جامعة الجزائر3

كلية العلوم الإقتصادية والعلوم التجارية وعلوم التسيير.

مطبوعة بيداغوجية تحت عنوان:

محاضرات في مادة الإحصاء الوصفي

مطبوعة بيداغوجية مقدمة لطلبة السنة الأولى جذع مشترك -ليسانس-

من إعداد: د- أمزيان أنيسة

رئيس المجلس العلمي

أ. د. باشي أحمد

جامعة الجزائر 3 * كلية العلوم الإقتصادية و العلوم التجارية و علوم التسيير

رئيس المجلس العلمي

السنة الجامعية: 2019/2018

الصفحة	المحتوى
04	**الفصل الأول: ماهية علم الإحصاء**.........
04	**أولا: مفاهيم عامة** ....
04	**1**- علم الإحصاء ....
05	**2**- المجتمع الإحصائي.........
05	**3**- الوحدة الإحصائية.........
05	**4**- العينة الإحصائية وأنواعها.........
08	**5**- المتغيّرة وأنواعها.........
09	**ثانيا: منهجية البحث الإحصائي** ....
09	**1**- التحديد الدقيق للظاهرة.........
09	**2**- جمع البيانات الإحصائية.........
11	**3**- تبويب وعرض البيانات.........
11	**4**- تحليل البيانات الإحصائية.........
11	**5**- تفسير البيانات الإحصائية.........
12	**الفصل الثاني: تنظيم وعرض البيانات الإحصائية** ....
12	**أولا: عرض البيانات جدوليا**.........
12	**1**- الجداول التكرارية البسيطة للمتغيّرة النوعية.........
14	**2**- الجداول التكرارية البسيطة للمتغيّرة الكمية.........
21	**ثانيا: العرض البياني** ....
21	**1**- العرض البياني للبيانات للمتغيّرة النوعية.........
24	**2**- العرض البياني للبيانات للمتغيّرة الكمية.........
31	**الفصل الثالث: مقاييس النزعة المركزية**.........
31	**أولا: الوسط الحسابي**.........
31	**1**- حالة البيانات غير المبوبة.........
32	**2**- حالة البيانات المبوبة.........
34	**ثانيا: الوسيط**.........
35	**1**- حالة البيانات غير المبوبة.........
36	**2**- حالة البيانات المبوبة.........
40	**ثالثا: المنوال** ....
40	**1**- حالة البيانات غير المبوبة.........
40	**2**- حالة البيانات المبوبة.........

رابعا: الوسط الهندسي، الربيعي، والوسط التوافقي..	43
1- الوسط الهندسي..	43
2- الوسط الربيعي..	44
3- الوسط التوافقي...	44
خامسا: الربيعات، العشيرات والمؤينات	45
1- الربيعات	45
2- العشيرات	46
3- المؤينات	46
خامسا: مقاييس التشتت..	53
أولا: المدى العام	53
ثانيا: الإنحراف المتوسط..	53
1- حالة البيانات غير المبوبة..	53
2- حالة البيانات المبوبة...	54
ثالثا: التباين والإنحراف المعيارين، والعزوم....................................	55
1- التباين..	55
2- الإنحراف المعياري..	57
3- العزوم...	59
رابعا: الإنحراف الربيعي ومعامل الإختلاف...	60
1- الإنحراف الربيعي..	60
2- معامل الإختلاف..	60
الفصل السادس:مقاييس الشكل	61
أولا: التماثل التام..	62
ثانيا: الالتواء..	62
1- قياس الإلتواء...	62
ثالثا: التفرطح (الإنبساط)	65
1- معامل فيشر...	66
2- معامل كيللي...	66
تمارين محلولة مدعمة بالشرح	67
قائمة المراجع	82

مقدمة:

أعدت هذه المطبوعة الموسومة " محاضرات في الإحصاء الوصفي" لطلبة السنة الأولى ليسانس، جذع مشترك لميدان علوم اقتصادية وعلوم تجارية وعلوم التسيير.

وتمكن الطلبة من الإلمام بمبادئ وأدوات الإحصاء الوصفي بطريقة سهلة وبسيطة، وقسمنا المطبوعة إلى ستة فصول حسب البرنامج المحدد وزاريا، وختمناها بمجموعة من التمارين المحلولة والمدعمة بالشرح.

الفصل الأول: ماهية علم الإحصاء

تمهيد:

المفهوم السائد عن الإحصاء هو تلك الأرقام والبيانات التي تقوم الدول والهيئات أو بعض الوكالات بجمعها ومعالجتها لتناسب أغراضا معيّنة، كتلك التي تهتم بتعداد السكان أو تلك التي تهدف إلى رصد المواليد والوفيات.

ويعتبر الإحصاء اليوم بقسميه النظري والتطبيقي فرعا مهما من فروع العلم والمعرفة لأنه يدرس بشكل أساسي الناحية الكمية للظواهر باستخدام الطرق والمبادئ الإحصائية المناسبة. فهو يدرس الظاهرة حسب المكان وعلاقتها بالظواهر الأخرى، كما يدرس تطور هذه الظواهر حسب الزمان والتنبؤ بحجمها في المستقبل أخذا بعين الاعتبار العوامل التي تؤثر على هذه الظواهر في الماضي وتغيّر هذه العوامل أو تغيّر تأثيرها في المستقبل الذي لا غنى عنه لمعرفة حقيقة الظواهر والتخطيط لها.

أولا: مفاهيم عامة:

1-علم الإحصاء : يعرف بأنه ذلك الفرع من فروع المعرفة الذي يختص بدراسة أساليب ووسائل معالجة البيانات التي تنشأ في كافة مجالات العلوم الاجتماعية والطبيعية، كما أنه يعتبر الإحصاء علم كبقية العلوم لأنه يمتاز بالمراحل الأربعة التي تمتاز بها بقية العلوم وهي:

- ✓ **المشاهدة:** العالم يشاهد ما يحدث، وبدون الحقائق المتعلقة بالمشكلة التي يود أن يدرسها؛
- ✓ **الفرضية:** لتفسير الحقائق المتعلقة بالمشكلة التي يود العالم أن يدرسها ويصوغ ما في ذهنه على شكل فرضيات تعبر على تحتويه البيانات التي جمعها؛
- ✓ **التنبؤ:** يستنتج العالم من فرضياته بعض الحقائق؛
- ✓ **التحقق:** يقوم العالم بجمع بيانات جديدة ويضع فرضيات جديدة وباستنتاج حقائق جديدة للتأكد من صحة تنبؤه.

على الرغم من الفرق الشاسع بين مصطلح "الإحصاء" والمصطلحات التالية " تعداد، إحصاءات" إلا أن أغلبية الطلبة لا تحسن التمييز بين هذه المصطلحات، ولإزالة هذا التداخل نعطي التعاريف التالية:

- ✓ **التعداد:** يقصد به عملية العد التي تقوم بها أجهزة مختصة تابعة لهيئات رسمية، وذلك بغرض الحصول على معطيات حول ظاهرة أو مجموعة من الظواهر، فالتعداد هو الحصر الكمي للظواهر؛
- ✓ **إحصائيات:** هي مجموعة المعلومات أو البيانات الكمية(الرقمية) والوصفية الخاصة بالظاهرة قيد الدراسة أو البحث، ويتم جمع هذه المعلومات من طرف هيئات مختصة وتقدمها بأساليب عملية في وثائق رسمية وغير رسمية لخدمة غرض محدد.

2-المجتمع الإحصائي: يعرف على أنه مجموعة المفردات موضع الدراسة، سواءا كانت هذه الوحدات أفراد أو أشياء أو قياسات والتي تشترك في صفات أو خصائص وسمات محددة، ويقسم المجتمع الإحصائي إلى قسمين:

- ✓ **المجتمع المحدود:** يعتبر المجتمع محدودا إذا كان بالإمكان حصر جميع وحدات الدراسة فيه: مثلا طلاب الجامعة الجزائرية يعتبر مجتمع محدود.
- ✓ **المجتمع غير المحدود:** في المجتمع غير المحدود فإن أسلوب دراسة جمع وحدات المجتمع والذي يطلق عليه بأسلوب الحصر الشامل يصبح مستحيلا، كذلك الحال في بعض المجتمعات المحدودة والتي لا يقبل المنطق تطبيق أسلوب الحصر الشامل، مثلا: فحص دم شخص، حيث لا يمكن سحب جميع دمه مما يؤدي إلى هلاكه، لذا فالأسلوب هنا يكمن في تبني أسلوب المعاينة.

3-الوحدة الإحصائية: هي العنصر الأولي محل الدراسة الإحصائية، أو هي القيمة المادية أو المعنوية التي تقع عليها الدراسة الإحصائية، مثل: الطالب (وحدة إحصائية) من جامعة معيّنة (مجتمع الطلبة)، وبالتالي فإن المجتمع الإحصائي هو مجموعة من الوحدات الإحصائية.

4-العينة الإحصائية وأنواعها: هي مجموعة جزئية من المجتمع لها نفس الخصائص يتم اختيارها لتمثيل المجتمع والاستدلال على خواصه، لذلك يجب أن تكون العيّنة ممثلة للمجتمع تمثيلا صادقا، يتم اختيارها بطرق مختلفة بغرض دراسة هذا المجتمع، نلجأ من أجل استخراج النتائج المطلوبة في وقت قصير كما تسمح لنا العينة بتوفير الجهد والتكاليف.

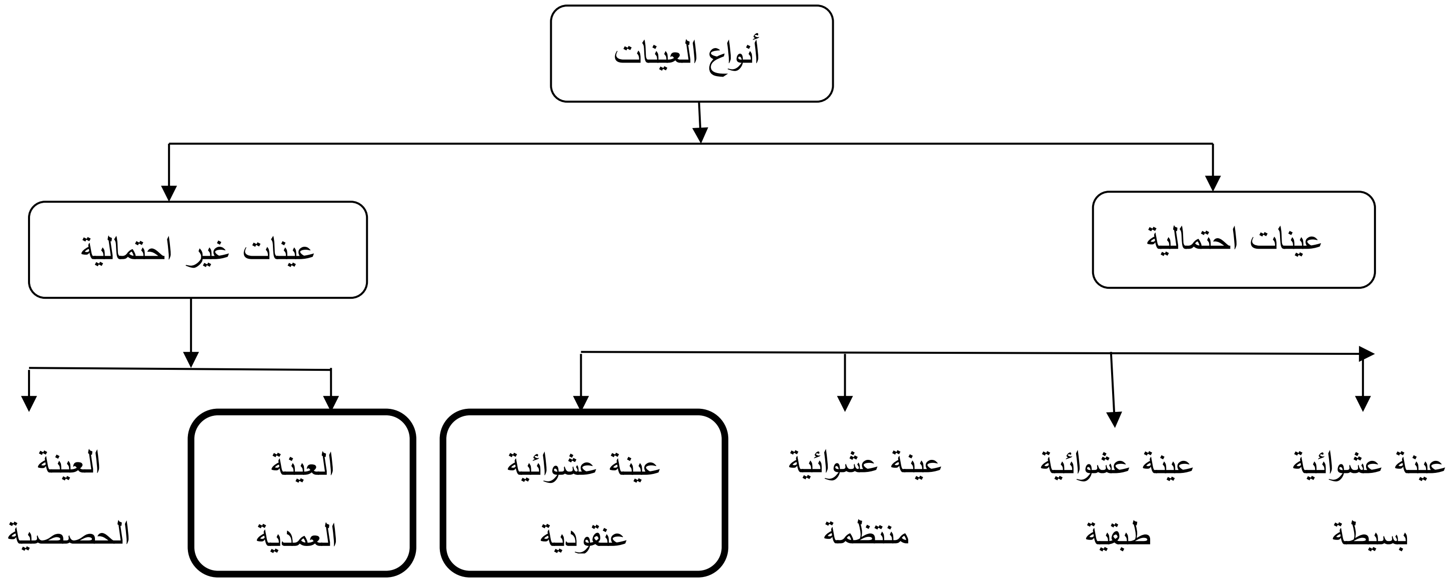
المعاينة هي الخطوات أو الطرق التي يتم إتباعها في عملية إختيار العيّنة، ويتوقف نجاح استخدام أسلوب المعاينة على عدة عوامل هي:

- ✓ كيفية تحديد حجم العينة؛

- ✓ طريقة اختيار مفردات العينة؛
- ✓ نوع العينة المختارة.

ويمكن تقسيم العينات وفقا لأسلوب اختيارها إلى نوعين هما:

الشكل رقم (01): أنواع العينات



أ/ **العينات الإحتمالية (العشوائية):** هي العينات التي يتم اختيار مفرداتها وفقا لقواعد الإحتمالات، بمعنى آخر هي التي يتم اختيار مفراداتها، من مجتمع الدراسة **بطريقة عشوائية،** بهدف تجنب التحيز الناتج عن اختيار المفردات بحيث يكون لكل عنصر فرصة أو احتمال أن يتواجد فيها، ومن أهم أنواع العينات الإحتمالية مايلي:

أ-1-العينة العشوائية البسيطة: تختار هذه العينة من **المجتمع الإحصائي** المراد دراسته عندما يكون متجانسا، أي أن جميع عناصره متماثلة كاختيار عينة من الطلاب جامعة ما جميع طلبتها من الذكور فقط، ويتم اختيار هذه العينة بحيث تكون فرص اختيار جميع مفرداتها من **المجتمع الإحصائي** متكافئة إذا افترضنا أن n هو حجم العينة و N هو حجم المجتمع الإحصائي، فإن فرصة أو احتمال ظهور كل عنصر في العينة هو $\frac{n}{\mathrm{N}}$ كما أن هذه العينة **تسحب عناصرها عشوائيا** أما باتباع **طريقة القرعة** أو **بترقيم عناصر المجتمع الإحصائي** ثم اللجوء إلى جدول الأرقام العشوائية لسحب العناصر المناسبة لكل رقم عشوائي.

أ-2-العينة العشوائية الطبقية: يشترط في اختيار هذا النوع من العينات أن تحافظ على تجانس خصائص المجتمع من حيث تقسيماته الممكنة، وتستخدم عندما يكون المجتمع مقسما إلى مجموعات بحيث تتشابه أفراد كل مجموعة بالصفات (تكون متجانسة) حيث تسمى كل مجموعة **بالطبقة.**

حيث: عدد أفراد العينة الطبقية = $\frac{\text{حجم الطبقة}}{\text{حجم المجتمع}}$ x **حجم العينة الكلية**

<u>مثال:</u> يراد اختيار عينة مكونة من 20 طالب من طلبة احدى الكليات إذا علمت أن عدد طلاب هذه الكلية 1000 طالب وهم مقسمين كمايلي (حسب السنة):

400 طالب سنة أولى، 300 طالب سنة ثانية، 200 طالب سنة ثالثة، 100 طالب سنة رابعة.

- بناء على ذلك كون العينة المطلوبة؟

السنة أولى: 400 طالب	السنة الثانية: 300 طالب	السنة الثالثة: 200 طالب	السنة الرابعة: 100 طالب
العدد $= \frac{400}{1000} * 20 = 8$	العدد $= \frac{300}{1000} * 20 = 6$	العدد $= \frac{200}{1000} * 20 = 4$	العدد $= \frac{100}{1000} * 20 = 2$
نختار 8 من 400 حسب العينة العشوائية البسيطة من (000) إلى (399)	نختار 6 من 300 حسب العينة العشوائية البسيطة من (000) إلى (299)	نختار 4 من 200 حسب العينة العشوائية البسيطة من (000) إلى (199)	نختار 2 من 100 حسب العينة العشوائية البسيطة من (000) إلى (099)

أ-3-العينة العشوائية المنتظمة(النظامية): هي عينة يتم اختيار عناصرها باتباع نظام معين ويشترط ترقيم عناصر المجتمع من 01 إلى N **(حجم المجتمع)**، ويتم تكوينها كمايلي:

✓ نحسب أولا الكسر $\frac{N}{n}$ (n حجم العينة)، ونأخذ الرقم الصحيح من هذا الكسر نرمز له بالرمز r ثم نختار عددا طبيعيا عشوائيا بين 1 و **r** نرمز له بالحرف **d** العينة التي يتم تشكيلها أرقام عناصرها كمايلي:

$$\boldsymbol{d + r, d + 2r, d + 3r, d + 4r \dots\dots}$$

<u>مثال:</u>N=300,n=24 نحسب$\frac{N}{n}$ = $\frac{300}{24} = 12{,}5$ نأخذ الرقم الصحيح r=12

نأخذ:

$$d = 1 \rightarrow 1,13,25,37,49,61 \dots\dots\dots..277$$
$$d = 2 \rightarrow 2,14,26,38,50,62 \dots\dots\dots..278$$
$$d = 5 \rightarrow 5,17,29,41,53,65 \dots\dots\dots..281$$

أ-4- العينة العشوائية العنقودية: هي عينة يتم تكوينها بإتباع عدة مراحل حيث يقسم المجتمع الإحصائي إلى مجموعات جزئية واضحة تسمى كل منها طبقة، ثم نقسم الطبقة إلى طبقات أخرى وهكذا، ونختار عيّنة عشوائية بسيطة من الطبقة الأخيرة تتناسب مع حجم الطبقة.

__مثال:__ دراسة فرص العمل لطلاب جامعة معيّنة بعد التخرج، فالمطلوب هو تحديد أفضل عينة؟

في البداية نقوم بتقسيم الجامعة إلى كليات (كلية الطب، كلية الهندسة، كلية العلوم...إلخ) ثم نقوم بتقسيم هذه الكليات إلى تخصصات، ونأخذ عيّنة عشوائية بسيطة من كل تخصص ونجري الدراسة عليها.

ب/**العينات غير الاحتمالية (غير العشوائية):** هي التي يتم اختيار مفرداتها بطريقة غير عشوائية حيث يقوم الباحث باختيار مفردات العينة بالصورة التي تحقق الهدف من المعينة مثل اختيار عينة من المزارع التي تنتج التمور من النوع السكري، وأهم أنواع العينات غير الإحتمالية مايلي:

ب-1- العينة الحصصية: نختار عناصرها ليس عشوائيا وإنما بطريقة متعمدة ويشترط فيها الحصص المطلوبة: **مثال:** يختار طبيب مستشفى عينة من 10 مرضى لإجراء تحاليل طبيّة تجريبية ويشترط أن تتكون من 06 نساء و04 رجال.

ب-2-العينة العمدية (القصدية): الاختلاف بين العيّنة القصدية وبين العيّنة الحصصية هي عدم وجود أي حصص يتطلب احترامها ويكون الباحث حرا في اختياره.

ب-3-عينة الصدفة: تتكون من عناصر يتم مقابلتها بالصدفة، مثلا: اختيار تلاميذ من مدرسة معيّنة.

5-المتغيّرة وأنواعها: هي المقادير والصفات التي تقاس بها الميزات الإحصائية لأفراد المجتمع كما تعرف أيضا بأنها بيانات غير رقمية أو بيانات رقمية في شكل مستويات أو في شكل فئات رقمية وتنقسم حسب طبيعة الميزة الإحصائية المدروسة إلى قسمين:

أ- **البيانات الوصفية (المتغيّرة النوعية):** لا يمكن التعبير عن حالتها بأرقام حيث لا يمكن قياسها أي هي البيانات التي تصف أفراد المجتمع الإحصائي، مثل لون الشعر أو البشرة أو تقديرات النجاح للطلاب في إحدى المواد...... وتنقسم بدورها إلى نوعين هما:

أ-1- متغيّرة نوعية ترتيبية(رتبية): وهي صفة نوعية يمكن ترتيب حالاتها المختلفة ترتيبا معينا.

__مثال:__ تقديرات الطلبة في مشوارهم الدراسي، نجد الحالات التالية: ممتاز، جّد جدا، جيّد، متوسط، ضعيف، ضعيف جدا.

أ-2- متغيّرة نوعية غير ترتيبية: في هذا النوع لا يوجد أي معيار لترتيب حالاتها:

__مثال:__ الحالة العائلية (أعزب- متزوج- مطلق- أرمل).

ب–البيانات الكمية (المتغيّرة الكمية): هي تلك الخصائص التي يمكن قياسها وهي أكثر المتغيّرات انتشارا لكون لغة الإحصاء هي لغة الأرقام.

__مثال:__ وزن الطلاب يقاس بالكيلوغرام، أعمار الطلاب تقاس بالسنة، نتيجة الإمتحان وتقاس بالدرجات، أجور العمال وتقاس بالدينار، .... وتنقسم بدورها إلى نوعين هما:

ب–1–متغيّرة كمية متقطعة: هي صفة كمية تأخذ حالاتها قيما ثابتة ومحددة (رقما واحدا محددا) لا تقبل وحدات قياسها التجزئة.

__مثال:__ عدد حوادث المرور، عدد الأطفال في كل عائلة، عدد أفراد الأسرة....

ب–2–متغيّرة كمية مستمرة (متصلة): هي التي يمكن قياسها بمعايير وحدود و التي تأخذ أي قيمة يمكن تمثيلها في مدى معيّن من الأعداد الحقيقة.

__مثال:__ دخل الأسرة، كميات الأمطار، وزن المنتوج...

ثانيا: منهجية البحث الإحصائي: وبناء على ما سبق **فالطريقة الإحصائية** تتم بالخطوات التالية:

1–التحديد الدقيق للظاهرة المدروسة: أول مرحلة في البحث الإحصائي هي التحديد العام للظاهرة، إذ على الباحث أن يحدد بكل دقة الهدف من الدراسة الإحصائية، ثم المجتمع الإحصائي ومكانه والوقت المناسب لجمع البيانات حوله، والصفات المطلوب معرفتها ووحدات القياس المستخدمة.

2–جمع البيانات الإحصائية: إن جمع البيانات الإحصائية من أساسيات العمل الإحصائي، ولهذه المرحلة أهمية خاصة، في أي بحث إحصائي، إذ أن توفر البيانات الإحصائية الدقيقة والسليمة عن الظاهرة المدروسة، يعطي نتائج سليمة، ويساعد على اتخاذ قرار سليم بناء على تلك النتائج، وعلى الباحث أن يحدد مصدر جمع البيانات المرغوب فيها، وأساليب وطرق ذلك قبل البدء في العملية.

أ/ مصادر جمع البيانات: هناك مصدرين للحصول منها على البيانات هما:

أ–1/المصادر الأولية: وهي المصادر التي نحصل منها على البيانات بشكل مباشر، حيث يقوم الباحث نفسه بجمع البيانات من المفردة محل البحث مباشرة، فعندما يهتم الباحث بجمع بيانات عن الأسرة، يقوم بإجراء مقابلة مع رب الأسرة، ويتم الحصول منه مباشرة على بيانات خاصة بأسرته، مثل بيانات المنطقة التابع لها، والحي الذي يسكن فيه، والجنسية، والمهنة، والدخل الشهري، وعدد أفراد الأسرة، والمستوى التعليمي، .... وهكذا.

ويتميز هذا النوع من المصادر بالدقة والثقة في البيانات، لأن الباحث هو الذي يقوم بنفسه بجمع البيانات من المفردة محل البحث مباشرة، ولكن أهم ما يعاب عليها أنها تحتاج إلى وقت ومجهود كبير، ومن ناحية أخرى أنها مكلفة من الناحية المادية.

أ-2/المصادر الثانوية: وهي تشمل جميع المصادر التي يتم الحصول منها على البيانات بشكل غير مباشر، بمعنى آخر يتم الحصول عليها بواسطة أشخاص آخرين، أو أجهزة وهيئات رسمية متخصصة مثل دوريات وزارة الزراعة ومصلحة الإحصاء...إلخ.

ولهذه الطريقة فوائد متعددة أهمها أنها تؤدي إلى إقتصاد كبير في وقت الباحث ونفقاته، إلاّ أنها تشكو أيضا من بعض العيوب أهمها:

- قد تكون البيانات قديمة وغير متجددة؛
- قد لا تفي تماما بغرض البحث؛
- قد يكون بها بعض التحيّز الذي يعيق من الإستفادة من البيانات بصورة كاملة.

ب-أساليب جمع البيانات: يتحدد الأسلوب المستخدم في جمع البيانات، حسب الهدف من البحث، وحجم المجتمع محل البحث، وهناك أسلوبين لجمع البيانات هما:

ب-1/أسلوب الحصر أو المسح الشامل: يتم في هذه الحالة جمع بيانات عن كل مفردة من مفردات المجتمع بلا إستثناء كحصر جميع المزارع التي تنتج التمور، أو حصر البنوك الإسلامية في المنطقة. ويتم اعتماد هذه الطريقة في الحالات التالية:

- البيانات المطلوبة تخص كل مفردة من مفردات المجتمع؛
- الحصول على نتائج أكثر دقة؛
- عدم تجانس مفردات المجتمع وإذا كان صغيرا نسبيا.

ب-2/أسلوب المعاينة (العيّنة الإحصائية): يعتمد هذا الأسلوب على معاينة جزء من المجتمع محل الدراسة، يتم اختياره بطريقة علمية سليمة، ودراسته ثم تعميم نتائج العينة على المجتمع، ومن ثم يتميز هذا الأسلوب بالآتي:

- تقليل الوقت والجهد؛
- تقليل التكلفة؛
- الحصول على بيانات أكثر تفصيلا، وخاصة إذا جمعت البيانات من خلال استمارة استبيان؛

- أسلوب المعاينة يفضل في بعض الحالات التي يصعب فيها إجراء حصر شامل، مثل معاينة دم المريض، أو إجراء تعداد لعدد الأسماك في البحر....إلخ.

ومن جانب آخر، يعاقب على هذه الطريقة أن نتائجها تكون أقل دقة من نتائج أسلوب الحصر الشامل، وخاصة إذا كانت العيّنة المختارة لا تمثل المجتمع تمثيلا جيّدا.

3- تبويب وعرض البيانات: يعني عرض البيانات بصورة يمكن الإستفادة منها في وصف الظاهرة موضوع الدراسة، من حيث تمركز البيانات ودرجة تجانسها. وهناك طريقيتين لعرض البيانات الإحصائية هما العرض الجدولي والعرض البياني.

4- تحليل البيانات الإحصائية: تحليل البيانات هو وسيلة الحصول على الإجابات المطلوبة في إشكالية البحث الإحصائي، حتى يتمكن الباحث من التحليل الإحصائي لجوانب الظاهرة المدروسة، ويتم ذلك عن طريق أدوات إحصائية كثيرة منها البسيط ومنها المعقد، تمسح باستقراء النتائج واستخلاص مدلولها، الذي هو هدف البحث الإحصائي.

5-تفسير البيانات الإحصائية: من المعروف أن في إعداد السياسات واتخاذ القرارات المتعلقة بالقضايا الاجتماعية والاقتصادية تبنى على أساس الدراسات الإحصائية من هنا كان لزاما على الإحصائي أن يكون ملما بمضمون الأعداد وأن يفسر النتائج المتوصل إليها وأن يشرح ما تعنيه.

الفصل الثاني: تنظيم وعرض البيانات الإحصائية.

تمهيد:

يعتبر تنظيم وعرض البيانات الإحصائية أول مرحلة للتحليل الإحصائي وتتقيّد هذه الطريقة على نوع هذه البيانات وعلى الحقائق المطلوب إبرازها منها. وعليه يمكن تنظيم وعرض البيانات إما عن طريق تصميم التوزيعات أو الجداول التكرارية أو بإستعمال الرسوم البيانية.

أولا: عرض البيانات جدوليا:

يمكن عرض البيانات في صورة جدول تكراري، ويختلف شكل الجدول طبقا لنوع البيانات، وحسب عدد المتغيرات، ففي الجدول الإحصائي الأولي(البسيط) نضع في العمود الأول جميع الحالات الممكنة للمتغيّرة المدروسة ونرمز لها بالرمز X_i ، ونضع في العمود الثاني عدد عناصر المجتمع الإحصائي المقابلة لكل حالة أي التكرار المطلق n_i، ويكون الجدول الإحصائي كمايلي:

الجدول رقم (01): الجدول التكراري البسيط

الحالات X_i	التكرار المطلق n_i
X_1	n_1
X_2	n_2
X_3	n_3
. . X_k	. . n_k
المجموع $\sum$	$\sum_{i=1}^{k} n_i = N$

هذا الجدول يبين لنا أو يعطينا توزيع المجتمع الإحصائي حسب المتغيّرة المدروسة، يمكن إثراء هذا الجدول بإضافة عمودا ثالثا مخصصا لما يسمى بالتكرارات النسبية التي نرمز لها بـ f_i حيث $f_i = \frac{n_i}{N}$ ، كما يمكننا الحصول على نسب مئوية (تكرار نسبي مئوي) بضرب الحاصل في **100.**

$$f_i = \frac{n_i}{N} * 100$$

1–الجداول التكرارية البسيطة ذات المتغيّرة النوعية: وهي الجداول التي تتضمن تكرارات متغيرات نوعية معينة للظاهرة المدروسة، كعدد المتزوجين، أو عدد حاملي شهادة ليسانس في تخصص ما، أو عدد العاطلين عن العمل، مثلا، وتحتوي هذه الجداول على متغيّرة نوعية واحدة فقط (جداول تكرارية بسيطة) ويتم افراغ البيانات

فيها كما هو مبين في المثال التالي والذي يبين لنا كيف يمكن تبويب البيانات الوصفية الخام في شكل جدول تكراري.

مثال: أخذت عينة عشوائية من الطلبة تتكون من 25 طالبا، ليتم استقصاءهم حول التقديرات التي تحصلوا عليها في مقياس المحاسبة، وتم ذلك من خلال ملأ استمارات خاصة، فكانت الإجابات في الإستمارات كمايلي:

ممتاز	**جيّد**	**جيّد جدا**	**جيّد**	**جيّد**
جيّد	**ممتاز**	**ممتاز**	**جيّد جدا**	**جيّد جدا**
جيّد جدا	**ممتاز**	**جيّد جدا**	**ممتاز**	**جيّد**
ممتاز	**جيّد جدا**	**ممتاز**	**ممتاز**	**ممتاز**
جيّد جدا	**جيّد جدا**	**ممتاز**	**جيّد جدا**	**جيّد جدا**

المطلوب:

1- ماهو المتغيّر ونوعه؟ وما المعيار المستخدم في قياس البيانات؟

2- أعرض البيانات في شكل جدول تكراري

3- كون التوزيع التكراري النسبي

4- علق على النتائج.

الحل:

1- المتغير التقديرات، متغير وصفي (صفة نوعية غير رتبية)، تقاس بمعيار اسمي.

2- لعرض البيانات في شكل جدول تكراري، يتم اتباع الآتي: تكوين جدول تفريغ البيانات.

وحتى نتجنب الخطأ خاصة إذا كان عدد الإستمارات أو عدد البيانات كبيرا، نقوم بأخذ استمارة بعد استمارة، ونضع تشطيبة عمودية صغيرة أمام الصفة التي تحتويها الإستمارة وذلك في عمود التعداد، وعندما نصل إلى التشطيبة الخامسة نضعها مقاطعة للأربعة الأولى بحيث تشكل لنا زمرة تتكون من خمس تشطيبات ونستمر هكذا حتى ننتهي من تسجيل كل الإستمارات.

ومن البديهي أن نستخدم الزمر الخماسية على هذا المنوال، يسهل لنا عملية الجمع عند الإنتهاء من إفراغ البيانات في عمود التعداد وذلك ما يوضحه الجدول الموالي:

جدول رقم (02): جدول تفريغ البيانات

التكرار النسبي المئوي $f_i = \frac{n_i}{N} * 100$	التكرار المطلق n_i	الفرع
$f_1 = \frac{10}{25} * 100 = 40$	10	ممتاز
$f_2 = \frac{10}{25} * 100 = 40$	10	جيّد جدا
$f_3 = \frac{5}{25} * 100 = 20$	05	جيّد
100	**25**	**المجموع**

الشرح: يلاحظ أن التقديرات الشائعة بين الطلبة في مادة المحاسبة " ممتاز" وجيّد جدا" بنسبة 40% لكل تقدير مما يدل على أنهما يمثلان الأغلبية من بين طلبة العينة المستقصاة

2-الجداول التكرارية البسيطة ذات المتغيّرة الكمية: وهي نوعان هما على التوالي:

أ/ الجداول التكرارية البسيطة ذات المتغيّرة الكمية المتقطعة (المنفصلة): وهي الجداول التي تظهر عدد التكرارات كمية واحدة محددة وممثلة في **رقم واحد فقط**، تسمى هذه **الكمية بالفئة**، وبمعنى آخر هي التي تكون فيها المتغيّرة الكمية عبارة عن متغيرة متقطعة.

مثال: أرادت مسؤولة مكتبة جامعية تقرض الكتب الجامعية للطلاب أن تحصر عدد الكتب التي تقرضها في السداسي الأول من السنة الجامعية **2018-2019**، فقامت هذه المسؤولة بإختيار عيّنة عشوائية متكونة من 12 طالب جامعي وسألت كل واحد منهم عن عدد الكتب التي طلبها من المكتبة في السداسي الأول وكانت الإجابات كمايلي:

2	**3**	**4**	**4**	**5**	**4**
3	3	0	1	3	2

لكي تكون هذه البيانات أكثر فائدة يجب أن يتم تنظيمها، ونلاحظ أن المتغير الذي ورد في العينة هو عدد الكتب التي يطلبها (يقرضها) الطالب في السداسي الأول وهو **متغير كمي متقطع**.

<u>الحل:</u>

جدول رقم (03): جدول توزيع تكراري للكتب المقترضة من طرف الطلبة

عدد الكتب (الفئة)x_i	التكرار المطلق n_i	التكرار النسبي المئوي $f_i = \frac{n_i}{N} * 100$
0	01	$f_1 = \frac{1}{12} * 100 = 8,33$
1	01	$f_2 = \frac{1}{12} * 100 = 8,33$
2	2	$f_3 = \frac{2}{12} * 100 = 16,67$
3	4	$f_4 = \frac{4}{12} * 100 = 33,33$
4	3	$f_5 = \frac{3}{12} * 100 = 25$
5	1	$f_6 = \frac{1}{12} * 100 = 8,33$
المجموع	**12**	**100**

يرمز لقيمة الفئة $_i$ ولتكراراتها المطلقة بـ ،n_i حيث i رقم الفئة

من الملاحظ أنه بمجرد أن توضع البيانات الخام في جدول تكراري يصبح من السهل ملاحظة الوتيرة التي يظهر بها **قيم المتغير** (عدد الكتب)، يسهل علينا هذا الجدول تحديد مثلا ماذا كان هنالك عدد كبير من الطلاب لم تطلب أي كتاب أو طلبوا أكثر من أربعة كتب.

كما نستطيع أن نحدد درجة طلب وإستخراج الكتب من المكتبة بالتقريب للطالب الجامعي بصورة عامة، مثلا نلاحظ أن 4 طلاب من بين 12 طالب طلبوا أكثر من 3 كتب. وكذا ربع($\frac{1}{4}$) الطلاب طلبوا أقل من 3 كتب خلال السداسي الأول من السنة الجامعية **2018-2019**.

عدد الكتب المطلوبة تسمى الفئة، وهو محدد في قيم واحد كما سبقت الإشارة أي هو غير محصور ضمن مجال، وبالتالي نقول أن طول الفئة (طول مجال الفئة)، معدوم، ونشير لذلك من الآن

ب: (L=0) وتسمى مثل هذه الجداول بالجداول الكمية البسيطة غير المستمرة (المتقطعة أو المنفصلة).

<u>ملاحظة</u>:عند القيام بعملية التبويب اليدوي للبيانات في مثل هذه الجداول، فإننا نتبع نفس الطريقة التي اتبعت في حالة تبويب البيانات ذات المتغيّرات النوعية.

ب/الجداول التكرارية البسيطة ذات المتغيّرات الكمية المستمرة (المتصلة): في حالة المتغيّر الكمي المستمر يكون مجال الدراسة يضم ملا نهاية من القيّم، ولتعذر وضع كل تلك القيّم، يقسم مجال الدراسة إلى مجالات جزئية تسمى الفئات، يسمى طول الفئة بمدى الفئة، ونرمز له بالحرف W، وهو الفرق بين أكبر قيمة ضمن مجموعة القيم، وأصغر قيمة ضمنها.

$$w = X_{max} - X_{min} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (1)$$

X_{max}: أعظم (أكبر) قيمة ضمن مجموعة القيم

X_{min}: أدنى (صغر) قيمة ضمن مجموعة القيم

- ✓ تحديد طول الفئة: تحديد طول الفئة يساعد على تحديد عدد الفئات وبالتالي حجم الجداول، إذ كلما كان طول الفئة كبيرا كلما كان حجم الجداول صغيرا والعكس صحيح، ولتحديد طول الفئة يتم استخدام قاعدة ستيرجس (H.A. sturges) التي تعطي كمايلي:

$$L = \frac{w}{1 + 3.322 LogN} \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots (2)$$

حيث: L طول الفئة، N عدد القيم، W المدى

<u>ملاحظة</u>: إن هذه القاعدة تعطينا طول الفئات المناسب لإفراغ مجموعة البيانات في جدول تكراري مستمر غير أن الإلتزام ليس اجباريا بل يبقى تحديد طول الفئة أكرا يعود للإحصائي القائم بالعملية.

- ✓ **تحديد عدد الفئات:** يحدد عدد الفئات باستخدام القاعدة التالية:

$$N_c = \frac{w}{L} \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots (3)$$

حيث i عدد الفئات

من المعادلة رقم (2) يمكننا أن نكتب:

$$w = L(1 + 3.322\ LogN) \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots . (4)$$

وبتعويض المعادلة رقم (4) في المعادلة رقم (3) نجد أنه يمكننا كتابة المعادلة رقم (3) أيضا على النحو التالي:

$$N_c = 1 + 3.322 LogN \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (5)$$

مثال: فيما يلي بيانات توضح علامات 70 طالب في الاختبار الإستدراكي لمقرر مادة المحاسبة

56	65	70	65	55	60	66	70	75	56
60	70	61	67	61	71	67	62	71	66
68	72	57	68	72	59	57	71	69	75
72	62	67	73	58	63	66	73	63	65
58	73	74	76	74	80	81	60	74	58
76	82	77	83	77	85	91	78	94	72
79	64	57	79	55	87	64	88	78	62

المطلوب:

1- كون جدول التوزيع التكراري لعلامات الطلاب
2- أحسب قيّم التكرار النسبي
3- ماهي نسبة الطلاب الحاصلين على علامة ما بين 70 إلى أقل من 80؟
4- ماهي نسبة الطلاب الحاصلين على علامة أقل من 70 درجة؟
5- ماهي نسبة الطلاب الحاصلين على علامة 80 أو أكثر؟

الحل:

1- **تكوين التوزيع التكراري:** علامة الطالب في الإختبار متغير كمي مستمر، ولكي يتم تبويب البيانات في شكل جدول تكرارين يتم اتباع الآتي:

✓ **حساب المدى W:**

$$\boldsymbol{w = X_{max} - X_{min}}$$
$$\boldsymbol{w = 94 - 55 = 39}$$

✓ **تحديد طول الفئة L:** لتحديد طول الفئة يتم استخدام قاعدة ستيرجس(H.A.Sturges) التي تعطي كمايلي:

$$L = \frac{w}{1 + 3.322 LogN}$$
$$L = \frac{39}{1 + 3.322 Log70} = 5{,}47 \cong 5$$

✓ تحديد عدد الفئاتN_c:

$$N_c = \frac{w}{L} = \frac{39}{5} = 7,8 \cong 8$$

إذن طول الفئات المناسب لإفراغ هذه البيانات في جدول تكراري مستمر (متصل) هو:5، أما عدد الفئات المناسب فهو:8، بالتالي يكون الجدول المطلوب هو:

الجدول رقم(04): جدول توزيع تكراري لعلامات الطلبة في إختبار مادة المحاسبة

الفئات	التكرار المطلق n_i	التكرار النسبي المئوي $f_i = \frac{n_i}{N} * 100$
[55 −60[	10	$f_1 = \frac{10}{70} * 100 = 14.28$
[60 −65[	12	$f_2 = \frac{12}{70} * 100 = 17.14$
[65 −70[	13	$f_3 = \frac{13}{70} * 100 = 18.57$
[70−75[	16	$f_4 = \frac{16}{70} * 100 = 22,86$
[75 −80[	10	$f_5 = \frac{10}{70} * 100 = 14,28$
[80 −85[	04	$f_6 = \frac{4}{70} * 100 = 5,71$
[85 −90[	03	$f_7 = \frac{3}{70} * 100 = 4,28$
[90 −95[	02	$f_8 = \frac{2}{70} * 100 = 2,86$
المجموع	**70**	**100**

3. نسبة الطلاب الحاصلين على علامات ما بين 70 إلى أقل من 80 هو مجموع التكرارين النسبيين للفئتين الرابعة والخامسة.

(37.2%= 22.9+14.3) إذا نسبة الطلاب الحاصلين على علامات ما بين(70 و80) أي حوالي 37.2% من الطلاب حصلوا على علامات ما بين (70 و80).

4. نسبة الطلاب الحاصلين على علامات أقل من70 هو مجموع التكرارات النسبية للفئات الأولى والثانية والثالثة: (50%= 18.6+17.14+14.3).

هناك حوالي 50% من الطلاب تحصلوا على علامة أقل من 70

5. نسبة الطلاب الحاصلين على علامة 80 أو أكثر، هو مجموع التكرارات النسبية للفئات الثلاثة الأخيرة

(5.71+4.3+2.9=%12.8)

وعليه نقول أن حوالي 12.8% من الطلاب تحصلوا على علامة 80 أو أكثر.

أنواع التوزيعات التكرارية المستمرة: تقدم الجداول التكرارية المستمرة بعد صيغ منها مايلي:

-**التوزيع التكراري المغلق:** يكون في هذه الحالة الحد الأدنى لأول فئة والحد الأعلى لآخر فئة محددين، وقد يكون فيه مدى الفئات متساويا، ويسمى **بالتوزيع التكراري المنتظم**، وفي الحالة المعاكسة لما يكون فيه مدى الفئات غير متساويا يسمى بالتوزيع التكراري غير المنتظم، ويلجأ إليه الباحث لما تكون البيانات الإحصائية كبيرة التشتت وكثيرة التمركز في بعض الزمر.

مثال: نتائج دراسة ميدانية كان الغرض منها تقصي عادة تدخين السجائر للعاملين في أحد المصانع كما يلي:

الجدول رقم (05): توزيع تكراري مغلق

فئات المدخنين	التكرار المطلق n_i
]08-04]	**06**
]12-08]	**11**
]16-12]	**19**
]20-16]	**42**

-**التوزيع التكراري المفتوح:** يكون فيه الحد الأدنى لأول فئة محدد ويسمى **بالتوزيع التكراري المفتوحمن الأسفل**، أو الحد الأدنى لآخر فئة غير محدد ويسمى بالتوزيع التكراري المفتوح من الأعلى، أو الحدين معا ويسمى **بالتوزيع التكراري المفتوح الطرفين.**

أمثلة:

توزيع تكراري مفتوح من الأعلى

الفئات	التكرار المطلق n_i
أقل من 8	06
12-08	11
16-12	19
20-16	42

توزيع تكراري مفتوح من الأسفل

الفئات	التكرار المطلق n_i
08-04	06
12-08	11
16-12	19
16 فأكثر	42

توزيع تكراري مفتوح من الطرفين

الفئات	التكرار المطلق n_i
أقل من 8	06
12-08	11
16-12	19
16 فأكثر	42

-**التوزيعات التكرارية المجتمعة:** وهي نوعان:

- **التوزيع التكراري المتجمع الصاعد:** يستخدم لغرض المعرفة السريعة لعدد أو نسب التكرارات التي تقل عن حد معين من حدود الفئات، وفي حساب بعض مقاييس النزعة المركزية، في هذا التوزيع يكون عدد التكرارات التي تقل عن الحد الأعلى لأول فئة يساوي عدد التكرارات أول فئة، وعدد التكرارات التي أقل عن الحد الأعلى للفئة الثانية تساوي عدد التكرارات الفئة الأولى والثانية، أما عدد التكرارات التي تقل عن الحد الأعلى للفئة الثالثة فيساوي إلى مجموع تكرارات الفئة الأولى والثانية والثالثة، وهكذا، يستمر التجميع حتى الوصول إلى التكرارات التي تقل عن الحد الأعلى لآخر فئة، حيث تساوي إلى مجموع التكرارات.

<u>مثال:</u> البيانات التالية تظهر أوزان سكان عمارة ما حسب فئات الأعمار من 10 إلى 60 سنة.

الفئات (العمر)	[10-20[	[20-30[	[30-40[	[40-50[	[50-60[	المجموع
التكرار(عدد السكان)	4	9	15	8	4	40

<u>المطلوب:</u>

1- كون جدول التوزيع التكراري مع حساب قيّم المتجمع الصاعد.

الحل: التوزيع التكراري

الجدول رقم(06): توزيع تكراري متجمع صاعد

I	الفئات	f_i	التكرار المتجمع الصاعد	
			الحد الأعلى	N↑
2	[10-20[	4	أقل من 20	4
3	[20-30[	9	أقل من 30	13
4	[30-40[	15	أقل من 40	28
5	[40-50[	8	أقل من 50	36
6	[50-60[	4	أقل من 60	40
المجموع		40		

من الجدول أعلاه يمكن معرفة التكرارات التي تقل عن أي حد من حدود الفئات المحددة، ويلاحظ أن التجميع يجري **بصفة تصاعدية،** أي من الأدنى إلى الأعلى، لذلك سمي هذا التوزيع بالتوزيع التكراري المتجمع الصاعد، ويرمز للتكرارات المتجمعة الصاعدة بسهم إلى الأعلى N↑.

التوزيع التكراري المتجمع النازل: يستخدم لغرض المعرفة السريعة لعدد أو نسب التكرارات التي تساوي أو تزيد عن حد معين من حدود الفئات.

<u>مثال:</u> أحسب قيّم التكرار المتجمع النازل لبيانات المثال السابق أعلاه.

<u>الحل:</u> التوزيع التكراري.

الجدول رقم (07): توزيع تكراري متجمع النازل

I	الفئات	f_i	التكرار المتجمع النازل	
			الحد الأعلى	N↓
2	[10–20[	4	10 فأكثر	40
3	[20–30[	9	20 فأكثر	36
4	[30–40[	15	30 فأكثر	27
5	[40–50[	8	40 فأكثر	12
6	[50–60[	4	50 فأكثر	4
المجموع		40		

من الجدول أعلاه يمكن معرفة التكرارات التي تساوي أو تزيد عن أي حد من حدود الفئات المتضمنة في البيانات الأولية، وفيه يكون التكرار الذي يساوي أو يزيد عن الحد الأدنى لآخر فئة مساويا إلى تكرار آخر فئة، والتكرار الذي يساوي أو يزيد عن الحد الأدنى لأول فئة مساويا إلى مجموع التكرارات.

ويرمز للتكرارات المتجمعة النازلة بسهم إلى الأسفل N↓

ثانيا: العرض البياني:

الرسوم البيانية تعطي انطباعا أفضل وتبرز بنظرة سريعة الخصائص الرئيسية للبيانات وتلقي الضوء بصورة واضحة على شكل توزيع البيانات بعد تنظيمها لأنه قد نجد صعوبة في بعض الأحيان في قراءة الجداول التكرارية. لهذا نتناول أهم طرق تمثيل البيانات على أساس أنها الأكثر شيوعا. والأشكال الآتية تعرض أشهر هذه التمثيلات البيانية وهي: أعمدة، قطاعات دائرية، مدرجات ومضلعات تكرارية، منحنيات تكرارية.

ويختلف استعمال هذه الأشكال حسب طبيعة المتغيّر والتوزيع المرغوب تمثيله.

1–العرض البياني للبيانات النوعية (المتغيّرة النوعية): يمكن عرض البيانات الخاصة بمتغير وصفي في شكل دائرة بيانية أو أعمدة بيانية، يمكن من خلاله وصف ومقارنة مجموعات أو مستويات هذا المتغير.

أ/الدائرة البيانية: يمكن أن نرسم الدائرة ونقسمها إلى قطاعات دائرية تتناسب مساحة كل قطاع مع تكرار الفئة التي تمثلها، فالفئة الأكثر تكرار تقابل القطاع الأكبر مساحة والفئة الأقل تكرارا تقابل القطاع الأصغر مساحة، طريقة الدائرة هي عبارة عن تقسيم الكل إلى أجزاء وكل جزء يمثل بقطاع دائري بحيث أن زاوية رأس كل قطاع دائري تعطي حسب القاعدة التالية:

$$\text{قياس الزاوية} = 360° * \frac{\text{قيمة الجزء الواحد}}{\text{مجموع قيم الأجزاء}}$$

__مثال:__ الجدول التكراري التالي يبين توزيع عينة حجمها 500 شخص حسب حالته المدنية:

الحالة المدنية	أعزب	متزوّج	مطلق	أرمل	**المجموع**
عدد الأشخاص	170	50	130	150	**500**

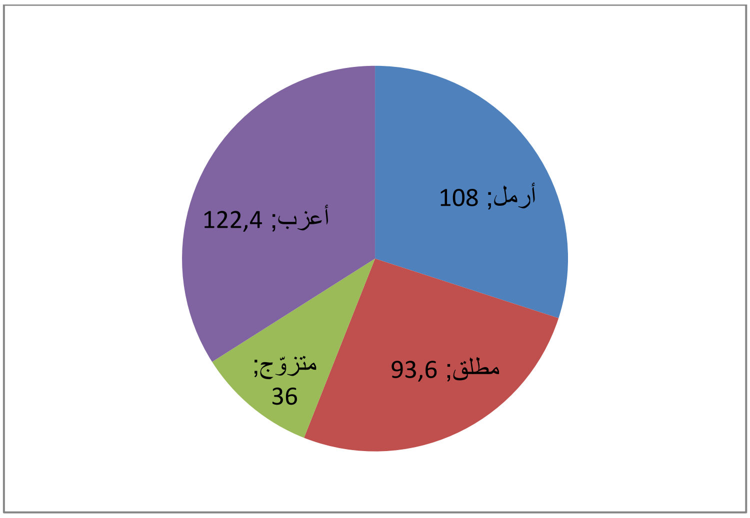
__المطلوب:__ مثل البيانات أعلاه في شكل دائرة بيانية

__الحل:__

الحالة المدنية	**عدد الأسر**	**قيس الزاوية**
أرمل	150	°108
مطلق	130	°93.6
متزوّج	50	°36
أعزب	170	°122.4
المجموع	**500**	**°360**

رسم الدائرة: يتم رسم الدائرة وتقسيمها إلى أربع أجزاء لكل حالة جزء يتناسب مع مقدار الزاوية المخصصة له، كما هو مبين في الشكل التالي:

شكل رقم (02): القطاعات الدائرية لعينة حجمها 500 شخص موزعة حسب الحالة المدنية.



ب/الأعمدة البيانية (التكرارية): هو الرسم البياني الملائم لتوزيع متغيّر كمي منقطع أو نوعي، هو عبارة عن عدد من الأعمدة بحيث تمثل الفئات أفقيا وتمثل التكرارات رأسيا، يرسم عمود واحد لكل فئة بحيث يكون ارتفاع كل عمود يمثل التكرار أو التكرار النسبي أو التكرار المئوي المرتبط بكل فئة في الجدول التكراري.

مع ملاحظة ان يكون عرض جميع الأعمدة متساوي كما بالإمكان استعمال أشكال تمثيلية بدلا من الأعمدة أو ألوان مختلفة للمتغيّر.

مثال: تمثل البيانات التالية تقدير 40 طالبا في الإمتحان النهائي لمقياس المحاسبة من المدرستين "أ" و"ب".

الجدول رقم (08): جدول توزيع التكراري لتقدير الطلبة في كل من المدرستين" أ" و"ب"

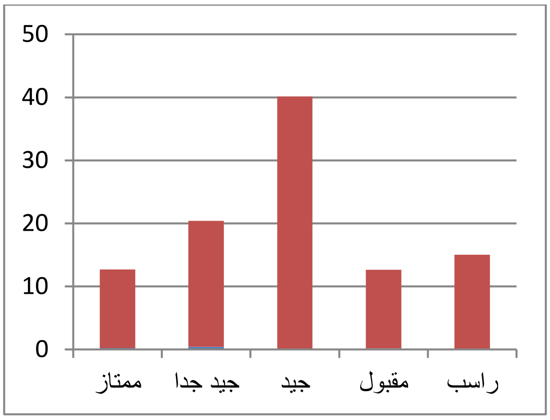
المدرسة أ			
التقدير	التكرار	التكرار النسبي	التكرار المئوية
ممتاز	5	0.125	12.5
جيد جدا	8	0.2	20
جيد	16	0.4	40
مقبول	5	0.125	12.5
راسب	6	0.15	15
المجموع	**40**	**1**	**100**

المدرسة ب			
التقدير	التكرار	التكرار النسبي	التكرار المئوية
ممتاز	3	0.1	10
جيد جدا	6	0.2	20
جيد	10	0.33	33
مقبول	6	0.2	20
راسب	5	0.17	17
المجموع	**30**	**1**	**100**

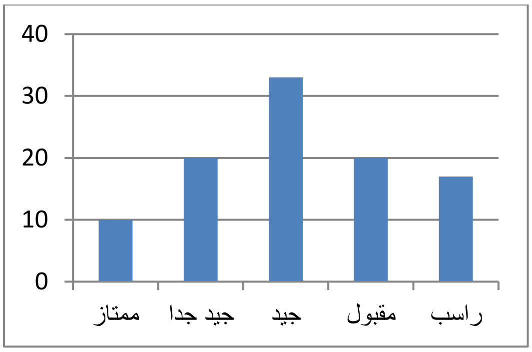
الحل: رسم الأعمدة

شكل رقم (03): الأعمدة البيانية لتقدير الطلبة في امتحان المحاسبة

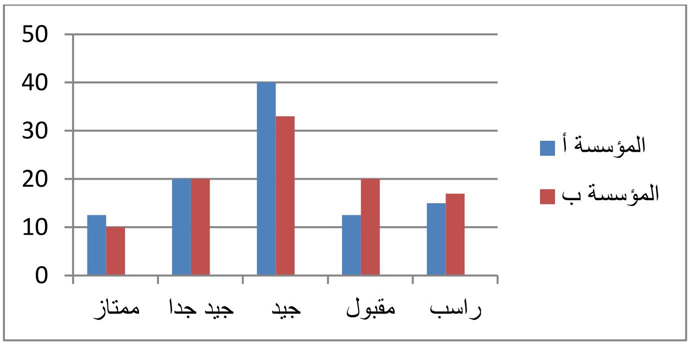
نتيجة المدرسة "أ"



نتيجة المدرسة "ب"



ويمكن وضع بيانات الجدولين في نفس الرسم كمايلي:



نتيجة المدرسة "أ"

نتيجة المدرسة "ب"

2-العرض البياني للبيانات الكمية:

يمكن تمثيل الجداول التكرارية البسيطة للبيانات الكمية من خلال الأشكال التالية:

أ/ العرض البياني للبيانات الكمية المتقطعة (المنفصلة): نكتفي في هذ الحالة بنوعين من العروض البيانية:

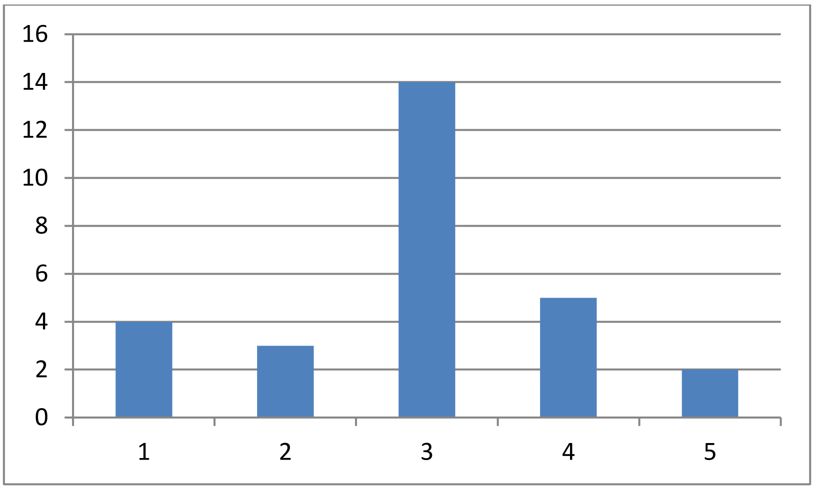
أ-1/الأعمدة التكرارية: نرسم معلم متعامد نضع في محور الفواصل (المحور الأفقي) القيم Xi بينما نضع في محجور التراتيب (المحور العمودي) التكرارات المطلقة ni أو النسبية fi، أي هو عبارة عن أعمدة بسيطة تتناسب أطوالها مع التكرار المقابل لقيمة معينة للمتغيّر المدروس، وتسمى الأعمدة البسيطة.

مثال: الجدول التالي يبين توزيع مساكن أحد الأحياء حسب عدد الغرف المملوكة لديهم.

عدد الغرف X_i	1	2	3	4	5	المجموع
عدد المساكن n_i	4	3	14	5	2	28

الحل:

الشكل رقم (04): الأعمدة البيانية لعدد الغرف



نلاحظ من بين الأعمدة التي تشكل العرض البياني السابق، أن العمود الذي يقابل القيمة 3 هو أطولهم وتكراره يساوي 14، معنى ذلك أن أغلبية المساكن لديها ثلاثة غرف مملوكة.

أ-2/المنحنى المتجمع (المتراكم): يسمى بالمنحنى السلمي (Laddercurve)

يستعمل هذا النوع من الرسوم البيانية لعرض التكرار المتجمع المطلق أو النسبي حين يتعلق الأمر بمتغير كمي منفصل(متقطع) مرتب في جدول تكراري لقيم فردية، وهو عبارة عن منحنى في شكل سلم أين تعبر كل خطوة منه على التكرار التراكمي المقابل لقيمة المتغير.

مثال: بالاعتماد على نفس معطيات المثال السابق

عدد الغرف X_i	5	4	3	2	1	المجموع
عدد المساكن n_i	2	5	14	3	4	28
التكرار المتجمع الصاعد N↑	2	7	21	24	28	
التكرار المتجمع النازل N↓	28	26	21	7	4	

الحل:

رسم

ب- العرض البياني للبيانات الكمية المستمرة (المتصلة):

ب-1/المدرج التكراري Histogram: المدرج التكراري هو الرسم البياني المكرس للتوزيع التكراري الخاص بمتغيّر كمي مستمر وهو عبارة عن رسم على محورين متعمدين أحدهما أفقي يمثل الفئات والثاني رأسي يمثل التكرار، ويتألف من عدد من المستطيلات المتلاصقة قواعدها طول فئات التوزيع وارتفاعاتها تتناسب مع التكرارات المناظرة لها.

مثال: فيما يلي التوزيع التكراري لـ 100 عامل حس الأجر اليومي:

الأجر	]620-600]	]640-620]	]660-640]	]680-660]	]700-680]	]720-700]	المجموع
عدد العمال	10	15	20	25	20	10	100

1- أرسم المدرج التكراري

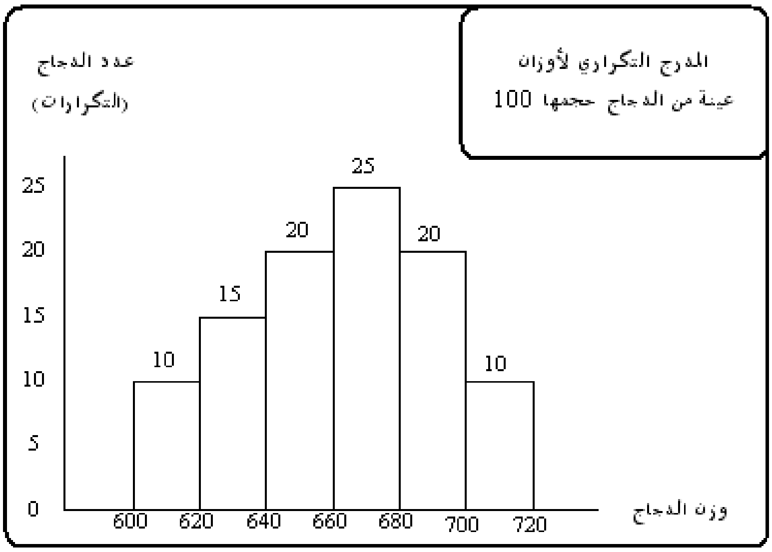
2- ارسم المدرج التكراري النسبي، ثم علق على الرسم

الحل:

1- رسم المدرج التكراري يكون بإتباع المراحل التالية:

- رسم محوران متعامدان، المحور العمودي يمثل **التكرارات**، المحور الأفقي يمثل **الأجر اليومي**
- كل فئة تمثل بعمود ارتفاعه هو تكرار الفئة، وطول قاعدته هو طول الفئة
- كل عمود يبدأ من حيث انتهى به عمود الفئة السابقة.

الشكل رقم (05) المدرج التكراري للأجور اليومية للعمال



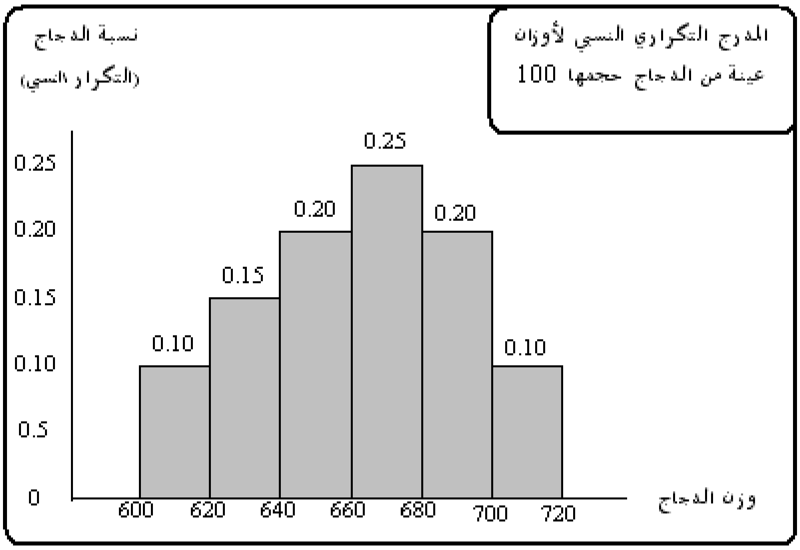
رسم المدرج التكراري النسبي: لرسم المدرج التكراري النسبي يتم إجراء الآتي:

- **حساب التكرارات النسبية**

الأجر	]620-600]	]640-620]	]660-640]	]680-660]	]700-680]	]720-700]	المجموع
التكرار	10	15	20	25	20	10	100
التكرار النسبي	0.10	0.15	0.20	0.25	0.20	0.10	1

باتباع نفس الخطوات السابقة عند رسم المدرج التكراري، يتم رسم المدرج التكراري النسبي بإحلال التكرارات النسبية محل التكرارات المطلقة على المحور العمودي، كما هو مبين في الشكل التالي:

الشكل رقم (06): المدرج التكراري النسبي للأجور اليومية لـ 100 عامل



ومن الشكل أعلاه نلاحظ أن 25% من العمال تتراوح أجورهم اليومية ما بين 660 و 680 وحدة نقدية وهي أكبر نسبة.

قواعد خاصة بالمدرج التكراري:

- المساحة أسفل المدرج التكراري تساوي مجموع التكرارات (n)؛
- المساحة أسفل المدرج التكراري النسبي، فهي تعبر عن مجموع التكرارات النسبية، وهي تساوي الواحد الصحيح؛
- يمكن أن نميّز بين حالتين عند وضع المدرج التكراري:

-الحالة الأولى عندما تكون الفئات متساوية (كما هو موضح في المثال السابق)، نلاحظ في هذه الحالة أن قاعدة المقارنة ثابتة ومتساوية ومن ثمّ لا نجري أي تعديل على جدول المعطيات.

-الحالة الثانية: عندما تكون الفئات غير متساوية في الطول نقوم بتعديل التكرارات، لأن قاعدة المقارنة غير ثابتة، حتى يكون هناك تناسب بين طول الفئة والتكرار المقابل لها، أي إيجاد عدد الوحدات الإحصائية الموزعة على وحدة قياس معيّنة، وذلك بحساب التكرار المعدّل وهو عبار عن النسبة بين التكرار البسيط وطول الفئة المقابلة.

ب-2/المضلع التكراري: هو تمثيل بياني أيضا للجدول التكراري البسيط، حيث يمثل التكرارات على المحور العمودي، ومراكز الفئات على المحور الأفقي، ثم التوصيل بين الإحداثيات بخطوط منكسرة، وبعد ذلك يتم توصيل طرفي المضلع بالمحور الأفقي، ومركز الفئة هي القيمة التي تقع في منتصف الفئة، وتحسب بتطبيق المعادلة التالية:

$$\text{مركز الفئة} C_i = \frac{\text{الحد الأعلى للفئة} + \text{الحد الأدنى للفئة}}{2}$$

ونظرا لعدم معرفة القيم الفعلية لتكرار كل فئة، يعتبر مركز الفئة هو التقدير المناسب لقيمة كل مفردة من مفردات الفئة.

<u>**مثال:**</u> استخدم بيانات الجدول التكراري في المثال السابق لرسم المضلغ التكراري

<u>الحل:</u> لرسم المضلع التكراري يتبع الخطوات التالية:

- الخطوة الأولى: حساب مراكز الفئات

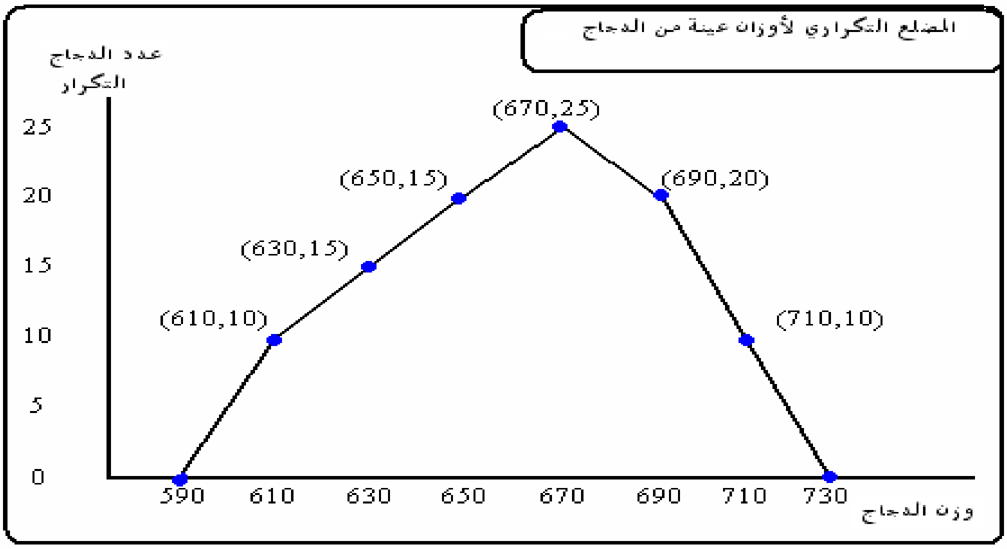
الأجر	]620−600]	]640−620]	]660−640]	]680−660]	]700−680]	]720−700]	المجموع
مركز الفئة C_i	610	630	650	670	690	710	
عدد العمال	10	15	20	25	20	10	100
التكرار النسبي	0.10	0.15	0.20	0.25	0.20	0.10	1

- الخطوة الثانية: تحديد إحداثيات الرسم:

مركز الفئة C_i	590	610	630	650	670	690	710	730
التكرار	0	10	15	20	25	20	10	0

- الخطوة الثالثة: التمثيل البياني لنقط الإحداثيات وتوصيلها بخطوط مستقيمة،

شكل رقم (07): المضلع التكراري للأجر اليومي لـ 100 عامل



قاعدة: الخط المنكسر هو المضلع التكراري، حيث أن المساحة التي تقع تحت المضلع التكراري تساوي المساحة التي تقع تحت المدرج التكراري، وحتى نحافظ على هذه القاعدة، نفرض ان لهذا التوزيع فئتان إحداهما في بدايته والأخرى في نهايته، تكرار كل منهما يساوي الصفر، بحيث ننطلق من مركز الفئة الإفتراضية الأولى وننتهي عند مركز الفئة الإفتراضية الأخيرة.

ب-3/المنحنى التكراري: باتباع نفس الخطوات السابقة في رسم المضلع يمكن رسم المنحنى التكراري، ولكن يتم تمهيد الخطوط المنكسرة في شكل منحنى بحيث يمر بأكثر عدد من النقاط.

المنحنى التكراري هو خط منحنى ممهد للمضلع التكراري، يعطي لنا فكرة عن شكل التوزيع هل هو قريب إلى التوزيع الطبيعي (متناظر أوغير متناظر).

ب-4/التوزيعات التكرارية المتجمعة: (المنحنى المتجمع الصاعد والنازل): يتم رسم المنحنى المتجمع الصاعد والنازل في معلم متعامد ومتجانس والتسمية الحقيقية هو المضلع المتجمع الصاعد والمضلع المتجمع النازل، فنسجل على المحور الأفقي " الفئات" بمعنى حدود الفئات (الحد الأدنى والأعلى) أما في المحور العمودي نسجل قيّم التكرار المتجمع الصاعد والتكرار المتجمع النازل، والفائدة منهما تكمن من حساب أحد مقاييس النزعة المركزية وهو الوسيط كما سيتضح لاحقا. فبخصوص المنحنى المتجمع الصاعد نحدد ثنائيات كل من الحد الأعلى لكل فئة مع التكرار المتجمع الصاعد، أما بخصوص المنحنى النازل فنحدد ثنائيات كل من الحد الأدنى للفئة مع التكرار المتجمع النازل.

__مثال:__ الجدول أدناه يوضح نتائج التوزيع التكراري لقامة (طول) مجموعة من الطلبة بالسنتيمتر

الفئات (طول القامة)	]140-144]	]144-148]	]148-152]	]152-156]
التكرارات n_i	4	18	6	2
التكرار المتجمع الصاعد N↑	4	22	28	30
التكرار المتجمع النازل N↓	30	26	8	2

__المطلوب:__

1- ارسم المنحنى التكراري المتجمع (المتراكم) الصاعد

2- ارسم المنحنى التكراري المتجمع (المتراكم) النازل

الشكل رقم (08): المنحنى المتجمع الصاعد والنازل

ملاحظة: يبيّن كل من المنحنى التجميعي الصاعد والنازل شدة أوضعف تطور الظاهرة المدروسة عند مستوى معيّن من مجال الدراسة

الفصل الثالث: مقاييس النزعة المركزية.

رأينا سابقا كيف يتم عرض البيانات الإحصائية جدوليا وبيانيا من أجل نقل وصف عام وسريع للظاهرة المدروسة ومن أجل وضع ترتيب معيّن وضوروري لهذه المعلومات الإحصائية، غير أن لهذه الطريقة حدود من بينها:

- لا يمكن إستخدامها في الأسلوب الشفهي؛
- لا يمكن إستخدامها في تحليل المعطيات؛
- لا يمكن الإستفادة منها في مجال الإستقراء الإحصائي (التنبؤ وإتخاذ القرارات.

ولهذه الأسباب وضعت مقاييس عددية وصفية يمكن إستخدامها في مجالات عديدة منها التحليل والتنبؤ وإتخاذ القرارا ومن بينها مقاييس النزعة المركزية (الموضع أو المتوسطات)، وهي القيم التي تتركز القيم حولها، ومن هذه المقاييس، الوسط الحسابي، والمنوال، والوسيط، والوسط الهندسي، والوسط التوافقي، والرباعيات، والمئينات، وفيما يلي عرض أهم هذه المقاييس.

أولا: الوسط (المتوسط) الحسابي: يعرف الوسط الحسابي لمجموعة من القيم بأنه مجموع هذه القيمة مقسوما على عددها، كما يمكن تعريفه بأنه القيمة التي لو أعطيت لكل مفردة من مفردات المجموعة فإن مجموع القيم الجديدة يساوي مجموع القيم الأصلية.

يعرف الوسط الحسابي رياضيا بأنه يساوي مجموع قيم البيانات مقسوما على عدد مفردات البيانات، أي:

1-حالة البيانات غير المبوبة: يعرف الوسط الحسابي بشكل عام على أنه مجموع القيم مقسوما على عددها، فإذا كان لدينا n من القيم، ويرمز لها بالرمز: $x_1, x_n....x_2$ يحسب بالمعادلة التالية:

$$\text{الوسط الحسابي} = \frac{\text{مجموع القيم}}{\text{عدد القيم}}$$

$$\overline{X} = \frac{\mathbf{x_{1,} x_{2,} \ldots\ldots\ldots\ldots x_n}}{\mathbf{n}} = \frac{\sum_{i-1}^{n} \mathbf{x_i}}{\mathbf{n}}$$

<u>مثال:</u> تمثل السلسلة التالية مردودية إنتاج الحبوب في الهكتار لمختلف الوحدات الزراعية لولاية ما بالقنطار:

14،13،16،15،13،10،12،11،11،11،10

المطلوب: احسب الوسط الحسابي

<u>الحل:</u> البيانات غير مبوبة فإن:

$$\overline{X} = \frac{\mathbf{10 + 11 + \cdots \ldots \ldots \ldots \ldots . +16}}{\mathbf{11}} = \mathbf{12,36}$$

معناه أن متوسط أو معدل المردودية لمختلف الوحدات الزراعية 12,36 قنطار في الهكتار.

2-حالة البيانات المبوبة:

أ/**حالة المتغير المتقطع:** إذا كان x_1 و x_2'..........x_n قيم ميزة احصائية، وكانت n_1و n_2....n_k تكراراتها على الترتيب: فإنّ الوسط الحسابي لهذه السلسلة الإحصائية يعطى بالعلاقة:

$$\overline{X} = \frac{\mathbf{n_1x_1 + n_2x_2 + \cdots .. + n_kx_k}}{\mathbf{n_1 + n_2 + \cdots \ldots + n_k}}$$

أي:

$$\overline{X} = \frac{\sum_{\mathbf{i=1}}^{\mathbf{k}} \mathbf{n_ix_i}}{\mathbf{N}}$$

K: عدد القيم المختلفة

N: حجم المجتمع

n_i : حجم التكرار المطلق

X_i: القيم

مثال: الجدول التالي يعطينا توزيع 42 طالب حسب عدد الغيابات

عدد الغيابات x_i	التكرار المطلق n_i	$n_i x_i$
0	15	0
2	08	16
3	10	30
4	07	28
5	02	10
المجموع	**42**	**84**

الحل:

$$\overline{X} = \frac{\sum_{i=1}^{k} n_i x_i}{N} = \frac{84}{12} = 02$$

بمعنى أن متوسط (معدل) غيابات كل طالب هو **02**

ب- حالة المتغير المستمر: من المعلوم أن القيم الأصلية، لايمكن معرفتها من جدول التوزيع التكراري، حيث أن هذه القيم موضوعة في شكل فئات، ولذا يتم التعبير عن كل قيمة من القيم التي تقع داخل حدود الفئة بمركز هذه الفئة، ومن ثم يؤخذ في الإعتبار أن مركز الفئة هو القيمة التقديرية لكل مفردة تقع في هذه الفئة.

فإذا كانت K هي عدد الفئات، وكانت $C_K,\ldots c_2,c_1$ هي مراكز هذه الفئات وكانت $n_{k},\ldots n_2,n_1$ تكراراتها على الترتيب، فإن الوسط الحسابي يحسب بالمعادلة التالية:

$$\overline{X} = \frac{\sum_{i=1}^{k} n_i c_i}{\sum_{i=1}^{k} n_i}$$

مثال: لمعرفة ودراسة تطور مداخيل العائلات (المداخيل السنوية) أخذت عيّنة من منطقة ما وبعد جمع البيانات كانت النتائج كما يلي:

الفئات	التكرار المطلق i	مركز الفئات i	$n_i c_i$
]125−120]	10	122,5	1225
]130−125]	20	127,5	2550
]135−130]	38	132,5	5035
]140−135]	25	137,5	3437,5
]145−140]	07	142,5	997,5
المجموع	**100**		**13245**

$$\overline{X} = \frac{13245}{100} = 132,45$$

وعليه متوسط مداخيل العائلات هو 132,45 حدة نقدية.

ويمكن تلخيص خصائص الوسط الحسابي فيما يلي:

–يتأثر بالقيم المتطرفة أو الشاذة؛

–يستعمل في حالة المتغيّرات الكمية القابلة للقياس؛

–لا يمكن أن يكون لأي توزيع تكراري أكثر من وسط حسابي؛

–أساس حساب الوسط الحسابي هو الحساب التجميعي؛

–مجموع إنحرافات قيّم المتغيّر الإحصائي بالنسبة للوسط الحسابي تساوي الصفر؛

–متوسط قيمة ثابتة يساوي تلك القيمة الثابتة.

ثانيا: الوسيط

الوسيط هو المقياس الثاني من مقاييس النزعة المركزية من حيث الأهمية، ويحسب إذا تمّ ترتيب البيانات سب حجمها تصاعديا أو تنازليا، وتظهر الحاجة إليه عندما تكون البيانات تتبع توزيعا غير معتدل أو في الحالات التي توجد فيها قيّم شاذة يراد التخلص من تأثيرها أو عند وجود بيانات على هيئة جداول تكرارية مفتوحة.

أي هو القيمة التي تقع في منتصف المجموعة بعد ترتيب القيم تصاعديا أو تنازليا، أي هو القيمة التي يكون نصف عدد القيم أصغر منها أو يساويها والنصف الآخر أكبر منها أو يساويها، من هذا التعريف للوسيط نجد

أنه يعالج العيوب الثلاثة التي يعاني منها الوسط الحسابي، فالوسيط لا يتأثر بالقيم الشاذة أو المتطرفة، كما أنه يمكن حسابه في حالة الفئات المفتوحة، ويمكن ايجاده بيانيا.

1-البيانات غير المبوبة: يتم حساب الوسيط لهذه البيانات باتباع الخطوات التالية:

- نقوم بترتيب البيانات تصاعديا أو تنازليا
- نقوم بحساب ترتيب الوسيط Cعدد القيم إذا كان زوجيا أو فرديا.

أ- إذا كان عدد القيم N فرديا يكون:

القانون	تعريف الرموز	استخدامه
$c = \frac{n+1}{2}$	**C= رتبة الوسيط** **N= عدد البيانات (الأعداد)**	**إن كانت الأعداد فردية**
$M_e = \frac{M_{e1}+M_{e2}}{2}$ $C = \frac{n}{2}$	**M_{e1}الوسط الأول** **M_{e2}الوسط الثاني** **C= رتبة الوسيط**	**إن كانت الأعداد زوجية**
$c = \frac{n+1}{2}$		

<u>**مثال:**</u> تمثل البيانات التالية أعمار خمسة عشر شخصا: 33-25-37-29-23-38-35-26-45-48-39-19-24-33-34.

<u>**الحل:**</u>

- نرتب الأرقام تصاعديا (مهما تكررت الأرقام)
- حساب الرتبة:

$$c = \frac{n+1}{2} = \frac{15+1}{2} = 8$$

الترتيب التصاعدي للقيّم هو: 19-23-24-25-26-29-33-33-34-35-37-38-39-45-48

إذن قيمة الوسيط هو **33** = M_e

ب/إذا كان عدد القيم N زوجيا يكون: وإذا حذفنا مثلا القيمة 33 من المثال أعلاه تصبح **N** زوجي تساوي14، وعليه يحسب الوسيط بالخطوات التالية:

حساب الرتبة:

$$c = \frac{n}{2} = \frac{14}{2} = 7$$

$$c = \frac{n}{2} + 1 = \frac{14}{2} + 1 = 8$$

نرتب الأرقام تصاعديا 19−23−24−25−26−29−33−34−35−37−38−39−45−48

إذن قيمة الوسيط: $M_{e1}=33,\ M_{e2}=34$

$$M_e = \frac{M_{e1}+M_{e2}}{2} = \frac{33+34}{2} = 33.5$$

$$M_e = 33.5$$

2−البيانات المبوبة: البيانات المبوبة قد تكون غير مستمرة أي مدى فئاتها معدوم، وقد تكون مستمرة أي مدى فئاتها أكبر من الصفر، ويتم ايجاد الوسيط حسب كل حالة كمايلي:

أ/ حالة البيانات المنفصلة (المتقطعة) (طول الفئات معدوم): في هذه الحالة يتم ايجاد الوسيط كما يلي:

- يتم حساب ترتيب الوسيط باستخدام احدى العلاقتين التاليتين:
  - إذا كان مجموع التكرارات فرديا: $C = \frac{\sum n_i + 1}{2}$
  - إذا كان مجموع التكرارات زوجيا: $C = \frac{\sum n_i}{2}$
- نحسب التكرار المتجمع الصاعد(أو النازل) ونبحث عن مكان ترتيب الوسيط بين التكرارات المتجمعة، فتجده بين تكرارين من التكرارات المتجمعة، وتكون قيمة الوسيط هي القيمة المقابلة للتكرار المتجمع اللاحق لترتيب الوسيط، إذا ما كانت C تساوي قيم التكرارات المتجمعة فإن M_e تساوي الفئة المقابلة لها، سواء مجموع التكرارات زوجيا أو فرديا.

__مثال:__ نفس المثال السابق الخاص بتوزيع الطلبة حسب عدد الغيابات

$N\uparrow$	n_i	x_i
15	15	0
23	8	M_2=2
33	10	3
40	7	4
42	2	5
	42	**المجموع**

$$c = \frac{N}{2} = \frac{42}{2} = 21$$

لحساب قيمة الوسيط نقسم المجتمع على إثنين (عدد القيم زوجي)

$$c = \frac{N}{2} = \frac{42}{2} = 21$$

ترتيب الوسيط يوجد بين التكرارين المتجمعين: 15 و23 لذلك فإن الوسيط يساوي القيمة (الفئة) المقابلة لـ 23، وبالتالي يكون:

$$\boldsymbol{M_e = 2}$$

ب/ حالة البيانات المستمرة(المتصلة) (طول الفئات أكبر من الصفر): يتم حساب الوسيط بعدة طرق تعطي نتائج متقاربة في الغالب وهي:

ب-1/الطريقة الأولى (وهي الأكثر استخداما): يتم استخدام المنهجية التالية لحساب الوسيط

- تحديد قيّم التكرار المتجمع الصاعد أو التكرار المتجمع النازل
- نبحث عن ترتيب(رتبة) الوسيط باستخدام العلاقة(سواء كان مجموع التكرارات **فرديا أو زوجيا** تستخدم نفس العلاقة).

$$c = \frac{\sum_{I=1}^{K} NJ}{2}$$

- نبحث عن مكان ترتيب الوسيط بين التكرارات المتجمعة، فنجده بين تكرارين المتجمعة أحدهما سابق له والآخر لاحق له.
- نبحث عن الفئة الوسيطية في حدود الفئات التي تحدد التكرار المتجمع، بحيث يكون الحد الأدنى للفئة الوسيطية هو الحد المقابل للتكرار المتجمع السابق لترتيب الوسيط، وحدها الأعلى هو الحد المقابل للمجتمع اللاحق لترتيب الوسيط.

$$M_E = D + \frac{C - N^+_{I-1}}{N^+_{I+1} - N^+_{I-1}} l$$

قيمة الوسيط	M_e
الحد الأدنى للفئة الوسيطية	**D**
ترتيب (رتبة) الوسيط	**C**
طول الفئة الوسيطية	**L**
التكرار المتجمع السابق لترتيب الوسيط	N^+_{I-1}
التكرار المتجمع اللاحق لترتيب الوسيط	N^+_{I+1}

مثال: في إطار مراقبة جودة المصابيح المصنوعة من طرف شركة ما، أخذت عيّنة 92 مصباح فكانت النتائج كالتالي:

$N\uparrow$	التكرار المطلق n_i	الفئات: مدة الحياة
$40=N^+_{I-1}$	40	]164−160]
$62=N^+_{I+1}$	22	]168−164]
82	20	]172−168]
92	10	]176−172]
	92	**المجموع**

حساب الرتبة:

$$c = \frac{\sum_{I=1}^{K} NJ}{2} = \frac{92}{2} = 46$$

$$M_e = 164 + \frac{46 - 40}{62 - 40} 4 = 165{,}09$$

ب−2/الطريقة الثانية: نفس المراحل المستخدمة في الطريقة الأولى لإيجاد الوسيط

$$M_e = d + \frac{\frac{\sum n_i - N^+_{I-1}}{2}}{n_i} * L$$

M_e	قيمة الوسيط
D	الحد الأدنى للفئة الوسيطية
$C=\frac{\sum n_i}{2}$	ترتيب (رتبة) الوسيط
L	طول الفئة الوسيطية
N_{I-1}^{+}	التكرار المتجمع السابق لترتيب الوسيط
n_i	التكرار المطلق للفئة الوسيطية.

<u>مثال:</u> بالإعتماد على نفس معطيات المثال السابق:

الفئات	التكرار المطلق n_i	$N\uparrow$
]164-160]	40	$40=N_{I-1}^{+}$
]168-164]	22	$62=N_{I+1}^{+}$
]172-168]	20	82
]176-172]	10	92
المجموع	**92**	

حساب الرتبة:

$$c=\frac{\sum_{I=1}^{K} NJ}{2}=\frac{92}{2}=46$$

$$M_e=164+\frac{46-40}{62-40}4=165{,}09$$

ب-3/الطريقة الثالثة: الطريقة البيانية: إذ يمكن ايجاد الوسيط بيانيا، وذلك برسم، أما المنحنى التكراري المتجمع الصاعد أو النازل أو من خلال تقاطع كل من المنحنى التكراري المتجمع الصاعد والنازل.

ويمكن تلخيص خصائص الوسيط في النقاط التالية:

-يتغيّر الوسيط كلّما غيّرنا أطوال الفئات بالنسبة لنفس التوزيع التكراري، إذا يتميّز الوسيط بعدم الثبات؛

-لا يتأثر الوسيط بالقيّم المتطرفة أو الشاذة؛

-يقسم المدرج التكراري إلى مساحتين متساويتين.

ثالثا: المنوال.

يعتبر المنوال المقياس الثالث من حيث الأهمية في مقاييس النزعة المركزية، وهي قيمة المتغيّر الإحصائي الأكثر إنتشارا أو تكرارا لمجموعة من البيانات، ويمكن أن نجد أكثر من منوال واحد في نفس السلسلة للقيم، فنقول سلسلة ذات منوالين إذا توفر منوالان لسلسة واحدة أو متعددة المنوال في حالة وجود عدة منوالات كما يمكن أن لا نجد منوالا لسلسلة القيم. ويتم حسابه كما يلي:

1- البيانات غير المبوبة: يمثل المنوال في هذه الحالة القيمة الأكثر تكرارا

مثال: أحسب المنوال للسلسلة التالية والتي تمثل الأجور الشهرية التي يتقاضاها عمال مؤسسة خاصة:

14000−12000−10000−11000−9000−8000−9000−10000−9000−8000−6000

إذا قيمة المنوال هي: $\mathbf{M_0=9000}$

2-البيانات المبوبة:

أ/**حالة البيانات المنفصلة (المتقطعة) (طول الفئات معدوم):** في هذه الحالة يكون المنوال هو قيمة المتغير ذات التكرار المطلق الأكبر.

مثال: ليكن توزيع علامات الطلبة في مادة الإحصاء كالاتي:

النقاط x_i	عدد الطلبة n_i
05	04
06	08
08	09
09	18
10	10
12	26
13	16
14	11
المجموع	**102**

المطلوب: حساب المنوال

__الحل__: المنوال هو العلامة الأكثر تكرارا من بين علامات الطلبة، إذا قيمة المنوال هي:

$$\boldsymbol{M_0 = 12}$$

ب-حالة البيانات المستمرة (المتصلة) (طول الفئات أكبر من الصفر): تسمى هذه الطريقة بطريقة الرافعة، وفيها يتم إيجاد المنوال باستخدام المعادلة التالية:

$$M_0 = d + \frac{n_{i+1}}{n_{i+1} +} L$$

M_0	قيمة المنوال
D	الحد الأدنى للفئة المنوالية
L	طول الفئة المنوالية
$\boldsymbol{N^{+}_{I+1}}$	التكرار اللاحق لتكرار الفئة المنوالية
$\boldsymbol{n_{i-1}}$	التكرار السابق لتكرار الفئة المنوالية

__مثال:__ لدينا جدول التالي يلخص توزيع مجموعة من اللاعبين فئةالأصاغر لكرة السلة حسب طول قامتهم بالسنتيمتر

الفئات	]144-140]	]148-144]	]152-148]	]156-152]
التكرار المطلق $\boldsymbol{n_i}$	4	18	6	2

نلاحظ أن أغلبية اللاعبين طول قامتهم تنتمي إلى الفئة [144-148[تسمى هذه الفئة: **فئة منوالية.**

وعليه فإن قيمة المنوال هي:

$$M_0 = 144 + \frac{6}{6+4} .4 = 146.4$$

أو من خلال:

$$M_0 = d + \frac{\Delta_{i-1}}{\Delta_{i+1} + \Delta_{i-1}} .L$$

M_0	قيمة المنوال
D	الحد الأدنى للفئة المنوالية
L	طول الفئة المنوالية
$\Delta_{\boldsymbol{i+1}}$	الفرق بين تكرار الفئة المنوالية وتكرار الفئة اللاحقة لها
$\Delta_{\boldsymbol{i-1}}$	الفرق بين تكرار الفئة المنوالية وتكرار الفئة السابقة لها

<u>مثال:</u> بالإعتماد على نفس معطيات المثال السابق:

الفئات	]144−140]	]148−144]	]152−148]	]156−152]
التكرار المطلقn_i	4	18	6	2

نلاحظ أن أغلبية اللاعبين طول قامتهم تنتمي إلى الفئة[144−148] تسمى هذه الفئة: **فئة منوالية.**

وعليه فإن قيمة المنوال هي:

$$M_0 = 144 + \frac{14}{14+12}4 = 146.15$$

كيفية إيجاد منوال هذه الفئة من العرض البياني:

<u>ملاحظات:</u>

1−العلاقة بين الوسط الحسابي، الوسيط والمنوال: يقع الوسيط في كل الحالات بين الوسط الحسابي والمنوال، وذلك حسب الحلالات التالية:

- تكون قيّم المقاييس الثلاثة متساوية في هذه الحالة يكون التوزيع التكراري المدروس متماثل أو متناظر؛
- عندما يكون التوزيع التكراري غير متناظر من اليمين تكون قيمة الوسيط من قيمة المنوال وأقل من قيمة الوسط الحسابي؛

- وعندما يكون غير متناظر من اليسار تصبح قيمة الوسيط أكبر من الوسط الحسابي وأقل من قيمة المنوال.

2–نربط بين الوسط الحسابي $\bar{x}$ والوسيط M_e والمنوال M_0 بالعلاقة التالية:

$$\boldsymbol{\overline{X} - M_0 = 3(\overline{X} - M_e}$$

رابعا: الوسط الهندسي، الوسط التوافقي والوسط الربيعي:

الوسط الهندسي يستخدم في حساب متوسط النسب (مثل الأرقام القياسية) والظواهر التي تستلزم حساب متوسط قيّم متزايدة أو متناقصة ومعدلات النمو.

الوسط التوافقي يستخدم لإيجاد متوسطات الأسعار إذا أعطيت بدلالة وحدة النقود، كذلك في حالة إيجاد متوسط السرعة التي تعطى في العادة بدلالة وحدة الزمن. ويعرف الوسط التوافقي لظاهرة ما بأنه مقلوب الوسط الحسابي لمقلوب هذه القيّم.

الوسط الربيعي (التربيعي) يمثل جذر متوسط مربعات قيّم الظاهرة، ويستخدم هذا النوع من المقاييس في التطبيقات الطبيعية. والوسط التربيعي لرقمين موجبين غير متساويين أكبر من وسطها الهندسي، ويلاحظ أنه أكبر من مربع الوسط الحسابي.

	البيانات غير المبوبة	البيانات المبوبة
الوسط الهندسي	$=\sqrt[n]{x_1x_2x_3\ldots x_k}\,G = \left[\prod_{i=1}^{k} x_i\right]$ $G = 10\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{k} log x_i$	$G = 10\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{k} log x_i$
الوسط الربيعي	$Q = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{k} X_i^2}{N}}$	$Q = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{k} n_i X_i^2}{\sum_{i=1}^{k} n_i}}$
الوسط التوافقي	$H = \frac{N}{\sum_{i=1}^{k}\left[\frac{1}{x_i}\right]}$	$H = \frac{\sum_{i=1}^{k} n_i}{\sum_{i=1}^{k}\left[\frac{1}{x_i}\right] n_i}$

مثال: لدينا القيم التالية : 14، 10، 8، 15، 12.

المطلوب: حساب كل من: الوسط الهندسي، الوسط الربيعي والوسط التوافقي :

الحل: نلخص الحل لحساب المتوسطات المطلوبة في الجدول التالي:

	البيانات غير المبوبة	التطبيق العددي
الوسط الهندسي	$G = \left[\prod_{i=1}^{k} x_i\right] = \sqrt[n]{x_1 x_2 x_3 \ldots x_k}$ $G = 10\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{k} log x_i$	$G = \left[\prod_{i=1}^{k} x_i\right] = \sqrt[5]{(8)(10)(12)(14)(15}$ $G = 11.50$
الوسط الربيعي	$Q = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{k} X_i^2}{N}}$	$Q = \sqrt{\frac{8^2 + 10^2 + 12^2 + 14^2 + 15^2}{5}}$ $= 12.10$
الوسط التوافقي	$H = \frac{N}{\sum_{i=1}^{k}\left[\frac{1}{x_i}\right]}$	$H = \frac{5}{\frac{1}{8}+\frac{1}{10}+\frac{1}{12}+\frac{1}{14}+\frac{1}{15}} = 11.21$

مثال: إليك البيانات التالية التي تلخص عدد الأطفال حسب عدد الأسر في أحد العمارات السكنية:

المطلوب: حساب كل من الوسط الهندسي، الربيعي والتوافقي للبيانات المبوبة التالية:

عدد الأطفال x_i	عدد الأسر n_i
1	7
2	5
5	8
المجموع	**20**

الحل:

	التطبيق العددي	البيانات المبوبة
الوسط الهندسي	$G = \sqrt[20]{1^7 2^5 5^8}$ $G = 2.26$	$G = \left[\prod_{i=1}^{k} x_i\right] = \sqrt[n]{X_1^{n1} X_2^{n2} X_3^{n3}}$
الوسط الربيعي	$Q = \sqrt{\frac{1^2 7 + 2^5 5 + 5^2 8}{20}}$ $= 3.37$	$Q = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{k} n_i X_i^2}{\sum_{i=1}^{k} n_i}}$
الوسط التوافقي	$H = \frac{20}{\frac{7}{1}+\frac{5}{2}+\frac{8}{5}} = 1.80$	$H = \frac{\sum_{i=1}^{k} n_i}{\sum_{i=1}^{k}\left[\frac{1}{x_i}\right] n_i}$

خامسا: الربيعات، العشيرات والمؤينات

تعني مقاييس النزعة المركزية عملية اختيار قيمة معيّنة لتمثيل مجموعة من القيّم والتعبير عنها لتعطي فكرة عامة عن مجموعة القيّم التي تنتمي إليها، أما فكرة الربيعات والعشيرات والمؤينات فهي تعتمد أساسا على فكرة الوسيط، فالوسيط كما عرفناه سابقا هو القيمة التي تقسم المجموعة إلى قسمين متساويين، وعندما نقسم القيّم إلى أربعة أجزاء متساوية نحصل على الربيعات، وإذا قمنا بتقسيمها إلى عشرة نحصل على العشيرات وإذا قمنا بتقسيمها إلى مئة جزء متساوي نحصل على المؤينات.

1–الربيعات: هي عبارة عن ثلاثة قيّم، تقسم التوزيع إلى أربعة أقسام متساوية وهي: الربيع الأول ويمثل 25%، الربيع الثاني وهو الوسيط ويمثل 50%، أما الربيع الثالث فيمثل 75% من المجتمع الإحصائي، ونرمز للربيعات بـ Qi حيث i=1,2,3.

–الربيع الأول:(الأدنى)

–حالة البيانات غير المبوبة: نقوم بترتيب القيم تصاعديا، ثم نقوم بحساب رتبة الربيع الأول

$$C_1 = N\frac{1}{4}$$

__مثال:__ إليك البيانات بعدما تم ترتيبها تصاعديا: 2، 4، 5، 8، 10، 13، 15، نقوم بحساب رتبة الربيع الأول والربيع الثاني والربيع الثالث.

$$C_1 = 7\frac{1}{4} = 1{,}75 \cong 2$$

وعليه: $Q_1 = 7$

–الربيع الثاني:

$$C_2 = N\frac{2}{4} = 7\frac{2}{4} = 3{,}5 \cong 4$$

$$Q_2 = 8$$

– الربيع الثالث (الأعلى):

$$C_3 = N\frac{3}{4} = 7\frac{3}{4} = 5{,}25$$

$$Q_2 = 10$$

2-العشيرات: وهي تسعة قيّم تقسم المجتمع الإحصائي إلى عشرة أجزاء متساوية، كل جزء يسمى العشير، ونرمز للعشيرات بالرمز d_i حيث: **i=1,2,3,4,5,6,7,8,9,10**

-العشير الأول:

حالة البيانات غير المبوبة: نقوم بترتيب القيم تصاعديا، ثم نقوم بحساب رتبة العشير الأول

$$C_1 = N\frac{1}{10}$$

مثال: إليك البيانات بعدما تم ترتيبها تصاعديا: 2، 4، 5، 8، 10، 13، 15

$$C_1 = 7\frac{1}{10} = 0,7 \cong 1$$

وعليه

$$d_1 = 2$$

بنفس الطريقة يمكننا الحصول مثلا على العشير السادس، والعشير التاسع

-العشير السادس:

$$C_6 = N\frac{6}{10} = 7\frac{6}{10} = 4,2$$

وعليه

$$d_6 = 8$$

- العشير التاسع:

$$C_9 = N\frac{9}{10} = 7\frac{9}{10} = 6,3$$

وعليه

$$d_9 = 13$$

3-المئوينات: يمكننا تقسيم أي مجموعة من البيانات إلى 100 قسم متساوية بعد ترتيبها تصاعديا، يفصل بين كل قسم وقسم ما يسمى بالمؤين ونرمز للمؤينات بـ c_i حيث:

i=1,2,3,4,5,6,7,8,9,10……100

-المؤين الخامس والأربعون:

-حالة البيانات غير المبوبة: نقوم بترتيب القيم تصاعديا، ثم نقوم بحساب رتبة المؤين الخامس والأربعون:

$$C_{45} = N\frac{45}{100}$$

مثال: إليك البيانات بعدما تم ترتيبها تصاعديا: 2، 4، 5، 8، 10، 13، 15

$$C_{45} = 7\frac{45}{100} = 3{,}15$$

وعليه

$$C_{45} = 5$$

بنفس الطريقة يمكننا الحصول مثلا على كل من المؤين الثمانون، والمؤين التاسع والتسعون

-المؤين الثمانون:

$$C_{45} = N\frac{80}{100} = 7\frac{80}{100} = 5{,}6 \approx 6$$

وعليه

$$C_{80} = 13$$

-المؤين التاسع والتسعون:

$$C_{99} = N\frac{99}{100} = 7\frac{99}{100} = 6{,}93 \approx 7$$

وعليه

$$C_{99} = 15$$

-حالة البيانات المبوبة: في هذه الحالة يتم استبدال N بمجموع التكرارات $\sum_{i=1}^{k} n_i$ بمعنى أنه نستعمل نفس الطريقة لإيجاد الوسيط في حالة البيانات المبوبة، غير أن الذي يتغيّر هو الرتبة وما يترتب عنها.

نحسب الرتبة:

$$\boldsymbol{C_i = \sum_{i=1}^{k} n_i \frac{i}{k}}$$

K في الربيعات تأخذ القيم من 1،......................4.

K في العشيرات تأخذ القيم من 1، 10

K في المؤينات تأخذ القيم من 1،....................100

ثم نبحث عن الرتبة في التكرار المتجمع الصاعد ونستخرج القيمة المقابلة لها.

<u>مثال في حالة المتغيّرة المتقطعة:</u> <u>إليك</u> نتائج دراسة استطلاعية حول عدد منتجات مؤسسة صناعية.

$\boldsymbol{x_i}$	$\boldsymbol{n_i}$	$\boldsymbol{N\uparrow}$
0	71	71
1	146	217
2	269	486
3	414	900
4	414	1314
5	233	1547
6	145	1692
7	73	1765
8	35	1800
المجموع	**1800**	

<u>-الربيع الأول:</u>

$$C_1 = 1\frac{1800}{4} = 450$$

بالعودة إلى التكرار المتجمع الصاعد نحدد الرتبة وعليه يمكننا الحصول على قيمة الربيع الأول $2 = {}_1$

<u>-الربيع الثاني:</u>

$$C_2 = \sum_{i=1}^{k} n_i \frac{2}{4} = 1800\frac{2}{4} = 900$$

$$Q_2 = 3$$

<u>-الربيع الثالث:</u>

$$C_3 = \sum_{i=1}^{k} n_i \frac{3}{4} = 1800\frac{3}{4} = 1350$$

$$Q_3 = 5$$

-العشير السادس:

$$C_6 = \sum_{i=1}^{k} n_i \frac{6}{10} = 1800 \frac{6}{10} = 1080$$

بالعودة إلى التكرار المتجمع الصاعد نحدد الرتبة وعليه يمكننا الحصول على قيمة العشير السادس4 $d_6 =$

-العشير التاسع:

$$C_9 = \sum_{i=1}^{k} n_i \frac{9}{10} = 1800 \frac{9}{10} = 1620$$

$$d_9 = 6$$

-المؤين الخامس والعشرين:

$$C_{25} = \sum_{i=1}^{k} n_i \frac{25}{100} = 1800 \frac{25}{100} = 450$$

بالعودة إلى التكرار المتجمع الصاعد نحدد الرتبة وعليه يمكننا الحصول على قيمة المؤين الخامس والعشرون

$$C_{25} = 2$$

-المؤين الخامس والثمانون:

$$C_{85} = \sum_{i=1}^{k} n_i \frac{85}{100} = 1800 \frac{85}{100} = 1530$$

$$C_{85} = 5$$

حالة البيانات المستمرة: تجد الإشارة في هذا الحالة يتم حساب الربيعيات أو العشيرات أو المؤينات تتم بنفس طريقة إيجاد الوسيط في حالة المتغيّرة الكمية المتصلة ومنه يتم حساب:

أولا الرتبة:

$$\boldsymbol{C_i = \sum_{i=1}^{k} n_i \frac{i}{k}}$$

K في الربيعات تأخذ القيم من 1،......................4.

K في العشيرات تأخذ القيم من 1، 10

K في المؤينات تأخذ القيم من 1،....................100

ثم نبحث عن الرتبة في التكرار المتجمع الصاعد ونستخرج القيمة المقابلة لها، ثم نحسب هذه المقاييس بالصيغة التالية:

$$B = d + \frac{\sum_{i=1}^{k} n_i \frac{i - N_{i-1}^{+}}{k}}{n_i} * L$$

القيمة المراد حسابها (الربيعيات، العشيرات، المؤينات)	B
الحد الأدنى للفئة المعينة	D
الرتبة المراد ايجادها	$\sum_{i=1}^{k} n_i \frac{i}{k}$
طول هذه الفئة	L
التكرار المتجمع السابق لترتيب القيمة$\frac{i}{k}\sum_{i=1}^{k} n_i$	N_{i-1}^{+}
التكرار المطلق للفئة المعينة	n_i

<u>مثال</u>: الجدول التكراري الآتي يبيّن العمر الذي أصيب فيه **1000** شخص بمرض السكري لأول مرة، فكانت النتائج كما يلي:

$N\uparrow$	n_i	**الفئات**
55	55	]15−10]
170	115	]20−15]
370	200	]25−20]
450	80	]30−25]
600	150	]35−30]
725	125	]40−35]
825	100	]45−40]
1000	175	]50−45]
	1000	

<u>المطلوب</u>: حساب كل من الربيع الأول والثالث، العشير الرابع والتاسع، المؤين ثلاثون وخمسة وستون.

-حساب الربيع الأول:

$$C_i = \sum_{i=1}^{k} n_i \frac{1}{k} = C_1 = 1000\frac{1}{4} = 250$$

$$=22 Q_1 = d + \frac{\sum_{i=1}^{k} n_i \frac{i}{k} - N_{i-1}^{+}}{n_i} * L = 20 + \frac{250-170}{200}$$

-حساب الربيع الثالث:

$$C_i = \sum_{i=1}^{k} n_i \frac{1}{k} = C_3 = 1000\frac{3}{4} = 750$$

$$Q_3 = d + \frac{\sum_{i=1}^{k} n_i \frac{i}{k} - N_{i-1}^{+}}{n_i} * L = 40 + \frac{750-725}{200} x5 = \ 41.25$$

-حساب العشير الرابع:

$$C_i = \sum_{i=1}^{k} n_i \frac{1}{k} = C_4 = 1000\frac{4}{10} = 400$$

$$D_4 = d + \frac{\sum_{i=1}^{k} n_i \frac{i}{k} - N_{i-1}^{+}}{n_i} * L = 25 + \frac{400-370}{80} 5 = \ 26.87$$

-حساب العشير التاسع:

$$C_i = \sum_{i=1}^{k} n_i \frac{1}{k} = C_9 = 1000\frac{9}{10} = 900$$

$$D_9 = d + \frac{\sum_{i=1}^{k} n_i \frac{i}{k} - N_{i-1}^{+}}{n_i} * L = 45 + \frac{900-825}{175} 5 = 47,14$$

-حساب المؤين ثلاثون:

$$C_i = \sum_{i=1}^{k} n_i \frac{1}{k} = C_{30} = 1000\frac{30}{100} = 300$$

$$C_{30} = d + \frac{\sum_{i=1}^{k} n_i \frac{i}{k} - N_{i-1}^{+}}{n_i} * L = 20 + \frac{300 - 170}{200} 5 = 23,12$$

-حساب المؤين الخامس والستون:

$$C_i = \sum_{i=1}^{k} n_i \frac{1}{k} = C_{65} = 1000\frac{65}{100} = 650$$

$$C_{65} = d + \frac{\sum_{i=1}^{k} n_i \frac{i}{k} - N_{i-1}^{+}}{n_i} * L = 35 + \frac{650 - 600}{125} 5 = 37$$

ملاحظة هامة: نعلم ان جميع هذه المتوسطات تمثل 50 بالمئة من المجتمع الإحصائي

$$M_e = Q_2 = D_5 = C_{50}$$

الفصل الرابع: مقاييس التشتت.

تستخدم مقاييس التشتت لتعكس نمط الإختلافات بين المشاهدات، فقد تكون المجموعات مختلفة من البيانات نفس المتوسط أو نفس الوسيط ولكنها تختلف من حيث درجة تركزها أو تباعدها عن المتوسط، لذلك فإن مسألة تجانس البيانات من الأشياء الهامة جدا في الإحصاء فمن الهام جدا أن نعرف أن البيانات التي تم جمعها متجانسة أو غير متجانسة لذلاك مقاييس التشتت تحدد لنا تجانس البيانات من عدمه.

أولا: المدى العام:

هو أبسط مقياس لقياس التشتت، وهو عبارة عن الفرق بين أكبر قيمة وأصغرها في المجموعة، فهو مقياس غير دقيق في معناه ومدلوله. ولحسابه نتبع الخطوات التالية:

- الخطوة الأولى: نرتب البيانات ترتيبا تصاعديا أو تنازليا؛
- الخطوة الثانية: نوجد أعلى قيمة في القيم **Max** واقل قيمة في القيم **Min** فيكون المدى يساوي:

$$w = X_{max} - X_{min}$$

كلما زادت قيمة المدى كلما كانت القيم غير متجانسة والعكس صحيح.

<u>**مثال:**</u> أحسب المدى العام للقيّم التالية: 20–25–35–60–40–75–27–30–55.

<u>**الحل**</u>: أعلى قيمة 75 وأقل قيمة 20 فيكون المدى: **w=75−20=55**

ثانيا: الإنحراف المتوسط:

يمثل أحد مقاييس التشتت الأقل إستخداما، فهو الوسط الحسابي لفروقات القيم عن وسطها الحسابي بالقيمة المطلقة، وتختلف طريقة حسابه باختلاف طريقة تقديم البيانات.

1−حالة بيانات غير مبوبة: إذا كانت لدينا القيم التالية: $X_1, X_2 X_3 \ldots\ldots\ldots\ldots X_k$، فإن انحرافها المتوسط يعطي بالمعادلة التالية:

$$\boldsymbol{e = \frac{\sum_{i=1}^{k} \left| \left(X_i - \overline{X} \right) \right|}{N}}$$

<u>**مثال:**</u> إليك القيم التالية لإيجاد الإنحراف المتوسط: 6، 4، 16، 5، 21، 10

الحل:

$$\overline{X} = \frac{1}{6}(10 + 21 + 5 + 16 + 4 + 6) = \mathbf{10,33}$$

ومنه:

$$e = \frac{1}{6}[|10 - 10,33| + |21 - 10,33| + |5 - 10,33| + |16 - 10.33| + |4 - 10.33| + |6 - 10.33|] = \mathbf{5,44}$$

2–حالة البيانات المبوبة: إذا كانت لدينا البيانات التالية: X_1, X_2X_3............X_k، تكراراتها على التوالي $n_1, n_2, n_3, \ldots \ldots \ldots . n_k$ فإن انحرافها المتوسط يعطي كالتالي:

2–أ/حالة البيانات المتقطعة:

$$\boldsymbol{e = \frac{\sum_{i=1}^{k} \left|\left(X_i - \overline{X}\right)\right|}{N}}$$

مثال: ليكن التوزيع التكراري التالي والمطلوب هو حساب الإنحراف المتوسط.

$n_i\left\|\left(\boldsymbol{X_i - \overline{X}}\right)\right\|$	$\left\|\left(\boldsymbol{X_i - \overline{X}}\right)\right\|$	$\boldsymbol{n_i x_i}$	$\boldsymbol{n_i}$	$\boldsymbol{x_i}$
23,52	5,88	28	04	07
14,40	2,88	50	05	10
0,72	0,12	78	06	13
24,96	3,12	128	08	16
12,24	6,18	38	02	19
75,84		**322**	**25**	**المجموع**

$$\overline{X} = \frac{322}{25} = \mathbf{12,88}$$

$$e = \frac{75{,}84}{25} = \mathbf{3,03}$$

2–ب/ حالة البيانات المستمرة:

تجدر الإشارة إلى أنه في حالة البيانات التي مدى فئاتها أكبر من الصفر، يتم استخدام مراكز الفئات C_i وتكون معادلة الإنحراف المتوسط كمايلي:

$$e = \frac{\sum_{i=1}^{k} n_i \left|\left(C_i - \overline{X}\right)\right|}{\sum_{i=1}^{k} n_i}$$

<u>ملاحظة:</u> الخاصية الإيجابية للإنحراف المتوسط أنه يأخذ جميع القيم، لذلك درجة تأثره بالقيم الشاذة ضعيفة على عكس المدى، ولكن لا يستعمل هذا المقياس بشكل واسع لأنه يأخذ بعين الإعتبار القيمة المطلقة في حسابه، ويحوّل القيّم السالبة إلى موجبة مما يفقد النتيجة مصداقيتها.

ثالثا: التباين والإنحراف المعيارين والعزوم

1–التباين: هو عبارة عن وسط حسابي لمربعات الفروق بين قيّم المتغيّر الإحصائي والوسط الحسابي وهو يختلف حسب طبيعة المتغيّر.

أ/البيانات غير المبوبة: إذا كانت لدينا القيم التاليةX_k............X_1, X_2X_3، فإن تباينها يعطى بالمعادلة التالية:

$$v(x) = \partial^2 = \frac{\sum_{i=1}^{k}\left(X_i - \overline{X}\right)^2}{N}$$

$$v(x) = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{k}(X_i)^2 - \overline{X^2}$$

<u>مثال:</u>إليك البيانات التالية: 6، 4، 16، 5، 21، 10 والمطلوب هو حساب قيمة التباين

$$\overline{X} = \frac{1}{6}(10 + 21 + 5 + 16 + 4 + 6) = 10{,}33$$

ومنه:

$$e = \frac{1}{6}[(10 - 10{,}33)^2 + (21 - 10{,}33)^2 + (5 - 10{,}33)^2 + (16 - 10{,}33)^2 + (4 - 10{,}33)^2 +](6 - 10{,}33)^2 = \mathbf{38{,}89}$$

ب/البيانات المبوبة: إذا كانت لدينا البيانات التالية :X_k............X_1, X_2X_3 ، تكراراتها على التوالي $n_1, n_2, n_3, \dots \dots \dots . n_k$ فإن التباين يعطى كالتالي:

ب-1/ حالة البيانات المتقطعة: حسب هذه الحالة هناك طريقتين لتحديد قيمة التباين:

-الطريقة الأولى:

$$v(x) = \partial^2 = \frac{\sum_{i=1}^{k} n_i\left(X_i - \overline{X}\right)^2}{\sum_{i=1}^{k} n_i}$$

-الطريقة الثانية:

$$v(x) = \frac{1}{\sum_{i=1}^{k} n_j} \sum_{i=1}^{k} n_i (X_i)^2 - \overline{X}^2$$

أي أنه عبارة عن:

$$-\overline{X}^2 \partial^2 = Q^2$$

مثال: إذا كانت علامات 30 طالب في أحد الإختبارات ملخصة في الجدول التالي:

$n_i\left[\left(X_i - \overline{X}\right)\right]^2$	$\left[\left(X_i - \overline{X}\right)\right]^2$	$n_i x_i$	n_i	x_i
40,56	6,76	24	06	04
2,88	0,36	48	08	06
1,60	0,16	70	10	07
23,04	5,76	36	04	09
23,12	11,56	20	02	10
91,20		**198**	**30**	**المجموع**

$$v(x) = \partial^2 = \frac{91,20}{30} = \mathbf{3,04}$$

ب-2/حالة البيانات المستمرة:

تجدر الإشارة إلى أنه في حالة البيانات التي مدى فئاتها أكبر من الصفر، يتم استخدام مراكز الفئات C_i وتكون معادلة التباين كمايلي:

$$v(x) = \partial^2 = \frac{\sum_{i=1}^{k} n_i\left(X_i - \overline{X}\right)^2}{\sum_{i=1}^{k} n_i}$$

2-الإنحراف المعياري:

من أهم مقاييس التشتت الإنحراف المعياري ويرمز له بالرمز سيقما∂ ويعرف بأنه الجذر التربيعي للتباين ∂^2 ويحسب بالطريقة التي تم حساب التباين بها. وكلما كان الإنحراف المعياري أكبر كلما دلّ ذلك على عدم تجانس المشاهدات.

-إيجابيات الانحراف المعياري:

– يعتبر الإنحراف المعياري من أهم مقاييس التشتت لأنه يستعمل في حساب عدة مؤشرات: معامل الإرتباط، تحديد أشكال التوزيعات الإحصائية و الإحتمالية .....ألخ؛

- معرفة طبيعة توزيع أفراد العينة، أي مدى انسجامها؛
- يفيدنا في مقارنة مجموعة بمجموعة أخرى.

أ/البيانات غير المبوبة: إذا كانت لدينا القيم التالية: $X_1, X_2X_3........X_k$ فإن انحرفها المعياري يعطى بالمعادلة التالية:

$$\boldsymbol{\partial} = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{k}\left(X_i - \overline{X}\right)^2}{N}} = \sqrt{\boldsymbol{v(x)}}$$

<u>**مثال**</u>: إليك البيانات التالية: 6، 4، 16، 5، 21، 10 والمطلوب هو حساب قيمة الإنحراف المعياري

$$\overline{X} = \frac{1}{6}(10 + 21 + 5 + 16 + 4 + 6) = 10,33$$

$$e = \mathbf{38,89}$$

$$\boldsymbol{\partial} = \sqrt{= \frac{1}{6}[(10 - 10,33)^2 + (21 - 10,33)^2 + (5 - 10,33)^2 + (16 - 10,33)^2 + (4 - 10,33)^2 +](6 - 10,33)^2} = \mathbf{6.23}$$

ب/ البيانات المبوبة:

إذا كانت لدينا البيانات التالية: $X_1, X_2X_3........X_k$ تكراراتها على التوالي$n_1, n_2, n_3, \dots \dots \dots . n_k$، فإن الإنحراف المعياري كالتالي:

ب-1/ حالة البيانات المتقطعة: في هذه الحالة نعتمد على العلاقة التالية:

$$\partial = \sqrt{v(x)} = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{k}\left(X_i - \overline{X}\right)^2}{\sum_{i=1}^{k} n_i}}$$

__مثال:__ بإستخدام نفس معطيات المثال السابق، المطلوب هو حساب قيمة الإنحراف المعياري

$n_i\left[\left(X_i - \overline{X}\right)\right]^2$	$\left[\left(X_i - \overline{X}\right)\right]^2$	$n_i x_i$	n_i	x_i
40,56	6,76	24	06	04
2,88	0,36	48	08	06
1,60	0,16	70	10	07
23,04	5,76	36	04	09
23,12	11,56	20	02	10
91,20		**198**	**30**	**المجموع**

$$\sqrt{v(x)} = \partial = \sqrt{\frac{91,20}{30}} = 1,74$$

ب-2/حالة البيانات المستمرة: تجدر الإشارة إلى أنه في حالة البيانات التي مدى فئاتها أكبر من الصفر، يتم استخدام مراكز الفئات C_i وتكون معادلة الإنحراف المعياري كمايلي:

$$\sqrt{v(x) = \partial = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{k}\left(C_i \quad - \overline{X}\right)^2}{\sum_{i=1}^{k} n_i}}}$$

__ملاحظات هامة:__

-مقياس التشتت المناسب في حالة البيانات غير المبوبة لسلسلة عديمة القيّم المتطرفة هو الإنحراف المعياري، إن هذا الأخير أحسن مقياس تشتت ويعتبر من أهم مقاييس الإنتشار ويتعامل به في أغلب الحالات؛

-يأخذ الإنحراف المعياري في الحسبان جميع القيم، كما أن قيمته صغيرة وبالتالي يمكن أن تعطي خلاصة واضحة عن مدى تباعد القيم، إذ كلما كانت هذه القيمة صغيرة دل ذلك على أن القيم ليست متباعدة عن

الوسط الحسابي وبالتالي فهي أقل تشتتا ووسطها الحسابي يمثلها تمثيلا جيدا، وعلى العموم يمكننا القول أن القيم غير مشتتة إذا كان الإنحراف المعياري يمثل أقل من 20% من وسطها الحسابي.

3- العزوم:

يمكن أن تعرف العزوم حول أي نقطة أو قيمة، فقد تكون هذه القيمة صفر ويسمى في هذه الحالة بالعزوم البسيطة، أو تكون هذه القيمة أحد مقاييس النزعة المركزيو مثل الوسط الحسابي وتمسى بالعزوم المركزية.

إذا كانت لدينا البيانات التاليةX_1, X_2X_3...........X_k حيث N عدد القيم، فإن علاقة العزوم هي:

$$\overline{X_q} = \frac{X_1^q + X_2^q + X_3^q \dots\dots..+X_k^q}{N}$$

تسمى بالعزوم من الدرجة q، (حيث q عدد طبيعي)، إذا كان q=1 العزم مساويا للوسط الحسابي.

يسمى العزم من الدرجة q بالنسبة للوسط الحسابي، بالعزم المركزي، ويعرف كمايلي μ.

أ/حالة البيانات غير مبوبة:

$$v(x) = \partial^2 = \frac{\sum_{i=1}^{k}\left(X_i - \overline{X}\right)^q}{N}$$

ب/ حالة البيانات المبوبة:

$$v(x) = \partial^2 = \frac{\sum_{i=1}^{k} n_i\left(X_i - \overline{X}\right)^q}{\sum_{i=1}^{k} n_i}$$

ملاحظة هامة:

- إذا كان$q = 1$ يكون: $m_q = 0$
- إذا كان $q = 2$ يكون: $m_q = \partial^2$

رابعا: الانحراف الربيعي ومعامل الإختلاف.

1- الإنحراف الربيعي:

الإنحراف الربيعي ويطلق عليه أيضا نصف المدى الربيعي وهو يستخدم لمعالجة عيب المدى من تصادف وجود قيّم شاذة طرفية للحد الأدنى والأعلى لقيّم الظاهرة، حيث يتم إستبعاد الربيع الأول من بيانات الظاهرة (بعد ترتيبها) وأيضا إستبعاد الربيع الأخير من بيانات الظاهرة، ثم الحصول على نصف المدى بين الربيعيين الأول والأخير وبالتالي: إذا كان لدينا بيانات احصائية ربيعها الأول هو Q_1 وربيعها الثالث Q_3، فإن انحرافها الربيعي يعطى كما يلي:

$$E_Q = \frac{Q_3 - Q_1}{2}$$

- **الإنحراف الربيعي النسبي:** ويطلق عليه المتوسط الربيعي وهو النسبة بين المدى الربيعي والوسيط مضروبا في مئة، نستخدم المتوسط الربيعي كأحسن مقياس لقياس التشتت في حالة الجداول المفتوحة وأيضا لقياس تشتت السلسلة غير المبوبة التي تضم قيّم متطرفة

$$E_{Qp} = \frac{Q_3 - Q_1}{2} x100$$

ملاحظة:

- الإنحراف المتوسط = أربعة أخماس الإنحراف المعياري: $\partial e = \frac{4}{5}$
- والإنحراف الربيعي: ثلثي الإنحراف المعياري أي: $\partial e = \frac{2}{3}$

2- معامل الإختلاف: هو عبارة عن النسبة المئوية للإنحراف المعياري على الوسط الحسابي، ويعطى بالمعادلة التالية:

$$cv = \frac{\partial}{\overline{X}} 100$$

ويعتبر معامل الإختلاف أحد مقاييس التشتت النسبية، ويستخدم للمقارنة بين مجموعتين أو أكثر لمعرفة أيهما أكثر تشتتا وخاصة المجموعات غير المتجانسة. إذا كان معامل الإختلاف أكبر من 50% نقول تشتت قوي، وإذا كان معامل الإختلاف يساوي 50% نقول تشتت متوسط، أما إذا كان معامل الإختلاف أقل من 50% نقول تشتت ضعيف.

الفصل الخامس: مقاييس الشكل.

تمهيد:

إضافة إلى مقاييس الوضع والتشتت، سنتطرق إلى مقاييس تبيّن شكل التوزيع الإحصائي (الإلتواء، التطاول والتفلطح) مقارنة بتوزيع مرجعي (التوزيع المتناظر والطبيعي) نسمي هذه الأدوات الإحصائية بمقاييس الشكل.

وقبل التطرق لهذه المسألة، دعونا نتعرف على أهم الأشكال التي يمكن أن يأخذها أي توزيع تكراري، وهذا بالطبيعة الحال وفقا لطبيعة التوزيع أو بمعنى آخر وفقا لتوزع المفردات حول قيمة مركزية معينة، غالبا ما تكون الوسط الحسابي، فقد يكون التوزيع التكراري.

متماثلا إذا كان: $\overline{X} = M_e - M_0$ أي تكون 50% من القيم على يمين وعلى يسار هذه المقاييس، يعتبر هذا الشكل شكلا معياريا، أي أنه تقاس بالنسبة له كل الأشكال المتبقية.

- موجب الإلتواء إذا كان ممتدا أكثر نحو اليمين ويكون في هذه الحالة $\overline{X} > M_e > M_0$
- سالب الإلتواء إذا كان ممتدا أكثر نحو اليسار ويكون $\overline{X} < M_e < M_0$

الشكل رقم (10): أهم أشكال التوزيع التكراري

تختلف الأشكال البيانية للتوزيعات التكرارية فمنها ما هو متماثل أين تتساوى مقاييس النزعة المركزية (الوسط الحسابي، الوسيط، المنوال) ومنها توزيعات غير متماثلة فهي ملتوية نحو اليمين والأخرى ملتوية نحو اليسار، وهو يسمح بتلخيص ومقارنة التوزيعات إلى جانب مقاييس النزعة المركزية ومقاييس التشتت التي لا تكفي لوحدها بالقيام بهذه العملية (أي عملية المقارنة) فقد يتساوى توزيعان من حيث المتوسط والإنحراف المعياري ولكنهما يختلفان من حيث الإلتواء، وقد يكون التوائهما في اتجاه واحد ولكن بقدرين مختلفين، أو قد تتساوى درجة التوائهما ولكنهما يختلفان في الإشارة، كما يمكن معرفة نوع الإلتواء(موجب أو سالب) ودرجته (بسيط أو حاد) من شكل المنحنى نفسه، إلا أن هذا لا يعطينا قياسا رقميا للإلتواء، لهذا الغرض أصبح من المهم التعرف على أداة احصائية تستخدم لقياس الإلتواء **تسمى معامل الإلتواء**.

أولا: التماثل التام

هو المنحنى إذا قسمناه إلى نصفين انطبق هذان النصفان على بعضهما البعض تماما. أي أنه يكون المنحنى التكراري متماثلا، بحيث يكون الشق الأيسر مع المحور الأفقي للمعلم هي النقطة المركزية التامة للتوزيع، وتمسى بنقطة التماثل، وتكون مساوية للوسط الحسابي وللوسيط والمنوال، وتكون بالتالي ممثلة تمثلا جيدا للتوزيع.

ثانيا: الإلتواء

يمثل الإلتواء درجة تماثل أو عدم تماثل بيانات أي ظاهرة تحت الدراسة وبإستخدام المنحنى التكراري يظهر شكل التوزيع، ويقصد بالإلتواء انعدام التماثل في توزيع قيم الظاهرة حول قيمتها المركزية(الوسط الحسابي) وفيه تنتفي شروط التماثل التام.

إذا كانت التكرارات تتركز عند أصغر القيم يصبح المنحنى ملتويا التواء موجب جهة اليمين

التوزيع (المنحنى) موجب الإلتواء جهة اليمين (الوسط الحسابي> الوسيط> المنوال).

أما في حالة تركز التكرارات عند أكبر القيم فيكون المنحنى في تلك الحالة ملتوي التواء سالب جهة اليسار

التوزيع ملتوي جهة اليسار (الوسط الحسابي< الوسيط< المنوال).

1-قياس الإلتواء: يمكن قياس الإلتواء بمعامل الإلتواء والذي يفيدنا في الحكم على مدى تماثل أو التواء التوزيع، حيث تعدد مقاييس الإلتواء إلا أن من أهمها:

أ/ **معامل الإلتواء :** لمعرفة قيمة الإلتواء لظاهرة ما يتم استخدام المعادلة التالية والتي تنص على الوسط الحسابي ناقص المنوال.

$$VA = \overline{X} - M_Q$$

ب/معامل بيرسون PERSON للإلتواء : تتلخص صيغة معامل بيرسون للإلتواء بقسمة مقدار الإلتواء على الإنحراف المعياري وهي تفيد في حالة الجداول المغلقة ويمكن حسابه بالمعادلتين التاليتين:

$$CA = \frac{\overline{X} - M_e}{\partial}$$

كما يكتب معامل بيرسون للإلتواء أيضا بالصيغة التالية:

$$CA = \frac{3\left(\overline{X} - M_e\right)}{\partial}$$

ويكون معامل الالتواء محصورا بين +1 و−1، إذا كان موجبا دل على أن التوزيع يمتد إلى اليمين، أما إذا كان سالبا دل على أن التوزيع يمتد إلى اليسار، وفي حالة ما إذا كان يساوي 0 فهذا يعني أن المنحنى (التوزيع) متماثل، وقد تم تقسيم قيمة الإلتواء على الإنحراف المعياري من أجل اختزال وحدات القياس، والتمكن بالتالي من مقارنة التواء ظاهرتين مختلفتين.

<u>مثال</u>: لدينا دراسة إحصائية قامت بمتابعة أوزان ثمانية صناديق من الفواكه فتحصلنا بالكليلو غرام على مايلي: 66، 85، 52، 78، 80، 91، 74، 58.

<u>المطلوب</u>: ايجاد كل من الوسط الحسابي والوسيط والإنحراف المعياري.

- **الوسط الحسابي:**

$$\boldsymbol{\overline{X} = \frac{\sum xi}{N} = \frac{66 + 85 + 52 + 78 + 80 + 91 + 74 + 58}{8} = 73kg}$$

- **الوسيط: ترتيب القيم 52، 58، 66، 74، 78، 80، 85، 91.**

الرتبة N زوجي

$$C = \frac{N}{2} = \frac{8}{2} = 4$$

$$C = \frac{N}{2} + 1 = \frac{8}{2} + 1 = \mathbf{5}$$

إذن لدينا:

$M_{e1} = 74$

$M_{e2} = 78$

$$M_e = \frac{M_{e1} + M_{e2}}{2} = \frac{74 + 78}{2} = 76kg$$

- الإنحراف المعياري:

$$\partial = \sqrt{\frac{\sum(x_i - \overline{X})^2}{N}} = \sqrt{\frac{1258}{8}} = \mathbf{12.53kg}$$

$\sum$	92	85	80	78	74	66	58	52	x_i
1258	324	144	49	25	01	49	225	441	$(x_i - \overline{X})^2$

***قيمة الإلتواء:**

$$\boldsymbol{VA = 3(\overline{X} - M_e) = 3(73 - 76) = -9kg}$$

ويدل ذلك على أن أوزان الأشخاص ذات التواء إلى اليسار.

- **معامل بيرسون للإلتواء**

$$\boldsymbol{CA = \frac{3(\overline{X} - M_e)}{\partial} = \frac{-9}{12,53} = 0,72}$$

نلاحظ أن التوزيع ملتو إلى اليسار.

ملاحظة: من بين سلبيات معامل التواء بيرسون المعطى بالصيغتين السابقتين:

- أنه لا يمكن حسابه من الجداول التكرارية المفتوحة من أحد الطرفين أو من كيلهما؛
- كما لا يمكن حسابه في حالة المنحنيات شديدة التواء وفي هذه الحالة يفضل استخدام معامل التواء بولي.

ج/معامل الإلتواء العزمي: يطلق على معامل الإلتواء المحسوب بهذه الطريقة اسم معامل الإلتواء العزمي ويعبر عنه رياضيا بالعلاقة التالية:

$$CA_m + \frac{m_3}{\partial^3}$$

يستخدم هذا المعامل إذا كان التوزيع وحيد المنوال، وتنحصر قيمته أيضا بين $+1$ و-1، وتدل الإشارة على اتجاه التوزيع.

د/ معامل بيرسون بالعزوم: هناك صيغة أخرى لبيسون يستخرج بها معامل الإلتواء وهي تساوي العزم المركزي من الدرجة الثالثة على الإنحراف المعياري مكعّب. هو العزم الثالث على الإنحراف المعياري مكعّب

ه/معامل التواء بولي:

$$\boldsymbol{CA_B} = \frac{Q_3 - M_e + Q_1}{Q_3 - Q_1}$$

حيث Q_1 **الربيع الأول،** Q_3**: الربيع الثالث،** M_e **الوسيط**

و/معامل الإلتواء الربيعي (معامل يول): يستعمل هذا المعامل في حالة الجداول المفتوحة، ويعطى الإلتواء الربيعي من خلال الصيغة التالية:

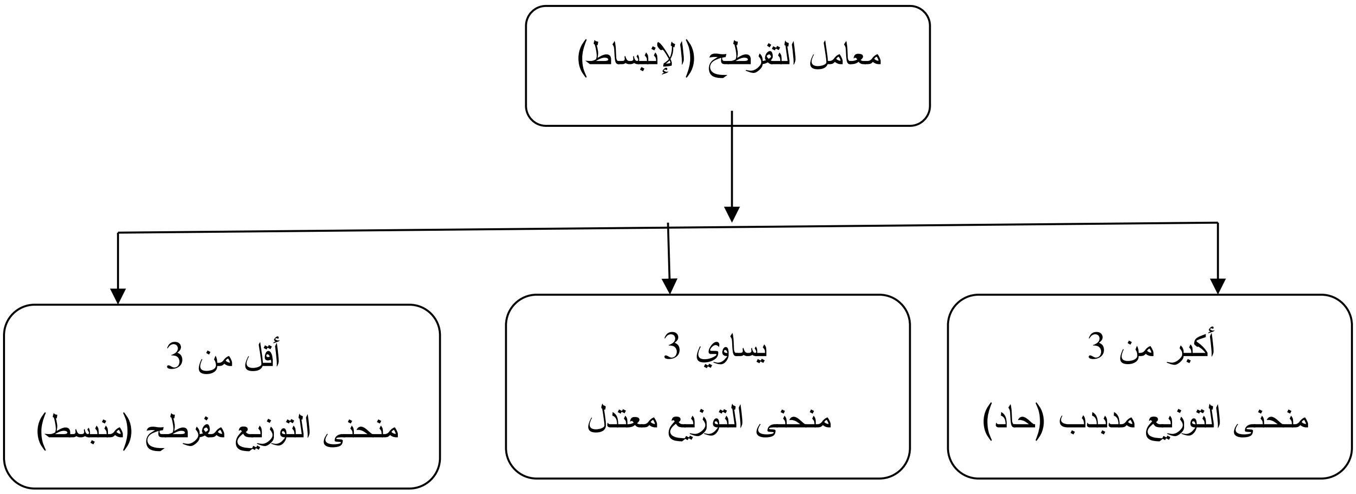
$$CA_Q + \frac{(Q_3 - Q_2) - (Q_2 - Q_1)}{Q_3 - Q_1}$$

تكون قيمة هذا المعامل محصورة بين $1+$ و$1-$ إذا كانت قيمته من الصفر يعني ذلك أن التوزيع قريبا من التناظر، وتدل إشارته إلى اتجاه الإلتواء نحو اليمين أو اليسار.

ثالثا: التفرطح (الإنبساط):

نستعمل مصطلح التفلطح لوصف عدم تطاول المنحنى التكراري أو المضلع التكراري، فإذا كان المنحنى أكثر تفرطحا من منحنى التكرارات المعتدل قيل عنه منحنى مفلطحا وهو الذي يتسع في الوسط وتنحني قمّته عن قمّة المنحنى المعتدل، وإذا كان أكثر تدبدبا من المنحنى التكراري المعتدل قيل عنه منحنى مدببا وهو الذي يضيق في الوسط وتوتفع قمّته عن قمّة المنحنى المعتدل، أما إذا كان منطبقا على المنحنى المعتدل قيل عنه منحنى طبيعي أو متماثل. وتكون قيمة معامل التفرطح تساوي **3** وفي حالة التوزيع الطبيعي المعتدل.

الشكل رقم (11): وضعيات معامل التفرطح



يقاس تفرطح المنحنيات التكرارية عن طريق عدة مقاييس منها:

1-معامل فيشر(معامل التفرطح العزمي): الذي يعطي بالمعادلة التالية:

$$CF = \frac{m_4}{\partial^4}$$

تجدر الإشارة في هذا الصدد أن المنحنى المعتدل (متوسط التفرطح) يعتبر معيارا لتحديد طبيعة التفرطح، ووجد عمليا أن قيمة معامل تفرطح التوزيع المتماثل يساوي 3 ومنه، يكون الرقم 3 أساسا للتفرقة بين المنحنيات من حيث التذبدب والتفرطح وعليه:

- التوزيع متماثل القمة أو معتدل يعني CF=3
- التوزيع مدبدب القمة يعني CF>3
- التوزيع مفرطح القمّة يعني أن: CF<3

إذا كان معامل فيشر موجبا دل ذلك على أن التوزيع أقل تفرطحا من التوزيع الطبيعي، وإذا كان سالبا دل ذلك على أن التوزيع أكثر تفرطحا، أي مدببا أكثر من التوزيع الطبيعي.

2-معامل كيللي: يمكن حساب معامل التفرطح بطريقة كيللي كمايلي:

$$CK = \frac{(Q_3 - Q_1)}{D_9 - D_1}$$

تمارين مقترحة محلولة مدعمة بالشرح

تمرين 01: إذا كانت الدرجات التي تحصل عليها الطالب في خمس مواد هي: 8، 10، 13، 14، 15.

- أحسب متوسط درجات هذا الطالب؟

الحل:

$$\text{المتوسط} = \frac{\text{مجموع الدرجات}}{\text{عدد الدرجات}}$$

$$\overline{X} = \frac{\sum X_i}{n} = \frac{8+10+13+14+15}{5} = \frac{60}{5} = 12$$

تمرين02: تمثل البيانات التالية حجم المبيعات الأسبوعية بآلاف الدنانير في ولاية معيّنة:**20،16،14،12،10،8،5،3،2**

أحسب متوسط المبيعات؟

الحل:

$$\text{المتوسط} = \frac{\text{مجموع المبيعات}}{\text{عدد المبيعات}}$$

$$\overline{X} = \frac{\sum X_i}{n} = \frac{2+3+5 \ldots\ldots + 20}{9} = \frac{90}{9} = 10$$

تمرين 03: في امتحان فجائي في مادة الإحصاء الوصفي تحصل طلبة فوج معين على الدرجات المبينة في الجدول التالي:

الدرجة	3	4	5	6	8	9
عدد الطلبة	4	3	6	5	4	2

المطلوب: حساب متوسط الدرجات التي تحصل عليها طلبة هذا الفوج؟

الحل:

لحساب هذا المتوسط فإننا نقوم أولا بضرب كل قيمة في تكرارها ثم نطبق العلاقة التي تحسب المتوسط الحسابي لبيانات متكررة، وسنقوم بذلك من خلال الجدول التالي:

الدرجة x_i	عدد الطلبة n_i	$n_i x_i$
3	4	12
4	3	12
5	6	30
6	5	30
8	4	32
9	2	18
المجموع	24	134

$$\overline{\boldsymbol{X}} = \frac{\sum \boldsymbol{X_i}}{n_i} = \frac{\mathbf{134}}{\mathbf{24}} = \mathbf{5,58}$$

أي أن متوسط درجات طلبة هذا الفوج الحسابي في الإمتحان الفجائي يساوي **5,58**

تمرين 04:

في دراسة احصائية حول مادة الحليب بالمزارع الموجودة على مستوى ولاية المسيلة توصلنا إلى إعداد الجدول التالي:

الإنتاج باللترات	**240−200**	**280−240**	**320−280**	**360−320**
عدد المزارع	**5**	**6**	**8**	**4**

المطلوب: إيجاد متوسط إنتاج الحليب بهذه المزارع

الحل:

الإنتاج باللترات	**عدد المزارع n_i**	**مراكز الفئات x_i**	$\boldsymbol{n_i x_i}$
240−200	5	220	1100
280−240	6	260	1560
320−280	8	300	2400
360−320	4	240	1360
400−360	2	380	760
المجموع	**24**		**134**

$$\overline{X} = \frac{\sum X_i}{n_i} = \frac{7180}{25} = 287,2$$

أي أن متوسط إنتاج الحليب بهذه المزارع هو أكثر بقليل من **287** لتر للمزرعة.

حساب المتوسط الحسابي بالطريقة المختصرة:

عندما تكون البيانات الموجودة في الجداول المعطاة كبيرة القيم فإن استخدام الطريقة السابقة يصبح صعب، كما يزداد احتمال الووقع في الأخطاء بذلك فإنه في مثل هذه الحالات يفضل استخدام طريقة مختصرة الهدف منها تبسيط العمليات الحسابية الطويلة حتى تسهل التعامل معها.

فإذا قمنا مثلا بطريقة قيمة ثابتة(a) من جميع القيم(جميع مراكز الفئات) فإن المتوسط الحسابي يصبح

$$\overline{X} = a + \frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i - a)}{n}$$

إذا كانت البيانات مفردة أو إذا كانت البيانات مبوبة في جداول توزيع التكراري

$$\overline{X} = a + \frac{\sum_{i=1}^{n} n_i(x_i - a)}{n_i}$$

<u>ويمكن حساب متوسط إنتاج مادة الحليب بإتباع الطريقة المختصرة:</u>

نختار وسط فرضي a=30 وهو مركز الفئة الوسطى ونتبع الخطوات التالية:

- توجد قيم جديدة y_i = والتي تساوي مراكز الفئات ناقص الوسط الفرض
- نضرب هذه القيم الجديدة في تكرار الفئات n_i
- نحسب $\overline{X}$ وهو الوسط الحسابي لهذه القيم الجديدة.
- نحسب المتوسط الحسابي للقيم الجديدة والذي يساوي $\overline{X} = \overline{y}$

الإنتاج باللترات	**عدد المزارع n_i**	x_i	y_i	$n_i x_i$
240−200	5	220	−80	−4400
280−240	6	260	−40	−240
320−280	8	300	0	0
360−320	4	240	40	160
400−360	2	380	80	160
المجموع	**52**			**−320**

$$\overline{\boldsymbol{y}} = \frac{\sum_{i=1}^{n} \boldsymbol{n_i y_i}}{\sum_{i=1}^{n} \boldsymbol{n_i}} = \frac{\mathbf{-320}}{\mathbf{25}} = \mathbf{12,8}$$

$$\overline{X} = 300 - 12{,}8 = 287{,}2 \text{ لتر}$$

<u>تمرين 05:</u>

لنفرض ان مؤسسة إصدار الكتب الجامعية تلخص عدد إصداراتها ومتوسط أسعار البيع في الجدول أدناه:

المطلوب حساب متوسط الأسعار للكتب التي تصدرها هذه المؤسسة؟

الفرع	الوحدة الأولى	الوحدة الثانية	الوحدة الثالثة
عدد الإصدارات	130	110	80
متوسط الأسعار	13000	14500	18500

<u>الحل:</u>

إذا اعتبرنا أن متوسط الأسعار في المؤسسة هو عبارة عن مجموع متوسط الأسعار في الوحدات الثلاث مقسوما على ثلاثة فإن الإجابة تكون خاطئة فالإجابة الصحيحة هي تلك التي يمكن الحصول عليها من خلال علاقة المتوسط الحسابي المرجح.

$$\overline{X} = \frac{n_1\overline{x_1} + n_2\overline{x_2} + n_3\overline{x_3} + \cdots .. + n_n\overline{x_n}}{n_1 + n_2 + n_3 + \cdots \ldots \ldots \ldots .. + n_n}$$

$$\overline{X} = \frac{(130x + 13000) + (110x14500) + (80x18500)}{130 + 110 + 80}$$

$$= \frac{1690000 + 1595000 + 1480000}{320}$$

$$\overline{X} = \frac{4765000}{320} = 14890{,}62$$

<u>تمرين 06:</u>

أوجد المتوسط الهندسي للبيانات المبنية في الجدول أدناه باستخدام طريقة اللوغاريتم

القيم	2	4	5	6
التكرار	2	3	2	4

$$\log G = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{n} N \log \quad x_i$$

$$= \frac{1}{11}[2\log 2 + 3\log 4 + 2\log 5 + 4\log 6]$$

$$\frac{1}{11}[(2 * 0{,}0301) + (3 * 0{,}601) + (2 * 0{,}699) + (4 * 0{,}778)]$$

$$\frac{1}{11}[0{,}602 + 1{,}806 + 1{,}398 + 3{,}112]$$

$$= \frac{1}{11} 6{,}918$$

$$\log G = 0{,}629$$

تمرين 07:

قام أستاذ بإجراء امتحان لطلبته المقسمين إلى مجموعتين فإذا توفرت لك المعلومات التالية

عدد طلبة المجموعة الأولى: 248 المتوسط الحسابي لدرجاتهم =09.5

عدد طلبة المجموعة الثانية= 230 المتوسط الحسابي لدرجاتهم= 10.4

أوجد المتوسط الحسابي لمجموع الطلبة

الحل:

$$\boldsymbol{x_1 = 09,5}$$
$$\boldsymbol{n_1 = 24,8}$$

$$\boldsymbol{n_2 = 230}$$

$$\boldsymbol{x_2 = 09,5}$$

نستخدم المتوسط الحسابي المرجع لإيجاد متوسط درجات مجموع الطلبة

$$\overline{X} = \frac{n_1\overline{X_1} + n_2\overline{X_2}}{n_1 + n_2} = \frac{(148x9{,}5) + (230x10{,}4)}{248 + 230}$$

$$\overline{X} = \frac{2356 + 2392}{478} = \frac{4748}{478} = 9{,}93$$

تمرين 08:

إذا علمت بأن متوسط عدد الطلبة بالحافلات الصغيرة في احدى رحلات الجامعة كان 23 طالبا، والمتوسط بالحافلات الكبيرة كان 65 طالبا، أوجد عدد الطلبة المشاركين في الرحلة إذا كان عدد الحافلات الصغير =3 وعدد الحافلات الكبيرة =4.

الحل:

$$\overline{X_1}=23,\ \overline{X_2}=65$$
$$\boldsymbol{n_1=3}$$
$$\boldsymbol{n_2=4}$$

عدد الطلبة في الحافلات = 23*3=69

عدد الطلبة في الحافلات الكبيرة =65*4=260

مجموع عدد الطلبة =69+260=329 طالب

تمرين 09:

ليكن التكرار المتجمع الصاعد للظاهرة (X) على الشكل التالي: 10، 30، 70، 90، 100

فإذا علمت أن طول الفئة عبارة عن جداء التكرار الأول في التكرار الأخير وأن الحد الأعلى للفئة الثالثة عبارة عن جداء تكرار الفئة الثانية في تكرار الفئة الرابعة.

المطلوب: – إعادة تكوين حساب الجدول

- حساب المتوسط الحسابي

الحل:

التكرار المتجمع الصاعد	10	30	70	90	100
التكرار	10	20	40	20	100

طول الفئة =10*10=100

الحد الأعلى للفئة الثالثة =20*20 =400

الحد الأدنى للفئة الثالثة= الحد الأعلى لها – طول الفئة =400−100 =300

الفئة	n_i	x_i	$n_i x_i$
200−100	10	150	1500
300−200	20	250	5000
400−300	40	350	14000
500−400	20	450	9000
600−500	10	550	5500
المجموع	**100**		**35000**

$$\overline{X} = \frac{\sum n_i x_i}{\sum n_i} = \frac{35000}{100} = 350$$

<u>تمرين 10:</u>

الجدول التالي يمثل مبيعات 500 حذاء خلال أسبوع الدخول المدرسي

قياس الحذاء	35	36	37	38	39	40	41	42	43	44
العدد	50	60	55	35	60	65	a	B	45	10

المطلوب:

- تحديد طبيعة المتغير الإحصائي
- حساب αβإذا علمت أن $\beta = \alpha$ ما يمثل كل من α و β
- ايجاد قيمة المنوال من الرسم أن أمكن؟
- حساب قيمة المنوال؟

<u>الحل:</u>

أ- المتغير الإحصائي (قياس الأحذية) كمي مستمر

ب- $\alpha + \beta = 500 - (50 + 60 + 55 + 35 + 60 + 65 + 45 + 10)$

$$\alpha + \beta = 500 - 380$$

$$\alpha + \beta = 120$$

$$2\beta + \beta = 120 > \beta - \frac{120}{3} = 40$$

$$\alpha = 40x2 = 80$$

α يمثل مبيعات الأحذية من المقاس 41

β يمثل مبيعات الأحذية من المقاس 42

أ- لا يمكن حساب المنوال من المدرج التكراري في هذا التمرين لأن البيانات ليست مبوبة في جدول توزيع تكراري.

ب-المنوال =41 وهو المقاس الأكثر مبيعا.

تمرين 11:

أجريت دراسة حول إستطلاع للرأي على مئة مستهلك حسب فئاتهم العمرية حول منتوج جديد عرض في السوق فتحصلنا على مايلي:

العمر بالسنة	10–0	20–10	30–20	40–30	50–40	60–50	70–60	80–70	90–80	المجموع
العدد	1	3	10	14	18	34	12	6	2	100

المطلوب: حساب الإنحراف المتوسط

الحل:

العمر	العدد	x_i	$n_i x_i$	$\lvert(X_i - \overline{X})\rvert$	$n_i\lvert(X_i - \overline{X})\rvert$
10–0	1	5	5	43.7	43.7
20–10	3	15	45	33.7	101.1
30–20	10	25	250	23.7	237
40–30	14	35	490	13.7	191.8
50–40	18	45	810	3.7	66.6
60–50	34	55	1870	6.3	214.2
70–60	12	65	780	16.3	195.6
80–70	6	75	450	26.3	157.8
90–80	2	85	170	36.3	72.6
المجموع	100		4870		1280.4

متوسط العمر $\overline{X} = \frac{\sum h_i X_i}{\sum h_i} = \frac{4870}{100} = 48.7$ سنة

الإنحراف المتوسط $E_x = \frac{\sum h_i |X_i - \overline{X}|}{\sum h_i} = \frac{1280.4}{100} = 12.8$ سنة

أي أن متوسط العمر الذي أصيب فيه الأشخاص بمرض السكري لأول مرة هو 48,7 سنة بانحراف معياري 12.8 سنة.

التمرين 12:

الجدول التالي يبين أرباح الشركتين X، Y لفترة ما بملايين الدينارات، أي الشركتين أفضل في نظرك ولماذا؟

10	65	45	50	10	الشركةX
35	40	35	30	40	الشركةY

الحل:

X_i	X_i^2	Y_i	Y_i^2
10	100	40	1600
50	2500	30	900
45	2025	35	1225
65	4225	40	1600
10	100	35	1225
180	8950	180	6550

متوسط أرباح الشركة (X) $\overline{X} = \frac{\sum X_i}{\sum n} = \frac{180}{5} = 36$

متوسط أرباح الشركة (y) $\overline{Y} = \frac{\sum y_i}{\sum n} = \frac{180}{5} = 36$

$$S_x = \sqrt{\frac{\sum X_i^2}{\sum n_i} - \overline{X}^2} = \sqrt{\frac{8950}{5} - (36)^2} = 17.888$$

$$S_y = \sqrt{\frac{\sum y_i^2}{\sum n_i} - \overline{y}^2} = \sqrt{\frac{6650}{5} - (36)^2} = 7.07$$

على الرغم من أن متوسط أربح الشركتين متساوي خلال الفترة إلا أن الأرباح الشركة(Y) أقل تشتتا (اكثر استقرار= من أرباح الشركة (X) وهذا ما يجعل الشركة(Y) أفضل بالنسبة للمستثمرين.

تمرين 13:

إذا علمت أن معامل الإختلاف لانتاج أحد المصانع في فترة ما هو 20% أوجد عدد أيام هذه الفترة إذا كان الإنحراف المعياري للإنتاج هو 10 ومجموع إنتاج الفترة يساوي 500 وحدة؟

<u>الحل:</u>

معامل اختلاف =

$$C_v = \frac{\frac{100}{500}}{n} = 0.20$$

$$100 * \frac{\text{الإنحراف المعياري}}{\text{المتوسط الحسابي}}$$

ومنه عدد أيام الفترة 10 أيام =n

<u>تمرين 14:</u> أدرس شكل منحنى التوزيع التكراري الآتي باستخدام معاملات فيشر ثم قم برسمه

الفئة	8−6	10−8	12−10	14−12	16−14	18−16	20−18	المجموع
التكرار	3	1	26	33	14	8	6	100

الحل:

الفئة	التكرار	X_i	N_iX_i	$(X_i-\overline{X})$	$N_i(X_i-\overline{X})$	$N_i(X_i-\overline{X})^2$	$N_i(X_i-\overline{X})^3$	$N_i(X_i-\overline{X})^2$
8−6	3	7	21	−5.86	−17.58	−17.58	−603.697	3537.62
10−8	10	10	90	−3.86	−38.6	148.996	−575.125	2219.98
12−10	26	11	286	−1.86	−48.36	89.95	−167.307	311.189
14−12	33	13	429	0.14	4.62	0.647	0.091	0.013
16−14	14	15	210	2.14	29.96	64.11	137.2	293.62
18−16	8	17	136	4.14	33.12	137.12	567.68	2350.127
20−18	6	19	114	6.14	36.84	226.2	1388.86	8527.56
المجموع	100					770.04	747.7	17240.2

$$U_2 = \frac{\sum n_i(X_i-\overline{X})^2}{\sum n_i} = \frac{770.04}{100} = 7.7$$

$$U_3 = \frac{\sum n_i(X_i-\overline{X})^3}{\sum n_i} = \frac{747.7}{100} = 7.48$$

$$U_4 = \frac{\sum n_i(X_i-\overline{X})^4}{\sum n_i} = \frac{17240.2}{100} = 172.4$$

$$s_x = \sqrt{u_2} = \sqrt{7F_1} = \frac{\mathbf{7.48}}{(\mathbf{2.775})^3}$$

$$\boldsymbol{F_1} = \frac{\mathbf{7.48}}{\mathbf{21.369}} = \mathbf{0.35}$$

معامل فيشر للإلتواء:

$f_1 > 0$ يعني أن منحنى التوزيع غير متناظر ملتوي قليلا ناحية اليمين

$$F_2 = \frac{U_4}{(U_2)^2}$$

$$F_2 = \frac{172.4}{(7.7)^2} - 3 = \frac{172.4}{59.29} = -0{,}092$$

معامل فيشر للتفلطح مما يعني أن منحنى التوزيع يميل للتفلطح

<u>تمرين 15</u>: الجدول التالي يبين توزيع مؤسسة ما حسب الدخول الشهرية لكل منهم

الفئة	8–10	10–12	12–14	14–16	أكثر من 16	المجموع
التكرار	12	16	20	25	17	90

<u>المطلوب</u>:

- حساب معاملات الإلتواء والتفلطح؟

<u>الحل</u>:

بما أن جدول التوزيع التكراري مفتوح من النهاية فإننا نستخدم معامل يول وكندال لقياس التواء التوزيع ومعامل كيلي لقياس التفلطح.

$$C_{yk} = \frac{(Q_3 - Q_2) - (Q_2 - Q_1)}{Q_3 - Q_1}$$

$$C_{yk} = \frac{Q_3 - Q_2 - Q_1}{Q_3 - Q_1}$$

معامل يول وكندال للإلتواء

$$C_{yk} = \frac{1}{2}\frac{Q_3 - Q_1}{Q_3 - Q_1}$$

معامل كيلي للتفلطح

الفئة	التكرار	$n_i \uparrow$
10–08	12	1
12–10	16	3
14–12	20	5
16–14	25	7
16 فأكثر	17	9
المجموع	90	

$$Q_1 = L_1 + \frac{\frac{\sum n_i - N_0}{4}}{n\theta 1} k = 10 + \frac{22.5 - 12}{16} 2 = 11.31$$

$$Q_2 = L_1 + \frac{\frac{\sum n_i - N_0}{2}}{nQ1} k = 12 + \frac{45 - 28}{20} 2 = 13.7$$

$$Q_3 = L_1 + \frac{\frac{3\sum n_i - N_0}{4}}{nQ1} k = 10 + \frac{67.5 - 48}{25} 2 = 15.56$$

$$D_1 = L_1 + \frac{\frac{\sum n_i - N_0}{10}}{nD1} k = 8 + \frac{9 - 0}{12} 2 = 9.5$$

$$D_9 = L_1 + \frac{\frac{9\sum n_i - N_0}{10}}{nD9} k = 16 + \frac{81 - 73}{17} 2 = 16.94$$

ومنه معامل الإلتواء

$$C_{yk} = \frac{15.56 - 2 * 13.7 - 11.31}{15.56 - 11.31} = \frac{23.15}{4.25}$$

التواء ناحية اليسار

معامل التفلطح $C_{yk} = \frac{15.56 - 2 * 13.7 - 11.31}{2(16.94 - 9.5)} = \frac{4.25}{14.88} = 0.28 > 0$

تمرين 16: ليكن لدينا التوزيع التكراري التالي:

الفئات	25-20	30-25	35-30	40-35	45-40	المجموع
n_i	**7**	**13**	**21**	**6**	**3**	**50**

المطلوب:

- ايجاد قيمة الوسط الحسابي، الوسيط والمنوال؟
- ايجاد الإنحراف المعياري والتباين؟
- ايجاد قيم معامل الإلتواء، ومعامل التفرطح؟

الحل:

الفئات	25-20	30-25	35-30	40-35	45-40	المجموع
n_i	7	13	21	6	3	50
$N\uparrow$	7	20	41	47	50	
c_i	22,5	27,5	32.5	37,5	42,5	
$c_i n_i$	157,5	357,5	682,5	225	127,5	1550
$n_i(C_i-\overline{X})^2$	505,75	159,25	25,41	253,5	396,75	1340,66
$n_i(C_i-\overline{X})^4$	36540,43	1950,81	106,31	10710,37	17490,06	66797,98

1- حساب الوسط الحسابي

$$\overline{X}=\frac{\sum C_i n_i}{\sum n_i}=\frac{1550}{50}=31$$

- **المنوال: الفئة المنوالية [30-35]**

$$M_o=d+\frac{n_{i-1}}{n_{i+1}+n_{i-1}}L=30+\frac{13}{6+13}5=33,42$$

- **الوسيط: الرتبة**

$$\boldsymbol{C=\frac{\sum n_i}{2}=\frac{50}{2}=25}$$

الفئة الوسيطية : **[30-35]**

$$M_e = d + \frac{C - N_{i-1}^{+}}{n_i} L = 30 + \frac{25 - 20}{21} 5 = 31{,}2$$

- **الإنحراف المعياري:**

$$\boldsymbol{\partial = \sqrt{\frac{n_i \sum \left(c_i - \overline{X}\right)^2}{\sum n_i}} = \sqrt{\frac{1340,66}{50}} = 5,2}$$

إذن التباين هو:

$$\boldsymbol{v(x) = 26,81}$$

2- من خلال جدول المسودة نجد

- **قيمة الإلتواء**

$$VA + 3\left(\overline{X} - M_E\right) + \; 3(31 - 31{,}2 = -0{,}6$$

ويدل ذلك على أن التوزيع ملتو إلى اليسار

- **معامل بيرسون للإلتواء:**

$$\boldsymbol{CA = \frac{3\left(\overline{X} - M_e\right)}{\partial} = \frac{-0,6}{5,2} = -0,12}$$

نلاحظ أن التوزيع ملتو إلى اليسار

-**معامل التواء بولي:** يمكن حساب معامل التواء بولي بالمعادلة التالية:

حيثQ_1 الربيع الأول

الرتبة

$=50\frac{1}{4} = 12{,}5 C_1 + \sum n_i \frac{1}{4}$

$$Q_1 = d + \frac{c - N_{i-1}^{+}}{n_i} L = 25 + \frac{12{,}5 - 7}{13} 5 = 27{,}11$$

حيثQ_3 الربيع الثالث

الرتبة

$=50\frac{3}{4} = 37{,}5 C_3 + \sum n_i \, 3/4$

$$Q_3 = d + \frac{c - N_{i-1}^{+}}{n_i} L = 25 + \frac{375 - 20ة}{21}$$

$$CA_B = \frac{Q_3 - M_e + Q_1}{Q_3 - Q_1} = \frac{34,16 - 31,2 + 27,11}{34,16 - 27,11} = \frac{30,07}{7,05} = 4,26$$

6- معامل الإلتواء الربيعي(معامل يول): يعطى الإلتواء الربيعي من خلال الصيغة التالية:

$$CA_Q + \frac{(Q_3 - Q_2) - (Q_2 - Q_1)}{Q_3 - Q_1} = \frac{(34,16 - 31,2) - (31,2 - 27,11}{34,16 - 27,11} = \frac{2,96 - 4,09}{7,05} = -0,16$$

تكون قيمة هذا المعامل محصورة $1+$ و $1-$ إذن التوزيع ملتو نحو اليسار

$$m_4 = \frac{\sum n_i (C_i - \overline{X})^4}{\sum n_i} = \frac{66797,98}{50} = 1335,96$$

$$CF = \frac{m_4}{\partial^4} = \frac{1335,96}{731,16} = 1,827$$

وعليه فإن قيمة CF<3 تجدر الإشارة في هذا الصدد أن التوزيع مفرطح القمة

- **معامل كيللي**: يمكن حساب معامل التفرحط بطريقة كيليلي كمايلي:

حيث D_1 العشير الأول

$$D_1 = \sum n_i \frac{1}{10} = 50 \frac{1}{10} = 5$$

$$D_1 = d + \frac{C - N_{i-1}^{+}}{n_i} L = 20 + \frac{5 - 0}{7} 5 = 23,57$$

D_9: العشير التاسع

$$D_9 = \sum n_i \frac{9}{10} = 50 \frac{9}{10} = 45$$

$$D_9 = d + \frac{C - N_{i-1}^{+}}{n_i} L = 35 + \frac{45 - 41}{6} 5 = 38,33$$

$$CK = \frac{(Q_3 - Q_1)}{D_9 - D_1} = \frac{34,16 - 27,11}{38,38 - 23,57} = \frac{7,05}{14,76} = 0,48$$

<u>**قائمة المراجع**</u>

1-جيلالي جلاطو، **الإحصاء مع تمارين ومسائل محلولة**، ديوان المطبوعات الجامعية، الجزائر،2002؛

2-سعد بن سعيد القحطاني، **الإحصاء التطبيقي**، مركز البحوث، معهد الإدارة العامة، المملكة العربية السعودية، 2015؛

3-مصطفى يوسف كافي وآخرون، **الإحصاء في الإدارة و الإقتصاد**، المجتمع العربي، الأردن، 2012؛

4-مصطفى عبد المنعم الخواجة، **مقدمة في الإحصاء الوصفي**، مكتبة الإشعاع، القاهرة، 1998؛

5-عادل محمود حلاوة وعبد المرضي عزام، **مقدمة في الأساليب الإحصائية والرياضية للإداريين**، جامعة الإسكندرية، 2004؛

6-تيلولت سامية، **مبادئ في الإحصاء**، دار الحديث للكتاب، القبة، الجزائر، الطبعة الثانية، 2009؛

7-كامل فليفل وفتحي حمدان، **مبدئ الإحصاء للمهن التجارية**، دار المناهج، الأردن، 1999.