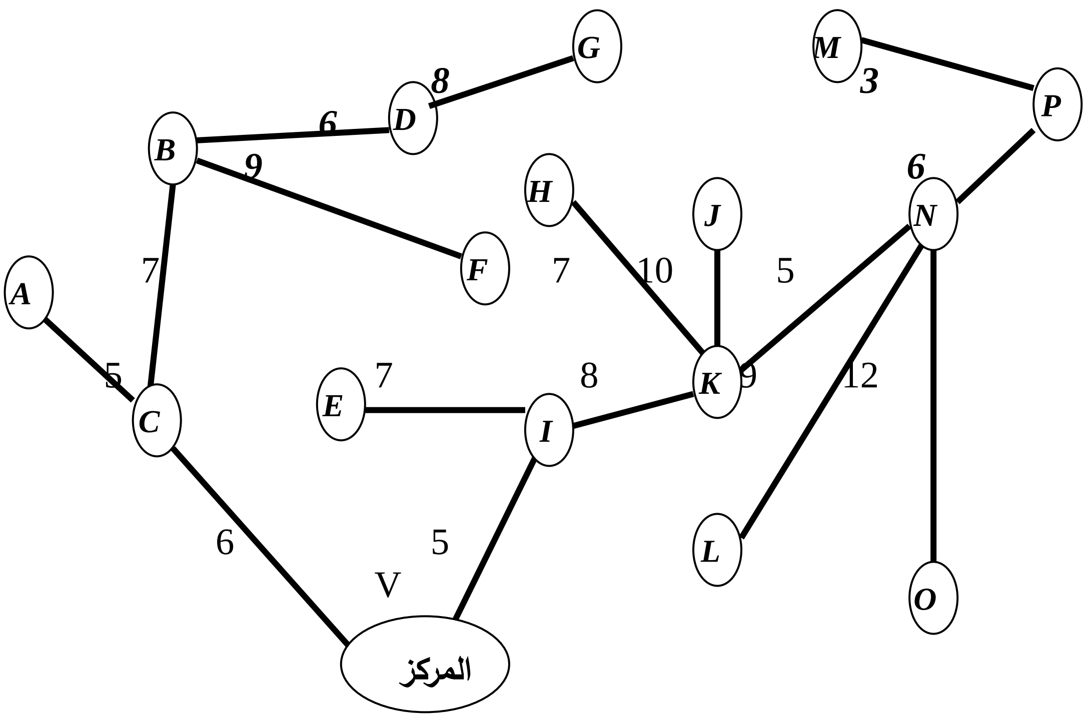
حل التمرين رقم 1 :

الشبكة الملائمة لهذه المشكلة هي شبكة الشجرة الدنيا و باستخدام خوارزمية *Kruskal* :

نرتب الوصلات ترتيبا تصاعديا ، ثم ننزع من الشبكة كل الوصلات و نترك الرؤوس فقط :

BF	*LN*	*AB*	*DG*	*IK*	*CE*	*BC*	*HK*	*EI*	*BD*	*NP*	*VC*	*AC*	*KN*	*VI*	*MP*
9	9	8	8	8	8	7	7	7	6	6	6	5	5	5	3
						GM	*GJ*	*EF*	*NO*	*JM*	*FI*	*LI*	*DH*	*JK*	*HI*
						14	13	12	12	11	11	11	10	10	9

نقوم بإضافة الوصلات بالتتابع مع الحرص على عدم تشكيل دارة ، و نبدأ بالوصلة (***MP***) ذات أقل تكاليف حسب الجدول السابق و نواصل مع باقي الوصلات لنحصل على الشكل الموالي الذي يمثل الشجرة الدنيا لهذه المشكلة:



الوصلات التي تشكل دارة و الواجب حذفها (*CE , AB , HI , DH , LI , FI , JM , EF , GJ ,* *GM*)

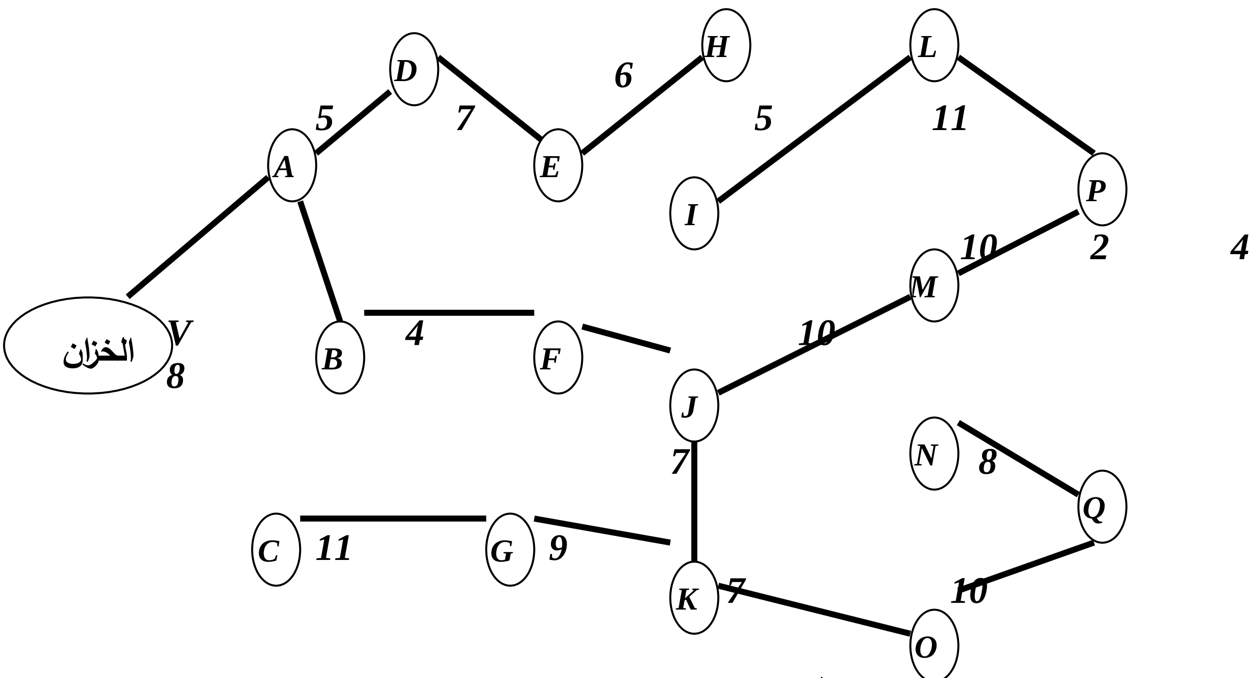
و بجمع تكاليف كل وصلة نحصل على التكاليف الكلية للمشروع (*1130000* دج).

حل التمرين رقم . 2 :

بنفس الطريقة مع المثال السابق و لكن في هذه الحالة نستخدم الشجرة القصوى ، و هذا يعني ترتيب الوصلات ترتيبا تنازليا كما يلي :

AB	IL	AD	EH	KO	JK	DE	NQ	FJ	LM	GK	MP	OQ	JM	LP	CG
4	5	5	6	7	7	7	8	8	9	9	10	10	10	11	11
				JN	EI	VB	IM	EF	VC	VA	HI	CF	AE	FI	BF
				1	1	1	2	2	2	2	3	3	3	4	4

و بنفس الطريقة السابقة يتم إضافة الوصلات بالتدرج و نحذف في كل مرة تصنع لنا وصلة جديدة دارة و نحصل في الأخير على الشجرة القصوى التالية :

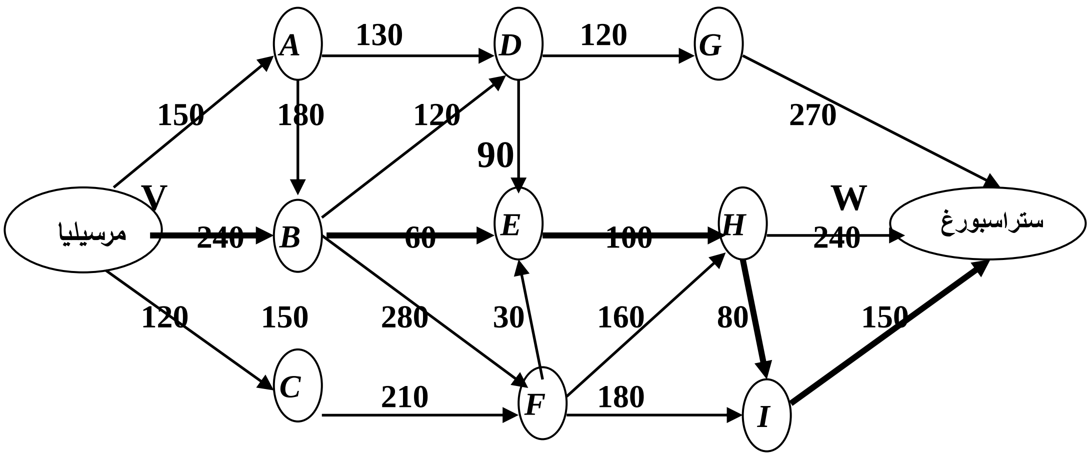


الوصلات التي تشكل دارة و الواجب حذفها (*LM ,FI ,AE ,CF , HI , VC , EF , IM ,VB , EI ,JN*)

و بجمع ربح كل وصلة نحصل على الأرباح الكلية القصوى لهذه المقاولة البالغة (*1240000* دج)

حل التمرين رقم . 3 :

نستخدم خوارزمية *Belman* التي تبحث عن أقصر طريق بإتباع الخطوات التالية :



. الخطوة 1 :

لدينا $S=\{V\}$, لواحق عناصر S هي الرؤوس (A , B , C) و لكن يحذف الرأس B لأنه لاحقة لكل من A و C إذن لدينا مسارين :

الجدول *1* :

لواحق *S*	المسارات الممكنة	المسافة	أقصر مسار
A	*VA*	*150*	*VA*
C	*VC*	*120*	*VC*

. الخطوة *2* :

الآن نحصل على المجموعة الجديدة $S = \{V , A , C\}$

لواحق S هي الرؤوس (B , D , E , F) و نحذف D , E , F لأنها لواحق B و هكذا تكون لواحق S الرأس B فقط نحصل على الجدول الثاني :

الجدول *2* :

لواحق *S*	المسارات الممكنة	المسافة	أقصر مسار
B	*VAB*	*330*	
	VB	*240*	*VB*
	VCB	*270*	

. الخطوة *3* :

نحصل على المجموعة الجديدة $S = \{V , A , C , B\}$

لواحق S هي الرؤوس (D , E , F) , نحذف E لأنها لاحقة لكل من D و F إذن لواحق S هي الرؤوس (D , F) و هكذا نحصل على الجدول الثالث :

الجدول 3 :

لواحق S	المسارات الممكنة	المسافة	أقصر مسار
D	VAD VBD[1]	280 360	VAD
F	VBF VCF	520 330	VCF

([1] : $VB = 240$ أقصر مسار إلى B من الجدول 2)

. الخطوة 4 :

نحصل على المجموعة الجديدة $S = \{V , A , C , B , D , F\}$

لواحق S هي الرؤوس (E , G , H , I) , نحذف I لأنها لاحقة H , و نحذف H لأنها لاحقة E يبقى لدينا (G , E) و نحصل على الجدول الرابع:

الجدول 4 :

لواحق S	المسارات الممكنة	المسافة	أقصر مسار
E	$VADE$[2] VBE	370 300	VBE
G	$VADG$	400	$VADG$

([2] : $VAD = 280$ أقصر مسار إلى D من الجدول 3)

. الخطوة 5 :

نحصل على المجموعة الجديدة $S = \{V , A , C , B , D , F , E , G\}$

لواحق S هي الرؤوس (H , I , W) , نحذف I و W لأنها لواحق H , إذن يبقى لدينا (H) و نحصل على الجدول الخامس :

الجدول 5 :

لواحق S	المسارات الممكنة	المسافة	أقصر مسار
H	$VBEH$[3] $VCFH$[4]	400 4900	$VBEH$

([3] : $VBE = 300$ من الجدول 4)([4] : $VCF = 330$ من الجدول 3)

. الخطوة 6 :

نحصل على المجموعة الجديدة $S = \{V , A , C , B , D, F, E , G , H\}$

لواحق S هي الرأسين الأخير (I , W) , نحذف W لأنها لاحقة I , إذن يبقى لدينا الرأس (I) و منه نحصل على الجدول السادس :

الجدول *6* :

لواحق S	المسارات الممكنة	المسافة	أقصر مسار
I	*VCFI* *VBEHI*[5]	*510* *480*	 *VBEHI*

([5] : $VBEH = 400$ من الجدول 5)

. الخطوة 7 :

نحصل على المجموعة الجديدة $S = \{V , A, C, B, D, F, E , G , H , I\}$

لواحق الرأس الأخير W و منه نحصل على الجدول الأخير :

الجدول 7 :

لواحق S	المسارات الممكنة	المسافة	أقصر مسار
W	*VADGW*[6] *VBEHW*[7] *VBEHIW*[8]	*670* *670* *630*	 *VBEHIW*

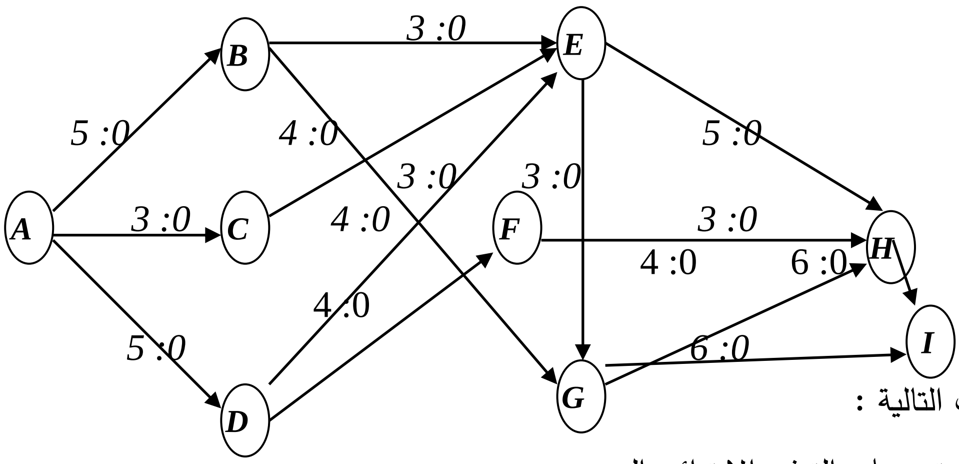
([6] : $VADG = 400$ من الجدول 4)([7] : $VBEH = 400$ من الجدول 5)

([8] : $VBEHI = 480$ من الجدول 6)

و هكذا فإن أقصر طريق لهذا السائح هو **($V \rightarrow B \rightarrow E \rightarrow H \rightarrow I \rightarrow W$)** بمسافة كلية قدرها *630* كلم.

حل التمرين رقم . 4 :

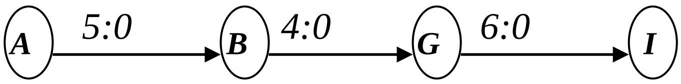
للقيام بذلك سوف نفترض وجود كلا المطحنتين القديمة و الجديدة في مدينة محايدة و نمثل طاقة إنتاج المطحنة الأولى بوصلة تربط مدينة سطيف بهذه المدينة طاقة استيعابها تساوي طاقة الإنتاج (6000 طن) , و طاقة إنتاج المطحنة الثانية بوصلة أخرى تربط مدينة بجاية بهذه المدينة طاقة استيعابها تساوي طاقة الإنتاج (6000 طن) , و في الأخير نضيف وصلة تربط عنابة ببجاية طاقة استيعابها (3000 طن) و هكذا نحصل على الشكل الجديد الموالي :



و للحل نتبع الخطوات التالية :

. الخطوة 1 : سوف نعتمد على التدفق الابتدائي المعدوم

نختار المسار التالي :



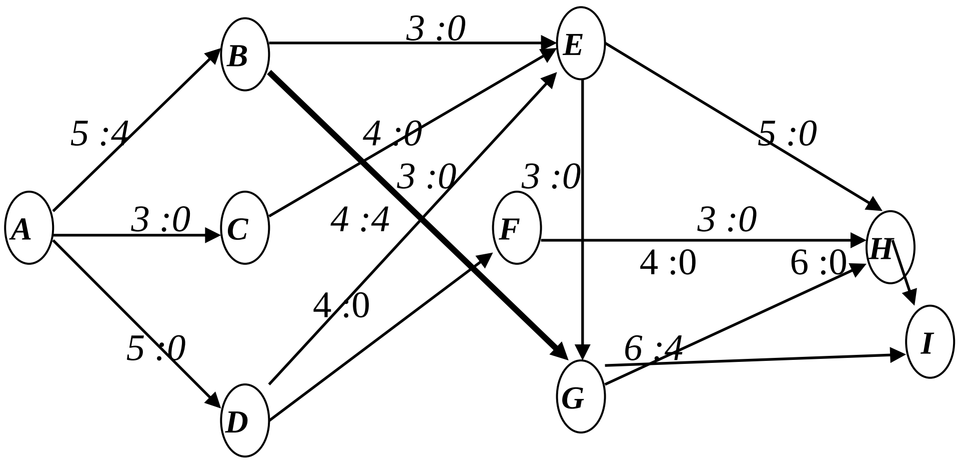
نلاحظ أن هذا المسار قابل للزيادة , إذن يمكن تحسين التدفق في هذه السلسلة بالشكل التالي :

$$e = Min\ \{(C(u) - f(u) / u \in S^{+}) , (f(u) / u \in S^{-})\}$$

$$= Min\ \{5\text{-}0 , 4\text{-}0 , 6\text{-}0 \}$$

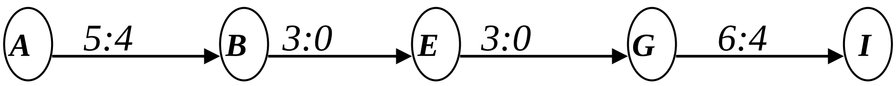
$$= Min\ \{5 , 4 , 6 \} = 4$$

إذن يمكن إضافة تدفق إضافي من خلال هذه المسار هو *4* و تشبع الوصلة (*BG*) :



. الخطوة 2 :

نختار المسار التالي :



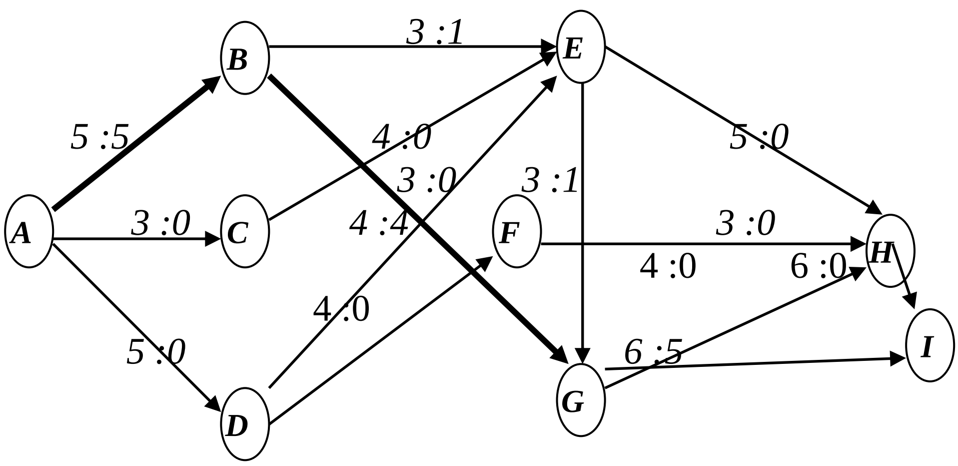
نلاحظ أن هذا المسار قابل للزيادة , إذن يمكن تحسين التدفق في هذه السلسلة بالشكل التالي :

$$e = Min\ \{(C(u) - f(u) / u \in S^{+}) , (f(u) / u \in S^{-})\}$$

$$= Min\ \{5\text{-}4 , 3\text{-}0 , 3\text{-}0 , 6\text{-}4 \}$$

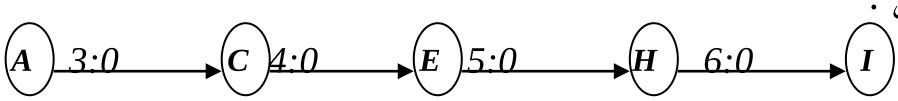
$$= Min\ \{1 , 3 , 3 , 2 \} = 1$$

إذن يمكن إضافة تدفق إضافي من خلال هذه المسار هو *1* و تشبع الوصلة (*AB*) :



. الخطوة 3 :

نختار المسار التالي :



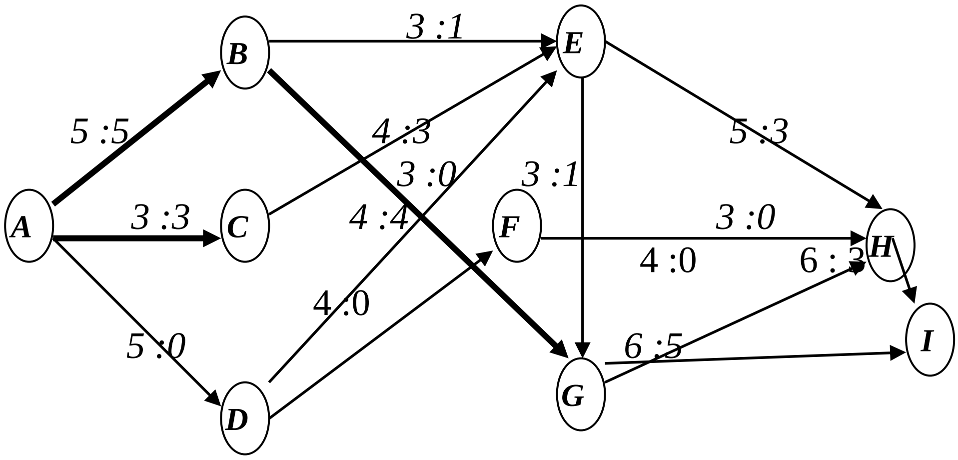
نلاحظ أن هذا المسار قابل للزيادة , إذن يمكن تحسين التدفق في هذه السلسلة بالشكل التالي :

$$e = Min\ \{(C(u) - f(u) / u \in S^{+}) , (f(u) / u \in S^{-})\}$$

$$= Min\ \{3\text{-}0 , 4\text{-}0 , 5\text{-}0 , 6\text{-}0 \}$$

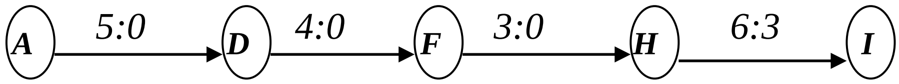
$$= Min\ \{3 , 4 , 5 , 6 \} = 3$$

إذن يمكن إضافة تدفق إضافي من خلال هذه المسار هو *3* و تشبع الوصلة (*AC*) :



. الخطوة 4 :

نختار المسار التالي :



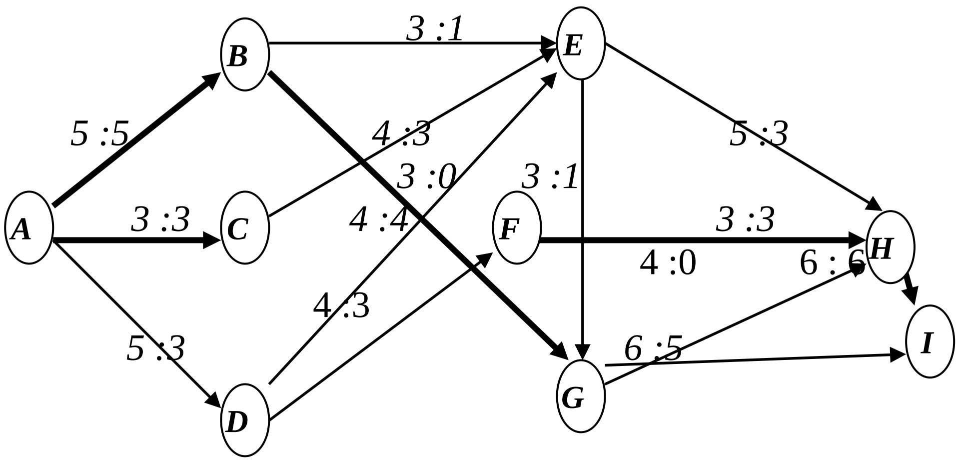
نلاحظ أن هذا المسار قابل للزيادة , إذن يمكن تحسين التدفق في هذه السلسلة بالشكل التالي :

$$e = Min\ \{(C(u) - f(u)\ /\ u \in S^{+})\ ,\ (\ f(u)\ /\ u \in S^{-})\}$$

$$= Min\ \{5\text{-}0\ ,\ 4\text{-}0\ ,\ 3\text{-}0\ ,\ 6\text{-}3\ \}$$

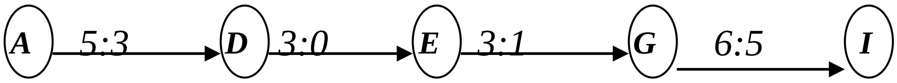
$$= Min\ \{5\ ,\ 4\ ,\ 3\ ,\ 6\ \} = 3$$

إذن يمكن إضافة تدفق إضافي من خلال هذه المسار هو 3 و تشبع الوصلة (FH) و (HI) :



. الخطوة 5 :

نختار المسار التالي :



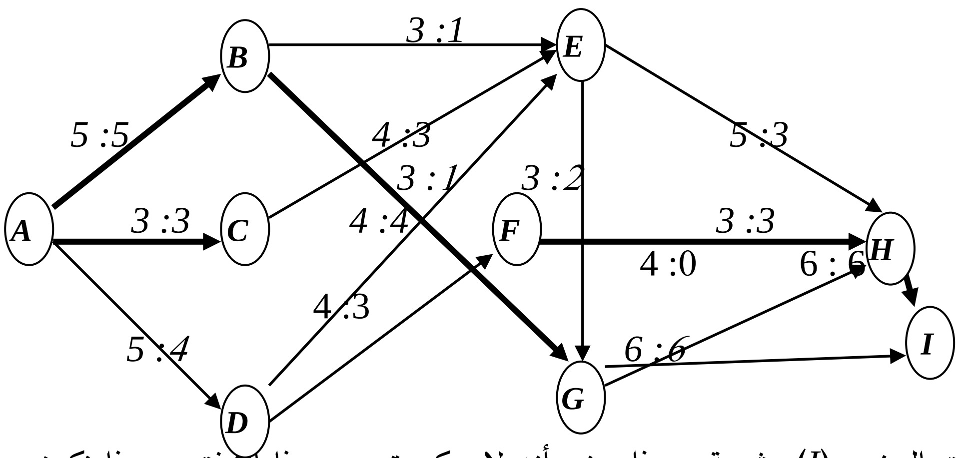
نلاحظ أن هذا المسار قابل للزيادة , إذن يمكن تحسين التدفق في هذه السلسلة بالشكل التالي :

$$e = Min\ \{(C(u) - f(u) / u \in S^{+}) , (f(u) / u \in S^{-})\}$$

$$= Min\ \{5\text{-}3 , 3\text{-}0 , 3\text{-}1 , 6\text{-}5 \}$$

$$= Min\ \{2 , 3 , 2 , 1 \} = 1$$

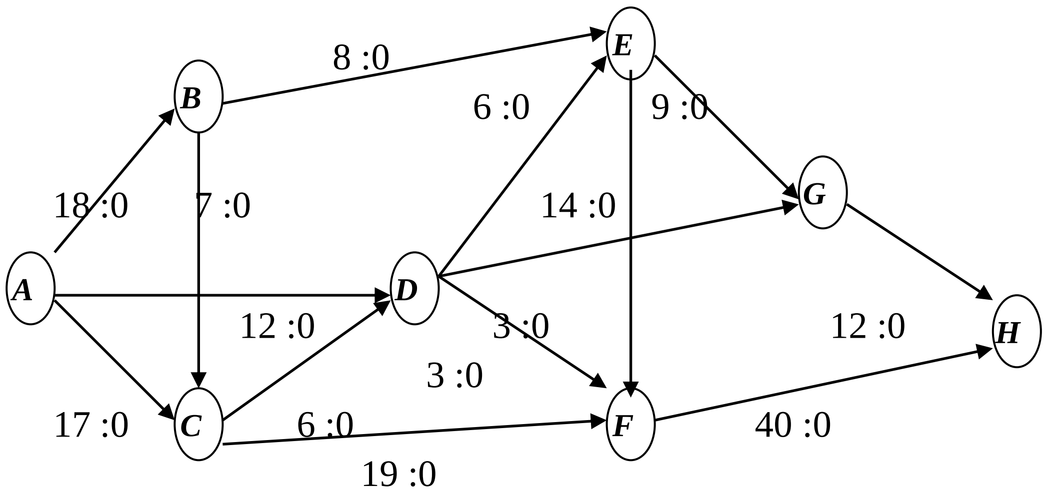
إذن يمكن إضافة تدفق إضافي من خلال هذه المسار هو *1* و تشبع الوصلة (*GI*) :



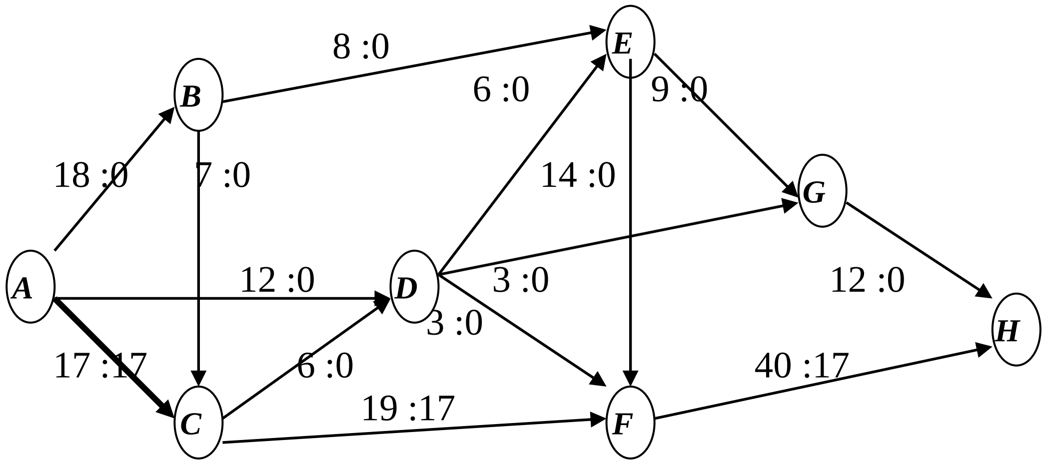
نلاحظ أن كل وصلات المخرج (*I*) مشبعة و هذا يعني أنه لا يمكن تحسين هذا التدفق و بهذا نكون قد صلنا إلى التدفق الأعظمي لهذا المثال و هو *12* .

حل التمرين رقم . 5 :

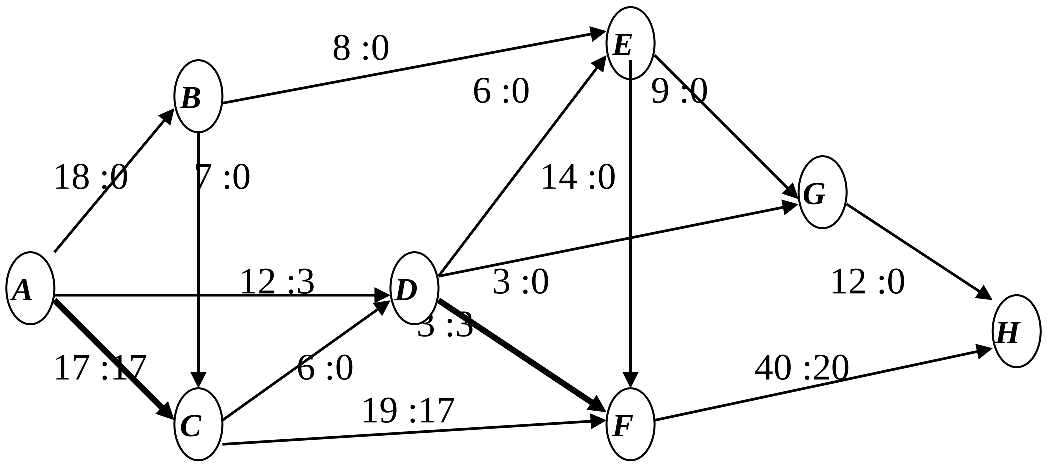
. الخطوة 1 : ليكن التدفق الابتدائي هو التدفق المعدوم :



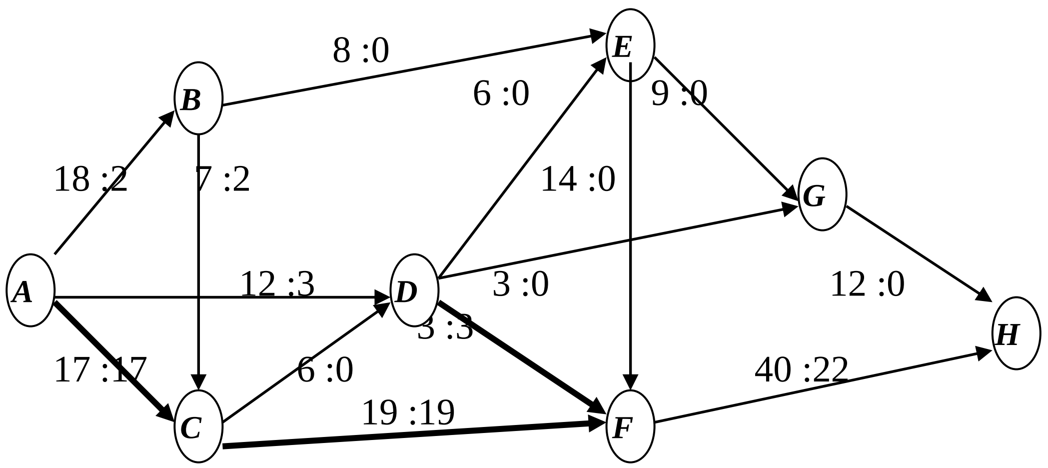
. الخطوة 2 : ***ACFH*** (*AC* مشبعة)



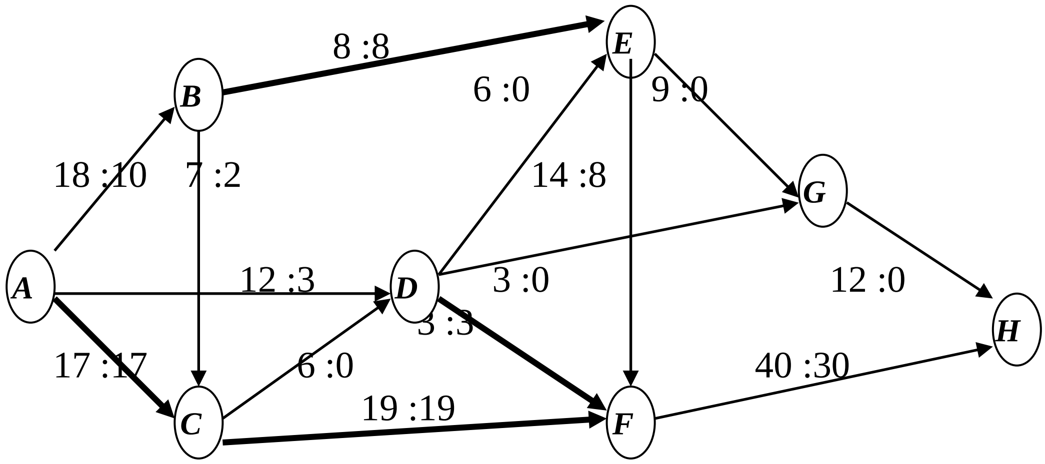
. الخطوة 3 : ***ADFH*** (*DF* مشبعة)



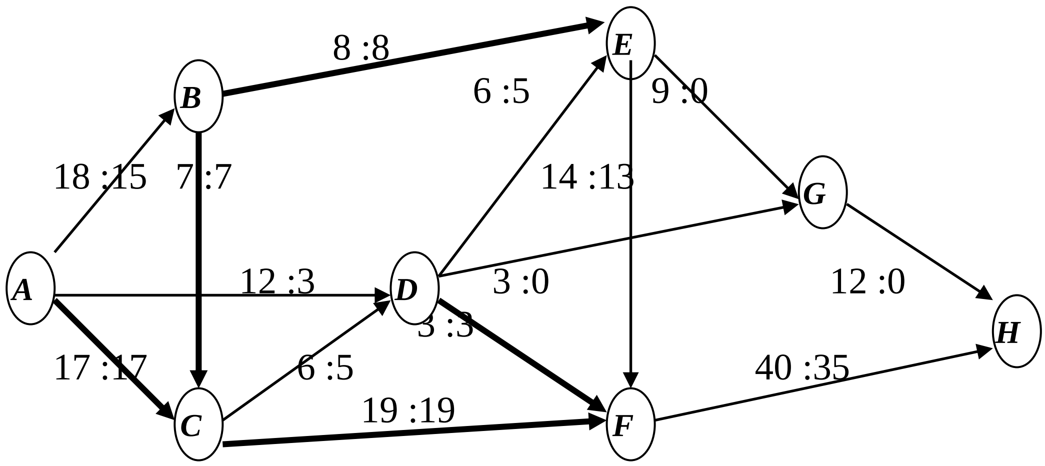
. الخطوة 4 : ***ABCFH*** (*CF* مشبعة)



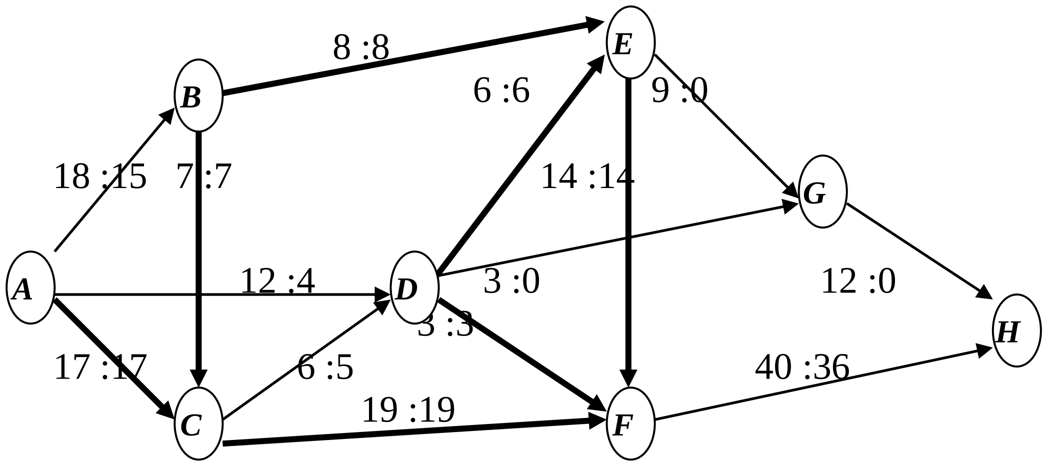
. الخطوة 5 : ***ABEFH*** (*BF* مشبعة)



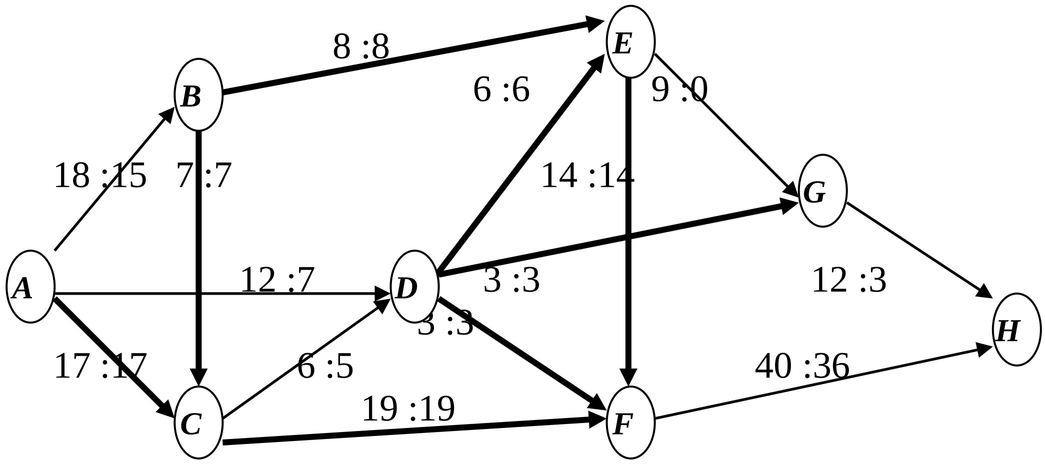
. الخطوة 6 : ***ABCDEFH*** (*BC* مشبعة)



. الخطوة 7 : ***ADEFH*** (*DE* و *EF* مشبعتين)



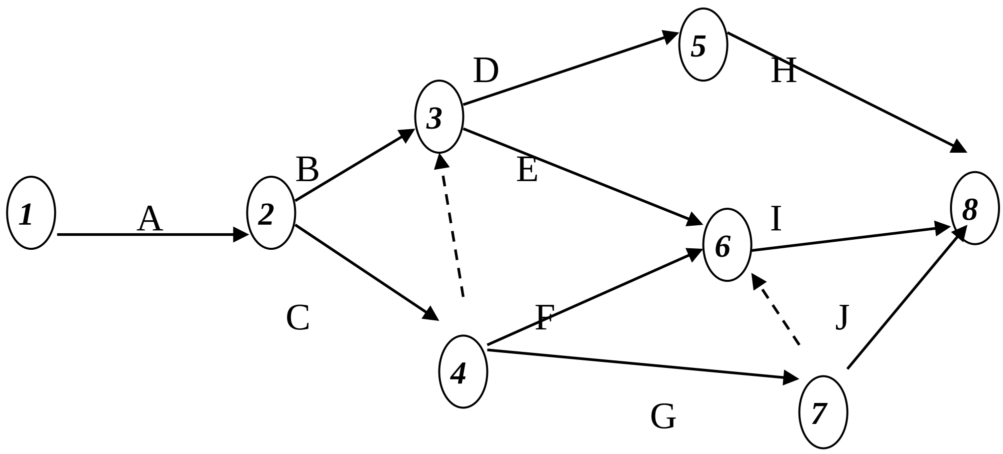
. الخطوة 8 : ***ADGH*** (*DG* مشبعة)



في هذه المرحلة لا يمكن إضافة أي تدفق و نكون قد وصلنا إلى تدفق النهائي (39000 طن من المساعدات).

حل التمرين رقم . 6 :

1) . حسب الجدول نحصل على الشبكة التالية :



لحساب زمن المشروع يجب حساب التواريخ المبكرة و المتأخرة لبداية أنشطة المشروع كما يلي :

أ) حساب التاريخ المبكر لبداية الأنشطة :

لمعرفة التاريخ المبكر لبداية الأنشطة يجب حساب التاريخ المبكر لحصول الأحداث , و حتى يحصل الحدث (*j*) يجب أن تكون كل الأنشطة التي تسبقه قد تم إنجازها و بالتالي فالتاريخ المبكر لحصوله هو يوافق تاريخ انتهاء آخر نشاط و يعني هذا رياضيا :

$$t_j = \max (t_i+t_{ij}) \quad ; \quad i\epsilon X_j^-$$

لدينا أزمنة النشاطات كما يلي :

النشاطات	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J
النشاطات السابقة	-	A	A	B ; C	B ; C	C	C	D	E ; F ; G	G
زمن الأنشطة	6	7	9	8	5	10	6	12	11	8

بالاستعانة بشبكة الشكل :

. نضع مبدأ الأزمنة عند الحدث 1 و هو بداية أول نشاط في الشبكة و هو النشاط (A) أي : $t_1 = 0$.

. التاريخ المبكر للحدث 2 , نهاية النشاط (A) هو :

$$\mathbf{t_2}=max(t_1+t_{12})=max(0+6)=6$$

. التاريخ المبكر للحدث 4 , نهاية النشاط (C) هو :

$$\mathbf{t_4}=max(t_2+t_{24})=max(6+9)=15$$

. التاريخ المبكر للحدث 3, نهاية آخر نشاط من بين النشاطين(B)و (C)هو:

$$\mathbf{t_3}=max(t_2+t_{23} , t_4+t_{43})=max(6+7 , 15+0)=15$$

. التاريخ المبكر للحدث 5 , نهاية النشاط (D) هو :

$$\mathbf{t_5}=max(t_3+t_{35})=max(15+8)=23$$

. التاريخ المبكر للحدث 7 ، نهاية النشاط (G) هو :

$$\mathbf{t_7}=max(t_4+t_{47})=max(15+6)=21$$

. التاريخ المبكر للحدث 6,نهاية آخر نشاط من النشاطات$(E)(G)$; (F)هو:

$$\mathbf{t_6}=max(t_3+t_{36} ,t_4+t_{46},t_7+t_{76})=max(15+5,15+10,21+0)=(20,25,21)=25$$

. التاريخ المبكر للحدث 8, نهاية آخر نشاط من النشاطات(H) $(I)(G)$ هو:

$$\mathbf{t_8}=max(t_5+t_{58},t_6+t_{68},t_7+t_{78})=max(23+12,25+11,21+8)=(35,36,29)=36$$

إذن بمأن التاريخ المبكر لحصول الحدث 8 و هو نهاية آخر نشاط في المشروع فهو نفسه التاريخ المبكر لنهاية المشروع أي بعد 36 يوم أي أنه أقل زمن ممكن أن ينجز فيه المشروع , و الآن يمكن معرفة التاريخ المبكر لبداية الأنشطة , و التاريخ المبكر لبداية كل نشاط هو التاريخ المبكر لحصول حدث بداية هذا النشاط و يكتب رياضيا:

$T_{ij} = t_i$ $\quad T_A = t_1 = 0$ $\quad T_B = t_2 = 6$

$T_C = t_2 = 6$ $\quad T_D = t_3 = 15$ $\quad T_E = t_3 = 15$

$T_F = t_4 = 15$ $\quad T_G = t_4 = 15$ $\quad T_H = t_5 = 23$

$T_I = t_6 = 25$ $\quad T_J = t_7 = 21$ $\quad T_{Fin} = t_8 = 36$

ب) التاريخ المتأخر لبداية الأنشطة :

في هذه الحالة سنقوم بحساب التواريخ المتأخرة لحصول الأحداث بطريقة عكسية و ننطلق من الحدث الأخير (8) .

و التاريخ المتأخر للحدث (j) يوافق بداية آخر نشاط لاحق لهذا الحدث و رياضيا نكتب :

$$t_j^* = \min(t_i^* - t_{ji}) \quad ; \quad i\epsilon X_j^+$$

. التاريخ المتأخر للحدث 8 يوافق التاريخ المبكر له لذلك نضع : $t_8^* = t_8 = 36$

. التاريخ المتأخر للحدث 6 , بداية النشاط (I) هو :

$$t_6^* = \min(t_8^* - t_{68}) = \min(36-11) = 25$$

. التاريخ المتأخر للحدث 7 , بداية النشاط (J) هو :

$$t_7^* = \min(t_8^* - t_{68}, t_8^* - t_{78}) = \min(36-11,36-8) = (25,28) = 25$$

. التاريخ المتأخر للحدث 5 , بداية النشاط (H) هو :

$$t_5^* = \min(t_8^* - t_{58}) = \min(36-12) = 24$$

. التاريخ المتأخر للحدث 3 , بداية آخر نشاط لاحق من بين النشاطين (D) و (E) هو :

$t_3^* = \min(t_5^* - t_{35}, t_6^* - t_{36}) = \min(24-8,25-5) = (16,20) = 16$. التاريخ المتأخر للحدث 4 , بداية آخر نشاط من بين الأنشطة اللاحقة (F) و (G) و النشاط الوهمي (43) هو :

$t_4^* = \min(t_7^* - t_{47}, t_6^* - t_{46}, t_3^* - t_{43}) = \min(25-6,25-10,16-0) = 15$. التاريخ المتأخر للحدث 2 , بداية آخر نشاط لاحق من بين النشاطين (B) و (C) هو :

$$t_2^* = \min(t_3^* - t_{23}, t_4^* - t_{24}) = \min(16-7,15-9) = 6$$

. التاريخ المتأخر للحدث 1 , بداية النشاط (A) هو :

$$t_1^* = \min(t_2^* - t_{12}) = \min(6-6) = 0$$

أما بالنسبة للتواريخ المتأخرة لبداية الأنشطة , فالتاريخ المتأخر لنشاط معين هو التاريخ المتأخر لحدث نهاية هذا النشاط ناقص زمن هذا النشاط و تكتب بالعلاقة الرياضية التالية :

$$T_{ij}^* = t_j^* - t_{ij} \qquad T_H^* = t_8^* - t_H = 36-12 = 24$$

$$T_I^* = t_8^* - t_I = 36-11 = 25, \quad T_J^* = t_8^* - t_J = 36-8 = 28$$

$$T_G^* = t_7^* - t_G = 25-6 = 19 \quad , \quad T_F^* = t_5^* - t_F = 25-10 = 15$$

$$T_E^* = t_6^* - t_E = 25-5 = 20 \quad , \quad T_D^* = t_5^* - t_D = 24-8 = 16$$

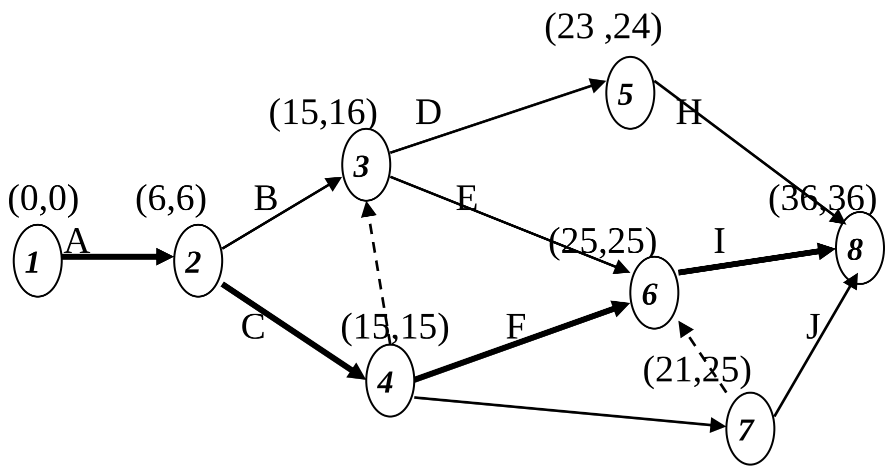
$$T_C^* = t_4^* - t_C = 15-9 = 6 \quad , \quad T_B^* = t_3^* - t_B = 16-7 = 9$$

$$T_A^* = t_2^* - t_A = 6-6 = 0$$

نعيد تمثيل التواريخ المبكرة و المتأخرة لبداية الأنشطة و تحديد الأنشطة الحرجة في الجدول التالي :

الأنشطة	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J
التاريخ المبكر (T)	0	6	6	15	15	15	15	23	25	21
التاريخ المتأخر (T^*)	0	9	6	16	20	15	19	24	25	28
الأنشطة الحرجة	A		C			F			I	

الآن يمكن أن نحدد المسار الحرج على الشبكة بكل سهولة , و هو المسار الذي يمر عبر الأنشطة الحرجة و هي التي يتساوى تاريخ بدايتها المبكر مع تاريخها المتأخر في الشكل الوصلات البارزة بخط أسود قاتم :



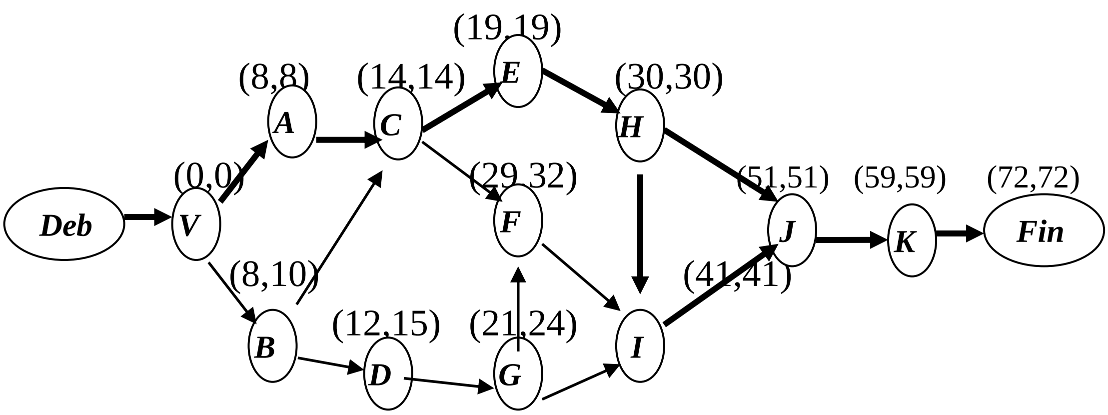
ت) . حساب الهوامش :

$MC(ij)$	$MT(ij)$	$ML(ij)$	$MM(ij)$	T_{ij}^{*}	T_{ij}	t_j^{*}	t_j	t_i^{*}	t_i	الأزمنة t_{ij}	الأنشطة (ij)
0	0	0	0	0	0	6	6	0	0		A(1.2)
2	3	2	3	9	6	16	15	6	6		B(2.3)
0	0	0	0	6	6	15	15	6	6		C(2.4)
0	1	0	1	16	15	24	23	16	15		D(3.5)
4	5	5	5	20	15	25	25	16	15		E(3.6)
0	0	0	0	15	15	25	25	15	15		F(4.6)
0	1	0	1	16	15	16	15	15	15		(4.3)
0	4	0	4	19	15	25	21	15	15		G(4.7)
0	1	1	1	24	23	36	36	24	23		H(5.8)
0	4	4	4	25	21	25	25	25	21		(7.6)
0	0	0	0	25	25	36	36	25	25		I(6.8)
3	7	7	7	28	21	36	36	25	21		J(7.8)

2) بمأن هامش حركة النشاط (E) هو 5 أيام (من الجدول السابق) , فإن رفع زمن هذا النشاط لن يؤثر في الزمن الكلي للمشروع.

حل التمرين رقم . 7 :

1) . حسب الجدول نحصل على الشبكة التالية :



الأنشطة	V	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K
الأنشطة السابقة	-	V	V	A;B	B	C	C;G	D	E	F;G;H	H;I	J
زمن الأنشطة	8	6	4	5	9	11	9	8	11	10	8	13

2) . حساب زمن المشروع:

نقوم بحساب زمن المشروع من جدول الحساب الموالي دون الحاجة لرسم الشبكة :

0	***V***	*8*	***A***	*8*	*B*	*14*	***C***	*12*	*D*	*19*	***E***
0	*- , 0*	*0*	*V ; 8*	*0*	*V ; 8*	*8* *8*	*A ; 6* *B ; 4*	*8*	*B ; 4*	*14*	*C ; 5*
29	*F*	*21*	*G*	*30*	***H***	*41*	***I***	*51*	***J***	*59*	***K***
14 *21*	*C ; 5* *G ; 8*	*12*	*D ;9*	*19*	*E ;11*	*29* *21* *30*	*F ; 9* *G ; 8* *H;11*	*30* *41*	*H;11* *I;10*	*51*	*J ; 8*
72	*Fin*										
59	*K;13*										

الأنشطة باللون القاتم في الجدول هي الأنشطة الحرجة و يكون لدينا مسارين حرجين:

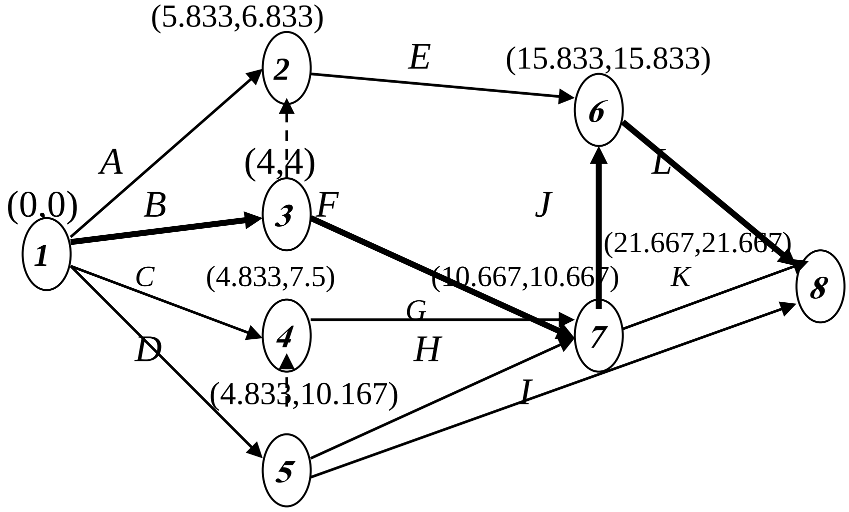
$$V \rightarrow A \rightarrow C \rightarrow E \rightarrow H \rightarrow I \rightarrow J \rightarrow K$$

$$V \rightarrow A \rightarrow C \rightarrow E \rightarrow H \rightarrow J \rightarrow K$$

و هكذا نحصل على الزمن الكلي للمشروع و هو 70 يوم.

حل التمرين رقم . 8 :

1) . حسب الجدول نحصل على الشبكة التالية :



2) . تحديد المسار الحرج و حساب زمن المشروع :

أولا يجب أن نحسب التوقع الرياضي و تباين زمن كل نشاط بالعلاقتين التاليتين و نملأ الجدول :

$$E(t_{ij}) = \frac{a + 4m + b}{6} \qquad ; \qquad V(t_{ij}) = \left(\frac{b-a}{6}\right)^2$$

الأنشطة (ij)	الأنشطة السابقة	a	m	b	$E(t)$	$V(t)$
A	-	4	6	7	5.833	0.250
B	-	3	4	5	4.000	0.111
C	-	3	5	6	4.833	0.250
D	-	2	5	6	4.667	0.444
E	*A ; B*	5	9	13	9.000	1.778
F	*B*	4	7	8	6.667	0.444
G	*C ; D*	2	3	5	3.167	0.250
H	*D*	2	4	5	3.833	0.250
I	*D*	7	12	14	11.5	1.361
J	*F;G;H*	4	5	7	5.167	0.250
K	*F;G;H*	4	7	10	7.000	1.000
L	*E ; J*	4	6	7	5.833	0.250

و هكذا نحصل على التوقع الرياضي لزمن المشروع بجمع التوقعات الرياضية لأزمنة الأنشطة الحرجة (باللون القاتم في الجدول) 21.667 أسبوع , و تباينه هو مجموع التباينات 1.055.

لو فرضنا أن صاحب المشروع و ضع حدا لزمن المشروع هو 24 أسبوعا : $T^0 = 24$, فإن قيمة Z^0 هي :

$$Z^0 = \frac{24 - 21.667}{1.055} = 2.2$$

و منه القيمة الاحتمالية المجدولة (بفرض *5%* احتمال خطأ) نجد :

$P(Z \leq 2.2) = 0.9878$

إذن فاحتمال أن لا يتجاوز زمن المشروع *24* أسبوعا هو بالتقريب *98.8%*.

مثال: الجدول التالي يبين لنا مجموع الأنشطة التي يتكون منها مشروع ما و كذا أوقات تنفيذ كل الأنشطة السابقة لكل نشاط بالأسابيع .

النشاط	A	B	C	D	E	F	G	H	I
الأنشطة السابقة	ــــ	A	A	A . B	B	E . D	D . C	G . C	F . H
المدة (الأسابيع)	2	10	5	2	3	1	5	6	5

المطلوب :

1- ارسم مخطط شبكة الأعمال لنشاطات المشروع

2- احسب الأوقات المبكرة للبداية و النهاية

3- احسب الأوقات المتأخرة للبداية و النهاية

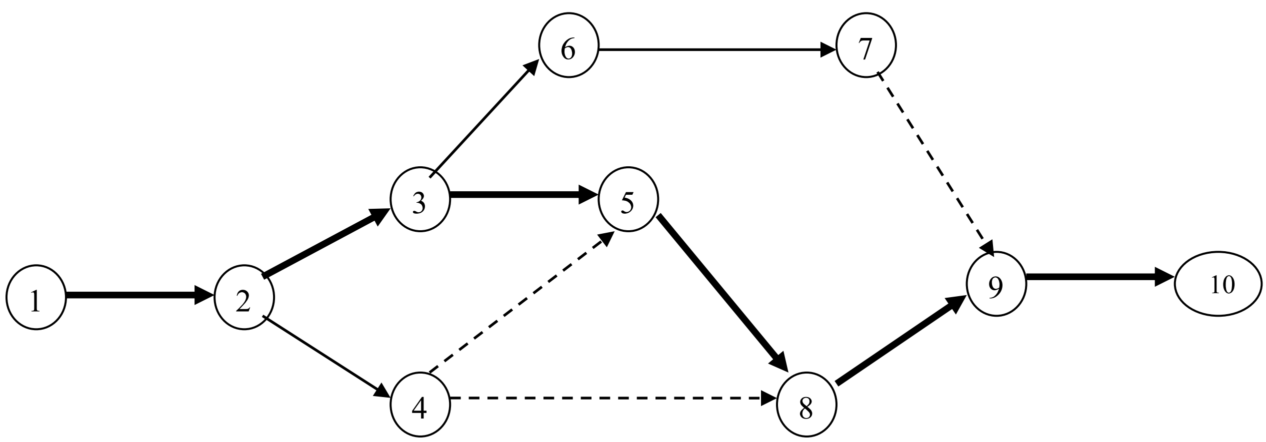
4- حدد المسار الحرج (الأنشطة الحرجة)

5- ما هي مدة تنفيذ المشروع ؟

6- شكل جدول المراقبة الزمنية للمشروع

الإجابة :

1- رسم مخطط شبكة الأعمال لنشاطات المشروع



2– حساب الأوقات المبكرة للبداية و النهاية :

لدينا لكل نشاط : وقت البداية المبكر ESi

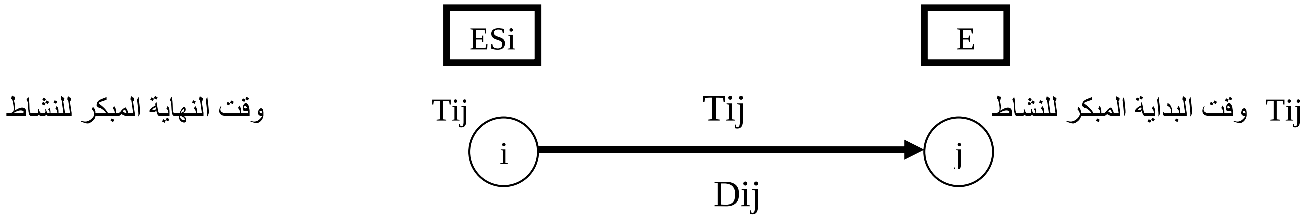
وقت النهاية المبكر ESj

لدينا عند حدث البداية $ES_1 = 0$ (دائما)

$ES_j = \text{Max} \{ES_i + D_{ij}\}$

بالنسبة ل : ES_2

$ES_2 = \text{Max} \{ES_1 + D_{12}\} = \{0 + 2\} = 2$



$ES_3 = \text{Max}_2 \{ ES_2 + D_{23}\} = 2 + 10 = 12$

$ES_4 = \text{Max}_3 \{ ES_2 + D_{24}\} = 2 + 5 = 7$

$ES_5 = \text{Max}_{3,4} \{ES_3 + D_{35}, ES_4 + D_{45}\} = \{12+2 , 7+0 \} = \{14 , 7\} = 14$

$ES_6 = \text{Max}_{3,6}\{ES_3 + D_{36} , ES_5 + D_{56} \} = \{12+3 , 14+0 \} = \{15, 14 \} = 15$

$ES_7 = \text{Max}_6\{ ES_6 + D_{67}\} = 15 + 1= 16$

$ES_8 = \text{Max}_{4,5} \{ES_4 + D_{48} , ES_5 + D_{58}\} = \{14 + 5, 7 + 0 \} = \{19 , 7\} = 19$

$ES_9 = \text{Max}_{7,8} \{ ES_7 +D_{79} , ES_8 + D_{89} \} = \{ 16+0 , 19+6 \} = \{16 , 25 \} = 25$

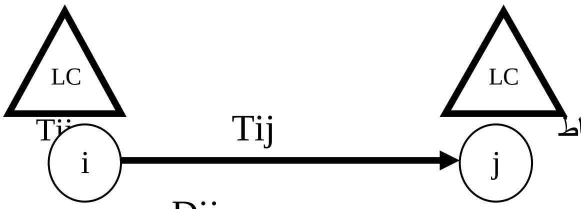
$ES_{10} = \text{Max}_9 \{ ES_9 + D_{9,10} \} = 25 + 5 = 30$

3- حساب الأوقات المتأخرة للبداية و النهاية (انطلاقا من حدث النهاية)

LCj لدينا : لكل نشاط : وقت النهاية المتأخر

LCj وقت النهاية المتأخر

وقت البداية المتأخر للنشاط Tij



Dij

للنشاط

وقت النهاية المتأخر

$$LCi = Min \{ LCj - Dij \}$$

$LCn = ESn$ و لدينا دائما عند حدث النهاية

$LC_{10} = ES_{10}$ هنا لدينا :

$$LC_9 = Min_{10}\{ LC_{10} - D_{9,10}\} = Min\{ 30 - 5 \} = 25$$

$$LC_8 = Min_{\,9}\{ LC_9 - D_{8,9} \} = Min\{ 25 - 6 \} = 19$$

$$LC_7 = Min_9\{ LC_9 - D_{7,9}\} = Min\{ 25 - 0 \} = 25$$

$$LC_6 = Min_7\{ LC_7 - D_{6,7} \} = \{ 25 - 1 \} = 24$$

$$LC_5 = Min_{8,6} \{ LC_8 - D_{5,8} , LC_6 - D_{5,6} \} = \{19 - 0 , 24 - 0\} = \{ 19 , 24 \} = 19$$

$$LC_4 = Min_{5,8} \{ LC_5 - D_{4,5} , LC_8 - D_{4,8} \} = \{14 - 0 , 19 - 0\} = \{ 14 , 19 \} = 14$$

$$LC_3 = Min_{5,6} \{ LC_5 - D_{3,5} , LC_6 - D_{3,6} \} = \{14 - 2 , 24 - 3\} = \{ 12 , 21 \} = 12$$

$$LC_2 = Min_{3,4} \{ LC_3 - D_{2,3} , LC_4 - D_{2,4} \} = \{12 - 10 , 14 - 5\} = \{ 2 , 9 \} = 2$$

$$LC_1 = Min_2 \{ LC_2 - D_{1,2} \} = \{ 2 - 2 \} = 0$$

4 – تحديد المسار الحرج (الأنشطة الحرجة)

لدينا عند المسار الحرج :

1- $ESi = LCi$

2- $ESj = LCi$

3- $TFij = 0$) (الزمن الفائض

$TFij = LCj – ESi – Dij$

النشاطات الحرجة : هي النشاطات التي لا يمكن التأخير فيها و أي تأخير فيها يؤدي إلي تأخر المشروع ككل .

المسار الحرج هو عبارة عن تسلسل الأنشطة الحرجة من حدث البداية إلي حدث النهاية .

$ESj – ESi = LCj – LCi = Dij$

المسار الحرج هو أطول مسار في الشبكة .

يمكن أن يكون هناك أكثر من مسار حرج في الشبكة الواحدة

إذن الأنشطة الحرجة هي :

$A \longrightarrow B \longrightarrow D \longrightarrow G \longrightarrow H \longrightarrow I$

5- مدة تنفيذ المشروع :

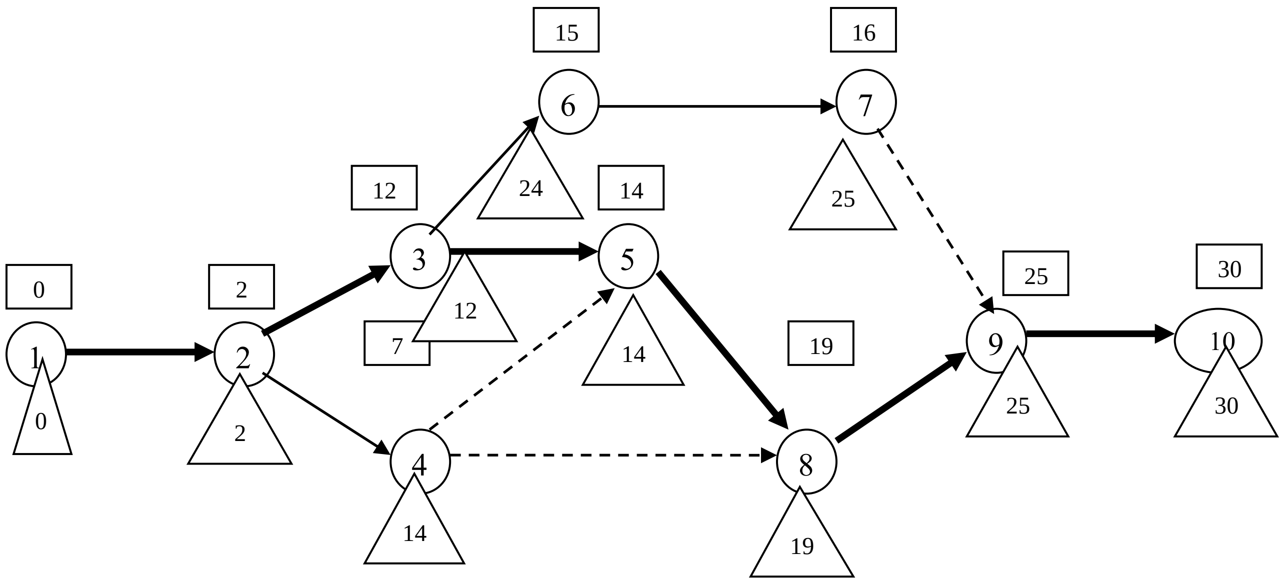
هي مجموع أزمنة (أوقات) تنفيذ أنشطة المسار الحرج

و هي : $2 + 10 + 2 + 5 + 6 + 5 = 30$

إذن مدة تنفيذ المشروع هي 30 أسبوع .

6- تشكيل جدول المراقبة الزمنية للمشروع :

اسم النشاط	الأنشطة السابقة	المدة Dij	الأوقات المبكرة		الأوقات المتأخرة		TFij	النشاط الحرج
			ESiللبداية	ESjللنهاية	LCiللبداية	LCjللنهاية		
A	—	2	0	2	0	2	0	حرج
B	A	10	2	12	2	12	0	حرج
C	A	5	2	07	09	14	07	—
D	A , B	2	12	14	12	14	0	حرج
E	B	3	12	15	21	24	09	—
F	E , C	1	15	16	24	25	09	—
G	D , C	5	14	19	14	19	0	حرج
H	G , D	6	19	25	19	25	0	حرج
I	E , H	5	25	30	25	30	0	حرج



المراجع:

1- ابراهيم العيد، استخدام الاساليب الكمية عن القرارات الادارية، قسم ادارة الاعمال، جامعة الاسكندرية،2004.

2- احمد محمد غنيم، المفاهيم العلمية والتطبيقات الادارية، الجزء الاول، كلية التجارة جامعة المنصورة 2009-2010.

3- دلال صادق الجواد، حميد ناصر الفتال، بحوث العمليات،عمان، الاردن، طبعة 2008.

4-الكواز احمد، برنامج تدريبي "أسلوب متابعة تنفيذ المشروعات"، المعهد العربي للتخطيط، 1998.

5- رند عمران مصطفى الأسطل، بحوث العمليات و الأساليب الكمية في صنع القرارات الإدارية، كلية التجارة جامعة المنصورة 2015-2014.

6- أحمد حاتم عبدالله، بحوث العمليات،عمان، الاردن، طبعة 2012.

7- ريتشارد برونسون، نظريات ومسائل في بحوث العمليات،عمان، الاردن، طبعة 2001.

8- إبراهيم محمد مهدي، مقدمة في بحوث العمليات (الطرق الكمية في الإدارة)،2015

9- محمد الطراونة وسليمان عبيدات، مقدمة في بحوث العمليات،عمان، الاردن، طبعة 2006.