وزارة التعليم العالي والبحث العلمي

جامعة الجزائر – 03 –

كلية العلوم الاقتصادية والعلوم التجارية وعلوم التسيير

محاضرات في مقياس الإحصاء 3

مطبوعة موجهة لطلبة السنة الثانية ليسانس شعبة علوم

اقتصادية، علوم تجارية وعلوم التسيير.

إعداد: د/ حنيش أحمد.

السنة الدراسية: 2018 – 2019.

تقديم:

هذه المطبوعة هي عبارة عن محاضرات في مقياس الإحصاء 3 حسب البرنامج الوزاري الموحد لمقياس الإحصاء 3 للسداسي الثالث شعب علوم اقتصادية وعلوم تجارية وعلوم التسيير، برمج هذا المقياس لطلبة السنة الثانية السداسي الثالث بهدف ترسيخ المعارف حول الدراسات الإحصائية خاصة وأن الطالب قد درس في السنة الأولى مقياس الإحصاء 1 في السداسي الأول، ثم مقياس الإحصاء 2 في السداسي الثاني، وهذا المقياس عبارة عن تكملة وتوسيع وترسيخ لمعارف الطالب في مجال الدراسات الإحصائية.

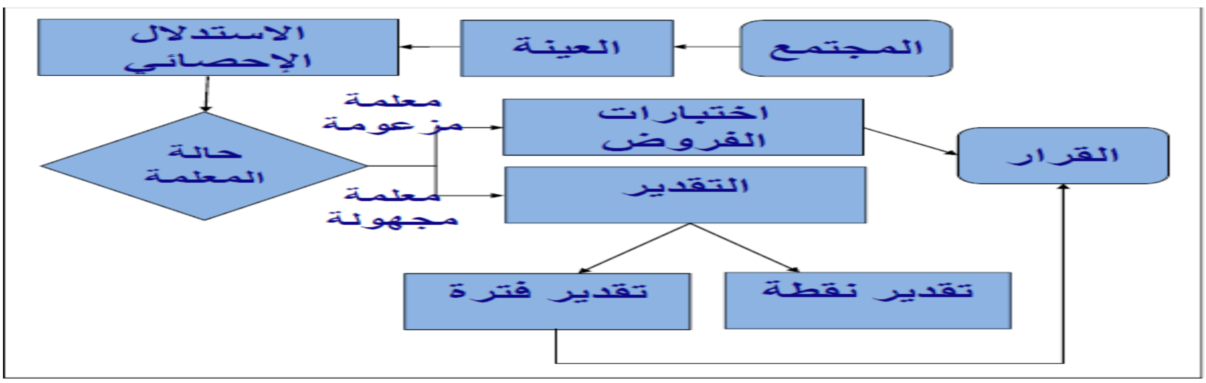
كما تعد هذه المطبوعة ثمرة تجربة تدريس مقياس الإحصاء 3 في السنوات السابقة بكلية العلوم الاقتصادية والعلوم التجارية وعلوم التسيير بجامعة الجزائر03، فمن خلال تجربتنا حاولنا صياغة محتوى المقياس بطريقة تتناسب مع طبيعة التخصص والمجال الزمني المخصص لتقديم هذه المحاضرات خلال سداسي واحد، حيث يتضمن كل محور ثلاث إلى أربع محاضرات على الأكثر، ولتحقيق هذا الغرض حرصنا على تقديم النقاط المهمة فقط، والتي يتم التوسع فيها من خلال الأعمال الموجهة والتي تقدم في سلاسل تمارين من أجل ترسيخ الفهم لدى الطالب وتوسيع قدرته على استيعاب المقياس.

كما نشير إلى أن هذه المحاضرات تم تقديمها بشكل مبسط رأينا أنه مناسب لمستوى وتخصص الطلبة على مستوى الكلية دون المساس بما هو مقرر، أما لمن أراد أن يتوسع أكثر فعليه الاطلاع على المراجع التي سيتم سردها في آخر المطبوعة، وفي الأخير نتمنى أن يشكل هذا العمل إضافة يستفيد منها طلبتنا وزملائنا.

مقدمة: عند استخدام المصادر الميدانية للبيانات فإن الباحث يحاول أن يستخدم أسلوب الحصر الشامل والذي يقوم بدراسة جميع مفردات المجتمع الإحصائي محل الدراسة، ولكن قد لا يتمكن الباحث من استخدام الحصر الشامل لعدة عوامل أهمها عوامل الجهد والوقت والتكلفة، بالإضافة إلى طبيعة المجتمع والذي قد يكون غير محدود، وطبيعة الدراسة ذاتها والتي قد تؤثر على وحدات المعاينة، لذا فإن الباحث يستخدم أسلوب العينات والذي يعتمد على دراسة جزء أو عينة من المجتمع محل الدراسة، فالباحث يهدف إلى دراسة المجتمع كله ولكنه لا يتمكن من ذلك، وتتمثل الأداة المتاحة أمامه في عينة عشوائية مسحوبة من هذا المجتمع بحيث تمثل المجتمع المدروس بشكل جيد، لذلك فإن المقاييس الإحصائية للمجتمع والتي تسمى معلمات تكون مجهولة مثل متوسط المجتمع الإحصائي (U) وانحرافه المعياري (σ)، بينما تكون المقاييس الإحصائية للعينة والتي تسمى إحصائيات أو توابع إحصائية معلومة حيث يستطيع الباحث حسابها من بيانات العينة مثل متوسط العينة ($\bar{x}$) والانحراف المعياري للعينة (S). والسؤال المطروح هو كيف نستنتج أو نستدل على مقاييس المجتمع والتي تكون مجهولة من مقاييس العينة المعروفة؟ أو كيف نعمم نتائج العينة على المجتمع؟

فاستنتاج معلمات المجتمع من إحصائيات العينة، أي الاستدلال على معلمات المجتمع هو الذي يسمى الاستدلال الإحصائي.

فالهدف من الإحصاء الاستدلالي استنتاج خصائص المجتمع من خصائص عينة سحبت منه، فعند استخدام بيانات عينة (Statistiques) للاستدلال عن المجتمع ولكوننا لا نملك كل حقائق المجتمع فنبحث عن طريقة عملية نستطيع من خلالها تقدير معلمات (Paramètres) المجتمع المطلوب محاولين الوصول للقيم (العددية) لمعالم المجتمع من خلال بيانات العينة المسحوبة منه. وينقسم الاستدلال الإحصائي لقسمين، الأول التقدير الإحصائي (estimation statistique) والثاني اختبارات الفروض الإحصائية (tests des hypothèses) فالأول يشير للطرق المختلفة لتقدير معالم المجتمع المجهولة في حين يشير الثاني إلى الاستدلال على معالم المجتمع المجهولة بالنسبة للسؤال محل البحث ومن الممكن استخدام كلاهما معاً حال تحليل البيانات. ويمكن تمثيل ملخص محتوى المقياس وأهدافه من خلال المخطط التالي:



المحور الأول: مفاهيم أساسية.

تمهيد: يتناول هذا المحور عددا من المفاهيم التي ترتكز عليها دراسة الإحصاء الاستدلالي (الإحصاء 3)، وهي تعتبر عناصر أساسية لابد من التطرق لها قبل الانتقال إلى محاور الدراسة.

1- المجتمع الإحصائي: يعرف المجتمع على أنه مجموعة المفردات محل الدراسة والتي لها خصائص مشتركة، كما أنه يتكون من جميع المشاهدات الممكنة للظاهرة أو المشكلة محل البحث مثل ظاهرة الطول أو الوزن للإنسان وظاهرة الدخل الشهري للأفراد في مدينة معينة، وظاهرة المبيعات اليومية لإحدى الشركات التجارية، والجانب المهم في المجتمع الإحصائي المدروس أن يكون قابلا للتعريف أو الحصر بطريقة واضحة سواء بشكل فعلي (مثل طلاب إحدى الجامعات) أو بشكل نظري (مثل عدد الأسماك في أحد المحيطات)، وتكمن أهمية التمييز بين المجتمعات المنتهية (المحدودة) والمجتمعات غير المنتهية (غير المحدودة) في معرفة خصائص توزيعات المعاينة للعينات المسحوبة من المجتمع الإحصائي.

ويقسم المجتمع الإحصائي إلى قسمين:

- مجتمع محدود :و الذي يكون فيه عدد محدود من الأفراد مثل عدد أجهزة الكمبيوتر في المعمل، عدد طلاب الفرقة الأولى في كلية ما...الخ.
- مجتمع غير محدود :هو المجتمع الذي يكون فيه عدد الأفراد غير منته مثل عدد النجوم في السماء، عدد حبات القمح المحصود في مزرعة معينة...الخ.

ويرمز عادة لحجم المجتمع الإحصائي بـ N.

2- معالم المجتمع Paramètres d'une population: المعلمة Paramètre عبارة عن خاصية أو مقياس يتم حسابه من مجتمع الدراسة، حيث يتكون المجتمع الإحصائي من مجموعة من المفردات التي يهمنا دراستها و هذا المجتمع له بعض معالم أو الخصائص مثل متوسط المجتمع μ وانحرافه المعياري σ ونسبة صفة معينة p في المجتمع.

مثال: - نسبة البطالة في المجتمع.

- متوسط العمر المتوقع عند الولادة.

3- العينة: تعرف العينة بانها جزء من المجتمع والتي يتم اختيارها بحيث تمثل جميع صفات المجتمع وينفرد بها فرع خاص من علم الإحصاء يسمى نظرية المعاينة، وقد تكون الحاجة ضرورية لأخذ العينة بديلا عن دراسة المجتمع كله مثل أخذ عينة من دم مريض لفحصها حيث أننا لا نستطيع فحص كل دم المريض. وكذلك قد تؤدي دراسة المجتمع كله إلى فقدان عناصره أو إتلافها، وهذا يتطلب أخذ عينة صغيرة، فمثلا عند فحص سلامة كمية من البيض يتطلب أخذ عينة منها ونقوم بكسرها وذلك للتأكد من سلامة البيض من عدمه، وأفضل العينات هي تلك التي تمثل المجتمع أفضل تمثيل، ويرمز عادة لحجم العينة بالرمز n، وتفيد المعلومات المتوفرة من العينات في

التنبؤ بمعلومات ومؤشرات عن المجتمع كله، ومن مميزات العينة أنها أقل تكلفة وأكثر سرعة وأكثر شمولا لإمكانية الحصول على إجابات عن المعلومات المطلوبة بشمول أكبر من الحصر الشامل لأفراد المجتمع محل الدراسة، وكذلك تكون أكثر دقة وذلك بسبب استخدام أشخاص ذوي كفاءات عالية ومدربين لأخذ العينات من المجتمع محل الدراسة.

4- أنواع العينات: تنقسم العينات في العادة إلى قسمين رئيسيين وهما عينات عشوائية (احتمالية) وعينات غير عشوائية(غير احتمالية) وسوف نتطرق لكل قسم مع إبراز الأنواع التي يتكون منها كل قسم.

4-1- العينات العشوائية: هي تلك العينات التي يتم اختيار مفرداتها حسب طريقة إحصائية لا يكون فيها للباحث أو لمفردات العينة دخل في اختيار أي وحدة فيها ، حيث يتم الاختيار باستخدام أساليب معينة تلعب الصدفة خلالها الدور الأول في اختيار المفردة ولكن بشرط أن يتحقق لجميع المفردات احتمال ثابت ومحدد للاختيار. والعينات العشوائية إذا ما تم اختيارها بالطريقة العلمية السليمة والمناسبة يمكن أن تكفل درجه عالية من دقة التمثيل للمجتمعات المسحوبة منها لذلك فهي الوسيلة الأساسية في حالة البحوث العلمية الدقيقة، ومن أهم أنواع العينات العشوائية ما يلي:

4-1-1- العينات العشوائية البسيطة: هي العينات التي يراعى عند اختيارها نفس الفرص أمام كل مفردات المجتمع، بحيث يكون لكل مفردة من مفردات المجتمع فرصة متساوية مع بقية المفردات لاختيارها في العينة ويتم ذلك عن طريق الاختيار العشوائي لمفردات العينة من بين مفردات المجتمع، وحتى يمكن اختيار العينة فإن الأمر يتطلب تحديد مفردات المجتمع تحديدا كاملا ويكون هذا التحديد على شكل قائمة تضم كل مفردات المجتمع وهذه القائمة تسمى بالإطار، فمثلا إذا أردنا اختيار عينة من عمال صناعة النسيج لتقدير متوسط أجر العمال فإنما يلزمنا وجود قائمة بأسماء العمال وأجر كل منهم في هذه الصناعة وهذا هو الإطار، ويجب أن يكون شاملا لكل مفردات المجتمع أي لكل عمال الصناعة، وأن يكون حديثا حتى يشتمل على كل العمال الجدد المعينين حديثا وأن يحدد لنا بدقة كل المعلومات التي تلزمنا في الدراسة، ثم نبدأ في اختيار العينة من الإطار، ويتم ذلك عن طريق إعطاء كل مفردة رقما متسلسلا ثم اختيار العينة بطريقة الاختيار العشوائي.

4-1-2- العينة العشوائية المنتظمة: إن اختيار هذه العينة يتطلب وجود إطار المجتمع كما في حالة العينة العشوائية البسيطة بحيث يكون لكل مفردة من مفردات المجتمع رقما متسلسلا داخل هذا الإطار، ثم نختار مفردات العينة من الإطار بحيث يكون الرقم المتسلسل لكل مفردة يبعد بعدا ثابتا منتظما عن رقم المفردة السابقة لها وكذلك رقم المفردة اللاحقة لها، ويتم ذلك على النحو التالي: فمثلا إذا كان لدينا مجتمع حجمه 100 مفردة ونريد اختيار عينة من 10 مفردات، فإننا نقسم الإطار إلى فترات منتظمة طول كل فترة 10/100= 10، ومن داخل مفردات الفترة الأولى نختار مفردة واحدة عشوائيا، ولتكن الرقم 5 مثلا، وبناء على رقم تلك المفردة تتحدد

باقي مفردات العينة المنتظمة فتكون المفردات على النحو التالي{5، 15، 25، 35، 45، 55، 65، 75، 85، 95}.

نلاحظ أن طريقة الاختيار في هذه العينة أسهل من العينة العشوائية البسيطة وذلك لأن الاختيار العشوائي يتم بالنسبة لأول مفردة فقط أما باقي المفردات فتتحدد تلقائيا حسب رقم أول مفردة وحجم العينة، كما أن العينة تكون منتشرة على كل أجزاء المجتمع وبالتالي تكون أكثر تمثيلا وخاصة إذا كان المجتمع غير متماثل، ولكن هذه الميزات يقابلها صعوبة في تحليل نتائج هذا النوع من العينات، والعينة المنتظمة كثيرة الاستعمال في التطبيقات العملية لقلة تكاليفها وقلة الأخطاء التي ترتكب في اختيار مفرداتها فضلا عن سهولة إجرائها.

4-1-3- العينة العشوائية الطبقية: ويلجأ إلها الباحث في حالة ما إذا كان مجتمع الدراسة به فئات (طبقات) بحيث أن التجانس أو التقارب داخل كل طبقة من طبقات المجتمع أكبر من التجانس داخل المجتمع ككل، في هذه الحالة يجب على الباحث مراعاة أن تواجد الطبقة داخل العينة تكون بنفس نسبة وجودها داخل المجتمع بعد أن يتم تحديد المفردات التي يجب سحبها من كل طبقة للدخول في العينة، فإن هذه المفردات يتم سحبها عشوائيا من داخل هذه الطبقة ومجموع هذه المفردات يكون العينة الطبقية العشوائية، ويرجع استعمال العينات الطبقية إلى عدة أسباب أهمها:

- إذا كانت هناك بيانات ذات دقة محددة مطلوب معرفتها لأقسام فرعية خاصة من المجتمع فمن الأفضل أن نعتبر كل قسم فرعي كمجتمع مستقل؛
- طريقة مناسبة من الناحية الإدارية في حال أراد القائمون بالبحث تقسيم المجتمع إلى وحدات سياسية أو إدارية..؛
- قد تختلف خاصية ما من خواص المجتمع اختلافا كبيرا بين أجزائه المختلفة، فمثلا عند معاينة الدخل يلاحظ وجود مناطق يكون دخل أفرادها صغيرا جدا وأخرى يكون دخل أفرادها متوسطا وثالثة يكون الدخل فيها كبيرا، وهنا تستخدم المعاينة الطبقية إذا ما كان المطلوب هو الحصول على تقديرات تكون أعلى دقة؛
- بتقسيم المجتمع غير المتجانس إلى مجتمعات فرعية كل منها متجانس تماما، يمكن الحصول على تقدير دقيق لمتوسط كل طبقة عن طريق عينة مأخوذة من هذه الطبقة، وبتواجد التقديرات للطبقات المختلفة يمكن الحصول على تقدير دقيق للمجتمع كله، وهكذا تزيد دقة التقدير.

كما أن للمعاينة الطبقية بعض الخصائص منها:

- أن بعض العينات التي يمكن الحصول عليها في حالة المعاينة العشوائية البسيطة يستحيل الوصول عليها بمعاينة طبقية، فاذا ما كان تقسيم المجتمع إلى طبقات تقسيما جيدا فان العينة الطبقية تميل دائما الى استبعاد العينات المتطرفة التي تزيد كثيرا من تباين المعاينة؛

- يقل تباين المعاينة كلما أمكن تقسيم وحدات المجتمع إلى مجموعات بحيث تكون الفروق داخل كل من هذه المجموعات صغيرة نسبيا بينما تكون الفروق بين هذه المجموعات في نفس الوقت كبيرة؛
- تكون المعاينة الطبقية ذات اثر فعال اذا كان لدينا قيما متطرفة في المجتمع حيث يمكن جمعها في طبقة منفصلة؛
- يمكن إدخال التكاليف في الاعتبار عند التقسيم إلى طبقات في حالة اختلافها بين أجزاء المجتمع.

4-1-4- العينة العشوائية العنقودية (متعددة المراحل): في هذا النوع من العينات يتم تقسيم المجتمع إلى مجموعات جزئية لا يشترط تجانسها، وهذه المجموعات الجزئية تنقسم إلى مجموعات جزئية أخرى وهكذا بحيث تسمى أصغر مجموعة جزئية بالعنقود ومن ثم يتم اختيار من كل عنقود عينة عشوائية بسيطة لتتشكل في النهاية عينة عنقودية وكمثال على ذلك لتقدير حجم الدخل في دولة ما، يستلزم ذلك تقسيم هذه الدولة إلى مجموعة من المحافظات وتنقسم المحافظات إلى مجموعات من المدن، ثم إلى مجموعات من الأحياء، ثم يتم اختيار عينة عشوائية من المحافظات كمرحلة أولى، ثم في المرحلة الثانية يتم اختيار عينة عشوائية من المدن داخل كل محافظة ثم اختيارها في المرحلة الأولى، ثم يتم في المرحلة الثانية اختيار عينة عشوائية من الأحياء داخل كل مدينة ثم اختيارها في المرحلة في المرحلة الثانية.

4-2- العينات غير العشوائية(غير الاحتمالية): هي تلك العينات التي لا تكفل لجميع وحدات المجتمع احتمال ثابت ومحدد للاختيار، وغالباً يتدخل الباحث في عملية الاختيار بصورة أو بأخرى، فرغم أهمية الأساليب العشوائية للمعاينة وتبني العديد من الباحثين لاستخدامها، فانه توجد بعض البحوث التي تتجه إلى اختيار أساليب غير عشوائية خاصة في البحوث النوعية، حيث يسعون إلى التركيز على جوانب أخرى مهمة في عينات البحث النوعي مثل :

- غزارة البيانات والمعلومات المتوفرة عند أفراد العينة؛
- قربهم من الأحداث والموضوعات المعنية بالبحث؛
- استعدادهم للتعاون وإعطاء المعلومات الوافية.

فأساليب المعاينة الغير العشوائية تقوم على مبدا عدم تحكم الباحث في اختيار مفردات العينة، وعدم معرفة مفردات مجتمع البحث، وهذا ما يؤدي إلى عدم تساوي الفرصة لمفردات مجتمع البحث لتكون ضمن مفردات العينة، ومن أنواع العينات غير العشوائية نجد:

4-2-1- العينة العمدية أو المقصودة: يلجأ الباحث إلى هذه الطريقة إذا كان مجتمع الدراسة كبيرا جدا وكانت إمكانياته لا تسمح له إلا بدراسة عينة حجمها صغير جدا بالنسبة لمجتمع الدراسة، في هذه الحالة يتعمد الباحث اختيار مفردات معينة كعينة لمجتمع الدراسة يرى بخبرته السابقة أن هذه العينة يمكن أن تعطي تمثيلا مقبولا لمجتمع الدراسة، مثلا إذا أراد باحث دراسة خصائص اقتصادية أو اجتماعية معينة عن ريف دولة ما، وكانت

إمكانياته المالية والإدارية لا تسمح له سوى بعينة لسكان قرية واحدة، فإنه في هذه الحالة إذا ما تم اختيار القرية عشوائيا من بين ألاف القرى بتلك الدولة فإن الصدفة قد تأتي بقرية بعيدة في خصائصها عن خصائص معظم قرى تلك الدولة، كأن تأتي بالصدفة قرية ساحلية معظم سكانها من الصيادين أو قرية قريبة من مشروع صناعي ضخم يستوعب في قواه العاملة معظم سكانها، هذه القرية أو تلك قد يأخذ النمط المعيشي لسكانها طابعا خاصا بعيدا عن النمط المعيشي المعتاد لبقية القرى، لذلك فأي منها لا يمكن أن يعطي تمثيلا مقبولا لريف تلك الدولة، لذلك فإن الباحث وعلى ضوء خبرته السابقة يتعمد اختيار قرية معينة يرى أنها يمكن أن تمثل الريف، وهذه الطريقة غير عملية وعادة ما يتم اللجوء إليها في البحوث التمهيدية.

4-2-2- العينة الحصصية: وهي نوع خاص من العينات غير العشوائية وتستخدم كثيرا في معاينة الرأي العام(على سبيل المثال عمليات استطلاع الرأي العام التي يقوم بها معهد جالوب قبل إجراء انتخابات الرئاسة في الولايات المتحدة الأمريكية)، في هذه الحالة يقسم المجتمع موضوع الدراسة إلى طبقات بالنسبة إلى صفات أو خصائص معينة، ويتم العمل على تمثيل كل طبقة منها في العينة بنسبة وجودها في المجتمع الأصلي، فعلى سبيل المثال في حالة دراسة الدخل في منطقة ما، وكان حجم العينة المطلوبة 100فرد مثلا، فعندما يريد الباحث أن يقوم جامعوا البيانات بالحصول على البيانات من 20موظفا، 45 من العمال الحرفيين، 35 من ذوي الأعمال الحرة، مع ترك الحرية لجامعي البيانات في اختيار الأفراد المطلوبة فيها حدود المواصفات الموضوعة لكل طبقة من الطبقات المذكورة مما قد يترتب عليه تمييزا كبيرا، فعموما يلجأ الباحث إلى العينة الحصصية إذا كان المرغوب هو إظهار النتائج في وقت قصير مع التغاضي عن توافر درجة عالية بتلك النتائج.

5- مفهوم العينة النفاذية والعينة غير النفاذية Échantillon exhaustif et non exhaustif:

عندما يكون السحب بالإرجاع حيث يمكن أن تظهر المفردة أكثر من مرة في العينة، نسمي هذه المعاينة غير نفاذية لأن تكرار العملية لا يؤدي إلى تقليص عدد المفردات في المجتمع، والعكس نسمي المعاينة بدون إرجاع معاينة نفاذية. هناك فرضيتان تتكرران في عدد من العلاقات الرياضية التي سنراها لاحقا، هما فرضية أن قيم مفردات العينة مستقلة والمجتمع لانهائي. يتحقق شرط الاستقلال إذا كانت المعاينة غير نفاذية، وإذا كانت كذلك يمكن اعتبار المجتمع مجتمعا غير محدود.

6- إحصائية العينة Statistique de l'échantillon: المقاييس الإحصائية التي تحسب من بيانات مجتمع الدراسة بأكمله يطلق عليها معالم المجتمع (Paramètres of population, Paramètres d'une population)، أما المقاييس الإحصائية التي تحسب من بيانات عينة مسحوبة من مجتمع الدراسة فيطلق عليها إحصائية (Statistic, Statistique)، وتعتبر كل إحصائية منها بمثابة تقدير أو قيمه تقديرية لمعلمة المجتمع المناظر، فيكون المتوسط الحسابي المحسوب من بيانات العينة تقدير لمعلمة المجتمع

المناظرة وهي المتوسط الحسابي المسحوب منه هذه العينة وهكذا.. و يجب ألا يغيب عن الأذهان بأن حساب قيمة المتوسط الحسابي من بيانات العينة ليس هدفاً في حد ذاته ولكن وسيلة للتعرف على المتوسط الحسابي للمجتمع موضوع الدراسة.. وهكذا بالحال بالنسبة لباقي المقاييس الإحصائية التي تحسب من العينة.

للتفرقة بين المعالم والإحصاءات يجب أن نرمز لكل منها برموز تختلف عن رموز الأخرى، على سبيل المثال يرمز للمتوسط الحسابي للمجتمع بالرمز μ بينما يرمز للمتوسط الحسابي للعينة بالرمز $\bar{x}$ ، أيضاً للانحراف المعياري للمجتمع بالرمز σ بينما يرمز للانحراف المعياري للعينة بالرمز S وهكذا.

المحور الثاني: توزيعات المعاينة.

تمهيد: نفرض أن لدينا مجتمعا من المفردات يتبع توزيعا احتماليا معينا(سواء كان هذا المجتمع كبيرا أو محدودا) وأننا بصدد سحب عينة حجمها n من المجتمع، بالطبع ليس معنى هذا أن هناك عينة واحدة يمكن سحبها ولكن يكون أمامنا عدد كبير من العينات التي يمكن سحبها من هذا المجتمع والتي حجم كل منها هو n من المفردات.

والآن نفرض أننا سحبنا عينة حجمها n من هذا المجتمع وحسبنا من هذه العينة مقياسا معينا(وليكن الوسط الحسابي) ثم سحبنا عينة ثانية لها نفس الحجم n وحسبنا منها نفس المقياس، ثم سحبنا عينة ثالثة وحسبنا منها نفس المقياس، وهكذا بالنسبة لجميع العينات التي يمكن سحبها من هذا المجتمع، سنجد أمامنا عددا كبيرا من القيم لنفس المقياس ولا نتوقع أن تكون جميع القيم التي حصلنا عليها من العينات لهذا المقياس متساوية وإنما ستكون مختلفة عن بعضها وتكون مجتمعا آخر عدد مفرداته أكبر بكثير من عدد مفردات المجتمع الأصلي، وعلى ذلك يمكن النظر إلى هذا المقياس على أنه متغير عشوائي يأخذ قيما مختلفة (التي حصلنا عليها من هذه العينات) ويتبع توزيعا معينا ربما يختلف أو لا يختلف عن توزيع المجتمع الأصلي يسمى بتوزيع المعاينة لهذا المقياس، سواء كان هذا المقياس هو الوسط الحسابي أو نسبة المفردات التي لها صفة معينة أو الانحراف المعياري أو غيره من المقاييس الإحصائية.

1- تعريف توريع المعاينة: يمكن تعريف توزيع المعاينة على أنه توزيع احتمالي لكل القيم الممكنة لإحصاءة معينة وذلك لجميع العينات العشوائية الممكنة والتي لها نفس الحجم والمسحوبة بنفس الطريقة من المجتمع المراد دراسته، وبذلك فإن التوزيع الاحتمالي لإحصاءة ما هو توزيع المعاينة لتلك الإحصاءة يكون له متوسط حسابي وانحراف معياري.

2- إحصاءة العينة ومعلمة المجتمع: إحصاءة العينة هي مقدر لمعلمة المجتمع يتم حسابها من بيانات العينة التي تمثل هذا المجتمع، ويعد الوسط الحسابي $\bar{x}$ وتباين العينة S^2 من إحصائيات العينة، فإذا كانت لدينا عينة عشوائية حجمها n مفردة $(x_1, x_2....x_n)$ فإن الوسط الحسابي لهذه العينة هو $\bar{x}$ حيث: $\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{n}$

أما تباين العينة فهو الإحصاءة S^2 حيث: $S^2 = \frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2}{n-1}$

استخدمنا $n-1$ في مقام المعادلة بدلا من n وذلك لكي يكون التقدير الناتج تقديرا غير متحيزا للمعلمة σ^2 أي أن: $E(S^2) = \sigma^2$

تكون العلاقة: $E(S^2) = \sigma^2$ صحيحة إذا كان المجتمع الذي سحبت منه العينة غير محدود أو عندما يكون حجم المجتمع كبير جدا.

أما إذا كان المجتمع الذي سحبت منه العينة محدود حجمه N يكون: $E(S^2) = \frac{N}{N-1}\sigma^2$

كما أن معلمة المجتمع تعبير عددي يلخص خصائص جميع قيم المجتمع إذا كانت غير خاضعة للأخطاء، ويتم حساب معالم المجتمع عند استخدام أسلوب الحصر الشامل بشكل تام ودقيق، أي عندما لا تقع أخطاء، ويعد الوسط الحسابي للمجتمع μ وتباينه σ^2 من أهم المعالم حيث:

$$\sigma^2 = \frac{\sum_{i=1}^{N}(X_i - \mu)^2}{N} \qquad ; \mu = \frac{\sum_{i=1}^{N} X_i}{N}$$

3–المعاينة بالإرجاع والمعاينة بدون إرجاع: خلال عملية السحب إذا قمنا بسحب مفردة من المجتمع فإنه في هذه الحالة لدينا الخيار في إرجاع هذه المفردة أو عدم إرجاعها قبل إجراء عملية السحب الثانية، ففي الحالة الأولى فإن المفردة يمكن أن تظهر عدة مرات، بينما في الحالة الثانية يمكن أن تظهر المفردة مرة واحدة فقط، وبالتالي ففي العينات التي يمكن أن نختار فيها مفردات المجتمع أكثر من مرة تسمى المعاينة بالإرجاع ويكون عدد العينات الممكن سحبها من المجتمع هي: N^n، بينما إذا كانت المفردة المسحوبة من المجتمع لا يمكن أن تظهر أكثر من مرة فتسمى المعاينة بدون إرجاع، ويكون عدد العينات الممكن سحبها من المجتمع هي: C_N^n حيث:

$$C_N^n = \frac{N!}{(N-n)! \times n!}$$

مثال01: إذا كان لدينا مجتمع مكون من المفردات التالية:

$X_1=2$, $X_2= 4$, $X_3= 6$, $X_4=8$, $X_5=10$.

أ– أوجد متوسط المجتمع μ وتباينه σ^2 ؟

ب–أوجد الوسط الحسابي للعينات ذات الحجم $n=2$ إذا كان السحب بدون إرجاع، ثم أحسب القيمة المتوقعة والتباين للمتغير $\bar{X}$ ؟

ت–أحسب التباين S^2 لجميع العينات العشوائية الممكنة ذات الحجم $n=2$ ثم تأكد من أن: $E(S^2)= \frac{N}{N-1}\sigma^2$

الحل:

أ– متوسط المجتمع وتباينه:

متوسط المجتمع: $\mu = \frac{\sum_{i=1}^{N} X_i}{N} =(2+4+6+8+10)/5=6$

تباين المجتمع: $\sigma^2 = \frac{\sum_{i=1}^{n}(X_i - \mu)^2}{N} =(2-6)^2+(4-6)^2+(6-6)^2+(8-6)^2+(10-6)^2/5=8$

ب– إيجاد الوسط الحسابي للعينات ذات الحجم $n=2$ إذا كان السحب بدون إرجاع:

– عدد الحالات الممكنة: $C_N^n = \frac{N!}{(N-n)! \times n!} = \frac{5!}{(5-2)! \times 2!} =10$

يمكن توضيح العينات الممكنة والوسط الحسابي المقابل لها من خلال الجدول الآتي:

العينات	$\sum X_i$	$\bar{x}_i$
(2 , 4)	6	3
(2 , 6)	8	4
(2 , 8)	10	5
(2 , 10)	12	6
(4 , 6)	10	5
(4 , 8)	12	6
(4 , 10)	14	7
(6 , 8)	14	7
(6 , 10)	16	8
(8 , 10)	18	9

- التوزيع الاحتمالي $(\bar{x})$ للعينات ذات الحجم n=2 هو:

$\bar{x}_i$	3	4	4	6	7	8	9
$P(\bar{x}_i)$	1/10	1/10	2/10	2/10	2/10	1/10	1/10

- القيمة المتوقعة للوسط الحسابي $(\bar{x})$ هي:

$$E(\bar{x}) = \sum \bar{x}_i \,.\, P(\bar{x}_i)$$

$$=3(1/10)+4(1/10)+5(2/10)+6(2/10)+7(2/10)+8(1/10)+9(1/10)= 6$$

ومنه: $E(\bar{x}) = \mu = 6$

أما تباين الوسط الحسابي فهو: $var(\bar{x}) = E(\bar{x})^2 - [E(\bar{x})]^2$

$$E(\bar{x})^2 = \sum \bar{x}_i^2 \,.\, P(\bar{x}_i)$$

$$=3^2(1/10)+4^2(1/10)+5^2(2/10)+6^2(2/10)+7^2(2/10)+8^2(1/10)+9^2(1/10)=39$$

$$var(\bar{x}) = 39-6^2 = 3$$

ت– حساب التباين S^2 لجميع العينات ذات الحجم n=2.

$$S^2 = \frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})^2}{n-1}$$

$$= \frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})^2}{2-1}$$

ويمكن تلخيص قيم S^2 المقابلة لكل عينة في الجدول التالي:

العينات	$\sum X_i$	$\bar{x}_i$	$\sum (X_i - \bar{X})^2$	S^2
(2 , 4)	6	3	2	2
(2 , 6)	8	4	8	8
(2 , 8)	10	5	18	18
(2 , 10)	12	6	32	32
(4 , 6)	10	5	2	2
(4 , 8)	12	6	8	8
(4 , 10)	14	7	18	18
(6 , 8)	14	7	2	2
(6 , 10)	16	8	8	8
(8 , 10)	18	9	2	2

انطلاقا من الجدول يمكننا الحصول على التوزيع الاحتمالي ل S^2.

S^2	2	8	18	32
$P(S^2)$	4/10	3/10	2/10	1/10

من خلال الجدول نجد:

$$E(S^2)= \sum S^2 . P(S^2)$$
$$= 2(4/10)+8(3/10)+18(2/10)+32(1/10)= 10$$

التأكد من أن:

$$E(\mathbf{S^2})= \frac{N}{N-1} \quad \boldsymbol{\sigma}^2 = \frac{5}{5-1} \; 8 = 10$$

4- توزيع المعاينة للمتوسطات.

نفرض أننا سحبنا عينة حجمها n من مجتمع ما، متوسطه يساوي μ وتباينه σ^2، فإن المتوسط الحسابي $\bar{X}$ للعينة يخضع لتوزيع معين، متوسط هذا التوزيع وتباينه نميزه في حالتين:

4-1- إذا كان السحب بالإرجاع أو المجتمع لانهائي (غير محدود):

إذا كانت $(x_1 , x_2 \ldots\ldots x_n)$ هي مفردات عينة عشوائية مسحوبة من مجتمع غير محدود متوسطه μ وتباينه σ^2، فإن القيمة المتوقعة والتباين للمتغير $\bar{x}$ هما:

$$E(\bar{x})= \mu_{\bar{X}} = \mu$$
$$\mathrm{var}(\bar{x}) = \sigma_{\bar{X}}^2 = \frac{\sigma^2}{n}$$

ومنه يكون الانحراف المعياري للمتوسط الحسابي $\bar{x}$ كما يلي:

$$\sigma_{\bar{X}} = \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

برهان العلاقتين:

$$E(\bar{x}) = E\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i\right) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} E(X_i) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \mu = \frac{1}{n} n\,\mu = \mu$$

$$var(\bar{x}) = v\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i\right) = 1/n^2 \sum_{i=1}^{n} V(X_i) = 1/n^2\, n\sigma^2 = \sigma^2/n$$

4–2– إذا كان السحب بدون إرجاع أو المجتمع محدود:

إذا كانت العينة مسحوبة من مجتمع محدود أو كان السحب بدون إرجاع، فإن القيمة المتوقعة والتباين للمتوسط الحسابي $\bar{x}$ هما:

- متوسط توزيع المعاينة

$$E(\bar{x}) = \mu_{\bar{X}} = \mu$$

- التباين:

$$var(\bar{x}) = \sigma_{\bar{X}}^2 = \frac{\sigma^2}{n}\left(\frac{N-n}{N-1}\right)$$

- *الانحراف المعياري:*

$$\sigma_{\bar{X}} = \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\sqrt{\frac{N-n}{N-1}}$$

المقدار $\sqrt{\frac{N-n}{N-1}}$ يسمى بمعامل تصحيح المجتمعات المحدودة، فكلما كانت N كبيرة فإن هذه النسبة تقترب من الواحد فيمكن الاستغناء عنها، وعادة يستعمل معامل التصحيح إذا تحقق الشرط $\frac{n}{N} \geq 0.05$

مثال02: إذا كان لدينا مجتمع يتكون من المفردات التالية: $x_1 = 2, \quad x_2 = 1, \quad x_3 = 3$

1. أوجد متوسط وتباين المجتمع.

2. أوجد توزيع المعاينة للوسط الحسابي للعينات ذات الحجم n=2 التي يمكن سحبها من هذا المجتمع في كل من الحالات التالية: أ–إذا كان السحب بإرجاع. ب–إذا كان السحب بدون إرجاع.

3. أوجد المتوسط الحسابي و الانحراف المعياري لتوزيع المعاينة في الحالات التالية:

أ–إذا كان السحب بإرجاع. ب–إذا كان السحب بدون إرجاع.

الحل:

1– إيجاد متوسط وتباين المجتمع.

متوسط المجتمع:

$$\mu = \frac{\sum_{i=1}^{n} X_i}{N} = (1+2+3)/3 = 2$$

تباين المجتمع: $\sigma^2 = \frac{\sum_{i=1}^{n}(X_i-\mu)^2}{N}$ $=(1-2)^2+(2-2)^2+(3-2)^2/3= 0.66$

2- إيجاد توزيع المعاينة للمتوسط الحسابي والتباين لعينة ذات حجم n=2 التي يمكن سحبها من هذا المجتمع:

أ: إذا كان السحب بالإرجاع.

- عدد العينات الممكن سحبها هي: $3^2= 9$

يمكن توضيح ذلك من خلال الجدول الآتي:

العينة	(1,1)	(1,2)	(1,3)	(2,1)	(2,2)	(2,3)	(3,1)	(3,2)	(3,3)
المتوسط الحسابي $\bar{x}_i$	1	1.5	2	1.5	2	2.5	2	2.5	3

المتوسط الحسابي لكل عينة هو: $\bar{x}_1=\frac{1+1}{2}=1;\ \bar{x}_2=\frac{1+2}{2}=1.5;\ .....\ \bar{x}_9=\frac{3+3}{2}=3$

انطلاقا من الجدول السابق يمكننا وضع التوزيع الاحتمالي للمتغير $\bar{X}$ والمبين في الجدول الموالي:

$\bar{x}_i$	$P(\bar{x}_i)$	$\bar{x}_i . P(\bar{x}_i)$	$\bar{x}_i^2$	$\bar{x}_i^2 . P(\bar{x}_i)$
1	1/9	1/9	1	1/9
1.5	2/9	3/9	2.25	4.5/9
2	3/9	6/9	4	12/9
2.5	2/9	5/9	6.25	12.5/9
3	1/9	3/9	9	9/9
المجموع	1	2	22.5	39/9

ب- إذا كان السحب بدون إرجاع:

عدد الحالات الممكنة: $C_3^2=\frac{3!}{(3-2)!\times 2!}=3$ لا يوجد تكرار ويمكن توضيح ذلك من خلال الجدول الآتي:

العينة	(1,2)	(1,3)	(2,3)
المتوسط الحسابي $\bar{x}_i$	1.5	2	2.5

انطلاقا من الجدول السابق يمكننا وضع التوزيع الاحتمالي للمتغير $\bar{X}$ والمبين في الجدول الموالي:

$\bar{x}_i$	$P(\bar{x}_i)$	$\bar{x}_i . P(\bar{x}_i)$	$\bar{x}_i^2$	$\bar{x}_i^2 . P(\bar{x}_i)$
1.5	1/3	1.5/3	2.25	2.25/3
2	1/3	2/3	4	4/3
2.5	1/3	2.5/3	6.25	6.25/3
المجموع	1	2	12.5	12.5/3

3-إيجاد المتوسط الحسابي و الانحراف المعياري لتوزيع المعاينة:

أ: إذا كان السحب بالإرجاع.

- متوسط توزيع المعاينة: $\mu_{\overline{X}} = \sum \bar{x}_i \,.\, P(\bar{x}_i) = 2 = \mu$

- تباين متوسط توزيع المعاينة:

$$\sigma_{\overline{X}}^2 = E(\bar{x})^2 - [E(\bar{x})]^2 = \sum \bar{x}_i^2 \,.\, P(\bar{x}_i) - [E(\bar{x})]^2 = 39/9 - (2)^2 = 1/3 = 0.33$$

للتأكد: $\sigma_{\overline{X}}^2 = \frac{\sigma^2}{n} = \frac{0.66}{2} = 0.33$

- الانحراف المعياري: $\sigma_{\overline{X}} = \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = \frac{0.66}{1.41} = 0.57$

ب-إذا كان السحب بدون إرجاع:

- متوسط توزيع المعاينة: $\mu_{\overline{X}} = \sum \bar{x}_i \,.\, P(\bar{x}_i) = 2 = \mu$

- تباين متوسط توزيع المعاينة:

$$\sigma_{\overline{X}}^2 = E(\bar{x})^2 - [E(\bar{x})]^2 = \sum \bar{x}_i^2 \,.\, P(\bar{x}_i) - [E(\bar{x})]^2 = 12.5/3 - (2)^2 = 0.5/3 = 0.16$$

للتأكد: $\sigma_{\overline{X}}^2 = \frac{\sigma^2}{n}\left(\frac{N-n}{N-1}\right) = \frac{0.66}{2}\left(\frac{3-2}{3-1}\right) = 0.16$

الانحراف المعياري: $\sigma_{\overline{X}} = \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\sqrt{\frac{N-n}{N-1}} = 0.57\sqrt{\frac{3-2}{3-1}} = 0.4$

5- طبيعة توزيع المتوسطات: كل ما تعرضنا له في توزيع المعاينة للمتوسطات هو الوسط الحسابي والانحراف المعياري لهذا التوزيع، لكن نوع وشكل هذا التوزيع يعتمد على توزيع المجتمع الأصلي المسحوبة منه العينة، وحجم العينة n.

5-1- توزيع المعاينة للمتوسط لما يكون توزيع المجتمع طبيعي والتباين معلوم.

نظرية 1: في الحالة التي يكون فيها المجتمع الأصلي المسحوبة منه العينة مجتمع طبيعي أي يتبع توزيع طبيعي $N(\mu, \sigma^2)$ فإن توزيع المعاينة للمتوسط الحسابي $\overline{X}$ يكون في هذه الحالة توزيع طبيعي أيضاً له نفس المتوسط الأصلي μ ولكن انحرافه المعياري يساوي $\sigma/\sqrt{n}$، أي بمعنى أن :

$$X \sim N(\mu, \sigma^2) \quad \Rightarrow \quad \overline{X} \sim N\left(\mu, \frac{\sigma^2}{n}\right)$$

ومن ثم يكون بعد التحول إلى قانون التوزيع الطبيعي المعياري:

$$z = \frac{\sqrt{n}(\bar{x}-\mu)}{\sigma} \sim N(0,1)$$

مثال03: إذا كان بدل السكن المعطى للموظف بإحدى الشركات الكبرى يتبع توزيع طبيعي متوسطه μ يساوي 170 دينار وانحرافه المعياري σ يساوي 8 دنانير.

- اخترنا موظفا عشوائيا فما احتمال أن يقل بدل سكنه عن 166.
- سحبت عينة من 64 موظف، فما هو احتمال أن يكون متوسط بدل سكنهم أكبر من 172 دينار.

الحل:

لدينا: $X \sim N(170, 64)$ حيث $\mu = 170$ و $\sigma = 8$ ومنه $\mu_{\bar{X}} = 170$

$$\sigma_{\bar{X}} = \frac{8}{\sqrt{64}} = 1$$

- احتمال أن يقل بدل سكنه عن 166:

$$P(X< 166) = p(Z<\frac{X-u}{\sigma}) = p(Z<\frac{166-170}{8}) = p(Z< -0.5)$$

$$= 1- p(Z< 0.5)= 1- 0.6915= 0.3085= 30.85\ \%.$$

- احتمال أن يكون متوسط بدل سكنهم أكبر من 172 دينار

$$P(\bar{X} > 172)= P(Z > \frac{\bar{X}-\mu_{\bar{X}}}{\sigma/\sqrt{n}})= P(Z > \frac{172-170}{8/\sqrt{64}})= p(Z > 2)$$

$$= 1-P(Z < 2)= 1- 0.9772= 0.0228= 2.28\ \%.$$

5-2- توزيع المعاينة للمتوسط لما يكون المجتمع لا يتبع توزيع طبيعي وحجم العينة($n > 30$).

نظرية 2: إذا كان المجتمع غير طبيعي فإن $\bar{X}$ لا يخضع للتوزيع الطبيعي ولكنه يتوزع توزيع يكون قريباً من التوزيع الطبيعي لقيم n الكبيرة $(n \geq 30)$ حيث أن:

$$z = \frac{\sqrt{n}(\bar{x}-\mu)}{\sigma} \xrightarrow[n \to \infty]{as} N(0,1)$$

وتعتبر النتيجة السابقة الهامة جداً في الإحصاء وخاصة في التطبيقات العلمية وتسمى نظرية النهاية المركزية Central Limit Theorem والتي تنص على أنه في حالة العينات الكبيرة الحجم فإن المتوسط الحسابي $\bar{X}$ يخضع للتوزيع الطبيعي بالمعاملات μ و $\frac{\sigma^2}{n}$ ، حيث أن μ, σ^2 هما متوسط وتباين المجتمع الأصلي بغض النظر عن شكل توزيع المجتمع الأصلي. ومن ثم فإن قيم n الكبيرة تحقق العلاقة $z = \frac{\sqrt{n}(\bar{x}-\mu)}{\sigma} \sim N(0,1)$ بصرف النظر عن توزيع المجتمع الأصلي.

مثال04: إذا كانت الحوادث الأسبوعية على إحدى الطرق تتبع توزيع بواسون بمتوسط (4) حوادث، أخذت عينة من (64) أسبوعا، فما هو احتمال أن يكون متوسط الحوادث فيها يزيد عن 4.2 حادثة؟

الحل:

من خصائص توزيع بواسون

$\mu = \lambda = 4$

$\boldsymbol{\sigma}^2 = \lambda = 4$

$\bar{x}$ يتبع توزيع طبيعي

$\bar{x} \sim N(\mu = \mu_{\bar{x}} \, , \, \sigma_{\bar{X}}^2 = \frac{\sigma^2}{n})$

$\mu_{\bar{X}} = \mu = 4$

وانحرافه المعياري

$$\sigma_{\bar{X}} = \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = \frac{2}{\sqrt{64}} = 0.25$$

احتمال أن يكون متوسط الحوادث فيها يزيد عن 4.2 حادثة

$$P(\bar{x} > 4.2) = P(Z > \frac{\bar{X}-\mu_{\bar{x}}}{\sigma/\sqrt{n}}) = P(Z > \frac{4.2-4}{0.25}) = P(Z > 0.8)$$
$$= 1 - P(Z < 0.8) = 1 - 0.7881 = 0.2119 = 21.19\ \%.$$

5-3- توزيع المعاينة للمتوسط لما يكون توزيع المجتمع طبيعي وتباينه $\boldsymbol{\sigma}^2$ مجهول و($n < 30$).

نظرية03: إذا أخذت عينة عشوائية حجمها n من مجتمع له توزيع طبيعي متوسطه μ وتباينه σ^2 مجهول، وكان حجم العينة أقل من 30 فإنه يتم استبدال $\boldsymbol{\sigma}$ المجهول بالانحراف المعياري للعينة s ويكون توزيع المعاينة للمتغير $\mathbf{T}$ حيث: $\mathbf{T} = \frac{\bar{X}-\mu_{\bar{x}}}{s/\sqrt{n}}$ هو توزيع ستيودنت بدرجات حرية (n-1).

وتتمثل الشروط الثلاثة لاستخدام التوزيع $\mathbf{T}$ فيما يلي:

- أن يكون المجتمع الذي سحبت منه العينة يتبع التوزيع الطبيعي؛
- الانحراف المعياري للمجتمع غير معروف(أو مجهول)؛
- العينة صغيرة أي حجمها أقل من 30 مفردة.

مثال05: إذا كانت أطوال الطلاب تتبع توزيع طبيعي متوسطه 167 سم، فلو سحبت عينة من 4 طلاب، ما احتمال أن يزيد متوسطها عن 183 سم إذا كان الانحراف المعياري للعينة 10سم؟

الحل:

$$t = \frac{\bar{X}-\mu_{\bar{X}}}{s/\sqrt{n}} = \frac{183-167}{10/\sqrt{4}} = 3.2$$

$$P(\bar{x} > 183) = P(t_{\alpha,(3)} > 3.18)$$
$$= 0.025$$

مثال06: أوجد قيم t التالية :

$t_{0.05,\,24}$; $t_{0.1,\,10}$; $t_{0.025,\,15}$

الحل: باستخدام جدول توزيع ستيودنت.

$t_{0.05,\,24} = 1.711$; $t_{0.1,\,10} = 1.372$; $t_{0.025,\,15} = 2.131$

5-4- توزيع المعاينة للفروق والمجاميع بين متوسطي عينتين مستقلتين.

نظرية 04: إذا كان $\bar{X}_1$ هو المتوسط الحسابي لعينه عشوائية مسحوبة من مجتمع غير محدود متوسطه هو μ_1 وانحرافه المعياري هو σ_1، وكان $\bar{X}_2$ هو المتوسط الحسابي لعينة عشوائية مسحوبة من مجتمع لانهائي آخر متوسط μ_2 وانحرافه المعياري σ_2 وكانت العينتين مستقلتين فإن المجموع /الفرق الجبري لمتوسط العينتين $(\bar{X}_1 - \bar{X}_2)$يخضع لتوزيع المعاينة بالمعاملات:

$$\mu_{(\bar{x}\pm\bar{x}_2)} = \mu_1 \pm \mu_2 \quad \text{and} \quad \sigma^2_{(\bar{x}_1\pm\bar{x}_2)} = \frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}$$

حيث n_1, n_2 هما حجم العينة الأولى والثانية.

مثال07: ليكن المجتمع: $v_1 = 3, 7, 8$ والمجتمع: $v_2 = 2, 4$ تحقق من أن:

الحل: $\mu_{v1-v2} = \mu_{v1} - \mu_{v2}$. $\quad \sigma^2_{v1-v2} = \sigma^2_{v1} + \sigma^2_{v2}$.

$\mu_{v1} = (3 + 7 + 8)/3 = 6$; $\mu_{v2} = (2 + 4)/2 = 3$ => $\mu_{v1} - \mu_{v2} = 6 - 3 = 3$

$\mu_{v1-v2} = (1 + 5 + 6 - 1 + 3 + 4)/6 = 3$

$\sigma^2_{v1} = (3^2 + 7^2 + 8^2)/3 - 6^2 = 14/3$

$\sigma^2_{v2} = (2^2 + 4^2)/2 - 3^2 = 1$ => $\sigma^2_{v1} + \sigma^2_{v2} = 17/3$

$\sigma^2_{v1-v2} = (1^2+5^2+6^2+1^2+3^2+4^2)/6 - 3^2 = 17/3$.

ومنه فإن:

$\mu_{v1-v2} = \mu_{v1} - \mu_{v2}$. $\quad \sigma^2_{v1-v2} = \sigma^2_{v1} + \sigma^2_{v2}$.

5-4-1- توزيع المعاينة للفرق بين متوسطين عندما يكون المجتمعين طبيعيين والتباينيين معلومين.

نظرية05: إذا كانت$(x_1, x_2 \ldots x_{n1})$ عينة عشوائية من مجتمع يتبع توزيعا طبيعيا وسطه μ_1 وتباينه σ_1^2

وكانت($x_1, x_2 \ldots x_{n2}$)، عينة عشوائية مستقلة من مجتمع يتبع توزيعا طبيعيا وسطه μ_2 وتباينه σ_2^2، إذا رمزنا لوسطي العينتين بـ $\bar{x}_1$ ، $\bar{x}_2$ على الترتيب فإن المتغير العشوائي ($\bar{x}_1 - \bar{x}_2$) يخضع لتوزيع طبيعي وسطه $(\mu_1 - \mu_2)$ وتباينه $\frac{\sigma_1^2}{n_1}+\frac{\sigma_2^2}{n_2}$ أي أن:

$$z=\frac{(\bar{x}_1-\bar{x}_2)-(\mu_1-\mu_2)}{\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1}+\frac{\sigma_2^2}{n_2}}} \sim N(0,1)$$

مثال08: إذا كانت أجور المعلمين في المدارس الحكومية تخضع لتوزيع طبيعي وسطه 2000 وانحرافه المعياري 500، ورواتب المعلمين في المدارس الخاصة تخضع لتوزيع طبيعي وسطه 1200 وانحرافه المعياري 700،أخذت عينة عشوائية من المعلمين في المدارس الحكومية حجمها 40 معلما وعبرنا عن وسطها الحسابي بالرمز $\bar{x}_1$، وأخذت عينة عشوائية من معلمي المدارس الخاصة حجمها 35 معلما وعبرنا عن وسطها الحسابي بالرمز $\bar{x}_2$.

- أوجد احتمال أن يزيد متوسط أجور المعلمين في المدارس الحكومية عن نظرائهم في المدارس الخاصة بمقدار 700؟

الحل: إيجاد $(\bar{x}_1 - \bar{x}_2 > 700)$.

$$P(\bar{x}_1-\bar{x}_2>700)=p\left(z>\frac{(\bar{x}_1-\bar{x}_2)-(\mu_1-\mu_2)}{\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1}+\frac{\sigma_2^2}{n_2}}}\right)=p\left(z>\frac{700-(2000-1200)}{\sqrt{\frac{(500)^2}{40}+\frac{(700)^2}{35}}}\right)$$

$$=p\left(z>\frac{-100}{142.3}\right)=p(z>-0.7)=p(z<0.7)=0.7580=75.80\ \%.$$

أي احتمال أن يزيد متوسط أجور المعلمين في المدارس الحكومية عن نظرائهم في المدارس الخاصة بمقدار 700 هو 75.80%.

5-4-2- توزيع المعاينة للفرق بين متوسطين عندما يكون المجتمعين غير طبيعيين وحجم العينتين كبير ($n_1 > 30$)و($n_2 > 30$)

نظرية 06: إذا كانت ($x_1, x_2 \ldots x_{n1}$) عينة عشوائية من مجتمع وسطه μ_1 وتباينه σ_1^2 وكانت($x_1, x_2 \ldots x_{n2}$)، عينة عشوائية مستقلة من مجتمع وسطه μ_2 وتباينه σ_2^2، إذا رمزنا لوسطي العينتين بـ $\bar{x}_1$ ، $\bar{x}_2$ على الترتيب، وكانت ($n_1 > 30$)، ($n_2 > 30$)، فإن المتغير العشوائي ($\bar{x}_1 - \bar{x}_2$) يخضع لتوزيع طبيعي وسطه $(\mu_1 - \mu_2)$ وتباينه $\frac{\sigma_1^2}{n_1}+\frac{\sigma_2^2}{n_2}$ أي أن:

$$z=\frac{(\bar{x}_1-\bar{x}_2)-(\mu_1-\mu_2)}{\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1}+\frac{\sigma_2^2}{n_2}}} \sim N(0,1)$$

وذلك حسب نظرية النهاية المركزية.

ملاحظة: بالنسبة للحالة السابقة أي (النظرية 06)، إذا كان تبايني المجتمعين مجهولين، فإنه يمكن استعمال تباين كل عينة بدلا من التباين المقابل المجهول، أي نستخدم S_1^2 كتقدير لـ σ_1^2 وS_2^2 كتقدير لـσ_2^2، وتبقى العلاقة z صحيحة في حالة العينات الكبيرة فقط، أي ($n_1 > 30$) و ($n_2 > 30$).

مثال09: إذا كانت أعمار المتخرجين والمتخرجات الحاصلين على شهادة الليسانس في تخصص محاسبة تخضع لتوزيع متوسطه 23سنة و22 سنة على الترتيب، كما تبين أن الانحراف المعياري لأعمارهم 1.5 سنة و2 سنة على الترتيب، أخذت عينة عشوائية حجمها 40 طالبا و50 طالبة، إذا رمزنا لمتوسط أعمار المتخرجين والمتخرجات بـ $\bar{x}_1$ ، $\bar{x}_2$ على الترتيب.

- أوجد احتمال أن يزيد متوسط أعمار المتخرجين عن المتخرجات بمقدار1.25 سنة أي $P(\bar{x}_1 - \bar{x}_2 > 1.25)$
- أوجد احتمال أن يكون متوسط أعمار العينة الأولى أقل من متوسط أعمار العينة الثانية؟

الحل:

$$P(\bar{x}_1 - \bar{x}_2 > 1.25) = p\left(z > \frac{(\bar{x}_1 - \bar{x}_2) - (\mu_1 - \mu_2)}{\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}}} \right) = p\left(z > \frac{1.25-(23-22)}{\sqrt{\frac{(1.5)^2}{40}+\frac{(2)^2}{50}}}\right)$$

$$= p\left(z > \frac{0.25}{0.369}\right) = p(z > 0.68) = 1 - p(z < 0.68) = 1 - 0.7517 = 0.2483$$

$$= 24.83\ \%.$$

احتمال أن يزيد متوسط أعمار المتخرجين عن المتخرجات بمقدار1.25 سنة هو 24.83%.

$$P(\bar{x}_1 - \bar{x}_2 < 0) = p\left(z < \frac{0-(23-22)}{\sqrt{\frac{(1.5)^2}{40}+\frac{(2)^2}{50}}}\right) = p(z < -2.71) = p(z > 2.71)$$

$$= 1 - p(z < 2.71) = 1 - 0.9966 = 0.0034 = 0.34\%.$$

احتمال أن يكون متوسط أعمار العينة الأولى أقل من متوسط أعمار العينة الثانية هو 0.34%.

5-4-3- توزيع المعاينة للفرق بين متوسطين عندما يكون المجتمعين طبيعيين والتباينيين مجهولين والعينات صغيرة الحجم ($n_1 < 30$)و($n_2 < 30$)

غالبا ما تكون الانحرافات المعيارية للمجتمعات الإحصائية مجهولة، وبالتالي يتم تقدير الانحراف المعياري للفرق بين ($\bar{x}_1 - \bar{x}_2$) باستخدام تباين العينتين، وفي حالة ما إذا كانت العينتين صغيرتي الحجم، فإن توزيع المعاينة لـ ($\bar{x}_1 - \bar{x}_2$) لا يتبع توزيع طبيعي ولكن يتبع توزيع ستيودنت، وعليه فإن توزيع المعاينة للفرق بين متوسطي عينتين عندما يكون التباينين مجهولين وحجم العينتين صغير نميز فيه حالتين مختلفتين:

5-4-3-1- حالة تبايني المجتمعين مجهولين ومتساويين.

نظرية 07: إذا كان $\bar{X}_1$ هو المتوسط الحسابي لعينه عشوائية حجمها n_1 مسحوبة من مجتمع يتبع توزيع طبيعي متوسطه هو μ_1 وتباينه هو σ_1^2 ، وكان $\bar{X}_2$ هو المتوسط الحسابي لعينة عشوائية حجمها n_2 مسحوبة من مجتمع آخر يتبع توزيع طبيعي متوسطه μ_2 وتباينه σ_2^2، وكان حجم العينتين صغير وتبايني المجتمعين مجهولين لكنهما متساويان، فإن توزيع المعاينة للفرق ($\bar{x}_1 - \bar{x}_2$) يتبع توزيع ستيودنت حيث:

$$T = \frac{(\bar{x}1 - \bar{x}2) - (\mu1 - \mu2)}{Sp.\sqrt{\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}}}$$

يخضع لتوزيع ستيودنت بدرجات حرية: $v = n_1 + n_2 - 2$

حيث:

$$Sp = \sqrt{\frac{(n_1-1)s_1^2 + (n_2-1)s_2^2}{n_1+n_2-2}}$$

إذا كان σ^2 يمثل التباين المشترك للمجتمعين وهو مجهول القيمة فإن $\sigma^2 = \sigma_1^2 = \sigma_2^2$، وعليه تكون صيغة الانحراف المعياري للفرق ($\bar{x}_1 - \bar{x}_2$) هي:

$$\sigma_{\bar{X}_1 - \bar{X}_2} = \sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}} = \sqrt{\sigma^2\left(\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}\right)}$$

ولتقدير التباين المشترك نستخدم تباينات العينتين S_1^2 و S_2^2 التي تعطي تقديرات مستقلة لـ σ^2، ومنه فإن مقدر التباين المشترك σ^2 هو S_p^2 حيث:

$$S_p^2 = \frac{(n_1-1)s_1^2 + (n_2-1)s_2^2}{n_1+n_2-2}$$

ويسمى S_p^2 بالتباين المجمع (المشترك) للعينتين معا.

مثال10: أخذت عينة عشوائية حجمها 14 من مجتمع طبيعي متوسطه65، وأخذت عينة عشوائية أخرى مستقلة عن الأولى حجمها 18 من مجتمع طبيعي آخر متوسطه 72، وكان الانحراف المعياري للعينتين هما 20 و25 على الترتيب، وكان تبايني المجتمعين مجهولين لكنهما متساويين.

أوجد احتمال أن يكون الفرق بين متوسطي العينتين أقل من 4؟

الحل: إيجاد $P(\bar{x}_1 - \bar{x}_2 < 4)$

في البداية نقوم بحساب قيمة التباين المشترك كما يلي:

$$S_p^2 = \frac{(n_1-1)s_1^2 + (n_2-1)s_2^2}{n_1+n_2-2} = \frac{(14-1)20^2 + (18-1)25^2}{14+18-2} = 527.5$$

$$S_p = \sqrt{527.5} = 22.97.$$

درجات الحرية: $df = 14 + 18 - 2$

$$P(\bar{x}_1-\bar{x}_2<4)=p\left(t<\frac{(\bar{x}1-\bar{x}2)-(\mu1-\mu2)}{Sp.\sqrt{\frac{1}{n_1}+\frac{1}{n_2}}}\right)=p\left(t<\frac{(4)-(65-72)}{22.97\sqrt{\frac{1}{14}+\frac{1}{18}}}\right)$$

$$=p(t<1.34)=1-\ p(t_{\alpha,\,30}>1.34)=1-0.10=0.90.$$

أي احتمال أن يكون الفرق بين متوسطي العينتين أقل من 4 هو 0.90 = 90%.

5-4-3-2- حالة تبايني المجتمعين مجهولين وغير متساويين.

نظرية 08: إذا كان $\bar{X}_1$ هو المتوسط الحسابي لعينه عشوائية حجمها n_1 مسحوبة من مجتمع يتبع توزيع طبيعي متوسطه هو μ_1 وتباينه هو σ_1^2، وكان $\bar{X}_2$ هو المتوسط الحسابي لعينة عشوائية حجمها n_2 مسحوبة من مجتمع آخر يتبع توزيع طبيعي متوسطه μ_2 وتباينه σ_2^2، وكان حجم العينتين صغير وتبايني المجتمعين مجهولين لكنهما غير متساويين، فإن توزيع المعاينة للفرق ($\bar{x}_1-\bar{x}_2$) يتبع توزيع ستيودنت حيث:

$$T=\frac{(\bar{x}1-\bar{x}2)-(\mu1-\mu2)}{\sqrt{\frac{s_1^2}{n_1}+\frac{s_2^2}{n_2}}}$$

بدرجة حرية ذات الصيغة المركبة التالية:

$$V=\frac{\left(\frac{s_1^2}{n_1}+\frac{s_2^2}{n_2}\right)^2}{\frac{\left(\frac{s_1^2}{n_1}\right)^2}{n_1-1}+\frac{\left(\frac{s_2^2}{n_2}\right)^2}{n_2-1}}$$

ملاحظة: إذا كانت قيمة درجات الحرية في المعادلة السابقة عدد حقيقي فمن الضروري التقريب لأقل عدد صحيح، كما أن حساب درجات الحرية في هذه الحالة يكون صعبا، ومن المعلوم أن درجات الحرية تكون دائما أكبر من حجم العينة الأصغر، وبالتالي يمكن أن نستخدم حجم أصغر عينة كدرجات حرية بدلا من استخدام المعادلة السابقة أي أن: درجات الحرية = العدد الأقل لـ (n_1-1)، (n_2-1).

مثال11: سحبت عينة عشوائية حجمها 12 من مجتمع طبيعي متوسطه 15، وسحبت عينة أخرى مستقلة عن العينة الأولى حجمها 10 من مجتمع طبيعي متوسطه 10، فإذا كان تباين العينة الأولى هو 6 وتباين العينة الثانية هو 4، وتبايني المجتمعين مجهولين وغير متساويين.

- أوجد احتمال أن يكون الفرق بين متوسطي العينتين أكبر من 6؟

الحل: إيجاد $P(\bar{x}_1-\bar{x}_2>6)$

$$P(\bar{x}_1-\bar{x}_2>6)=p\left(T>\frac{(\bar{x}1-\bar{x}2)-(\mu1-\mu2)}{\sqrt{\frac{s_1^2}{n_1}+\frac{s_2^2}{n_2}}}\right)=p\left(T>\frac{(6)-(15-10)}{\sqrt{\frac{6}{12}+\frac{4}{10}}}\right)$$

$$=p(T>1.06)$$

درجات الحرية:

$$V=\frac{\left(\frac{s_1^2}{n_1}+\frac{s_2^2}{n_2}\right)^2}{\frac{\left(\frac{s_1^2}{n_1}\right)^2}{n_1-1}+\frac{\left(\frac{s_2^2}{n_2}\right)^2}{n_2-1}}=\frac{\left(\frac{6}{12}+\frac{4}{10}\right)^2}{\frac{\left(\frac{6}{12}\right)^2}{12-1}+\frac{\left(\frac{4}{10}\right)^2}{10-1}}=20$$

$P(\bar{x}_1-\bar{x}_2>6)=p\,(T_{20}>1.06)=0.15.$

خلاصة توزيع المعاينة للمتوسطات

المجتمع	المعاينة	الخاصية
مجتمع ما	سحب بالإرجاع أو بدون إرجاع	$E(\bar{x})=\mu_{\bar{x}}=\mu$
مجتمع ما	سحب بالإرجاع	$\sigma_{\bar{X}}^2=\frac{\sigma^2}{n}$
مجتمع ما حجمه N	سحب بدون إرجاع	$\sigma_{\bar{X}}^2=\frac{\sigma^2}{n}\left(\frac{N-n}{N-1}\right)$
مجتمع موزع طبيعيا بمتوسط μ وتباين σ^2	سحب بالإرجاع أو بدون إرجاع	$\bar{x}\approx N(\mu_{\bar{X}},\sigma^2/n)$
مجتمع بمتوسط μ وتباين σ^2 لكن ليس بالضرورة طبيعيا	عندما تكون n كبيرا ($n\geq 30$)	$Z=\frac{\bar{X}-\mu_{\bar{X}}}{\sigma/\sqrt{n}}\approx N(0,1)$
مجتمع موزع طبيعيا بمتوسط μ وتباين مجهول	عندما تكون n صغيرة ($n<30$)	$T=\left(\frac{\bar{x}-\mu}{s/\sqrt{n}}\right)\sim t_{\gamma,\alpha}$ يتبع توزيع tبدرجات حرية $\gamma=n-1$
توزيع المعاينة للفرق عندما يكون المجتمعين طبيعيين والتباينيين معلومين.	مهما كانت n_1 , n_2	$z=\frac{(\bar{x}_1-\bar{x}_2)-(\mu_1-\mu_2)}{\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1}+\frac{\sigma_2^2}{n_2}}}\sim N(0,1)$
توزيع المعاينة للفرق لما يكون المجتمعين غير طبيعيين.	($n_1>30$) و($n_2>30$)	$z=\frac{(\bar{x}_1-\bar{x}_2)-(\mu_1-\mu_2)}{\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1}+\frac{\sigma_2^2}{n_2}}}\sim N(0,1)$
توزيع المعاينة للفرق لما يكون المجتمعين طبيعيين والتباينيين مجهولين ومتساويين $\sigma_1^2=\sigma_2^2$	($n_1<30$) و($n_2<30$)	$T=\frac{(\bar{x}1-\bar{x}2)-(\mu1-\mu2)}{Sp.\sqrt{\frac{1}{n_1}+\frac{1}{n_2}}}$ يتبع توزيع tبدرجات حرية $v=n_1+n_2-2$ حيث: $Sp=\sqrt{\frac{(n_1-1)s_1^2+(n_2-1)s_2^2}{n_1+n_2-2}}$

توزيع المعاينة للفرق لما يكون المجتمعين طبيعيين والتباينيين مجهولين وغير متساويين	$(n_2 < 30)$ و$(n_1 < 30)$	$T = \frac{(\bar{x}1-\bar{x}2)-(\mu1-\mu2)}{\sqrt{\frac{s_1^2}{n_1}+\frac{s_2^2}{n_2}}}$ يتبع توزيع t بدرجة حرية ذات الصيغة المركبة التالية: $V = \frac{\left(\frac{s_1^2}{n_1}+\frac{s_2^2}{n_2}\right)^2}{\frac{\left(\frac{s_1^2}{n_1}\right)^2}{n_1-1}+\frac{\left(\frac{s_2^2}{n_2}\right)^2}{n_2-1}}$

6- توريع المعاينة للنسبة: نفرض أن لدينا مجتمعا ما و أن بعض مفردات هذا المجتمع تتوفر فيها صفة معينة هي p ويمكن أن تكون p مثلا هي نسبة الأفراد الأميين في إحدى المدن أو نسبة الإنتاج التالف من مجموع إنتاج شركة ما، فإذا اخترنا عينة عشوائية حجمها n من هذا المجتمع ووجدنا أن نسبة الصفة في العينة هي r .

وإذا اخترنا عينات أخرى حجم كل منها n فإن هذه النسبة تتغير من عينة لأخرى وعلى ذلك فإنها تكون متغير عشوائيا له توزيع احتمالي تحدده النظرية الآتية:

نظرية 09: إذا كانت P هي نسبة وجود ظاهرة معينة في مجتمع ما، واختيرت من هذا المجتمع عينات كبيرة حجم كل منها n، وكانت r تمثل نسبة وجود هذه الظاهرة في العينات، فإن r تتبع توزيعا طبيعيا وسطه P وتباينه: $\frac{p(1-p)}{n}$.

ونكتب:

$$r \approx \boldsymbol{N}\left(\mu_r = p,\ \sigma_r^2 = \frac{\boldsymbol{p(1-p)}}{\boldsymbol{n}}\right) = \frac{\boldsymbol{pq}}{\boldsymbol{n}}, \qquad q = (1-p)$$:حيث

وعليه فإن:

$$\mu_r = p\ ,\ \ \sigma_r = \sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}$$

ومنه فإن القيمة المعيارية من أجل قيم n الكبيرة تعطى بالعلاقة التالية:

$$Z = \frac{r-p}{\sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}} \sim N(0,1)$$

ملاحظة$_1$: نسبة الصفة في المجتمع (P) نحصل عليها بقسمة عدد المفردات التي تتوافر فيهم هذه الصفة في المجتمع (X) على حجم المجتمع الكلي N أي: $P = \frac{X}{N}$

أما نسبة الصفة في العينة نحصل عليها بقسمة عدد المفردات التي تتوافر فيهم هذه الصفة في العينة (X) على حجم العينة الكلي n أي أن: $r = \frac{x}{n}$

ملاحظة$_2$: إذا كانت Pللمجتمع معلومة فإنه:

_ في حالة مجتمع غير محدود أو كان السحب بالإرجاع: $\sigma_r = \sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}$

– في حالة مجتمع محدود أو كان السحب بدون إرجاع: > 0.05 $\sigma_r = \sqrt{\frac{p(1-p)}{n}\frac{n}{N}} \Rightarrow \sqrt{\frac{N-n}{N-1}}$

ملاحظة3: إذا كانت P للمجتمع غير معلومة فإنه: $\sigma_r = \sqrt{\frac{r(1-r)}{n}}$ حيث r تمثل النسبة في العينة.

مثال12: إذا علمت أن نسبة البيض التالف الذي ينتجه أحد مراكز إنتاج الدواجن هي 0.03 اشترى شخص 400 بيضة من إنتاج هذا المركز ، ما هو احتمال أن يجد من بينها 20 بيضة على الأقل تالفة؟

الحل:

$n = 400$

$r = \frac{x}{n} = \frac{20}{400} = 0.05$

$p = 0.03$ نسبة البيض التالف الذي ينتجه أحد مراكز إنتاج الدواجن.

وبما أن r *تتبع توزيع طبيعي فإن:*

$r \approx N\ (\mu_r = p,\ \sigma_r^2 = \frac{p(1-p)}{n})$

$\mu_r = p = 0.03$

$\sigma_r = \sqrt{\frac{0.03(0.97)}{400}} = 0.0085.$

$p(r \geq 0.05) = p(z \geq \frac{r-\mu r}{\sigma r}) = p(z \geq \frac{0.05-0.03}{0.0085}) = p(z \geq 2.35)$

$= 1 - p(z \leq 2.35) = 1 - 0.9906 = 0.0094 = 0.94\%.$

مثال 13: إذا كانت نسبة التالف في إنتاج إحدى الماكينات هو 10 %،سحبت عينة عشوائية مكونة من 50 وحدة، أحسب احتمال أن يكون بها نسبة إنتاج تالف قدرها 5% على الأكثر؟

الحل:

عندما يكون حجم العينة كبير فإن التوزيع الاحتمالي للنسبة في العينة r سوف يكون قريب من التوزيع الطبيعي

بمتوسط $\mu_r = p = 0.10$ *وانحراف معياري* $\sigma_r = \sqrt{\frac{p(1-p)}{n}} = \sqrt{\frac{0.1(0.9)}{50}} = 0.042$

$p(r \leq 0.05) = p(z \leq \frac{r-\mu r}{\sigma r}) = p(z \leq \frac{0.05-0.1}{0.042}) = p(z \leq -1.19)$

$= 1 - p(z \leq 1.19) = 1 - 0.8830 = 0.1170 = 11.70\%.$

7- توزيع المعاينة للفرق بين نسبتين.

نظرية10: سحبت عينتان عشوائيتان حجمهما n_1 و n_2 من مجتمعين مستقلين يخضع الأول لتوزيع ذو الحدين $B(n_1, p_1)$ والثاني يخضع أيضا لتوزيع ذو الحدين $B(n_2, p_2)$ حيث أن:

$\mu_1= n_1 p_1$ $\sigma_1^2 = n_1 p_1 q_1$ حيث: $q_1=(1-p_1)$

$\mu_2= n_2 p_2$ $\sigma_2^2 = n_2 p_2 q_2$ حيث: $q_2=(1-p_2)$

فتوزيع المعاينة للفرق ما بين النسبتين في العينتين (r_1-r_2) يقترب من التوزيع الطبيعي.

بمتوسط $\mu_{r1-r2} =p_1- p_2.$

وانحراف معياري $\sigma_{r1-r2}= \sqrt{\frac{p_1.(1-p_1)}{n_1}+\frac{p_2.(1-p_2)}{n_2}}$

وهذا عندما يكون حجم العينتين كبير $n\,p \geq 5$ ، $n\,q \geq 5$ ، ومن ثم فإن القيمة المعيارية $\mathbf{Z}$ تتبع توزيع قريب من التوزيع الطبيعي المعياري حيث:

$$Z= \frac{(r_1-r_2)-(p_1-p_2)}{\sqrt{\frac{p_1(1-p_1)}{n_1}+\frac{p_2(1-p_2)}{n_2}}} \sim N(0,1)$$

مثال14: إذا كانت نسبة النجاح في الجامعة الأولى تساوي 0.8، وكانت نسبة النجاح لنفس التخصص في الجامعة الثانية تساوي 0.75، سحبت عينة عشوائية حجمها70 طالبا من الجامعة الأولى وعينة ثانية حجمها 35 طالبا من الجامعة الثانية.

- أوجد احتمال أن تزيد نسبة النجاح في الجامعة الأولى عن نسبة النجاح في الجامعة الثانية بمقدار 0.1 على الأكثر؟

الحل: إيجاد $P(r_1- r_2 \leq 0.1)$

$\mu_{r1-r2} = p_1- p_2 = 0.8 -0.75= 0.05$

$$\sigma_{r1-r2}= \sqrt{\frac{p_1.(1-p_1)}{n_1}+\frac{p_2.(1-p_2)}{n_2}} = \sqrt{\frac{0.8.(0.2)}{70}+\frac{0.75.(0.25)}{35}} =0.0873.$$

$$P(r_1- r_2 \leq 0.1)=p\left(Z \leq \frac{(r_1-r_2)-(p_1-p_2)}{\sqrt{\frac{p_1(1-p_1)}{n_1}+\frac{p_2(1-p_2)}{n_2}}}\right) = p\left(Z \leq \frac{(r_1-r_2)-(p_1-p_2)}{\sigma_{r1-r2}}\right)$$

$$= p\left(Z \leq \frac{(0.1)-(0.8-0.75)}{0.0873}\right) = p\,(z \leq 0.573) =0.7157$$

احتمال أن تزيد نسبة النجاح في الجامعة الأولى عن نسبة النجاح في الجامعة الثانية بمقدار 0.1 على الأكثر 71.57%.

8- توزيع المعاينة لتباين العينة:

نظرية11: إذا سحبت عينة حجمها n من مجتمع له توزيع طبيعي متوسطه μ وتباينه σ^2 أي: $N(\mu, \sigma^2)$

وكانت S^2 تمثل تباين العينة، المتغير العشوائي: $\chi^2 = \frac{(n-1)s^2}{\sigma^2}$ يخضع لتوزيع يسمى توزيع كي مربع χ^2 بعدد درجات حرية يساوي n-1أي أن:

$$\frac{(n-1)s^2}{\sigma^2} \sim \chi^2(n-1)$$

ويعتبر توزيع كي مربع من التوزيعات الهامة في الإحصاء التطبيقي ودالة كثافته هي:

$$\boxed{f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^{(\nu/2)-1}e^{-x/2}}{2^{\nu/2}\Gamma(\nu/2)} & x > 0 \\ 0 & x \leq 0 \end{cases}}$$

وتكون القيمة المتوقعة لهذا التوزيع هي v و تباينه هو $2v$ أي بمعنى أن:

$E(y)=\mu_y=v$ و $V(y)=\sigma^2=2v$

حيث $\Gamma(\alpha)$ هي الدالة قاما و هي تتميز بجملة من الخصائص الرياضية أهمها:

- $\forall\alpha \in N : \Gamma(\alpha) = (\alpha-1)!$ و $\Gamma(1/2) = \sqrt{\pi}$

متوسط تباين العينة:

- مجتمع ما غير محدود و عينة حجمها n فإن متوسط تباين العينة يعطى بالعلاقة التالية:

$$\mu_{S^2} = \left(\frac{n-1}{n}\right)\sigma^2$$

- في حالة سحب عينة عشوائية حجمها n من مجتمع محدود حجمه N و كان السحب بدون إرجاع فإن:

$$\mu_{S^2} = \sigma^2\left(\frac{n-1}{n}\right)\left(\frac{N}{N-1}\right)$$

في حالة ما إذا كان حجم العينة $(n \geq 30)$ فإن متوسط تباين العينة: $E(S^2) \approx \sigma^2$

إثبات العلاقة:

$$E(S^2) = E\left[\frac{1}{n}\sum_i (x_i - \bar{x})^2\right] = E\left[\frac{1}{n}\sum_i x_i^2 - \bar{x}^2\right] = \frac{1}{n}\sum_i E(x_i^2) - E(\bar{x}^2)$$

$$= \frac{1}{n}\sum_i (V(X) + \mu^2) - [V(\bar{x}) + E(\bar{x})^2] = \sigma^2 + \mu^2 - \frac{\sigma^2}{n} - \mu^2 = \sigma^2(1 - \frac{1}{n}) = \sigma^2\left(\frac{n-1}{n}\right)$$

نلاحظ أن: $E\left(S^2\frac{n}{n-1}\right)=\sigma^2$ ونقول عن $S^2\frac{n}{n-1}$ أنه مقدر "غير متحيز" لـ σ^2 ويرمز له بـ $S^{2\prime}$ حيث:

$$\hat{S}^2=S^2\frac{n}{n-1}$$

الانحراف المعياري لتباين العينة:

في مجتمع ما غير محدود و عينة حجمها n بحيث قيم n كبيرة $(n\geq 30)$. فإن متوسط تباين العينة و الانحراف المعياري لتباين العينة يعطيان بالعلاقة التالية: $\sigma_{S^2}=\sqrt{\frac{\mu_4-\sigma^4}{n}}$ و $\mu_{S^2}=\sigma^2$

حيث μ_4 العزم الرابع لتباين العينة حول المتوسط.

و بالتالي يكون تباين توزيع المعاينة للتباين: $\sigma^2{}_{S^2}=\frac{\mu_4-\sigma^4}{n}$

وإذا كان المجتمع طبيعي فإن $\mu_4=3\sigma^4$ وبالتالي فإن : $\sigma^2_{S^2}=\left(\frac{2}{n}\right)\sigma^4$ أي: $\sigma_{S^2}=\sigma^2\sqrt{2/n}$

من أجل $n\geq 100$، توزيع S^2 يقترب كثيرا من التوزيع الطبيعي.

مثال15: سحبت عينة عشوائية حجمها n=2 من مجتمع مكون من خمسة مفردات متوسطه $\mu=5$ وتباينه $\sigma^2=8$.

– أوجد متوسط توزيع المعاينة للتباين إذا كان السحب بالإرجاع وبدون إرجاع؟

الحل:

– إذا كان السحب بالإرجاع:

$$\mu_{s^2}=\left(\frac{n-1}{n}\right)\sigma^2=\left(\frac{2-1}{2}\right)8=4.$$

– إذا كان السحب بدون إرجاع:

$$\mu_{s^2}=\left(\frac{n-1}{n}\right)\left(\frac{N}{N-1}\right)\sigma^2=\left(\frac{2-1}{2}\right)\left(\frac{5}{5-1}\right)8=5.$$

مثال16: مزرعة تتكون من 10000 شجرة، إذا كان وزن ثمارها يتبع توزيع طبيعي بمتوسط 50كلغ، وانحراف معياري 5كلغ، أخذت عينة عشوائية حجمها 100 شجرة.

– أوجد متوسط توزيع المعاينة للتباين والانحراف المعياري لتباين العينة؟

– **الحل:** N=10000

$$\mu=50,\quad \sigma=5,\quad \sigma^2=25,\quad n=100>30.$$

بما أن N كبيرة جدا يمكن اعتبار المجتمع غير محدود.

متوسط توزيع المعاينة للتباين: $\mu_{s^2} = \sigma^2 = 25.$

الانحراف المعياري لتباين العينة:

$$\sigma_{s^2} = \sigma^2 \sqrt{\frac{2}{n}} = 25\sqrt{2/100} = 25\sqrt{0.02} = 25(0.14) = 3.5.$$

ومنه: $\sigma_{s^2}^2 = (3.5)^2 = 12.25$

مثال17: أخذت عينة عشوائية حجمها n=11 من مجتمع يتبع توزيع طبيعي $N(\mu, 70)$، وكان S^2 تباين العينة.

- أوجد احتمال أن تكون S^2 أقل من 82.5؟

الحل: $p(S^2 \le 82.5)$

$$p(S^2 \le 82.5) = p\left(\frac{(n-1)s^2}{\sigma^2} \le \frac{(n-1)82.5}{\sigma^2}\right) = p\left(\chi^2 \le \frac{(10)82.5}{70}\right)$$

$$= p(\chi^2 \le 11.78) = 1 - p(\chi^2 \ge 11.78) = 0.70.$$

9- توزيع المعاينة للنسبة بين تبايني العينتين S_1^2 و S_2^2:

نظرية12: إذا كان S_1^2 هو تباين عينة عشوائية حجمها n_1 مسحوبة من مجتمع طبيعي $N(\mu_1, \sigma_1^2)$ وكان S_2^2 هو تباين عينة عشوائية حجمها n_2 مسحوبة من مجتمع طبيعي $N(\mu_2, \sigma_2^2)$ وكانت العينتان مستقلتان فإن المتغير: $\frac{S_1^2 / \sigma_1^2}{S_2^2 / \sigma_2^2}$ يتبع توزيع فيشر بدرجتي حرية (n_1-1)، (n_2-1). وإذا كانت

$$\hat{S}^2 = S^2 \frac{n}{n-1}$$

فإن:

$$F = \frac{\left[\frac{S_1^2 n_1}{n_1 - 1}\right] \frac{1}{\sigma_1^2}}{\left[\frac{S_2^2 n_2}{n_2 - 1}\right] \frac{1}{\sigma_2^2}} = \frac{\hat{S}_1^2 / \sigma_1^2}{\hat{S}_2^2 / \sigma_2^2} \rightarrow F_{n_1 -1;\ n_2 -1}$$

نلاحظ أن المنحنى يقع في النصف الموجب كما في حالة توزيع χ^2، وهو أيضا غير متماثل وموجب الالتواء ولكن يقترب من التماثل كلما زادت درجات الحرية v_1، v_2.

مثال18: عينتين حجمهما 8 و10 مسحوبتين من مجتمعين طبيعيين تبايناهما على التوالي 20 و36. ما احتمال أن يكون تباين الأولى أكبر من ضعف تباين الثانية؟

$$P(S_1^2 > 2S_2^2) = P(\frac{S_1^2}{S_2^2} > 2) = P\left(\frac{S_1^2\left(\frac{n_1}{n_1-1}\right)\frac{1}{\sigma_1^2}}{S_2^2\left(\frac{n_2}{n_2-1}\right)\frac{1}{\sigma_2^2}} > 2\frac{\left(\frac{n_1}{n_1-1}\right)\frac{1}{\sigma_1^2}}{\left(\frac{n_2}{n_2-1}\right)\frac{1}{\sigma_2^2}}\right) = P\left(\frac{S_1^2\left(\frac{n_1}{n_1-1}\right)\frac{1}{\sigma_1^2}}{S_2^2\left(\frac{n_2}{n_2-1}\right)\frac{1}{\sigma_2^2}} > 2\frac{\left(\frac{8}{7}\right)\frac{1}{20}}{\left(\frac{10}{9}\right)\frac{1}{36}}\right) =$$

$= P(F_{7,9} > 3.7)$

من الجدول نجد $0.05 > P(F_{7,9} > 3.7) > 0.01$.

مثـال19: أخذت عينة عشوائية حجمه 11 من مجتمع طبيعي $N(\mu_1, \sigma_1^2)$ ، وأخذت عينة عشوائية أخرى حجمها 16 من مجتمع طبيعي آخر $N(\mu_2, \sigma_2^2)$.

ما احتمال أن تكون نسبة تباين العينة الأولى إلى تباين العينة الثانية أكبر من أو تساوي 3.80؟

الحل:

لدينا : $V_1 = n_1-1 = 11-1=10$, $V_2 = n_2-1 = 16-1=15$

ومن جدول توزيع F نجد:

$P(S_1^2/ S_2^2 \geq 3.80) = P(F_{(10, 15)} \geq 3.80) = 1- 0.99 =0.0$

خلاصة توزيع المعاينة للنسبة والتباين في العينة

الإحصائية	المجتمع	المعاينة	الخاصية
النسبة	مجتمع موزع طبيعيا غير محدود	بالإرجاع	$\mu_r = p\ ,\ \sigma_r = \sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}$
	مجتمع طبيعي محدود	بدون إرجاع	لحساب σ_r نضرب في معامل الإرجاع.
		$n \geq 30$	$r \sim N\ (\mu_r = p,\ \sigma_r^2 = \frac{p(1-p)}{n})$
الفرق بين نسبتين	مجتمع ما	بالإرجاع	$\mu_{r1-r2} = p_1 - p_2.$ $\sigma_{r1-r2} = \sqrt{\frac{p_1.(1-p_1)}{n_1} + \frac{p_2.(1-p_2)}{n_2}}$
		بدون إرجاع	لحساب σ_{r1-r2} نضرب في معامل الإرجاع.
		$n_1,\ n_2 > 30$	$Z = \frac{(r_1-r_2)-(p_1-p_2)}{\sqrt{\frac{p_1(1-p_1)}{n_1}+\frac{p_2(1-p_2)}{n_2}}} \sim N(0,1)$
التباين	مجتمع ما و S^2 تمثل تباين العينة	السحب بالإرجاع أو المجتمع غير محدود	$E(S^2) = \mu_{S^2} = \sigma^2\left(\frac{n-1}{n}\right)$ $E(S^2) \approx \sigma^2$ إذا كانت $n \geq 30$
	مجتمع طبيعي	عينة حجمها n	$\frac{nS^2}{\sigma^2} = \frac{(n-1)\hat{S}^2}{\sigma^2} \sim \chi^2_{n-1}$
	مجتمع ما و S^2 تمثل تباين العينة	مجتمع محدود أو السحب بدون إرجاع	$E(S^2) = \mu_{S^2} = \sigma^2\left(\frac{n-1}{n}\right)\left(\frac{N}{N-1}\right)$
نسبة تباينين	مجتمعان طبيعيان تبايناهما $\sigma_1^2,\ \sigma_2^2$	عينتين عشوائيتين حجمهما $n_1,\ n_2$	$F = \frac{\left[\frac{S_1^2 n_1}{n_1-1}\right]\frac{1}{\sigma_1^2}}{\left[\frac{S_2^2 n_2}{n_2-1}\right]\frac{1}{\sigma_2^2}} = \frac{\hat{S}_1^2/\sigma_1^2}{\hat{S}_2^2/\sigma_2^2} \to F_{n_1-1;\ n_2-1}$

10-تمارين المحور الثاني:

التمرين الأول:

إذا كان لدينا مجتمع يتكون من المفردات التالية: $x_1 = 1,\quad x_2 = 2,\quad x_3 = 3$

1- أوجد متوسط وتباين المجتمع.

2-اوجد توزيع المعاينة للوسط الحسابي للعينات ذات الحجم n=2 التي يمكن سحبها من هذا المجتمع في كل من الحالات التالية:

أ-إذا كان السحب بإرجاع. ب-إذا كان السحب بدون إرجاع.

3-أوجد المتوسط الحسابي و الانحراف المعياري لتوزيع المعاينة في الحالات التالية:

أ-إذا كان السحب بإرجاع. ب-إذا كان السحب بدون إرجاع.

التمرين الثاني:

1. إذا كان $X \sim N(9,4)$ فما هو التوزيع الاحتمالي لمتوسط عينة عشوائية بحجم 25 من مجتمع X . أحسب $P(\overline{X}>10)$.

إذا كان $X \sim N(7, \sigma^2)$ فما هو التوزيع الاحتمالي لمتوسط عينة عشوائية بحجم 36 من مجتمع X تباينه 9 ثم أحسب $P(\overline{X}>8)$

2. اذا كان $X \sim N(8.5, \sigma^2)$ أوجد التوزيع الاحتمالي لوسط العينة $\{9,10,9,8,8,7,8,5,8\}$ ثم أحسب $P(7 < \overline{X} < 9)$

التمرين الثالث:

إذا كان لدينا متغير عشوائي X يتبع التوزيع الطبيعي بمتوسط $\mu = 80$ و تباين $\sigma^2 = 49$

أوجد توزيع المعاينة لمتوسط العينة من الحجم 25 مسحوبة من المجتمع. ثم أوجد $P(\overline{X} \le 83)$, $P(\overline{X} \ge 78)$.

التمرين الرابع:

إذا كان علامات طلبة السنة الثانية لمقياس الإحصاء3 تتبع توزيع طبيعي بمتوسط $\mu = 100$ وأنحرف معياري $\sigma = 75$. تم اختيار25 طالباً عشوائيا من بين طلبة الجامعة. أوجد:

1. احتمال أن يكون متوسط العلامات المحسوب من العينة أكبر من 125.
2. احتمال أن يكون متوسط العلامات المحسوب من العينة أصغر من 80
3. احتمال أن يكون متوسط العلامات المحسوب من العينة محصورا بين 70 و 130.

التمرين الخامس:

لدى بنك محلى صغير 1450 حساب ادخار شخصي يتبع توزيع بواسون برصيد متوسط قدرة 1600$

إذا أخذ البنك عينة عشوائية من 100 حساب، أوجد توزيع المعاينة للمتوسط و ما هو احتمال أن متوسط المدخرات لهذه الحسابات المائة سيكون أقل من 1600$ ؟.

التمرين السادس:

ليكن لدينا متغيران مستقلان X_1 و X_2 يمثلان مجتمعين 1 و 2 حيث:

$X_1 \sim N(20, 32)$ و $X_2 \sim N(15, 50)$

– ما هو توزيع المعاينة للفرق بين متوسطي عينتين الأولى من المجتمع1 حجمها 16 و الثانية من مجتمع 2 حجمها25

– ما هو احتمال أن لا يزيد الفرق بين المتوسطين عن 5؟.

التمرين السابع:

إذا كان لدينا البيانات التالية الخاصة بمجتمعين 1 و 2 ، حيث : المجتمع 1: متوسطه $\mu_1 = 40.7$ و تباينه $\sigma_1^2 = 3.2$. المجتمع 2: متوسطه $\mu_2 = 39.2$ و تباينه $\sigma_2^2 = 2.9$

وتم سحب عينتين مستقلتين من المجتمعيين حيث $n_1 = 17$ و $n_2 = 15$ ، أوجد الاحتمال التالي بفرض أن التوزيعات طبيعية: $P(0.289 \le \bar{X}_1 - \bar{X}_2 \le 2.711)$

التمرين الثامن:

مجتمع حجمه 200 وحدة يخضع لتوزيع طبيعي تباينه 64 تم سحب عينة عشوائية بدون ارجاع بحجم 50.

ما هو التوزيع الاحتمالي لمتوسط عينة ثم احسب $P(\bar{X} > 32)$ عندما $\mu = 30$.

التمرين التاسع:

معمل ينتج 700 كغم من المكرونة كمعدل يومي، سحبت منه عينة عشوائية تمثل إنتاج 40 يوما ، فبلغ وسطها الحسابي 740 كغ بانحراف معياري 40 كغ. معمل آخر ينتج 500 كغم من المكرونة كمعدل يومي، سحبت منه عينة عشوائية تمثل إنتاج 35 يوما ، فبلغ وسطها الحسابي 480 كغ بانحراف معياري 20 كغ فما هو التوزيع الاحتمالي للفرق بين متوسطي العينتين ، ثم احسب الاحتمال التالي $P(180 < \bar{X}_1 - \bar{X}_2 < 220)$

التمرين العاشر:

إذا كان احتمال نجاح الطالب الذي يدرس في مقررات الاقتصاد هو 0.9، أخذت عينة حجمها 49 طالبا من أولئك الذين يدرسون هذا المقرر، فإذا كانت r نسبة النجاح في العينة.

- ما هو احتمال أن تزيد النسبة في العينة عن 0.8.
- ما هو احتمال أن تكون النسبة في العينة محصورة بين0.8 و0.95.

التمرين الحادي عشر:

بناء على الإحصائيات المأخوذة من بلد ما، نجد أن العدد الكلي للسكان الذين تتراوح أعمارهم ما بين 20 سنة و 30 سنة، موزعين حسب الجنس كما يلي: 215713 ذكرا منهم 22191 يحملون شهادة جامعية، 206750 أنثى منهم 14442 يحملن شهادة جامعية، فإذا سحبنا من هذين المجتمعين عينتين عشوائيتين مستقلتين، الأولى من الذكور حجمها 200 ذكر والثانية من الإناث حجمها 150أنثى.

- أوجد احتمال أن يكون الفرق بين نسبتي العينتين أكبر أو يساوي 5%.

التمرين الثاني عشر:

مجتمع مكون من 7 أرقام متوسطها 40 و انحرافها المعياري 3، سحبت عينة من المجتمع حجمها 5 .

أوجد متوسط توزيع المعاينة للتباين إذا كان السحب بإرجاع و بدون إرجاع.

التمرين الثالث عشر:

مزرعة حجمها 8000 شجرة. إذا كان طول الأشجار يتبع توزيع طبيعي بمتوسط ارتفاع الشجرة 5.6 متر والانحراف المعياري 0.9 متر. أخذت عينة عشوائية حجمها 50 شجرة من المجتمع .

أوجد متوسط توزيع المعاينة للتباين و الانحراف المعياري.

التمرين الرابع عشر:

سحبت عينة عشوائية بحجم 20 من مجتمع يخضع لتوزيع طبيعي تباينه 9، أحسب احتمال ان يزيد تباين العينة عن 15.

التمرين الخامس عشر:

نقوم بسحب عينة من إنتاج مؤسسة لقطعة غيار حجمها 25. دراسة سابقة أكدت أن أبعاد قطع الغيار يتبع توزيعا طبيعيا بمتوسط 10 وحدات وتباين 2 , حدد حدود متوسط أبعاد وتباين العينة المأخوذة من الإنتاج عند النسبة 0.9.

المحور الثالث: التقدير الإحصائي

تمهيد: الهدف الأساسي من دراسة أي مجتمع هو إيجاد تقدير كاستدلال عن بعض خصائصه أو معالمه، كمتوسط المجتمع μ وانحرافه المعياري σ ونسبة صفة معينة في المجتمعP وهذه تعتبر أهم معالم المجتمع، وهذه المعالم غالبا ما تكون مجهولة ونرغب في تقديرها، وحيث أن العينة تعتبر صورة مصغرة من المجتمع، فإننا نلجأ إلى حساب ما يقابل معالم المجتمع في العينة من مقاييس وهي على التوالي $\bar{x}$، S ، r وذلك من بيانات العينة، ويمكن استخدام قيمة المقياس كتقدير للمعلمة المناظرة له في المجتمع، فمثلا يمكن استخدام $\bar{x}$ لتقدير μ وهكذا.

1- تعاريف مهمة:

- **التقدير**: المقصود بالتقدير هو تقدير معالم المجتمع الإحصائي (أو التوزيع الاحتمالي) والتي غالباً ما تكون مجهولة ويكون المطلوب هو الحصول على تقديرات لها -عادة- من بيانات العينة فقد يكون المطلوب تقدير متوسط دخل الدولة، أو تقدير متوسط عمر الناخب... وغيرها. و منه نقول أن: التقدير هو أسلوب إحصائي مبني على نظريات إحصائية، يستخدم لتقدير معلمة ما محل الاهتمام عن طريق استخدام مقاييس العينة، وهو قيمة عددية للمقدر مثل $\bar{x} =3$ يستخدم كتقدير لمتوسط المجتمع μ، أي أن التقدير حالة خاصة من المقدر، وبالتالي فإن التقدير قد يختلف من عينة لأخرى باستخدام المقدر نفسه.

- **المقدر**: وهو إحصاءة العينة التي تستخدم لتقدير معلمة المجتمع، مثل $\bar{x}$ يعتبر مقدر لمتوسط المجتمع μ.

- **التقدير بنقطة**: هو تقدير معلمة المجتمع بقيمة الإحصاءة المقابلة لها من العينة، مثل تقدير متوسط المجتمع μ بمتوسط العينة $\bar{x}$، ويمتاز التقدير بنقطة بدقته ولكن يعاب عليه أن احتمال الخطأ فيه كبير، ففي حالة تقدير النقطة نحصل على قيمة واحدة من العينة، وتستخدم هذه القيمة الواحدة كتقريب أو كتقدير لمعلمة المجتمع المجهولة، فمثلاً لو أخذنا الوسط الحسابي للدخل في العينة كتقدير لمتوسط الدولة نكون قد حصلنا على تقدير نقطة لمتوسط دخل الدولة، وكمثال آخر لو أخذنا نسبة الناخبين في العينة الذين يؤيدون مرشحا معيناً كتقدير لهذه النسبة في المجتمع نكون حصلنا على تقدير نقطة للنسبة في مجتمع الناخبين.

- **التقدير بفترة أو التقدير بمجال**: هو تقدير معلمة المجتمع بمدى من القيم مثل تقدير متوسط المجتمع μ بالفترة مثلا: $\bar{x} = \pm 2.5$ ، ويمتاز تقدير الفترة بأنه يضم بين حديه الأدنى والأعلى عددا غير محدود من القيم، كما يمكن حساب احتمال صحة التقدير، أو درجة الثقة فيه، لذلك تسمى فترات التقدير بفترات الثقة، كأن نقدر الدخل الشهري للأسرة بأن ينتمي إلى المجال:[16000 ; 24000] بمستوى ثقة 95%.

2- خواص جودة التقدير: لتقدير معلمة ما من معالم المجتمع محل الدراسة نحتاج إلى اختيار الإحصائية المناسبة في العينة لتقدير هذه المعلمة، والتي غالبا ما تكون المعلمة المناظرة لها في العينة لتقدم لنا أحسن تقدير، وتتمثل خواص جودة التقدير في النقاط التالية:

أ- عدم التحيز: نقول عن إحصائية ما بأنها مقدار غير متحيز لمعلمة المجتمع إذا كان متوسطها أو توقعها الرياضي مساويا لمعلمة المجتمع.

مما سبق نعلم أن المتوسط الحسابي لتوزيع المعاينة هو نفسه الوسط الحسابي للمجتمع الأصلي أي أن: $E(\bar{x})=\mu$ أي $\mu_{\bar{X}}=\mu$ وعليه فإن الإحصاءة $\bar{x}$ هي مقدر غير متحيز للمعلمة المجهولة μ ويمكن إثبات ذلك كما يلي:

$$E(\bar{x})=(x_1+x_2+\dots\dots+x_n)/n$$

$$=\frac{1}{n}[E(x_1+x_2+\dots\dots+x_n)]$$

$$=\frac{1}{n}[E(x_1)+E(x_2)+\dots\dots+E(x_n)]$$

$$=\frac{1}{n}[\mu+\mu+\dots\dots+\mu]$$

$$=\frac{1}{n}[n\mu]$$

$$E(\bar{x})=\boldsymbol{\mu}$$

كما يمكن أن نثبت أن تباين العينة S^2 هو مقدر غير متحيز لتباين المجتمع في حالة سحب العينة العشوائية بالإرجاع أو كان المجتمع غير محدود.

فمن خلال النظرية التي تنص على أنه إذا كان S^2 تباين عينة عشوائية مسحوبة من مجتمع تباينه σ^2 فإن: $E(S^2)=\sigma^2$ إذا كان السحب بالإرجاع أو المجتمع غير محدود، ويمكن إثبات ذلك كما يلي:

$$E(S^2)=E\left(\frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})^2}{n-1}\right)$$

$$=\frac{1}{n-1}E[\sum(x_i^2-2x_i\bar{x}+\bar{x}^2)]$$

$$=\frac{1}{n-1}E[\sum x_i^2-2\bar{x}\sum x_i+n\bar{x}^2)]$$

$$=\frac{1}{n-1}E[\sum x_i^2-n\bar{x}^2)] \qquad \text{لأن:}\ \sum x_i=n\bar{x}$$

$$=\frac{1}{n-1}[\sum E(x_i)^2-nE(\bar{x})^2]$$

بما أن تباين المجتمع يمكن حسابه كما يلي:

$$\sigma^2=E(x_i)^2-\mu^2 \quad => \quad E(x_i)^2=\sigma^2+\mu^2$$

أما تباين توزيع المعاينة للوسط الحسابي للعينة $\sigma_{\bar{X}}^2$ يمكن حسابه كما يلي:

$$\sigma_{\bar{X}}^2=E(\bar{x})^2-\mu^2 \quad => \quad E(\bar{x})^2=\sigma_{\bar{X}}^2+\mu^2$$

بتعويض $E(x_i)^2$ و $E(\bar{x})^2$ نجد أن:

$$E(S^2)= \frac{1}{n-1}[\Sigma(\sigma^2+\mu^2)-n(\sigma_{\bar{X}}^2+\mu^2)]$$
$$= \frac{1}{n-1}(n\sigma^2+n\mu^2-n\sigma_{\bar{X}}^2+n\mu^2)$$
$$= \frac{1}{n-1}(n\sigma^2-n\sigma_{\bar{X}}^2)$$

بما أن السحب تم بالإرجاع فإن: $\sigma_{\bar{x}}^2=\frac{\sigma^2}{n}$

$$E(S^2)= \frac{1}{n-1}(n\sigma^2-n\frac{\sigma^2}{n})$$
$$= \frac{1}{n-1}(n\sigma^2-\sigma^2)$$
$$= \frac{1}{n-1}(n-1)\sigma^2$$
$$= \boldsymbol{\sigma^2}$$

ب- الكفاءة: يقال عن مقدار ما أنه أكثر كفاءة إذا كان له تباين أقل، بمعنى آخر أن المقدر الأقل تباينا هو الأكثر كفاءة لأنه كلما قل التباين زادت فعالية التقدير.

ت- خاصية التقارب: المقدر المتقارب هو الذي يؤول إلى قيمة المعلمة المقدرة عندما يؤول حجم العينة إلى مالا نهاية.

يتحقق ذلك مثلا بأن يؤول تباينه إلى الصفر.

$$E(\bar{x})=\mu \quad , \quad V(\bar{x})=\frac{\sigma^2}{n} \longrightarrow 0. \ \text{As}: n \longrightarrow \infty$$

3- تقدير مجال الثقة لمتوسط المجتمع: إن تقدير مجال الثقة لمتوسط المجتمع هو عبارة عن إيجاد تقدير نقطي لوسط المجتمع أولا ومن ثم استعمال هذا المقدار لإيجاد قيمتين تعتمدان على التوزيع الاحتمالي لهذا المقدار وعلى معامل الثقة، وبالتالي يتحدد الحد الأدنى والحد الأعلى لمجال الثقة المطلوب.

3-1- حالة مجتمع طبيعي معلوم التباين: إذا كان المجتمع المسحوبة منه العينة يتبع توزيعا طبيعيا وتباينه معلوم، فإن توزيع المعاينة للوسط الحسابي يكون توزيعا طبيعيا، وطالما نحن نتكلم عن تقدير متوسط المجتمع فإن أول ما نفكر فيه هو الوسط الحسابي للعينة، ومجال الثقة للوسط الحسابي للمجتمع يأخذ الشكل التالي:

$$P[\bar{x}-Z_{1-\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}} \leq \boldsymbol{\mu} \leq \bar{x}+Z_{1-\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}]=1-\alpha$$

أي أننا واثقون بمقدار $(1-\alpha)\%$ من أن μ لن ينقص عن $\bar{x}-Z_{1-\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$ ولن يزيد عن

$\bar{x} + Z_{1-\alpha/2}\ \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$.

و عليه مما سبق، فإن الهيكل العام لفترة الثقة لتوزيعات المعاينة المتماثلة تأخذ الشكل التالي:

التقدير بنقطة ± هامش خطأ المعاينة.

يمكن كتابة أشهر وأهم درجات ومعاملات الثقة (للتوزيع الطبيعي) في الجدول التالي (مع ملاحظة أن 95%، 99% هي أشهرها على الإطلاق)

درجة الثقة	Z معامل الثقة
68.26%	1
90%	1.65
95 %	1.96
95.44%	2
99%	2.58
99.72%	3

مثال20: أجريت دراسة على كمية الهيموغلوبين في الدم لعينة مؤلفة من 36 طفلا، فكان متوسط كمية الهيموغلوبين في الدم لديهم 11.3 غ، فإذا كانت العينة مختارة من مجتمع يتبع التوزيع الطبيعي والانحراف المعياري للهيموغلوبين فيه 2.5 غ.

المطلوب: قدر مجال الثقة لمتوسط كمية الهيموغلوبين في المجتمع ككل بمستوى ثقة 99%؟

الحل:

لدينا: $n=36\ ,\quad \bar{x} = 11.3,\ \ \sigma = 2.5$

كمية الهيموغلوبين في المجتمع تتبع توزيع طبيعي والتباين معلوم، ومنه يكون تقدير متوسط كمية الهيموغلوبين تتبع توزيع طبيعي.

عند مستوى ثقة: $1-\alpha = 99\% = 0.99$

مستوى المعنوية: $\alpha = 1\% = 0.01$

معامل الثقة: $Z_{\alpha/2} = 2.58$

مجال التقدير:

$$P[\bar{x} - Z_{1-\alpha/2}\ \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \leq \ \mu \leq \ \bar{x} + Z_{1-\alpha/2}\ \frac{\sigma}{\sqrt{n}}] = 1-\alpha$$

$P[11.3 - 2.58\ \frac{2.5}{\sqrt{36}} \leq\ \boldsymbol{\mu} \leq\ 11.3 + 2.58\ \frac{2.5}{\sqrt{36}}] = 0.99$

$P[11.3 - 1.075 \leq\ \boldsymbol{\mu} \leq\ 11.3 + 1.075] = 0.99$

$P[10.225 \leq\ \boldsymbol{\mu} \leq\ 12.375] = 0.99$

ومنه متوسط كمية الهيموغلوبين في الدم محصورة بين 10.225 و 12.375 بمستوى ثقة99%.

إيجاد حجم العينة المناسب لتقدير المتوسط μ: يمكن تحديد هامش خطأ مرغوب فيه للتمكن من تحديد حجم العينة المناسب حيث يسمى المقدار $Z_{1-\alpha/2}\ \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$ حد الخطأ في عملية تقدير μ، ولهذا إذا تم تحديد المقدار الأكبر المسموح به لهذا الخطأ في التقدير أمكن حساب حجم العينة المناسب لتحقيق ذلك الحد عن طريق حل المتراجحة التالية: $Z_{1-\alpha/2}\ \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \leq\ e$

حيث e هو المقدار الأكبر المسموح به للخطأ، وينتج عن ذلك أن : $n \geq [Z_{1-\alpha/2}\ \frac{\sigma}{e}\ ]^2$

مثال21: أراد أحد الباحثين تحديد حجم العينة اللازمة لحساب متوسط كمية الفلوريد في أبار مياه الشرب على أن لا يزيد الخطأ في تقدير المتوسط عن 0.5، وهذا بدرجة ثقة 95% على أساس أن الانحراف المعياري في أبار المنطقة ككل هو1.5.

الحل: لإيجاد حجم العينة المناسب نطبق العلاقة التالية:

$$n \geq [Z_{1-\alpha/2}\ \frac{\sigma}{e}\ ]^2 \iff n \geq [1.96\ \frac{1.5}{0.5}\ ]^2 \iff n \geq 34.57 \iff n = 35.$$

3-2- حالة مجتمع ما مجهول التباين وعينة كبيرة:

نظرية: إذا كان $\bar{x}$ هو المتوسط الحسابي لعينة عشوائية حجمها كبير ($n \geq 30$) مسحوبة من مجتمع طبيعي متوسطه μ وتباينه σ^2 مجهول، فإن مجال التقدير للمتوسط μ هو:

$$P[\bar{x} - Z_{1-\alpha/2}\ \frac{s}{\sqrt{n}} \leq\ \boldsymbol{\mu} \leq\ \bar{x} + Z_{1-\alpha/2}\frac{s}{\sqrt{n}}] = 1-\alpha$$

حيث تم استخدام s كتقدير لـ σ لأن قيمة n كبيرة بشكل كاف، وذلك لأن σ^2 تباين المجتمع مجهول.

مثال22 : مصنع لإنتاج المصابيح الكهربائية، أخترنا من إنتاجه عينة حجمها 100 مصباح، فإذا كان الوسط الحسابي لعمر المصباح في العينة 1200ساعة، وانحرافه المعياري 250 ساعة، قدر عند مستوى ثقة 95% متوسط عمر المصباح في المصنع كله؟

الحل: بما أن الانحراف المعياري للمجتمع σ مجهول نستخدم الانحراف المعياري للعينة.

$n = 100,\quad \bar{x} = 1200,\quad s = 250,\quad 1-\alpha = 0.95,\quad Z_{1-\alpha/2} = 1.96$

$$P[\bar{x} - Z_{1-\alpha/2}\ \frac{s}{\sqrt{n}} \leq\ \boldsymbol{\mu} \leq\ \bar{x} + Z_{1-\alpha/2}\frac{s}{\sqrt{n}}] = 1-\alpha$$

$$P[1200 - 1.96\ \frac{250}{\sqrt{100}} \leq\ \boldsymbol{\mu} \leq\ 1200 + 1.96\ \frac{250}{\sqrt{100}}] = 0.95$$

$P[1200 - 49 \leq \mu \leq 1200 + 49] = 0.95$

$P[1151 \leq \mu \leq 1249] = 0.95$

وعليه فإن متوسط عمر المصباح في المصنع كله يتراوح بين 1151 ساعة و 1249 ساعة بمستوى ثقة 95%.

3-3- حالة مجتمع طبيعي مجهول التباين وعينة صغيرة:

نظرية: إذا كان $\bar{x}$ هو المتوسط الحسابي لعينة عشوائية صغيرة الحجم تم سحبها من مجتمع طبيعي متوسطه μ وتباينه σ^2 مجهول، فإن مجال الثقة للمعلمة μ هو:

$$P[\bar{x} - t_{\alpha/2,\, n-1}\frac{s}{\sqrt{n}} \leq \mu \leq \bar{x} + t_{\alpha/2,\, n-1}\frac{s}{\sqrt{n}}] = 1- \alpha$$

ولعلى من أهم الملاحظات على المعادلة السابقة احتواؤها على مفهومين مهمين هما:

- مستوى المعنوية أو الدلالة والذي رمزنا له بالرمز اللاتيني ألفا α والذي يعني أنه المكمل لدرجة الثقة أي نسبة الخطأ. وبالتالي فإذا كانت درجة الثقة % 99 أي احتمال أن يكون التقدير صحيحاً بنسبة % 99، فإن مستوى المعنوية، والذي يعني هنا درجة احتمال الخطأ يساوي 1%. وعند الكشف في جدول(t)، ولأنه توزيع متماثل، فإنه يتم قسمة مستوى المعنوية على 2.
- درجات الحرية، ويساوي في هذه الحالة n - 1. حيث n هو حجم العينة وطرحنا منه 1 لأنه تم تقدير الانحراف المعياري للمجتمع المجهول باستخدام الانحراف المعياري للعينة S.

ملاحظة:

- تعرف درجات الحرية بأنها عدد المشاهدات المستقلة في العينة والتي تساوي حجم العينة مطروحاً منه عدد القيود أو معالم المجتمع التي يتم تقديرها من بيانات العينة. وكمثال مبسط لشرح فكرة درجات الحرية نفترض أن لدينا 3 قيم واشترطنا أن مجموع القيم يساوي 10 فإن لدى الباحث في هذه الحالة حرية في اختيار الرقم الأول (وليكن 2) والثاني (وليكن 3) لذلك فإن قيمة الثالثة لابد وأن تكون (5) بالتالي نستطيع القول بأن درجة الحرية المتاحة لدى الباحث هي (2) أي 1 - 3 = 2 أي أن درجات الحرية في هذه الحالة هي : n - 1
- حيث n تساوي حجم العينة (والتي تساوي في المثال السابق 3) والرقم (1) والذي طرحناه يعني الشرط الذي يحتم أن مجموع القيم = 10 وبصفة عامة إذا كان عدد القيود k فإن درجات الحرية تساوي n - k

مثال 23: إذا كانت دخول مجموعة من الأفراد في دولة ما تتبع التوزيع الطبيعي، وسحبت منهم عينة عشوائية حجمها 10 أفراد بوسط حسابي دولاراً $\bar{X} = 72$، وانحراف معياري بلغ دولاراً S= 6.4 أنشئ فترة تقدير للوسط الحسابي للدخل اليومي لجميع الأفراد بدرجة ثقة 95%؟

الحل: بما أن العينة صغيرة حجمها عشرة أفراد فقط، وأن المجتمع طبيعي وانحرافه المعياري غير معروف، نستخدم مجال التقدير للوسط للعينات الصغيرة التي تعتمد على توزيع t ستيودنت.

درجة الحرية: n-1= 10-1=9

عند مستوى ثقة: $1-\alpha = 95\ \%$

مستوى المعنوية: $\alpha = 5\ \%$

معامل الثقة: $t_{\alpha/2,\, n-1} = t_{\alpha/2,\, 9} = 2.262$

مجال التقدير:

$$P[\bar{x} - t_{\alpha/2,\, n-1}\ \frac{s}{\sqrt{n}} \leq \ \mu \leq \ \bar{x} + t_{\alpha/2,\, n-1}\ \frac{s}{\sqrt{n}}] = 1-\alpha$$
$$P[72 - 2.262\ \frac{6.4}{\sqrt{10}} \leq \ \mu \leq \ 72 + 2.262\ \frac{6.4}{\sqrt{10}}] = 0.95$$
$$P[72 - 4.6 \leq \ \mu \leq \ 72 + 4.6] = 0.95$$
$$P[67.4 \leq \ \mu \leq \ 76.6] = 0.95$$

أي أن الوسط الحسابي للدخول اليومية يتراوح بين 67.4 كحد أدنى 76.6 كحد أعلى وذلك عند مستوى ثقة 95%.

4- مجال الثقة للفرق بين متوسطي مجتمعين: الهدف اختبار ما إذا كان الفرق بين المتوسطين يرجع للصدفة (الفرق صغير)، أو أنه اختلاف جوهري (الفرق كبير)، مع الإشارة إلى أنهما من مجتمعين مختلفين كمثال: سحب عينة من الرجال يقومون بإنتاج مادة ما فوجد متوسط الإنتاج 50 في حين سحبت عينة من النساء لنفس العمل فوجد أن المتوسط 63، فهل الفارق هنا يرجع للصدفة أم أنه حقيقي في أداء الجنسين، ونميز عدة حالات لتقدير الفرق بين المتوسطين:

4-1- في حالة المجتمعين طبيعيين وذو تباينين معلومين: إذا كان $\bar{x}_1$ هو متوسط عينة عشوائية حجمها n_1 سحبت من مجتمع طبيعي متوسطه μ_1، و $\bar{x}_2$ هو متوسط عينة حجمها n_2 سحبت من مجتمع طبيعي متوسطه μ_2، وσ_1^2 و σ_2^2 هما تبايني المجتمعين، فيكون توزيع المعاينة للمتغير $(\bar{x}_1 - \bar{x}_2)$ له معلمتين هما المتوسط ويساوي $(\mu_1 - \mu_2)$، في حين يحسب انحرافه المعياري من القانون التالي الذي يحسب الخطأ المعياري للفرق بين المتوسطين لعينتين مستقلتين. $\sigma_{\bar{X}_1-\bar{X}_2} = \sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1}+\frac{\sigma_2^2}{n_2}}$

ويكون مجال الثقة للفرق بين متوسطي المجتمعين $(\mu_1 - \mu_2)$ على الشكل الآتي:

$$[(\bar{x}_1 - \bar{x}_2) - Z_{1-\alpha/2}\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1}+\frac{\sigma_2^2}{n_2}} \leq \mu_1 - \mu_2 \leq (\bar{x}_1 - \bar{x}_2) + Z_{1-\alpha/2}\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1}+\frac{\sigma_2^2}{n_2}}\ ]$$

مثال24: لتقدير الفرق بين كمية النيكوتين في نوعين من السجائر، أخذت عينة عشوائية من مجتمع طبيعي وكان حجمها 100، وكان متوسطها الحسابي 0.8 وكان تباين المجتمع 0.36، وأخذت عينة عشوائية من مجتمع طبيعي آخر وكان حجمها 100، وكان متوسطها الحسابي 1 وكان تباين المجتمع 0.64.

المطلوب: قدر الفرق بين متوسطي كمية النيكوتين في النوعين عند مستوى ثقة 95% ؟

الحل: $n_1= 100,\ \bar{x}_1= 0.8,\ \sigma_1^2 =0.36,\ n_2= 100,\ \bar{x}_2= 1,\ \sigma_2^2 = 0.64$

بما أن حجم العينتين كبير فإن التقدير يتبع توزيع طبيعي.

عند مستوى ثقة: $1-\alpha = 95\% = 0.95$

مستوى المعنوية: $\alpha = 5\% = 0.05$

معامل الثقة: $Z_{\alpha/2} = 1.96$

مجال التقدير:

$$P\left[(\bar{x}_1-\bar{x}_2) - Z_{\alpha/2}\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1}+\frac{\sigma_2^2}{n_2}} \le \mu_1-\mu_2 \le (\bar{x}_1-\bar{x}_2) + Z_{\alpha/2}\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1}+\frac{\sigma_2^2}{n_2}}\right] = 1-\alpha$$

$$P\left[(0.8-1) - 1.96\sqrt{\frac{0.36}{100}+\frac{0.64}{100}} \le \mu_1-\mu_2 \le (0.8-1) + 1.96\sqrt{\frac{0.36}{100}+\frac{0.64}{100}}\right] = 0.95$$

$$P\left[(-0.2) - 0.196 \le \mu_1-\mu_2 \le (-0.2) + 0.196\right] = 0.95$$

$$P\left[-0.396 \le \mu_1-\mu_2 \le -0.004\right] = 0.95$$

ومنه مجال الثقة للفرق بين متوسطي المجتمعين محصور بين -0.396 و-0.004 بمستوى ثقة 95%.

ملاحظة: إذا كان حجم العينتين كبير والتباينين مجهولين يكون مجال الثقة هو نفسه في العلاقة السابقة، كما نستخدم تبايني العينتين عوض تبايني المجتمعين المجهولين في عملية التقدير.

4-2- في حالة المجتمعين طبيعيين وذو تباينين مجهولين والعينتان صغيرتا الحجم: نميز حالتين:

4-2-1-تبايني المجتمعين مجهولين لكنهما متساويين:

نظرية:: إذا كانت $(x_1, x_2 \dots x_{n1})$ عينة عشوائية من مجتمع يتبع توزيعا طبيعيا وسطه μ_1، وكانت $(x_1, x_2 \dots x_{n2})$ عينة عشوائية مستقلة عن الأولى مسحوبة من مجتمع آخر يتبع توزيعا طبيعيا وسطه μ_2 إذا رمزنا لوسطي العينتين بـ $\bar{x}_1$ ، $\bar{x}_2$ على الترتيب، وكان حجم العينتين صغير وتبايني المجتمعين مجهولين لكنهما متساويين، فإن فترة الثقة $(1-\alpha)\%$ للفرق بين متوسطي المجتمعين تعطى بالعلاقة التالية:

$$\left[(\bar{x}_1-\bar{x}_2) - t_{(\alpha/2,\, v)}\, S_p \sqrt{\left(\frac{1}{n_1}+\frac{1}{n_2}\right)} \le \mu_1-\mu_2 \le (\bar{x}_1-\bar{x}_2) + t_{(\alpha/2,\, v)}\, S_p \sqrt{\left(\frac{1}{n_1}+\frac{1}{n_2}\right)}\right]$$

حيث: $V = n_1 + n_2 - 2$

و $S_p^2 = \dfrac{(n_1-1)s_1^2+(n_2-1)s_2^2}{n_1+n_2-2}$

مثال 26: أخذت عينة عشوائية حجمها 9 من مجتمع طبيعي متوسطها 47 وانحرافها المعياري 5، وأخذت عينة ثانية حجمها 10 من مجتمع طبيعي آخر مستقل عن الأول متوسطها 32 وانحرافها المعياري 3، فإذا كان تباين المجتمع الأول يساوي تباين المجتمع الثاني لكنهما مجهولين.

المطلوب: قدر الفرق بين متوسطي المجتمعين عند مستوى ثقة 95%؟

الحل: بما أن المجتمعين طبيعيين والتباينين مجهولين الحجم العينتين صغير فإن التقدير للفرق بين المتوسطين يتبع توزيع ستيودنت t.

عند مستوى ثقة: $1-\alpha = 95\% = 0.95$

مستوى المعنوية: $\alpha = 5\% = 0.05$

معامل الثقة: $t_{(\alpha/2,v)} = t_{(\alpha/2,17)} = 2.110$

$$P[(\bar{x}_1-\bar{x}_2)-t_{(\alpha/2,v)}S_p\sqrt{\left(\frac{1}{n_1}+\frac{1}{n_2}\right)} \le \mu_1-\mu_2 \le (\bar{x}_1-\bar{x}_2)+t_{(\alpha/2,v)}S_p\sqrt{\left(\frac{1}{n_1}+\frac{1}{n_2}\right)}] = 1-\alpha$$

نقوم بحساب:
$$S_p^2 = \frac{(n_1-1)s_1^2+(n_2-1)s_2^2}{n_1+n_2-2} = \frac{(9-1)5^2+(10-1)3^2}{9+10-2} = 16.53$$

$$S_p = \sqrt{16.53} = 4.06$$

$$P[(47-32)-2.110(4.06)\sqrt{\left(\frac{1}{9}+\frac{1}{10}\right)} \le \mu_1-\mu_2 \le (47-32)+2.110(4.06)\sqrt{\left(\frac{1}{9}+\frac{1}{10}\right)}] = 0.95$$

$$P[15-3.93 \le \mu_1-\mu_2 \le 15+3.93) = 0.95$$

$$P[11.07 \le \mu_1-\mu_2 \le 18.93) = 0.95$$

مجال الثقة للفرق بين متوسطي المجتمعين($\mu_1-\mu_2$) محصور بين 11.07 و18.93 بمستوى ثقة 95%.

4-2-2-تبايني المجتمعين مجهولين لكنهما غير متساويين:

نظرية:: إذا كانت($x_1, x_2 \dots x_{n1}$) عينة عشوائية من مجتمع يتبع توزيعا طبيعيا وسطه μ_1، وكانت ($x_1, x_2 \dots x_{n2}$) عينة عشوائية مستقلة عن الأولى مسحوبة من مجتمع آخر يتبع توزيعا طبيعيا وسطه μ_2 إذا رمزنا لوسطي العينتين بـ $\bar{x}_1$ ، $\bar{x}_2$ على الترتيب، وكان حجم العينتين صغير وتبايني المجتمعين مجهولين لكنهما غير متساويين، فإن فترة الثقة ($1-\alpha$)% للفرق بين متوسطي المجتمعين تعطى بالعلاقة التالية:

$$[(\bar{x}_1-\bar{x}_2)-t_{(\alpha/2,v)}\sqrt{\left(\frac{s_1^2}{n_1}+\frac{s_2^2}{n_2}\right)} \le \mu_1-\mu_2 \le (\bar{x}_1-\bar{x}_2)+t_{(\alpha/2,v)}\sqrt{\left(\frac{s_1^2}{n_1}+\frac{s_2^2}{n_2}\right)}]$$

حيث أن درجة الحرية في هذه الحالة لها الصيغة المركبة التالية:

$$V = \frac{\left(\frac{s_1^2}{n_1}+\frac{s_2^2}{n_2}\right)^2}{\frac{\left(\frac{s_1^2}{n_1}\right)^2}{n_1-1}+\frac{\left(\frac{s_2^2}{n_2}\right)^2}{n_2-1}}$$

مثال 27: تم قياس كمية مركب ما في مجموعتين من الفواكه، حيث سحبت عينة من المجموعة الأولى حجمها 10 وجد أن متوسط كمية المركب فيها 300ملغ بانحراف معياري 165 ملغ، كما سحبت عينة ثانية حجمها 20 فوجد أن متوسط كمية المركب فيها 220 ملغ بانحراف معياري 100 ملغ.

المطلوب: أوجد مجال الثقة للفرق بين متوسطي كمية المركب في المجموعتين بمستوى ثقة 95% ؟

الحل: بما أن المجتمعين طبيعيين والتباينين مجهولين الحجم العينتين صغير فإن التقدير للفرق بين المتوسطين يتبع توزيع ستيودنت t.

عند مستوى ثقة: $1- \alpha = 95\% = 0.95$

مستوى المعنوية: $\alpha = 5\% = 0.05$

مجال الثقة في هذه الحالة يعطى بالعلاقة التالية:

$$P[(\bar{x}_1- \bar{x}_2)- t_{(\alpha/2,\, v)} \sqrt{(\frac{s_1^2}{n_1}+\frac{s_2^2}{n_2})} \le \mu_1-\mu_2 \le (\bar{x}_1- \bar{x}_2)+t_{(\alpha/2,\, v)} \sqrt{(\frac{s_1^2}{n_1}+\frac{s_2^2}{n_2})}] = 1- \alpha$$

نقوم بحساب درجة الحرية المركبة من العلاقة التالية:

$$V= \frac{\left(\frac{s_1^2}{n_1}+\frac{s_2^2}{n_2}\right)^2}{\frac{\left(\frac{s_1^2}{n_1}\right)^2}{n_1-1}+\frac{\left(\frac{s_2^2}{n_2}\right)^2}{n_2-1}} = \frac{\left(\frac{165^2}{10}+\frac{100^2}{20}\right)^2}{\frac{\left(\frac{165}{10}\right)^2}{10-1}+\frac{\left(\frac{100^2}{20}\right)^2}{20-1}} = 12$$

من جدول توزيع ستيودنت معامل الثقة: $t_{(\alpha/2,v)}= t_{(\alpha/2,12)} = 2.179$

$$P[(300- 220)- 2.179 \sqrt{(\frac{165^2}{10}+\frac{100^2}{20})} \le \mu_1-\mu_2 \le (300- 220)- 2.179 \sqrt{(\frac{165^2}{10}+\frac{100^2}{20})}] = 0.95$$

$$P[80- 123.69 \le \mu_1-\mu_2 \le 80 + 123.69] = 0.95$$

$$P[-43.69 \le \mu_1-\mu_2 \le 203.69] = 0.95$$

مجال الثقة للفرق بين متوسطي كمية المركب في المجموعتين يتراوح بين 43.69− و 203.69 بمستوى ثقة %.

5– طريقة المعقولية العظمى في التقدير (طريقة الاحتمال الأكبر): تعتبر هذه الطريقة من أهم طرق التقدير النقطي وخاصة في حالة العينات الكبيرة، وتعزى هذه الطريقة لرونالد فيشر، وهي تعطي مقدرات كافية إن وجدت، إلا أنها قد تكون متحيزة أحيانا، ولكن عندما تؤول n إلى مالا نهاية(حيث n حجم العينة) فإنها تعطي مقدرات غير متحيزة ولها أقل تباين، ومتسقة دوما، كما يؤول توزيعها إلى التوزيع الطبيعي مع زيادة حجم العينة.

تتمثل طريقة المعقولية العظمى في البحث عن القيمة، أي البحث عن a التي تعظم (L(x,a كما نستطيع كتابة العبارة L(x,a) على الشكل التالي: ($L(x_1, x_2, x_3 .... x_n, a$.

إن طريقة المعقولية العظمى تهدف إلى اختيار مقدر لـ a وهو $\hat{a}$ وهي القيمة الأكثر معقولية، إن التقدير المحصل عليه هو القيمة الأكبر احتمالا من أجل القيم الملاحظة للعينة، والتقدير بطريقة المعقولية العظمى يعطى بتعظيم دالة المعقولية حيث: $L(x_1, x_2, x_3 .... x_n, a) = L(x, a) =\prod f(x_i, a)$

حيث: $f(x_i, a)$ تمثل توزيع المجتمع، وبشكل مكافئ: إن تغيرات التابع: $L(x, a) =\prod f(x_i, a)$ تمثل تغيرات التابع: $\log L(x, a) =\log \prod f(x_i, a)$ وقيمة a التي تجعل هذا التابع في نهايته العظمى تعطى

من حل المعادلة: $\frac{\partial}{\partial a}\left[\sum_{i=1}^{n} \log f(xi, a)\right] = 0$ والمقدر المحسوب بهذه الطريقة يسمى المقدر المبني على التوقع الأعظمي.

6- تقدير مجال الثقة للفرق بين متوسطي مجتمعين باستعمال عينتين مزدوجتين أو مقرونتين:(غير مستقلتين): توجد الكثير من الحالات العملية التي ترتبط فيها البيانات الخاصة بالعينتين بصورة أو بأخرى، حيث تم جمع هذه البيانات في صورة أزواج من القيم المرتبة، في هذه الحالة نجد أن البيانات الموجودة في كل زوج من هذه الأزواج تكون غير مستقلة أي مرتبطة، فمثلا لزيادة أثر الراتب على إنتاجية عدد من العمال قبل وبعد زيادة رواتبهم، وبالتالي فإن هذه الدراسات تكون فيها أحجام العينات متساوية حتما $n_1=n_2$ ، وفي أغلب الحالات التي تكون فيها العينتين مزدوجتين يكون الهدف هو المقارنة بين وسطين حسابيين لمجتمعين قبل وبعد إجراء معين.

نظرية: إذا كانت لدينا عينة عشوائية من الفروق ($d_1, d_2 \ldots\ldots\ldots d_n$) تم سحبها من مجتمع الفروق وسطه μ_d وتباينه σ_d^2 مجهول، وكان مجتمع الفروق يتبع التوزيع الطبيعي، فإن مجال الثقة ($1-\alpha$) 100 % للفرق بين متوسطي مجتمعين في حالة عينتين مزدوجتين ($u_d= u_1-u_2$) تعطى بالصيغة التالية:

$$\left[\bar{d} - t_{(\alpha/2,\, v)} \frac{s_d}{\sqrt{n}} \leq u_1-u_2 \leq \bar{d} + t_{(\alpha/2,\, v)} \frac{s_d}{\sqrt{n}}\right]$$

حيث: $\bar{d} = \frac{\sum_{i=1}^{n} d_i}{n}$

d_i: هو الفرق بين n_1 وn_2 من أزواج المفردات.

s_d: هو الانحراف المعياري لعينة الفروق.

$\bar{d}$: هو الوسط الحسابي لعينة الفروق.

وأفضل مقدر للوسط الحسابي لمجتمع الفروق ($u_d= u_1-u_2$) هو الوسط الحسابي لعينة الفروق $\bar{d}$ ، وبما أن تباين مجتمع الفروق مجهول فإننا سوف نقدره بتباين عينة الفروق s_d^2 ونجد أن المتغير العشوائي التالي: $\frac{d-\mu_d}{s_d/\sqrt{n}}$ يتبع توزيع ستيودنت بدرجات حرية $v= n-1$ حيث نجد أن:

$$s_d^2 = \frac{\sum_{i=1}^{n}\left(d_i-\bar{d}\right)^2}{n-1}$$

مثال28: يعطي الجدول التالي ضغط الدم السفلي لمجموعة من الأشخاص قبل استخدام العلاج وبعده.

X_1:قبل أخذ العلاج	50	60	72	80	76
X_1: بعد أخذ العلاج	48	52	62	65	66

- أوجد فترة الثقة 95% للفرق بين متوسط ضغط الدم السفلي للأشخاص قبل وبعد أخذ العلاج؟

الحل: نقوم أولا بإيجاد عينة الفروق كما يلي: d_i : 2 , 8 , 10 , 15 , 10

نحسب وسطها الحسابي كما يلي: $\bar{d} = \frac{\sum_{i=1}^{n} d_i}{n} = \frac{2 + 8 + 10 + 15 + 10}{5} = 9$

نحسب الانحراف المعياري: $s_d = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n}(d_i-\bar{d})^2}{n-1}} = \sqrt{\frac{88}{4}} = \sqrt{22}$

$v = n-1 = 5-1 = 4, \quad 1-\alpha = 95\% , \quad t_{(\alpha/2,\, v)} = t_{(0.025,\, 4)} = 2.776$

مجال التقدير:

$$[\bar{d} - t_{(\alpha/2,\, v)} \frac{s_d}{\sqrt{n}} \leq u_1 - u_2 \leq \bar{d} + t_{(\alpha/2,\, v)} \frac{s_d}{\sqrt{n}}]$$

$$p\,[9 - 2.776 \frac{\sqrt{22}}{\sqrt{5}} \leq u_1 - u_2 \leq 9 + 2.776 \frac{\sqrt{22}}{\sqrt{5}}] = 0.95$$

إذا مجال الثقة 95% للفرق بين متوسط ضغط الدم السفلي للأشخاص قبل وبعد أخذ العلاج هو: [3.177 ,*14.822*].

7– تقدير مجال الثقة للنسبة في المجتمع: إن تقدير النسبة في المجتمع تعتبر من الحالات المهمة لقياس الظواهر السياسية، وبالذات الوصفية منها كقياس اتجاهات الرأي العام، وقياس نسبة قتلى الحروب، ونسبة الدول التي أوفت بالتزاماتها في المنظمات الدولية أو الإقليمية...كما تعتبر مهمة لقياس الظواهر الاقتصادية وبالذات التحليلية منها كتحليل اتجاهات النمو الاقتصادي، وقياس نسبة المواليد وغيرها، ونظراً لأنه من الصعوبة بمكان في كثير من الأحيان حساب هذه النسبة مباشرة من المجتمع، فإننا غالبا ما نلجأ لتقدير هذه النسبة من عينة عشوائية مسحوبة من هذا المجتمع. فلو افترضنا أن نسبة المؤيدين للسياسة الاقتصادية التي تنتهجها دولة ما هي P وأن العينة العشوائية كبيرة بدرجة كافية وأن نسبة مؤيدي هذه السياسة في العينة هي r فإن خطوات تقدير النسبة في المجتمع تكون كما يلي:

$$p[r - Z_{\alpha/2} \sqrt{\frac{r(1-r)}{n}} \leq P \leq r + Z_{\alpha/2} \sqrt{\frac{r(1-r)}{n}}] = 1-\alpha$$

مثال29: أخذت عينة من مصنع لإنتاج قطع غيار السيارات، اختير من إنتاجه عينة حجمها 500 قطعة، وجد من بينها 100 قطعة غير صالحة، قدر بدرجة ثقة 95% نسبة القطع غير الصالحة في إنتاج المصنع كله؟

الحل:

$$r = \frac{100}{500} = 0.2$$

$$p[r - Z_{\alpha/2} \sqrt{\frac{r(1-r)}{n}} \leq P \leq r + Z_{\alpha/2} \sqrt{\frac{r(1-r)}{n}}] = 1-\alpha$$

$$p[0.2 - 1.96 \sqrt{\frac{0.2(1-0.2)}{500}} \leq P \leq 0.2 + 1.96 \sqrt{\frac{0.2(1-0.2)}{500}}] = 0.95$$

$$p[0.2 - 0.04 \leq P \leq 0.2 + 0.04] = 0.95$$

$$p[0.16 \leq P \leq 0.24] = 0.95$$

أي أن نسبة قطع الغيار غير الصالحة في إنتاج المصنع كله تتراوح بين 16% و 24% وذلك بمستوى ثقة95%.

❖ **إيجاد حجم العينة المناسب لتقدير النسبة في المجتمع:** يمكن تحديد حجم العينة اللازمة للحصول على درجة ثقة معينة عند تقدير النسبة في المجتمع، بافتراض أن أقصى خطأ مسموح به في التقدير هو e حيث يحسب حجم العينة من العلاقة التالية: $n \geq \frac{Z^2}{e^2} p(1-p)$.

مثال30: تدعي إحدى مراكز استطلاعات الرأي أن نسبة المؤيدين لمترشح معين هي 60 %، فما هو حجم العينة المناسب للحكم على صحة ادعاء المركز، بحيث الدقة لا تسمح بتجاوز نسبة خطأ 2 % *وذلك عند مستوى ثقة* 95%.

الحل:

بما أن مستوى الثقة 95% فإن: Z= 1.96، وبافتراض أن نسبة المؤيدين للمترشح $p=0.6$.

ولدينا: e= 0.02 أقصى خطأ مسموح به.

ومنه حجم العينة المناسب هو: $n \geq \frac{Z^2}{e^2} p(1-p)$

$$n \geq \frac{1.96}{0.02^2} .0.6(1-0.6)$$

$$n \geq 1176 \iff n = 1176$$

8- مجال الثقة للفرق بين نسبتي مجتمعين(p_1-p_2): حدود مجال الثقة للفرق بين نسبتي مجتمعين تعطى بالصيغة الرياضية التالية: $(r_1-r_2) \pm Z_{\alpha/2}\sqrt{\frac{r_1.(1-r_1)}{n_1}+\frac{r_2.(1-r_2)}{n_2}}$

ويكون مجال التقدير على النحو التالي:

$$p\left[(r_1-r_2) - Z_{\alpha/2}\sqrt{\frac{r_1.(1-r_1)}{n_1}+\frac{r_2.(1-r_2)}{n_2}} \leq p_1-p_2 \leq (r_1-r_2) + Z_{\alpha/2}\sqrt{\frac{r_1.(1-r_1)}{n_1}+\frac{r_2.(1-r_2)}{n_2}}\right] = 1-\alpha$$

مثال31: عينة مكونة من 100 رجل، وعينة أخرى مكونة من 300 سيدة شاهدو برنامج تلفزيوني، فتبين أن 140 من الرجال و180 من النساء يفضلون البرنامج، قدر عند مستوى ثقة *95*% الفرق بين نسبة الرجال ونسبة السيدات الذين شاهدوا البرنامج ويفضلونه.

الحل:

- نسبة الرجال الذين يفضلون البرنامج هي: $r_1 = \frac{140}{200} = 0.7$
- نسبة النساء اللاتي يفضلن البرنامج هي: $r_2 = \frac{180}{300} = 0.6$

عند مستوى ثقة: $1-\alpha = \%95$

معامل الثقة: $Z_{\alpha/2}=1.96$

مجال التقدير:

$p[(r_1-r_2) -Z_{\alpha/2}\sqrt{\frac{r_1.(1-r_1)}{n_1}+\frac{r_2.(1-r_2)}{n_2}} \leq p_1-p_2 \leq (r_1-r_2) +Z_{\alpha/2}\sqrt{\frac{r_1.(1-r_1)}{n_1}+\frac{r_2.(1-r_2)}{n_2}}]= 1-\alpha$

$p[(0.7-0.6) -1.96\sqrt{\frac{0.7.(1-0.7)}{200}+\frac{0.6.(1-0.6)}{300}} \leq p_1-p_2 \leq (0.7-0.6) +1.96\sqrt{\frac{0.7.(1-0.7)}{200}+\frac{0.6.(1-0.6)}{300}}]= 0.95$

$p[0.1 -0.08 \leq p_1-p_2 \leq 0.1 +0.08]= 0.95$

$p[0.02 \leq p_1-p_2 \leq 0.18]= 0.95$

الفرق بين نسبة الرجال ونسبة السيدات الذين شاهدوا البرنامج ويفضلونه محصور بين 2% و18% بمستوى ثقة 95%.

9- مجال الثقة لتباين المجتمع σ^2: إذا كان $\overline{X}$ وS^2 متوسط وتباين عينة حجمها n لمتغير عشوائي $X \sim N(u, \sigma^2)$ وسيطاه مجهولان، عندئذ يكون مجال الثقة للتباين σ^2 بمستوى ثقة (1-α). 100% هو المجال:

$$[\frac{(n-1)S^2}{X^2(\alpha/2\,;n-1)} \leq \sigma^2 \leq \frac{(n-1)S^2}{X^2\,(1-\alpha/2\,;n-1)}]$$

لايجاد مجال الثقة للتباين σ^2 نجد أنه من جدول توزيع كاي تربيع X^2 أن النقطتين $X^2(\alpha/2\,;n-1)$ و $X^2(1-\alpha/2\,;n-1)$ تحصران بينهما مساحة (1-α) تحت توزيع X^2 بدرجة حرية (n-1) أي أن:

$$p[X^2(\alpha/2\,;n-1) \leq \frac{(n-1)S^2}{\sigma^2} \leq X^2\,(1-\alpha/2\,;n-1)]= 1-\alpha$$

نأخذ المقلوب فيصبح لدينا:

$$\frac{1}{X^2(\alpha/2\,;n-1)} \leq \frac{\sigma^2}{(n-1)S^2} \leq \frac{1}{X^2\,(1-\alpha/2\,;n-1)}$$

وبعد الضرب في $(n-1)S^2$ نحصل على:

$$\frac{(n-1)S^2}{X^2(\alpha/2\,;n-1)} \leq \sigma^2 \leq \frac{(n-1)S^2}{X^2\,(1-\alpha/2\,;n-1)}$$

مثال32: أخذت عينة من 20 شخصا وقيست أوزانهم، فوجد أن انحرافها المعياري 9كلغ، فإذا كان للأوزان التوزيع الطبيعي، أوجد مجال الثقة لتباين الأوزان في المجتمع عند مستوى ثقة 95%.

الحل:

مجال الثقة للتباين بمستوى ثقة (1-α) = 95% هو:

$$[\frac{(n-1)S^2}{X^2(\alpha/2\,;n-1)} \leq \sigma^2 \leq \frac{(n-1)S^2}{X^2\,(1-\alpha/2\,;n-1)}]$$

ولكن لدينا:

$1-\alpha = 95\ \% \Rightarrow \alpha = 0.05 \Rightarrow \alpha/2 = 0.025,\ \ 1- \alpha/2 = 0.975$

$X^2(1-\alpha/2\,;n-1) = X^2(0.975\,;19) = 8.90$

$X^2(\alpha/2\,;n-1) = X^2(0.025\,;19) = 32.85$

فيكون مجال الثقة للتباين:

$$[\frac{(20-1)9^2}{32.85} \leq \sigma^2 \leq \frac{(20-1)9^2}{8.90}]$$

$[46.84 \leq \sigma^2 \leq 172.92]$

وإذا أردنا الحصول على مجال الثقة للانحراف المعياري بمستوى ثقة 95 % نأخذ الجذر التربيعي للمجال السابق:

$[\sqrt{46.84} \leq \sigma \leq \sqrt{172.92}]$

10- مجال الثقة للنسبة بين تبايني مجتمعين σ_1^2 / σ_2^2:

إذا كان s_1^2 هو *تباين عينة عشوائية حجمها* n_1 مسحوبة من مجتمع يتوزع طبيعيا تباينه σ_1^2، وكان s_2^2 تباين عينة عشوائية حجمها n_2 مسحوبة من مجتمع آخر يتوزع طبيعيا تباينه σ_2^2، فإن مجال الثقة (1-α) 100% للنسبة بين تبايني المجتمعين σ_1^2 / σ_2^2 تأخذ الشكل التالي:

$$[(S_1^2/S_2^2)/F_{(\alpha/2,v1,v2)} \leq \sigma_1^2/\sigma_2^2 \leq (S_1^2/S_2^2)/F_{(1-\alpha/2,v1,v2)}]$$

مثال33: إذا علمت أن الطول في مجتمع العاملات في قطاع معين ومجتمع العمال يتبع توزيعا طبيعيا، سحبنا من مجتمع العاملات عينة حجمها 25 عاملة، ومن مجتمع العمال عينة حجمها 21 عاملا، وجدنا أن تباين الطول لعينة العاملات يساوي 64، وتباين الطول لعينة العمال يساوي 36.

المطلوب: أوجد مجال الثقة للنسبة بين تبايني المجتمعين بمستوى ثقة 95 % ؟

الحل: بما أن المجتمعين يتوزعان طبيعيا، والعينتان مستقلتان، يكون مجال الثقة المطلوب هو:

$$[(S_1^2/S_2^2)/F_{(\alpha/2,v1,v2)} \leq \sigma_1^2/\sigma_2^2 \leq (S_1^2/S_2^2)/F_{(1-\alpha/2,v1,v2)}]$$

ولدينا:

$V_1 = n_1-1 = 25-1=24$, $V_1 = n_2-1 = 21-1=20$

$\alpha/2 = 0.025$, $1-\alpha/2 = 0.975$

$F_{(\alpha/2,v1,v2)} = F_{(0.025,24,20)} = 2.40$

$F_{(1-\alpha/2,v1,v2)} = F_{(0.975,24,20)} = 2.43$

$(S_1^2/S_2^2)/F_{(\alpha/2,v1,v2)} = (64/36)/2.40 = 0.74$

$(S_1^2/S_2^2)/F_{(1-\alpha/2,v1,v2)} = (64/36)/0.43 = 4.13$

وعليه فإن مجال الثقة للنسبة بين تباين المجتمعين σ_1^2 / σ_2^2 عند مستوى ثقة 95 % هو:

$[0.74 \leq \sigma_1^2/\sigma_2^2 \leq 4.13]$

11- تمارين المحور الثالث:

التمرين الأول:

أخذت عينة عشوائية من 36 طالباً من بين طلبة السنة الثانية، متقدمين لامتحان الإحصاء. وجد أن متوسط درجات العينة هو 12، والانحراف المعياري للمجتمع كله هو 2. إذا علمت أن متوسط علامات الطلبة تتبع توزيع طبيعي.

أوجد تقدير لمتوسط علامات الطلبة في المجتمع كله بمستوى الثقة، 95%.

التمرين الثاني:

في دراسة لمعرفة عدد الساعات التي ينامها الطفل يومياً في عمر سنه واحدة اختيرت عينة من 36 طفل وكان متوسط عدد ساعات النوم يومياً 11.35 ساعة وبانحراف معياري 0.4 ساعة. بافتراض أن التوزيع طبيعي.

أوجد تقدير لمتوسط عدد ساعات النوم يومياً للطفل في عمر سنه بمستوى ثقة 95% ؟.

التمرين الثالث:

متغيرة عشوائية خاضعة للتوزيع التالي :

$$f(x,\theta)=\frac{1}{\sqrt{2\pi\theta}}e^{\frac{-x^2}{2\theta}}$$

1- عرف هذا التوزيع.

2- اعط توقعه الرياضي وتباينه دون حسابه.

3- عين مقدر θ بطريقة المعقولية العظمى لعينة حجمها n ، ما هي مميزاته؟

التمرين الرابع:

من أجل تحسين إدارة طلبات الائتمان الخاصة بعملائه، يقوم مدير فرع البنك بإجراء دراسة حول مدة معالجة الملفات، من المفترض أن تتبع التوزيع الطبيعي. أعطت عينة غير نفاذية من 30 ملف:

1. احسب المتوسط والانحراف المعياري لأوقات معالجة السجلات في هذه العينة.

2. أعط تقديرًا لـ μ حسب مجال الثقة عند نسبة خطأ 5٪.

ا لمدة	10-0	20-10	30-20	40-30	50-40	60-50
الموظفون	3	6	10	7	3	1

التمرين الخامس:

تسبب المقاعد الخالية لشركات الطيران في خسارة لمصدر الدخل، بفرض أن إحدى شركات الطيران الكبرى أرادت تقدير عدد المقاعد الخالية لكل رحلة خلال العالم الماضي ولهذا الغرض، تم اختيار عشوائي لعدد 225 رحلة طيران وتسجيل عدد المقاعد الخالية في كل رحلة من هذه العينة. وكان المتوسط الحسابي و الانحراف المعياري لعدد المقاعد الخالية في هذه هما: $\bar{x}=11.6$ و 4.1=S

قدر متوسط عدد المقاعد الخالية للرحلات خلال العام الماضي بمستوى ثقة 90 % و 99%.

التمين السادس:

أخذت عينة عشوائية حجمها 700 طالب بالجامعة فوجد أن 25% من الطلاب يجيدون اللغة الإنجليزية. قدر نسبة الطلبة بالجامعة الذين يجيدون اللغة الإنجليزية بمستوى ثقة: 90%،95% ؟

التمرين السابع:

في عينة عشوائية مكونة من 150 طائر من نوع معين وجد أن 50 طائر في العينة مصاب بمرض ما. قدر نسبة الطيور المصابة بالمرض بمستوى الثقة 99% ؟

التمرين الثامن:

تم أخذ عينتين مستقلتين من الرجال والنساء لقياس الزمن المستغرق لانجاز مهمة معينة فكانت البيانات التالية:

الرجال	10.4	11.6	15.3	14.4	9.7	14.3	13.6	12.9	19.8	16.9
النساء	8.3	12.6	9.6	13.3	10.1	12.7	11.8	14.2	12.9	14.7

قدر الفرق بين متوسطي الزمن للرجال والنساء عند مستوى ثقة 95% مع العلم أن تبايني المجتمعين مجهولين لكنهما متساويين؟

التمرين التاسع:

لدراسة مدة حياة أجهزة تلفزيون منتجة في مؤسسة قمنا بأخذ عينة مكونة من ستة عشر تلفاز فتحصلنا على النتائج التالية:

1100،1050،1250،1080،1350،1300،1150،1250،1300،1350،1150،1320
1150،1250،1100،1050

- عين المقدرين النقطيين للمتوسط و التباين.
- تعيين مجالا للثقة لمتوسط العينة بخطاء 5 بالمائة.
- ومجال الثقة للتباين ب95 بالمائة.

التمرين الثامن:

- أوجد مجال ثقة % 95 لتباين مجتمع سحبت منه عينة حجمها 6 وتباينها11 .
- سحبت عينة من مجتمع طبيعي حجميا 10 بتباين 9 وسحبت عينة أخرى من مجتمع طبيعي آخر حجميا 15بتباين 8 أوجد مجال ثقة % 95 للنسبة بين تبايني المجتمعين.

المحور الرابع:

اختبارات الفروض

الإحصائية.

تمهيد: يحاول الباحث اتخاذ قرار ما لمشكلة محددة بشأن خواص توزيع ما (المتوسط – النسبة) لعينة عشوائية تم سحبها من المجتمع ، ولكي نصل إلى قرار إحصائي لابد من وضع فروض عن معا لم المجتمع، ومن هنا نختبر مدى صحة هذا الفرض من عدمه وذلك عن طريق العينة العشوائية التي تم سحبها من المجتمع. وهذه الفروض هي ما نطلق عليه الفروض الإحصائية، والفرض ما هو إلا تخمين أو استنتاج ذكي مبني على حيثيات معقولة أو منطقية ولكنه ليس مبنيا على حسابات دقيقة خاصة بالمجتمع، لأننا نفترض أنه لا يمكن دراسة المجتمع بالكامل عن طريق الحصر الشامل بل نحاول استنتاج أو الاستدلال على مقاييس المجتمع باستخدام بيانات ونتائج العينة.

كما أن هناك بعض المفاهيم المتعلقة باختبارات الفروض لابد من معرفتها:

1- الفرض الإحصائي: هو عبارة عن ادعاء أو تخمين معين حول معلمة من معالم المجتمع ويكون المطلوب اختبار صحة هذا الادعاء أو التخمين، وهناك نوعين من الفروض:

- **فرض العدم:** ويرمز له بالرمز H_0 ويصاغ في صورة عدم وجود فرق أو عدم وجود علاقة أو عدم وجود تغير، أي يكون دائما على شكل مساواة.

- **الفرض البديل:** ويرمز له بالرمز H_1 وهو الفرض الذي يجب أن يكون صحيحا إذا كان فرض العدم غير صحيح.

2- مستوى المعنوية α ودرجة الثقة $(1-\alpha)$: إن القرار الذي سوف نتخذه بناء على الاختبار الإحصائي لا يمكن اعتباره صحيح 100% فهناك مقدار من الخطأ لأن المعلومات التي نتخذ قرارنا بناء عليها بيانات مأخوذة من عينة وليس من المجتمع الأصلي، كما أنه في اختبار فرض معين مقدار ثقتنا في القرار المتخذ بالرفض أو القبول يسمى بدرجة الثقة ويرمز له بالرمز $(1-\alpha)$، كما أن مقدار عدم الثقة أو مقدار الخطأ يسمى بمستوى المعنوية α.

3- الخطأ من النوع الأول والخطأ من النوع الثاني: من المعلوم أنه عند اتخاذ قرار إحصائي فإن ذلك ينطوي على أخطاء بنسب معينة حيث أنه من المحتمل أن نرفض فرضية معينة في حين أنها صحيحة، والعكس صحيح، لهذا فإن هناك نوعان من الأخطاء الإحصائية وهي:

- **الخطأ من النوع الأول:** هو الخطأ الذي نقع فيه عندما نرفض الفرضية الصفرية H_0 بالرغم من صحتها، ويرمز لاحتمال وقوع هذا الخطأ بالرمز α، ونسميه مستوى معنوية الاختبار.

- **الخطأ من النوع الثاني:** هو الخطأ الذي نقع فيه عندما نقبل الفرضية الصفرية بالرغم من عدم صحتها، ويرمز إلى احتمال هذا الخطأ بالرمز $(1-\alpha)$.

نتيجة الاختبار	قبول الفرضية H_0	رفض الفرضية H_0
الفرضية H_0 صحيحة	قرار سليم	رفض خاطئ (خطأ من النوع الأول)
الفرضية H_0 خاطئة	قبول خاطئ(خطأ من النوع الثاني)	قرار سليم

4- خطوات الاختبار الإحصائي: يمكن تلخيص خطوات الاختبار الإحصائي فيما يلي:

- **وضع أو تحديد الفرض البديل H_0:** والذي يأخذ عادة شكل معادلة أو مساواة (وهو ما يتعلق بمعلمات المجتمع).

- **وضع أو تحديد الفرض البديل H_1:** والذي يأخذ أحد الأشكال الثلاثة: إما لا يساوي أو أكبر من أو أقل من وهو الذي يحدد نوع الاختبار المستخدم إما اختبار ذو طرفين أو اختبار ذو طرف أيمن أو اختبار ذو طرف أيسر .

- **حساب إحصائية الاختبار:** وهي Z الحسابية أو T الحسابية بحسب الحالات التي سبق ذكرها(أو أي إحصائية أخرى).

- **تحديد المنطقة الحرجة (منطقة الرفض):** وذلك بتحديد قيم Z أو T المعيارية أو الجدولية التي بناء عليها نحدد المنطقة الحرجة (منطقة الرفض)، وكما ذكرنا سابقا فإن الفرض البديل H_1 هو الذي يحدد حدود منطقة الرفض(الاختبار من طرفين أو من الطرف الأيمن أو من الطرف الأيسر)، وتحدد قيمة Z الجدولية حسب نوع الاختبار وقيمة المعنوية α حسب الجدول الآتي:

نوع الاختبار	مستوى المعنوية α	درجة الثقة $(1-\alpha)$	القيمة الجدولية(القيمة الحرجة)
اختبار من طرفين	10%	90%	$Z_{\alpha/2}= \pm1.645$
	5%	95%	$Z_{\alpha/2}= \pm1.96$
	1%	99%	$Z_{\alpha/2}= \pm2.58$
اختبار من طرف واحد (الجهة اليمنى)	10%	90%	$Z_{\alpha}=+1.28$
	5%	95%	$Z_{\alpha}=+1.64$
	1%	99%	$Z_{\alpha}=+2.33$
اختبار من طرف واحد (الجهة اليسرى)	10%	90%	$-Z_{\alpha}=-1.28$
	5%	95%	$-Z_{\alpha}=-1.64$
	1%	99%	$-Z_{\alpha}=-2.33$

- **اتخاذ القرار الإحصائي:** وذلك بمقارنة قيم Z أو T الحسابية بقيم Z أو T المعيارية أو الجدولية، فإذا وقعت Z أو T الحسابية في منطقة الرفض فإن القرار هو رفض H_0 وقبول H_1 (رفض فرض العدم وقبول الفرض البديل)، أما إذا وقعت Z أو T الحسابية في منطقة القبول فإن القرار هو قبول H_0 ورفض H_1.

5- اختبار الفروض حول متوسط المجتمع u: يتناول هذا الاختبار متوسط المجتمع u مثل متوسط الدخل، متوسط وزن منتج معين، ويؤكد اختبار المتوسط فرضية مساواة قيمة ما (u_0)، وللقيام بالاختبار نستخرج عينة عشوائية نحسب متوسطها $\bar{x}$ ، ثم يستخدم التوزيع الاحتمالي لـ $\bar{x}$ لقياس بعد أو قرب هذه القيمة من u_0.

وعليه نميز بين ثلاث حالات كما درسنا في نظرية التقدير، وهي كما يلي:

الحالة الأولى: المجتمع طبيعي والتباين معلوم: في هذه الحالة نقوم بحساب إحصائية الاختبار كما يلي:

$Z = \frac{\overline{X}-\mu_0}{\sigma/\sqrt{n}}$ فإذا كانت Z داخل منطقة الرفض نرفض H_0 ونقبل H_1 والعكس صحيح، ونسمي إحصائية الاختبار Z السابقة بـ Z الحسابية.

الحالة الثانية: التباين σ مجهول و n كبيرة ($n \geq 30$): نقوم بحساب Z الحسابية كما يلي:

$$Z = \frac{\overline{X}-\mu_0}{s/\sqrt{n}}$$

نلاحظ أن إحصائية الاختبار Z في الحالتين الأولى والثانية لها توزيع طبيعي معياري، وذلك بافتراض صحة فرض العدم H_0.

الحالة الثالثة: المجتمع طبيعي، σ مجهول و n صغيرة ($n \leq 30$): إحصائية الاختبار هي T الحسابية حيث: $T = \frac{\overline{X}-\mu_0}{s/\sqrt{n}}$ والإحصاءة T تتبع توزيع ستيودنت بدرجات حرية ($n-1$)، وذلك بافتراض صحة فرض العدم H_0.

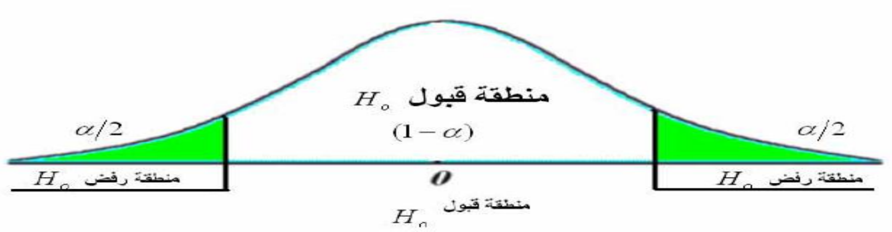
6- كيفية تحديد المنطقة الحرجة(منطقة الرفض): يعتمد تحديد المنطقة الحرجة على صورة الفرض البديل H_1 .

أولا: الحالة الأولى والثانية:

أ- إذا كان الفرض البديل من الشكل: $H_1 : \mu \neq \mu_0$

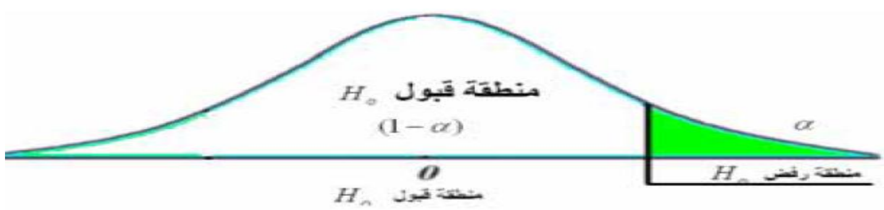
منطقة الرفض تكون بالصورة التالية: $Z > Z_{\alpha/2}$ أو $Z < -Z_{\alpha/2}$

نسمي $Z_{\alpha/2}$ بـ Z الجدولية.



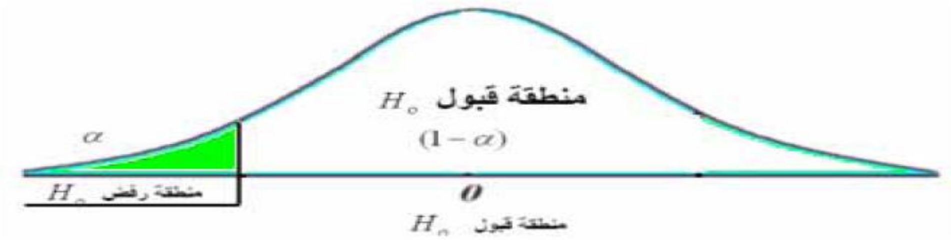
ب- إذا كان الفرض البديل من الشكل: $H_1 : \mu > \mu_0$

نرفض H_0 عندما: $Z > Z_\alpha$



جـ- إذا كان الفرض البديل من الشكل: $H_1 : \mu < \mu_0$

نرفض H_0 عندما: $Z > - Z_\alpha$



ثانيا: الحالة الثالثة: حيث أن توزيع المعاينة في هذه الحالة لـ $\bar{x}$ في هذه الحالة يتبع توزيع t وتكون منطقة الرفض كما يلي:

أ- إذا كان الفرض البديل من الشكل: $H_1 : \mu \neq \mu_0$

منطقة الرفض تكون بالصورة التالية: $T < -T_{(\alpha/2, n-1)}$ أو $T > T_{(\alpha/2, n-1)}$

ب- إذا كان الفرض البديل من الشكل: $H_1 : \mu > \mu_0$

نرفض H_0 عندما: $T > T_{(\alpha ,n-1)}$

جـ-إذا كان الفرض البديل من الشكل: $H_1 : \mu < \mu_0$

نرفض H_0 عندما: $T < - T_{(\alpha ,n-1)}$

مثال34: إذا كان عمر أحد أنواع الساعات يتبع التوزيع الطبيعي بمتوسط μ وانحراف معياري σ، سحبنا عينة عشوائية من هذه الساعات حجمها n فوجدنا أن متوسط عمر الساعات في هذه العينة $\bar{x} = 4.5$ بانحراف معياري $S= 0.8$ سنة، اختبر فرض العدم $H_0 : \mu = 5$ بمستوى معنوية $\alpha =0.05$ في الحالات التالية:

أ- إذا كان: $H_1 : \mu \neq 5$ ، $n =16$, $\sigma =1$

ب- إذا كان: $H_1 : \mu > 5$ ، $n =16$

ت- إذا كان: $H_1 : \mu < 5$ ، $n =36$

الحل:

أ) الفروض الإحصائية: $H_0 : \mu = 5$ ، $H_1 : \mu \neq 5$

بما أن المجتمع طبيعي، والتباين معلوم فإن الاختبار يتبع توزيع طبيعي، عند مستوى معنوية $\alpha= 0.05$ وبالتالي تكون منطقة الرفض خارج حدود $Z_{\alpha/2}= \pm1.96$ لأن الاختبار من طرفين.

نقوم بحساب متغيرة القرار (إحصاءه الاختبار) Z المحسوبة:

$$Z = \frac{\overline{X}-\mu_0}{\sigma/\sqrt{n}} = \frac{4.5-4}{1/\sqrt{16}} = -2 \quad , \quad Z= -2 < -1.96$$

بما أن Z المحسوبة تقع في منطقة الرفض، نرفض H_0 ونقبل H_1 بمستوى معنوية 5%، ونقول أن متوسط عمر هذا النوع من الساعات لا يساوي 5 سنوات بمستوى معنوية 5%.

ب) بما أن التوزيع طبيعي $n= 16 < 30$، و σ مجهول فإن الاختبار يتبع توزيع ستيودنت.

الفروض الإحصائية: $H_0 : \mu = 5$ ، $H_1 : \mu > 5$

نلاحظ أن الاختبار من طرف واحد جهة اليمين، وتكون منطقة الرفض إلى اليمين من $T_{(0.05 ,15)}= 1.753$

.

نحسب قيمة T الحسابية :

$$T = \frac{\overline{X}-\mu_0}{s/\sqrt{n}} = \frac{4.5-5}{0.8/\sqrt{16}} = -2.5$$

$$T = -2.5 < 1.753$$

نلاحظ أن قيمة T الحسابية تقع في منطقة القبول ومنه نقبل H_0 ونرفض H_1 عند مستوى معنوية 5%.

ونقول أن متوسط عمر هذا النوع من الساعات لا يزيد عن 5 سنوات.

ج) بما أن قيمة $n= 36 > 30$ فإن الاختبار يتبع توزيع طبيعي.

الفروض الإحصائية: $H_0 : \mu = 5$ ، $H_1 : \mu < 5$

بما أن الاختبار من جهة واحدة من جهة اليسار، فإن منطقة الرفض تكون إلى اليسار من $- Z_\alpha = -1.64$ عند مستوى معنوية $\alpha = 0.05$.

$$Z = \frac{\overline{X}-\mu_0}{s/\sqrt{n}} = \frac{4.5-4}{0.8/\sqrt{36}} = -3.75$$

نلاحظ أن Z تقع في منطقة الرفض وعليه نرفض H_0 ونقبل H_1 عند مستوى معنوية 5%، ونقول أن متوسط عمر هذا النوع من الساعات أقل من 5 سنوات بمستوى معنوية 5%.

7- اختبار الفروض حول الفرق بين متوسطي مجتمعين ($\mu_1 - \mu_2$): إذا كان لدينا مجتمعان لهما متوسطان μ_1 و μ_2 وانحراف معياري σ_1 و σ_2 على التوالي، سحبنا منهما عينتين عشوائيتين مستقلتين حجمهما n_1 و n_2 بمتوسط $\overline{X}_1$ و $\overline{X}_2$ وانحراف معياري s_1 و s_2 على التوالي.

اختبر فرض العدم: $H_0 : \mu_1 - \mu_2 = D_0$ حيث: D_0 مقدار ثابت.

وغالبا ما يكون المقدار D_0 مساويا للصفر، فيكون فرض العدم H_0 أن المتوسطين متساويين.

1-7 – المجتمعان طبيعيان والتباينيين σ_1^2, σ_2^2 معلومين:

نحسب إحصائية الاختبار كما يلي:

$$z=\frac{(\bar{x}_1-\bar{x}_2)-(\mu_1-\mu_2)}{\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1}+\frac{\sigma_2^2}{n_2}}}$$

فإذا كانت Z الحسابية تقع داخل منطقة الرفض نرفض H_0 ونقبل H_1 .

2-7- التباينيين ${\sigma_1}^2$ و ${\sigma_2}^2$ مجهولين والعينتين كبيرتين ($n_1 > 30$) و ($n_2 > 30$): في هذه الحالة عند حساب إحصائية الاختبار نستخدم تبايني العينتين بدل تبايني المجتمعين لأنهما مجهولين.

$$Z=\frac{(\bar{x}1-\bar{x}2)-(\mu1-\mu2)}{\sqrt{\frac{{s_1}^2}{n_1}+\frac{{s_2}^2}{n_2}}}$$

نلاحظ أن الإحصائية Z في الحالتين تتبع التوزيع الطبيعي المعياري، وذلك بافتراض صحة فرض العدم H_0.

مثال35: إذا كان لدينا نوعان من المصابيح، سحبنا عينة عشوائية من النوع الأول حجمها 36 مصباح، ومثلها من النوع الثاني، فوجدنا أن متوسط عمر العينة الأولى 85 ساعة بانحراف معياري 4ساعة، ومتوسط عمر العينة الثانية 81 ساعة بتباين 25 ساعة.

المطلوب:

- هل نستطيع أن نستنتج بمستوى معنوية 5% أن متوسط عمر النوع الأول يزيد عن متوسط عمر النوع الثاني بساعتين على الأقل مع العلم أن: $\sigma_1 = {}_2 = 4$.
- هل نستطيع أن نستنتج بمستوى معنوية 5% أن الفرق بين عمر النوعين هو ساعتان.

الحل:

-
$$H_0 : \mu_1 - \mu_2 = 2$$
$$H_1 : \mu_1 - \mu_2 > 2$$

نلاحظ أن الاختبار من طرف واحد، من جهة اليمين، حيث تكون منطقة الرفض إلى اليمين من $Z_\alpha = 1.64$.

نقوم بحساب Z الحسابية :

$$Z=\frac{(85-81)-2}{\sqrt{\frac{16}{36}+\frac{16}{36}}}=2.12$$

نلاحظ أن Z الحسابية تقع في منطقة الرفض ومنه نرفض H_0 ونقبل H_1 بمستوى معنوية 5%، ونقول أن متوسط النوع الأول من المصابيح يزيد عن متوسط عمر النوع الثاني بما لا يقل عن ساعتين بمستوى معنوية 5%.

-
$$H_0 : \mu_1 - \mu_2 = 2$$
$$H_1 : \mu_1 - \mu_2 \neq 2$$

نلاحظ أن الاختبار من طرفين، فتكون منطقة الرفض خارج حدود $Z_{\alpha/2} = \pm 1.96$

نقوم بحساب Z الحسابية كما يلي:

$$Z = \frac{(\bar{x}1 - \bar{x}2) - (\mu1 - \mu2)}{\sqrt{\frac{s_1{}^2}{n_1} + \frac{s_2{}^2}{n_2}}} = \frac{(85 - 81) - 2}{\sqrt{\frac{16}{36} + \frac{25}{36}}} = 1.87$$

نلاحظ أن Z الحسابية تقع في منطقة القبول ومنه نقبل H_0 ونرفض H_1 بمستوى معنوية 5%، ونقول أن متوسط عمر النوع الأول يزيد عن متوسط عمر النوع الثاني بساعتين فقط بمستوى معنوية 5%.

7-3- عندما يكون المجتمعين طبيعيين والتباينين مجهولين والعينتان صغيرتان: وهنا نميز حالتين:

7-3-1- تبايني المجتمعين مجهولين لكنهما متساويين:

نظرية: إذا كان $\overline{X}_1$ هو الوسط الحسابي لعينة عشوائية حجمها n_1 تم سحبها من مجتمع طبيعي متوسطه μ_1 وتباينه $\sigma_1{}^2$ ، وكان $\overline{X}_2$ هو الوسط الحسابي لعينة عشوائية حجمها n_2 تم سحبها من مجتمع طبيعي آخر متوسطه μ_2 وتباينه $\sigma_2{}^2$ ، وكان حجم العينتين صغير وتبايني المجتمعين مجهولين لكنهما متساويين، فإن إحصاءة الاختبار المناسبة هي:

$$T = \frac{(\bar{x}1 - \bar{x}2) - (\mu1 - \mu2)}{\sqrt{Sp^2(\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2})}}$$

توزيعه الاحتمالي هو توزيع T بدرجة حرية: $v = n_1 + n_2 - 2$

مثال 36: اختيرت عينة عشوائية من 11 طالبا من كلية الاقتصاد جامعة الجزائر 3 فوجد أن متوسط ذكائهم 80 درجة بانحراف معياري 7 درجات، كما اختيرت عينة عشوائية من 6 طلبة من كلية العلوم السياسية من جامعة الجزائر 3 أيضا فوجد أن متوسط ذكائهم 75 درجة بانحراف معياري 5 درجات، هل يمكننا القول بأن متوسط ذكاء طلبة الاقتصاد لا يساوي متوسط ذكاء طلبة العلوم السياسية وذلك عند مستوى معنوية 5%.

الحل: بما أننا نرغب عدم تساوي المتوسطين في الكليتين فإن الفروض تكون كما يلي:

$$H_0 : \mu_1 = \mu_2$$

$$H_1 : \mu_1 \neq \mu_2$$

بما أن التباينين مجهولين والعينتين صغيرتين فإن الاختبار يتبع توزيع T بدرجة حرية: $v = n_1 + n_2 - 2$، وبما أن الاختبار من طرفين فإن قيم T الجدولية التي تحدد المنطقة الحرجة (منطقة الرفض) والتي تكون خارج حدود:

$$T_{(\alpha/2,\ v)} = T_{(0.025,\ 15)} = \pm 2.131$$

نقوم بحساب T الحسابية:

$$T = \frac{(\bar{x}1 - \bar{x}2) - (\mu1 - \mu2)}{\sqrt{Sp^2(\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2})}}$$

وقبل ذلك نقوم بحساب قيمة التباين المشترك: Sp^2

$$S_p^2 = \frac{(n_1-1)s_1^2+(n_2-1)s_2^2}{n_1+n_2-2} = \frac{(11-1)7^2+(6-1)5^2}{11+6-2} = \frac{(10)49+(5)25}{15} = 41$$

$$T = \frac{(80-75)-0}{\sqrt{41(\frac{1}{11}+\frac{1}{6})}} = 1.54.$$

نلاحظ أن قيمة T المحسوبة تقع في منطقة القبول ومنه نقبل H_0 ونرفض H_1 أي أن متوسط ذكاء طلبة الاقتصاد مساو لمتوسط ذكاء طلبة العلوم السياسية وذلك عند مستوى معنوية 5%.

7-3-2-تبايني المجتمعين مجهولين لكنهما غير متساويين:

نظرية: إذا كان $\overline{X}_1$ هو الوسط الحسابي لعينة عشوائية حجمها n_1 تم سحبها من مجتمع طبيعي متوسطه μ_1 وتباينه σ_1^2 ، وكان $\overline{X}_2$ هو الوسط الحسابي لعينة عشوائية حجمها n_2 تم سحبها من مجتمع طبيعي آخر متوسطه μ_2 وتباينه σ_2^2 ، وكان حجم العينتين صغير وتبايني المجتمعين مجهولين لكنهما غير متساويين، فإن إحصاءة الاختبار المناسبة هي:

$$T = \frac{(\bar{x}1-\bar{x}2)-(\mu1-\mu2)}{\sqrt{(\frac{s_1^2}{n_1}+\frac{s_2^2}{n_2})}}$$

وتوزيعه الاحتمالي هو توزيع T بدرجة حرية لها الصيغة المركبة التالية:

$$V = \frac{\left(\frac{s_1^2}{n_1}+\frac{s_2^2}{n_2}\right)^2}{\frac{\left(\frac{s_1^2}{n_1}\right)^2}{n_1-1}+\frac{\left(\frac{s_2^2}{n_2}\right)^2}{n_2-1}}$$

مثال37: لنفرض أننا سحبنا عينتين عشوائيتين مستقلتين من مجتمعين لهما توزيع طبيعي، فوجدنا البيانات التالية:

$$\overline{X}_1=45,\ \overline{X}_2= 43.2,\ s_1^2= 4.4\ ,\ s_2^2= 2.7\ ,\ n_1= 8\ ,\ n_2= 6.$$

المطلوب: بافتراض أن تبايني المجتمعين مجهولين وغير متساويين، هل يمكن القول أن متوسطي المجتمعين مختلفين عند مستوى معنوية 5%.

الحل: بما أننا نرغب في اختبار ما إذا كان متوسطي المجتمعين مختلفين فإن الفروض الإحصائية تكون كما يلي:

$$H_0 : \mu_1 = \mu_2 \quad \text{أو} \quad H_0 : \mu_1 - \mu_2 = 0$$

$$H_1 : \mu_1 \neq \mu_2 \quad \text{أو} \quad H_1 : \mu_1 - \mu_2 \neq 0$$

بما أن المجتمعين طبيعيين والتباينين مجهولين وغير متساويين والعينتين صغيرتين فإن الاختبار يتبع توزيع T ، وبما أن الاختبار من طرفين فإن منطقة القبول تكون بين حدود المجال وتكون منطقة الرفض خارج هذه الحدود، ومن أجل إيجاد القيم الحرجة، يجب أولا تحديد قيمة درجة الحرية حيث:

$$V=\frac{\left(\frac{s_1^2}{n_1}+\frac{s_2^2}{n_2}\right)^2}{\frac{\left(\frac{s_1^2}{n_1}\right)^2}{n_1-1}+\frac{\left(\frac{s_2^2}{n_2}\right)^2}{n_2-1}}=\frac{\left(\frac{4.4}{8}+\frac{2.7}{6}\right)^2}{\frac{\left(\frac{4.4}{8}\right)^2}{8-1}+\frac{\left(\frac{2.7}{6}\right)^2}{6-1}}=12$$

وتكون قيمة T الجدولية:

$$T_{(\alpha/2,\ v)}=T_{(0.025,\ 12)}=\pm 2.179$$

نقوم بحساب قيمة T الحسابية أو إحصاءة الاختبار:

$$T=\frac{(45-43.2)-0}{\sqrt{\left(\frac{4.4}{8}+\frac{2.7}{6}\right)}}=1.8$$

نلاحظ أن قيمة T الحسابية تقع في منطقة القبول، ومنه نقبل H_0 ونرفض H_1 أي أنه لا توجد فروق معنوية بين متوسطي المجتمعين عند مستوى معنوية 5%.

8- اختبار الفروض في حالة العينات غير المستقلة:

نظرية: إذا قمنا بسحب عينة عشوائية من الفروق $(d_1,d_2........d_n)$ تم سحبها من مجتمع الفروق وسطه μ_d وتباينه σ_d^2 مجهول، وكان مجتمع الفروق يتبع التوزيع الطبيعي، فإن إحصاءة الاختبار المناسب هو:

$T=\frac{\bar{d}-d0}{s_d/\sqrt{n}}$ حيث T هو توزيع ستيودنت بدرجات حرية $v=n-1$.

إذا أردنا اختبار الفرضية الصفرية: $H_0: \mu_d = d_0$

مقابل الفرضية البديلة:

- $H_1: \mu_d \neq d_0$ ، فإننا نرفض H_0 عند مستوى معنوية α إذا كانت:

$$T > T_{(\alpha/2,\ v)} \text{ أو } T< -T_{(\alpha/2,\ v)}$$

- $H_0: \mu_d > d_0$ ، فإننا نرفض H_0 عند مستوى معنوية α إذا كانت:

$$T > T_{(\alpha,v)}$$

- $H_0: \mu_d < d_0$ ، فإننا نرفض H_0 عند مستوى معنوية α إذا كانت:

$$T < -T_{(\alpha,v)}$$

مثال38: يعطي الجدول التالي الإنتاجية لمجموعة من العمال قبل وبعد زيادة الراتب.

قبل زيادة الراتب	100	110	102	105	120	115
بعد زيادة الراتب	110	120	108	112	126	124

المطلوب: هل يمكن القول أن هناك اختلاف بين متوسط الإنتاجية قبل وبعد زيادة الراتب عند مستوى معنوية 5%؟

الحل:

الفروض الإحصائية تكون كما يلي:

$$H_0 : \mu_d = d_0$$

$$H_1 : \mu_d \neq d_0$$

بما أن الفرضية البديلة لا تحدد اتجاها، فإن الاختبار يكون من طرفين وتكون القيم الحرجة كما يلي:

$$T_{(\alpha/2,\ v)} = T_{(0.025,\ 5)} = +2.571,\ -T_{(\alpha/2,\ v)} = -T_{(0.025,\ 5)} = -2.571$$

- نرفض H_0 عند مستوى معنوية α إذا كانت:

$$T > 2.571 \quad \text{أو} \quad T < -2.571$$

نقوم أولا بإيجاد عينة الفروق: $d_i = 10, 10, 6, 7, 6, 9$

نحسب وسطها الحسابي كما يلي: $\bar{d} = \frac{\sum_{i=1}^{n} d_i}{n} = \frac{10+10+6+7+6+9}{6} = 8$

نحسب الانحراف المعياري: $s_d = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n}(d_i-\bar{d})^2}{n-1}} = \sqrt{\frac{18}{5}} = 1.89$

نقوم بحساب T الحسابية:

$$T = \frac{\bar{d}-d0}{s_d/\sqrt{n}} = \frac{8-0}{1.89/\sqrt{6}} = 10.38$$

نلاحظ أن قيمة T الحسابية تقع في منطقة الرفض ومنه نرفض H_0 ونقبل H_1 عند مستوى معنوية 5% أي أن هناك اختلاف بين متوسط الإنتاجية قبل وبعد زيادة الراتب.

9- اختبار الفروض حول النسبة في المجتمع:

يتعلق هذا الاختبار بنسبة مفردات المجتمع التي تتصف بخاصية ما p حيث يؤكد الاختبار أو ينفي صحة فرضية معينة بخصوص قيمة p ، يرمز للقيمة الافتراضية p_0 ، وتكتب الفرضية الصفرية كما يلي:

$H_0 : p = p_0$ ، وأردنا اختبار الفرضية الصفرية مقابل الفرضية البديلة:

-إذا كان الفرض البديل من الشكل: $H_1 : p \neq p_0$

منطقة الرفض تكون بالصورة التالية: $Z > Z_{\alpha/2}$ أو $Z < -Z_{\alpha/2}$

نسمي $Z_{\alpha/2}$ بـ Z الجدولية.

-إذا كان الفرض البديل من الشكل: $H_1 : p > p_0$

نرفض H_0 عندما: $Z > Z_\alpha$

نسمي Z_α بـ Z الجدولية.

- إذا كان الفرض البديل من الشكل: $H_1 : p < p_0$

نرفض H_0 عندما: $Z > -Z_{\alpha}$

حيث أن إحصاءة الاختبار هي: $Z = \frac{r - p0}{\sqrt{\frac{p0(1-p0)}{n}}}$

مثال39: من بين 900 وجد أن عدد المؤيدين منهم لرأي معين هو 738 شخص، اختبر الفرض أن نسبة المؤيدين لذلك الرأي في المجتمع هو 0.8، وذلك عند مستوى معنوية $\alpha=0.01$ ؟

الحل:

الفروض الإحصائية:

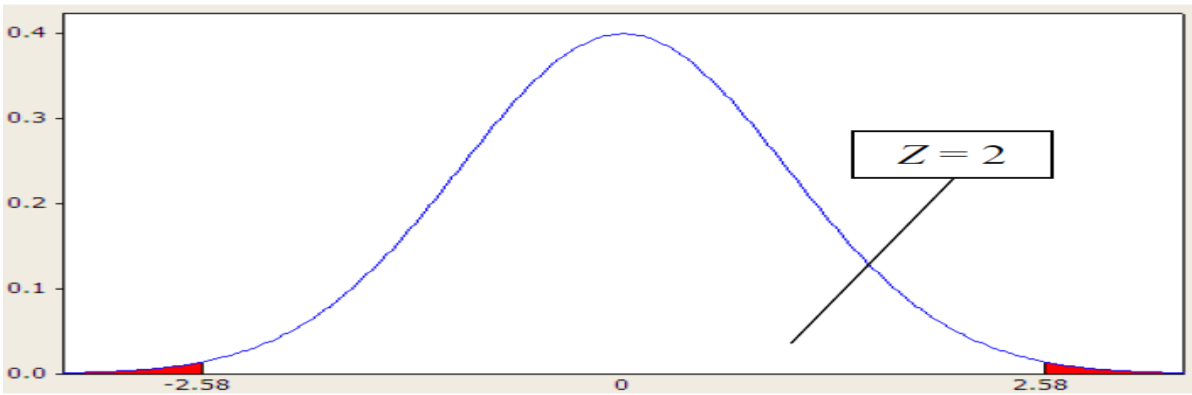
$$H_0 : p = p_0$$

$$H_1 : p \neq p_0$$

$$n = 900, \qquad r = \frac{x}{n} = \frac{738}{900} = 0.82$$

منطقة الرفض تكون خارج حدود $Z_{\alpha/2} = \pm 2.58$ عند مستوى معنوية $\alpha=0.01$.

إحصاءة الاختبار: $Z = \frac{r - p0}{\sqrt{\frac{p0(1-p0)}{n}}} = Z = \frac{0.82 - 0.8}{\sqrt{\frac{0.8(1-0.8)}{900}}} = 2$



نلاحظ أن Z المحسوبة تقع في منطقة القبول ومنه نقبل H_0 ونرفض H_1 ، أي أن نسبة المؤيدين لذلك الرأي في المجتمع هو: 0.8، وذلك عند مستوى معنوية $\alpha=0.01$.

10- اختبار الفروض للفرق بين نسبتي مجتمعين: نريد اختبار الفرق بين نسبتين في عينتين لنرى هل هناك فرق بينهما أم لا؟ مثل نسبة الغيابات بين الذكور والإناث ونسبة المتعلمين بين الأولاد والبنات...الخ، فإذا كان r_1 وr_2 هما نسبتان من عينتان مسحوبتان عشوائيا حجمهما على الترتيب n_1 و n_2، فإن توزيع المعاينة للفرق بين النسبتين $(r_1 - r_2)$ يتبع توزيع طبيعي وتكون إحصاءة الاختبار على النحو التالي:

$$\mathbf{Z}= \frac{(r_1-r_2)-(p_1-p_2)}{\sqrt{\bar{r}(1-\bar{r})(\frac{1}{n_1}+\frac{1}{n_2})}} \quad ....(1)$$

حيث: $\bar{r} = \frac{n1\ r1 + n2\ r2}{n_1+n_2}$

الصيغة في المعادلة (1) يمكن استخدامها عندما يكون فرض العدم على الصورة: $H_0: p_1-p_2 =0$

ويكون الفرض البديل:

$H_1: (p_1-p_2) \neq 0$ أو $H_1: (p_1-p_2) > 0$ أو $H_1: (p_1-p_2) < 0$

ولكن عندما يكون فرض العدم على الصورة: $H_0: p_1-p_2 = p$ حيث: $p\neq 0$

يتم استخدام الاحصاءة التالية: $$Z= \frac{(r_1-r_2)-(p_1-p_2)}{\sqrt{\frac{r_1(1-r_1)}{n_1}+\frac{r_2(1-r_2)}{n_2}}}$$

ويأخذ الفرض البديل الشكل التالي:

$H_1: (p_1-p_2) \neq p$ أو $H_1: (p_1-p_2) > p$ أو $H_1: (p_1-p_2) < p$

وسوف نوضح ذلك بالأمثلة التالية:

مثال 40: مجموعتان أ، ب تتكون كل مجموعة من 100 شخص مصابين بمرض معين، أراد باحث اختبار مصل ضد هذا المرض، فتم إعطاء المصل للمجموعة أ، بينما المجموعة ب تم إعطاؤها العلاج المعتاد، وبعد فترة وجد أن 80 شخص من المجموعة أ من المجموعة أ قد شفي بينما شفي 62 شخص من المجموعة ب، اختبر الفرض بأن المصل يساعد على الشفاء أكثر من العلاج المعتاد وذلك عند مستوى معنوية 5%.

الحل:

نضع الفروض الإحصائية وهي كالتالي:

$H_0: p_1-p_2 =0$

$H_1: (p_1-p_2) > 0$

بما أن الاختبار من طرف واحد ومن جهة اليمين فإن منطقة الرفض تكون إلى اليمين من $Z_\alpha =1.64$.

قيمة Z المحسوبة يتم إيجادها كالتالي: $$Z= \frac{(r_1-r_2)-(p_1-p_2)}{\sqrt{\bar{r}(1-\bar{r})(\frac{1}{n_1}+\frac{1}{n_2})}}$$

حيث:

$$r_1= \frac{80}{100} = 0.8$$

$$r_2= \frac{62}{100} = 0.62$$

$$\bar{r} = \frac{n1\ r1 + n2\ r2}{n_1+n_2} = \frac{100*0.8 + 100*0.62}{100+100} = 0.71$$

$$Z = \frac{(r_1-r_2)-(p_1-p_2)}{\sqrt{\bar{r}(1-\bar{r})(\frac{1}{n_1}+\frac{1}{n_2})}} = \frac{(0.8-0.62)-0}{\sqrt{0.71(1-0.71)(\frac{1}{100}+\frac{1}{100})}} = 2.78$$

نجد أن قيمة Z المحسوبة أكبر من قيمة Z الجدولية عند مستوى معنوية 5%، ونتيجة لذلك نقبل الفرض البديل الذي يدل على مدى فعالية المصل.

مثال 41: ينتج أحد المصانع سلعة ما من خلال وحدتين للإنتاج، فإذا اختيرت عينة عشوائية من 100 وحدة من إنتاج الوحدة الأولى فوجد بها 12 وحدة غير صالحة، وتم اختيار 150 وحدة من إنتاج الوحدة الثانية فوجد بها 15 وحدة غير صالحة، اختبر الفرض القائل بأن الفرق بين نسبة الإنتاج التالفة لا يزيد عن 0.04، وذلك عند مستوى معنوية 5%.

الحل:

نضع الفروض الإحصائية كما يلي:

$$H_0: p_1 - p_2 = 0.04$$
$$H_1: (p_1 - p_2) < 0.04$$

بما أن الاختبار من طرف واحد ومن جهة اليسار، فإن منطقة الرفض تكون إلى اليسار من $-Z_\alpha = -1.64$.

قيمة Z المحسوبة يتم إيجادها كما يلي:

$$Z = \frac{(r_1 - r_2) - (p_1 - p_2)}{\sqrt{\frac{r_1(1-r_1)}{n_1} + \frac{r_2(1-r_2)}{n_2}}}$$

حيث:

$$r_1 = \frac{12}{100} = 0.12$$

$$r_2 = \frac{15}{150} = 0.10$$

$$Z = \frac{(r_1 - r_2) - (p_1 - p_2)}{\sqrt{\frac{r_1(1-r_1)}{n_1} + \frac{r_2(1-r_2)}{n_2}}} = \frac{(0.12 - 0.10) - 0.04}{\sqrt{\frac{0.12(1-0.12)}{100} + \frac{0.1(1-0.1)}{150}}} = -0.49.$$

ومنه قيمة Z المحسوبة أكبر من قيمة Z الجدولية عند مستوى معنوية 5%، ونتيجة لذلك نقبل الفرض العدمي ونرفض الفرض البديل، أي أن الفرق بين نسبة الإنتاج غير الصالح يساوي 0.04.

11- اختبار الفروض حول تباين المجتمع: لاختبار الفروض حول التباين نتبع أسلوب اختبار الفرضيات السابقة، ولكن نجد مجال رفض وقبول الفرضية الصفرية من توزيع كاي تربيع بدرجات حرية (n-1) وتكون إحصاءة الاختبار هي: $X^2 = \frac{(n-1)S^2}{\sigma^2}$

ويمكن تلخيص عملية إجراء اختبار الفرضيات حول التباين في النظرية التالية:

نظرية: إذا كان لدينا مجتمع يتوزع توزيعا طبيعيا تباينه σ^2، وأردنا اختبار الفرضيات حول المعلمة σ^2 فإن إحصاءة الاختبار المناسب هو المتغير العشوائي X^2 حيث: $X^2 = \frac{(n-1)S^2}{\sigma^2}$ ، وذلك بدرجة حرية $v = n-1$ وإذا أردنا اختبار الفرضيات في الحالات التالية:

$$\begin{cases} H_0 : \sigma^2 = \sigma_0^2 \\ H_1 : \sigma^2 \neq \sigma_0^2 \end{cases}$$

فإننا نرفض H_0 عند مستوى المعنوية α إذا كانت:

$X^2 < X^2_{(1-\alpha/2,\ v)}$ أو $X^2 > X^2_{(\alpha/2,\ v)}$

$$\begin{cases} H_0 : \sigma^2 = \sigma_0^2 \\ H_1 : \sigma^2 > \sigma_0^2 \end{cases}$$

فإننا نرفض H_0 عند مستوى المعنوية α إذا كانت:

$X^2 > X^2_{(\alpha,\ v)}$

$$\begin{cases} H_0 : \sigma^2 = \sigma_0^2 \\ H_1 : \sigma^2 < \sigma_0^2 \end{cases}$$

فإننا نرفض H_0 عند مستوى المعنوية α إذا كانت:

$X^2 < X^2_{(1-\alpha,\ v)}$

مثال 42: رغبت شركة أدوية شراء كمية من دواء معين خافض للحرارة خاص بالأطفال وقد نص قانون الأدوية على أن تحتوي الكبسولة الواحدة بمتوسط 91% من المادة الفعالة من وزنها بتباين قدره 0.01، لذا تم سحب عينة عشوائية حجمها 10 فتبين أن قيمة التباين لها 0.011.

المطلوب: هل تطابق مواصفات هذه العينة قانون الأدوية عند مستوى معنوية 0.02؟

الحل:

نضع الفروض الإحصائية كما يلي:

$$\begin{cases} H_0 : \sigma^2 = \sigma_0^2 \\ H_1 : \sigma^2 \neq \sigma_0^2 \end{cases}$$

نلاحظ أن الفرضية البديلة ذات طرفين وقيمتها الحرجة هي:

$$X^2_{(\alpha/2,\ v)} = X^2_{(0.01,\ 9)} = 21.65,\ X^2 < X^2_{(1-\alpha/2,\ v)} = X^2 < X^2_{(0.99,\ 9)} = 2.09$$

نقوم بحساب إحصاءة الاختبار كما يلي: $X^2 = \frac{(n-1)S^2}{\sigma^2} = \frac{(10-1)0.011}{0.01} = 9.9$

بما أن $2.09 < 9.9 < 21.65$ فإن قيمة X^2 وقعت في منطقة القبول، وعليه نقبل H_0 ونرفض H_1 عند مستوى المعنوية α=0.02، أي أن مواصفات العينة تطابق قانون الأدوية عند مستوى معنوية 0.02.

12- اختبار الفروض حول النسبة بين تبايني مجتمعين:

نظرية: إذا كان لدينا مجتمعان يتوزعان طبيعيا، وسحبنا من المجتمع الأول الذي تباينه σ_1^2 عينة عشوائية حجمها n_1، وكان تباينها s_1^2، ثم سحبنا من المجتمع الثاني الذي تباينه σ_2^2 عينة عشوائية أخرى مستقلة عن الأولى حجمها n_2، وكان تباينها s_2^2، وأردنا إجراء اختبار خاص بمقارنة σ_1^2 و σ_2^2 فإن إحصاءة الاختبار المناسبة هي المتغيرة العشوائية F، حيث: $F = s_1^2 / s_2^2 * \sigma_2^2 / \sigma_1^2$ والتوزيع الاحتمالي للمتغير هو توزيع فيشر بدرجتي حرية $v_1 = n_1 - 1$، $v_2 = n_2 - 1$ ، وعليه إذا أردنا اختبار الفرضية الصفرية: $H_0 : \sigma_1^2 = \sigma_2^2$

مقابل الفرضية البديلة:

$H_1 : \sigma_1{}^2 \neq \sigma_2{}^2$ فإننا نرفض H_0 عند مستوى المعنوية α إذا كانت:

$F > F_{(\alpha/2,\ v1,\ v2)}$ أو $F < F_{(1-\alpha/2,\ v1,v2)}$

$H_1 : \sigma_1{}^2 > \sigma_2{}^2$ فإننا نرفض H_0 عند مستوى المعنوية α إذا كانت:

$F > F_{(\alpha,\ v1,\ v2)}$

$H_1 : \sigma_1{}^2 < \sigma_2{}^2$ فإننا نرفض H_0 عند مستوى المعنوية α إذا كانت:

$F < F_{(1-\alpha,\ v1,\ v2)}$

حيث: $F_{(1-\alpha/2,\ v1,v2)} = 1/\ F_{(\alpha/2,\ v2,\ v1)}$

مثال 43: بفرض أنه لدينا البيانات التالية:

$$n_1=16,\ \ n_2=20,\ s_1{}^2=\ 20.25,\ \ s_2{}^2= 11.56$$

المطلوب: اختبر الفرضية: $H_0 : \sigma_1{}^2 = \sigma_2{}^2$ مقابل الفرضية $H_1 : \sigma_1{}^2 \neq \sigma_2{}^2$ عند مستوى المعنوية α=0.10؟

الحل: الفروض الإحصائية تكون على النحو الآتي:

$$\begin{cases} H_0 : \sigma_1{}^2 = \sigma_2{}^2 \\ H_1 : \sigma_1{}^2 \neq \sigma_2{}^2 \end{cases}$$

بما أن الفرضية البديلة لا تحدد اتجاها واحدا، فإن الاختبار المناسب هو من طرفين، والقيم الحرجة تكون:

$$F_{(1-\alpha/2,\ v1,v2)} = F_{(0.95,\ 15,19)} = 0.43\ ,\quad F_{(\alpha/2,\ v1,\ v2)} = F_{(0.05,\ 15,\ 19)} = 2.43$$

ومن ثمة فإن منطقة قبول H_0 تقع بين القيمتين 0.43 و2.23.

والآن نقوم بحساب إحصاءة الاختبار : $F= s_1{}^2/\ s_2{}^2 * \sigma_2{}^2/\ \sigma_1{}^2 = 20.25/11.56= 1.75$

نلاحظ أن قيمة إحصاءة الاختبار تقع في منطقة قبول H_0، إذا القرار هو قبول H_0 ورفض H_1، أي أن تبايني المجتمعين متساويين عند مستوى معنوية α=0.10.

13- تمارين المحور الرابع:

التمرين الأول:

نرغب في معرفة ما إذا كان متوسط المقاومة للمكونات المنتجة في مصنع ما هو 400 وحدة. نعتبر أن توزيع المقاومة طبيعي، نقوم بقياس عينة متكونة من 16وحدة: 392، 396، 386، 389، 388، 387، 403، 397، 401، 391، 400، 402، 394، 406، 406، 400.

(أ) أعط تقديرا للوسط والتباين.

(ب) هل يمكن اعتباران مقاومة العينة محترمة عند عتبة 5 ٪ ، نفس السؤال عند $\alpha = 1$٪؟

التمرين الثاني:

يعرف مركز تجنيد بالجيش من الخبرة الماضية أن وزن المجند يتبع التوزيع الطبيعي بوسط μ يساوي 80 كيلو جراماً وانحراف معياري σ يساوي 10 كيلو جراما. ويرغب مركز التجنيد أن يختبر، عند مستوى معنوية 1%، ما إذا كان متوسط وزن مجند هذا العام أكبر من 80 كيلو جراماً. ولعمل هذا، فقد أخذ عينة عشوائية من 25 مجنداً حيث وجد أن متوسط الوزن في العينة 85 كيلو جراماً. كيف يمكن إجراء هذا الاختبار؟

التمرين الثالث:

في دراسة على متوسط أعمار الطلاب المتقدمون لشغل إحدى الوظائف أخذت عينة عشوائية من 30 متقدم للوظيفة، فوجد أن متوسط أعمارهم 25 سنة وذلك بانحراف معياري 5 سنوات . هل يمكن القول بأن متوسط أعمار جميع المتقدمين يساوى 28 سنة وذلك في 95 % من الحالات؟

التمرين الرابع:

تدعي أحد المصانع بتوفير أنابيب اختبار ذات مدة حياة تزيد عن 2000 ساعة. باستخدام عينة من 100 أنبوب اختبار، قدرنا متوسط مدة حياة الأنابيب العينة هو 1975 ساعة بانحراف معياري 130 ساعة.

هل يمكن القول أن الادعاء خاطئ عند عتبة 5 ٪؟

التمرين الخامس:

يريد مستشفى أن يختبر أن 90% من جرعات عقار يشتريه يحتوي على 100mg من العقار. لعمل هذا، يأخذ المستشفى عينة من $n = 100$ جرعة، ويجد أن 95% منها فقط يحتوي على الكمية المناسبة. كيف يمكن للمستشفى أن يختبر هذا عند: (أ) $\alpha = 1\%$ ؟ (ب) $\alpha = 5\%$ ؟ (ج) $\alpha = 10\%$ ؟

التمرين السادس:

يدعى متحدث حكومي لمكافحة التلوث أن أكثر من 80% من المصانع في المنطقة تستوفى معايير مكافحة التلوث. ولكن أحد جمعيات أنصار مكافحة التلوث لا تصدق ادعاء الحكومة. فهي تأخذ عينة عشوائية من البيانات المنشورة عن مكافحة التلوث في 64 مصنعاً في منطقة وتجد أن منها 56 مصنعاً مستوفى معايير المكافحة. هل تؤيد بيانات العينة ادعاء الحكومة عند مستوى معنوية 5%؟

التمرين السابع:

أخذت عينة عشوائية مكونة من 125 طالب في جامعة الجزائر 3 في السنة الثانية فوجد 95 طالب منهم قد نجحوا في جميع المقاييس. اختبر الفرض القائل بأن نسبة الطلبة الناجحين في جميع المقاييس أقل من60% عند $\alpha = 0.1$ ؟

التمرين الثامن:

يرغب مشتر كبير للمصابيح الكهربائية أن يقرر، أي صنف يشترى من بين صنفين لهما نفس السعر. لعمل هذا، فأنه يأخذ عينة عشوائية من 100 مصباح من كل صنف فيجد أن الصنف الأول يعيش في المتوسط

$X = 980$ ساعة، مع انحراف معياري، s1 قدره 80 ساعة وبالنسبة للصنف الثاني، $X = 1,010$ ساعة و $s2 = 120$ ساعة. أي الصنفين يجب شراءه إذا كان المشتري يرغب في أن يصل إلى قرار عند مستوى معنوية:

(أ) 5% ؟ (ب) 1% ؟

التمرين التاسع:

تريد شركة أدوية دراسة الآثار الجانبية المحتملة للدواء على مستويات الكولسترول لدى المرضى. لذلك يتم اختيار مائة متطوع أصحاء لاختبار الدواء.

(أ) قبل التجربة، يكون متوسط مستوى الكولسترول لدى هؤلاء المتطوعين 02. 2 ± 0.2 جرام / لتر، بما أن متوسط مستوى الكوليسترول في الدم هو 2 جرام / لتر، تأكد من أن هذه العينة ممثلة بمخاطر تقدر بنسبة 5٪.

(ب) بعد شهر واحد من العلاج، يعود 97 متطوعا فقط لإجراء الاختبار. ارتفع مستوى الكوليسترول في الدم لديهم إلى 2.09 غرام / لتر مع انحراف معياري العينة يقدر ب 0.25غرام / لتر. هل الفرق كبير عند عتبة خطر 5 ٪؟ نفس السؤال عند 1 ٪؟

التمرين العاشر:

يرغب اتحاد أطباء الأسنان في اختبار أي معجون من بين معجوني أسنان أفضل في محاربة التسوس. أخذت عينة عشوائية من 12 شخصاً من مستعمل كل من المعجونين موضع الاختبار. ووجد أن متوسط عدد الفجوات للمجموعة الأولى على مدى 10 سنوات هو 25 بانحراف معياري 5 وبالنسبة للمجموعة الثانية، متوسط الفجوات 23 بانحراف معياري 5 بافتراض أن توزيع الفجوات طبيعي لمستعمل المعجون الأول والمعجون الثاني، وأن $\sigma^2_1 = \sigma^2_2$ ، حدد إذا كانت $\mu_1 = \mu_2$ عند مستوى معنوية 5% .

التمرين الحادي عشر:

معمل لإنتاج الأنابيب البلاستيكية يسوق إنتاجه من الأنابيب عندما يكون الانحراف المعياري في سمك جدار الأنبوب بحدود القيمة 0.003 سم قام مفتش وزارة الصناعة بسحب عينة عشوائية متكونة من 20 أنبوب والتي تمثل إنتاج يوم واحد فلوحظ أن الانحراف المعياري في سمك جدار الأنبوب كان 0.004 سم، هل سيسمح المفتش للمصنع بتسويق الأنابيب لذلك اليوم عند مستوى معنوية 5% ؟

التمرين الثاني عشر:

في دراسة لبيان معنوية الفرق بين تبايني أوزان الأرانب بعمر 6 أشهر في المزرعتين A و B

تم سحب عينة عشوائية من كل مزرعة فكانت النتائج بالكيلوغرام كالتالي:

المزرعة A	1.5	1.7	1.3	1.4	1.1	1.4
المزرعةB	1.7	1.6	1.3	1.4	1.4	1.5

اختبر تساوي تبايني الأوزان في المزرعتين من عدمه عند مستوى معنوية 0.05 ؟

المراجع:

- الحمدي شاكر مصلح، **الإحصاء وتصميم الاختبارات**، دار أسامة للنشر والتوزيع والطباعة، عمان، 2011.
- أماني موسى محمد، **التحليل الإحصائي للبيانات**، الطبعة الأولى، مركز تطوير الدراسات العليا، القاهرة 2007.
- بوعبد الله صالح، **مدخل إلى الاحتمالات والإحصاء الرياضي**، دروس مع أمثلة وتطبيقات محلولة، كلية العلوم الاقتصادية، جامعة المسيلة.
- جبار عبد مضحي، **مقدمة في نظرية الاحتمالات**، الطبعة الأولى، دار المسيرة للنشر والتوزيع، عمان، 2011.
- جلال الصياد، عبد الحميد محمد ربيع، **مبادئ الطرق الإحصائية**، الطبعة الأولى، المملكة العربية السعودية 1983.
- حسين ياسين طعمة، **أساليب الإحصاء التطبيقي**، دار صفاء للنشر والتوزيع، عمان، 2010.
- دومينيك سالفاتور، **الإحصاء والاقتصاد القياسي**، ترجمة سعدية حافظ منتصر، الدار الدولية للنشر والتوزيع مصر، 2011.
- زروخي صباح، **محاضرات في مادة الإحصاء الاستدلالي**، كلية العلوم الاقتصادية والتجارية وعلوم التسيير، جامعة المسيلة، 2017.
- عبد الحميد عبد المجيد البلداوي، **الأساليب الإحصائية التطبيقية**، دار الشروق للنشر والتوزيع، عمان 2004.
- شنافي نوال، **مطبوعة في الاحتمالات والإحصاء التطبيقي**، كلية العلوم الاقتصادية والتجارية وعلوم التسيير، جامعة بسكرة، 2017.
- قريشي محمد، **محاضرات في مقياس الاحتمالات والإحصاء التطبيقي**، كلية العلوم الاقتصادية والتجارية وعلوم التسيير، جامعة بسكرة، 2017.
- مبارك أسبر ديب، **مبادئ في الاحتمالات والإحصاء**، مديرية الكتب والمطبوعات بجامعة تشرين، سوريا 2009.
- معتوق أمحمد، **الإحصاء الرياضي والنماذج الإحصائية**، ديوان المطبوعات الجامعية، الجزائر، 2015.
- موراي شبيجل وآخرون، **الاحتمالات والإحصاء**، ترجمة محمود علي أبو النصر، مصطفى جلال مصطفى الطبعة العربية الأولى، الدار الدولية للاستثمارات الثقافية، القاهرة، 2004.
- نبيل جمعة صالح، **الإحصاء التحليلي**، الطبعة الأولى، دار الحامد للنشر والتوزيع، عمان، 2015.
- André Giroux, **probabilités et statistique**, université de Montréal, 2007.
- Amany Mousa, **Statistical data analysis**, center four advancement of postgraduate studies and research, faculty of engineering, Cairo University 2005.
- Khaldi khaled, **Méthodes statistiques, rappels de cours, exercices corrigés** office des publications universitaires, Alger, 2005.

الجداول الإحصائية

جدول التوزيع الطبيعي المعياري:

$\Phi(z) = P(Z \le z),\ 0 \le z \le 3.49, \quad Z \sim N(0,1)$

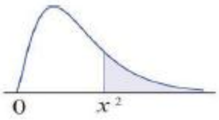
z	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
0.0	0.5000	0.5040	0.5080	0.5120	0.5160	0.5199	0.5239	0.5279	0.5319	0.5359
0.1	0.5398	0.5438	0.5478	0.5517	0.5557	0.5596	0.5636	0.5675	0.5714	0.5753
0.2	0.5793	0.5832	0.5871	0.5910	0.5948	0.5987	0.6026	0.6064	0.6103	0.6141
0.3	0.6179	0.6217	0.6255	0.6293	0.6331	0.6368	0.6406	0.6443	0.6480	0.6517
0.4	0.6554	0.6591	0.6628	0.6664	0.6700	0.6736	0.6772	0.6808	0.6844	0.6879
0.5	0.6915	0.6950	0.6985	0.7019	0.7054	0.7088	0.7123	0.7157	0.7190	0.7224
0.6	0.7257	0.7291	0.7324	0.7357	0.7389	0.7422	0.7454	0.7486	0.7517	0.7549
0.7	0.7580	0.7611	0.7642	0.7673	0.7704	0.7734	0.7764	0.7794	0.7823	0.7852
0.8	0.7881	0.7910	0.7939	0.7967	0.7995	0.8023	0.8051	0.8078	0.8106	0.8133
0.9	0.8159	0.8186	0.8212	0.8238	0.8264	0.8289	0.8315	0.8340	0.8365	0.8389
1.0	0.8413	0.8438	0.8461	0.8485	0.8508	0.8531	0.8554	0.8577	0.8599	0.8621
1.1	0.8643	0.8665	0.8686	0.8708	0.8729	0.8749	0.8770	0.8790	0.8810	0.8830
1.2	0.8849	0.8869	0.8888	0.8907	0.8925	0.8944	0.8962	0.8980	0.8997	0.9015
1.3	0.9032	0.9049	0.9066	0.9082	0.9099	0.9115	0.9131	0.9147	0.9162	0.9177
1.4	0.9192	0.9207	0.9222	0.9236	0.9251	0.9265	0.9279	0.9292	0.9306	0.9319
1.5	0.9332	0.9345	0.9357	0.9370	0.9382	0.9394	0.9406	0.9418	0.9429	0.9441
1.6	0.9452	0.9463	0.9474	0.9484	0.9495	0.9505	0.9515	0.9525	0.9535	0.9545
1.7	0.9554	0.9564	0.9573	0.9582	0.9591	0.9599	0.9608	0.9616	0.9625	0.9633
1.8	0.9641	0.9649	0.9656	0.9664	0.9671	0.9678	0.9686	0.9693	0.9699	0.9706
1.9	0.9713	0.9719	0.9726	0.9732	0.9738	0.9744	0.9750	0.9756	0.9761	0.9767
2.0	0.9772	0.9778	0.9783	0.9788	0.9793	0.9798	0.9803	0.9808	0.9812	0.9817
2.1	0.9821	0.9826	0.9830	0.9834	0.9838	0.9842	0.9846	0.9850	0.9854	0.9857
2.2	0.9861	0.9864	0.9868	0.9871	0.9875	0.9878	0.9881	0.9884	0.9887	0.9890
2.3	0.9893	0.9896	0.9898	0.9901	0.9904	0.9906	0.9909	0.9911	0.9913	0.9916
2.4	0.9918	0.9920	0.9922	0.9925	0.9927	0.9929	0.9931	0.9932	0.9934	0.9936
2.5	0.9938	0.9940	0.9941	0.9943	0.9945	0.9946	0.9948	0.9949	0.9951	0.9952
2.6	0.9953	0.9955	0.9956	0.9957	0.9959	0.9960	0.9961	0.9962	0.9963	0.9964
2.7	0.9965	0.9966	0.9967	0.9968	0.9969	0.9970	0.9971	0.9972	0.9973	0.9974
2.8	0.9974	0.9975	0.9976	0.9977	0.9977	0.9978	0.9979	0.9979	0.9980	0.9981
2.9	0.9981	0.9982	0.9982	0.9983	0.9984	0.9984	0.9985	0.9985	0.9986	0.9986
3.0	0.9987	0.9987	0.9987	0.9988	0.9988	0.9989	0.9989	0.9989	0.9990	0.9990
3.1	0.9990	0.9991	0.9991	0.9991	0.9992	0.9992	0.9992	0.9992	0.9993	0.9993
3.2	0.9993	0.9993	0.9994	0.9994	0.9994	0.9994	0.9994	0.9995	0.9995	0.9995
3.3	0.9995	0.9995	0.9995	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9997
3.4	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9998

جدول توزیع t

Table T Critical Values of the t Distribution

df	One-Tail = .4 Two-Tail = .8	.25 .5	.1 .2	.05 .1	.025 .05	.01 .02	.005 .01	.0025 .005	.001 .002	.0005 .001
1	0.325	1.000	3.078	6.314	12.706	31.821	63.657	127.32	318.31	636.62
2	0.289	0.816	1.886	2.920	4.303	6.965	9.925	14.089	22.327	31.598
3	0.277	0.765	1.638	2.353	3.182	4.541	5.841	7.453	10.214	12.924
4	0.271	0.741	1.533	2.132	2.776	3.747	4.604	5.598	7.173	8.610
5	0.267	0.727	1.476	2.015	2.571	3.365	4.032	4.773	5.893	6.869
6	0.265	0.718	1.440	1.943	2.447	3.143	3.707	4.317	5.208	5.959
7	0.263	0.711	1.415	1.895	2.365	2.998	3.499	4.029	4.785	5.408
8	0.262	0.706	1.397	1.860	2.306	2.896	3.355	3.833	4.501	5.041
9	0.261	0.703	1.383	1.833	2.262	2.821	3.250	3.690	4.297	4.781
10	0.260	0.700	1.372	1.812	2.228	2.764	3.169	3.581	4.144	4.587
11	0.260	0.697	1.363	1.796	2.201	2.718	3.106	3.497	4.025	4.437
12	0.259	0.695	1.356	1.782	2.179	2.681	3.055	3.428	3.930	4.318
13	0.259	0.694	1.350	1.771	2.160	2.650	3.012	3.372	3.852	4.221
14	0.258	0.692	1.345	1.761	2.145	2.624	2.977	3.326	3.787	4.140
15	0.258	0.691	1.341	1.753	2.131	2.602	2.947	3.286	3.733	4.073
16	0.258	0.690	1.337	1.746	2.120	2.583	2.921	3.252	3.686	4.015
17	0.257	0.689	1.333	1.740	2.110	2.567	2.898	3.222	3.646	3.965
18	0.257	0.688	1.330	1.734	2.101	2.552	2.878	3.197	3.610	3.922
19	0.257	0.688	1.328	1.729	2.093	2.539	2.861	3.174	3.579	3.883
20	0.257	0.687	1.325	1.725	2.086	2.528	2.845	3.153	3.552	3.850
21	0.257	0.686	1.323	1.721	2.080	2.518	2.831	3.135	3.527	3.819
22	0.256	0.686	1.321	1.717	2.074	2.508	2.819	3.119	3.505	3.792
23	0.256	0.685	1.319	1.714	2.069	2.500	2.807	3.104	3.485	3.767
24	0.256	0.685	1.318	1.711	2.064	2.492	2.797	3.091	3.467	3.745
25	0.256	0.684	1.316	1.708	2.060	2.485	2.787	3.078	3.450	3.725
26	0.256	0.684	1.315	1.706	2.056	2.479	2.779	3.067	3.435	3.707
27	0.256	0.684	1.314	1.703	2.052	2.473	2.771	3.057	3.421	3.690
28	0.256	0.683	1.313	1.701	2.048	2.467	2.763	3.047	3.408	3.674
29	0.256	0.683	1.311	1.699	2.045	2.462	2.756	3.038	3.396	3.659
30	0.256	0.683	1.310	1.697	2.042	2.457	2.750	3.030	3.385	3.646
40	0.255	0.681	1.303	1.684	2.021	2.423	2.704	2.971	3.307	3.551
60	0.254	0.679	1.296	1.671	2.000	2.390	2.660	2.915	3.232	3.460
120	0.254	0.677	1.289	1.658	1.980	2.358	2.617	2.860	3.160	3.373
∞	0.253	0.674	1.282	1.645	1.960	2.326	2.576	2.807	3.090	3.291

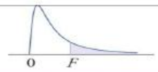
جدول كاي تربيع $\chi^2_{v,\alpha}$



Critical Values of Chi-Square Distributions

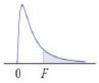
	x^2 Right-Tail Area									
df	0.995	0.99	0.975	0.95	0.90	0.10	0.05	0.025	0.01	0.005
1	0.000	0.000	0.001	0.004	0.016	2.706	3.841	5.024	6.635	7.879
2	0.010	0.020	0.051	0.103	0.211	4.605	5.991	7.378	9.210	10.597
3	0.072	0.115	0.216	0.352	0.584	6.251	7.815	9.348	11.345	12.838
4	0.207	0.297	0.484	0.711	1.064	7.779	9.488	11.143	13.277	14.860
5	0.412	0.554	0.831	1.145	1.610	9.236	11.070	12.833	15.086	16.750
6	0.676	0.872	1.237	1.635	2.204	10.645	12.592	14.449	16.812	18.548
7	0.989	1.239	1.690	2.167	2.833	12.017	14.067	16.013	18.475	20.278
8	1.344	1.646	2.180	2.733	3.490	13.362	15.507	17.535	20.090	21.955
9	1.735	2.088	2.700	3.325	4.168	14.684	16.919	19.023	21.666	23.589
10	2.156	2.558	3.247	3.940	4.865	15.987	18.307	20.483	23.209	25.188
11	2.603	3.053	3.816	4.575	5.578	17.275	19.675	21.920	24.725	26.757
12	3.074	3.571	4.404	5.226	6.304	18.549	21.026	23.337	26.217	28.300
13	3.565	4.107	5.009	5.892	7.042	19.812	22.362	24.736	27.688	29.819
14	4.075	4.660	5.629	6.571	7.790	21.064	23.685	26.119	29.141	31.319
15	4.601	5.229	6.262	7.261	8.547	22.307	24.996	27.488	30.578	32.801
16	5.142	5.812	6.908	7.962	9.312	23.542	26.296	28.845	32.000	34.267
17	5.697	6.408	7.564	8.672	10.085	24.769	27.587	30.191	33.409	35.718
18	6.265	7.015	8.231	9.390	10.865	25.989	28.869	31.526	34.805	37.156
19	6.844	7.633	8.907	10.117	11.651	27.204	30.144	32.852	36.191	38.582
20	7.434	8.260	9.591	10.851	12.443	28.412	31.410	34.170	37.566	39.997
21	8.034	8.897	10.283	11.591	13.240	29.615	32.671	35.479	38.932	41.401
22	8.643	9.542	10.982	12.338	14.041	30.813	33.924	36.781	40.289	42.796
23	9.260	10.196	11.689	13.091	14.848	32.007	35.172	38.076	41.638	44.181
24	9.886	10.856	12.401	13.848	15.659	33.196	36.415	39.364	42.980	45.559
25	10.520	11.524	13.120	14.611	16.473	34.382	37.652	40.646	44.314	46.928
26	11.160	12.198	13.844	15.379	17.292	35.563	38.885	41.923	45.642	48.290
27	11.808	12.879	14.573	16.151	18.114	36.741	40.113	43.195	46.963	49.645
28	12.461	13.565	15.308	16.928	18.939	37.916	41.337	44.461	48.278	50.993
29	13.121	14.256	16.047	17.708	19.768	39.087	42.557	45.722	49.588	52.336
30	13.787	14.953	16.791	18.493	20.599	40.256	43.773	46.979	50.892	53.672
31	14.458	15.655	17.539	19.281	21.434	41.422	44.985	48.232	52.191	55.003
32	15.134	16.362	18.291	20.072	22.271	42.585	46.194	49.480	53.486	56.328
33	15.815	17.074	19.047	20.867	23.110	43.745	47.400	50.725	54.776	57.648
34	16.501	17.789	19.806	21.664	23.952	44.903	48.602	51.966	56.061	58.964
35	17.192	18.509	20.569	22.465	24.797	46.059	49.802	53.203	57.342	60.275
36	17.887	19.233	21.336	23.269	25.643	47.212	50.998	54.437	58.619	61.581
37	18.586	19.96	22.106	24.075	26.492	48.363	52.192	55.668	59.893	62.883
38	19.289	20.691	22.878	24.884	27.343	49.513	53.384	56.896	61.162	64.181
39	19.996	21.426	23.654	25.695	28.196	50.660	54.572	58.120	62.428	65.476
40	20.707	22.164	24.433	26.509	29.051	51.805	55.758	59.342	63.691	66.766
41	21.421	22.906	25.215	27.326	29.907	52.949	56.942	60.561	64.950	68.053
42	22.138	23.650	25.999	28.144	30.765	54.090	58.124	61.777	66.206	69.336
43	22.859	24.398	26.785	28.965	31.625	55.230	59.304	62.990	67.459	70.616
44	23.584	25.148	27.575	29.787	32.487	56.369	60.481	64.201	68.710	71.893
45	24.311	25.901	28.366	30.612	33.350	57.505	61.656	65.410	69.957	73.166
100	67.328	70.065	74.222	77.929	82.358	118.498	124.342	129.561	135.807	140.169

جدول توزیع فیشر F (تابع)

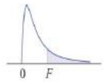


Lower Critical Values of *F*-Distributions

F tail area	df_1 / df_2	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	15	20	30	60
0.90	15	0.02	0.11	0.19	0.26	0.31	0.35	0.38	0.41	0.43	0.45	0.51	0.54	0.58	0.62
0.95	15	0.00	0.05	0.11	0.17	0.22	0.25	0.28	0.31	0.33	0.35	0.42	0.45	0.50	0.54
0.975	15	0.00	0.03	0.07	0.12	0.16	0.19	0.22	0.24	0.27	0.28	0.35	0.39	0.43	0.49
0.99	15	0.00	0.01	0.04	0.07	0.10	0.13	0.16	0.18	0.20	0.22	0.28	0.32	0.37	0.43
0.995	15	0.00	0.01	0.02	0.05	0.08	0.10	0.13	0.15	0.17	0.18	0.25	0.29	0.33	0.39
0.90	20	0.02	0.11	0.19	0.26	0.31	0.35	0.39	0.41	0.44	0.45	0.52	0.56	0.60	0.65
0.95	20	0.00	0.05	0.12	0.17	0.22	0.26	0.29	0.32	0.34	0.36	0.43	0.47	0.52	0.57
0.975	20	0.00	0.03	0.07	0.12	0.16	0.19	0.22	0.25	0.27	0.29	0.36	0.41	0.46	0.51
0.99	20	0.00	0.01	0.04	0.07	0.10	0.14	0.16	0.19	0.21	0.23	0.30	0.34	0.39	0.45
0.995	20	0.00	0.01	0.02	0.05	0.08	0.1	00.13	0.15	0.17	0.19	0.26	0.30	0.35	0.42
0.90	30	0.02	0.11	0.19	0.26	0.32	0.36	0.39	0.42	0.44	0.46	0.53	0.58	0.62	0.68
0.95	30	0.00	0.05	0.12	0.17	0.22	0.26	0.30	0.32	0.35	0.37	0.45	0.49	0.54	0.61
0.975	30	0.00	0.03	0.07	0.12	0.16	0.20	0.23	0.26	0.28	0.30	0.38	0.43	0.48	0.55
0.99	30	0.00	0.01	0.04	0.07	0.11	0.14	0.17	0.19	0.22	0.24	0.31	0.36	0.42	0.49
0.995	30	0.00	0.01	0.02	0.05	0.08	0.11	0.13	0.16	0.18	0.20	0.27	0.32	0.38	0.46
0.90	40	0.02	0.11	0.19	0.26	0.32	0.36	0.39	0.42	0.45	0.47	0.54	0.59	0.64	0.70
0.95	40	0.00	0.05	0.12	0.17	0.22	0.26	0.30	0.33	0.35	0.38	0.45	0.50	0.56	0.63
0.975	40	0.00	0.03	0.07	0.12	0.16	0.20	0.23	0.26	0.29	0.31	0.39	0.44	0.50	0.57
0.99	40	0.00	0.01	0.04	0.07	0.11	0.14	0.17	0.20	0.22	0.24	0.32	0.37	0.43	0.52
0.995	40	0.00	0.01	0.02	0.05	0.08	0.11	0.13	0.16	0.18	0.20	0.28	0.33	0.40	0.48
0.90	50	0.02	0.11	0.19	0.26	0.32	0.36	0.40	0.43	0.45	0.47	0.55	0.59	0.64	0.71
0.95	50	0.00	0.05	0.12	0.18	0.23	0.27	0.30	0.33	0.36	0.38	0.46	0.51	0.57	0.64
0.975	50	0.00	0.03	0.07	0.12	0.16	0.20	0.23	0.26	0.29	0.31	0.39	0.44	0.51	0.59
0.99	50	0.00	0.01	0.04	0.07	0.11	0.14	0.17	0.20	0.22	0.24	0.32	0.38	0.45	0.53
0.995	50	0.00	0.01	0.02	0.05	0.08	0.11	0.14	0.16	0.18	0.20	0.28	0.34	0.41	0.50
0.90	60	0.02	0.11	0.19	0.26	0.32	0.36	0.40	0.43	0.45	0.47	0.55	0.60	0.65	0.72
0.95	60	0.00	0.05	0.12	0.18	0.23	0.27	0.30	0.33	0.36	0.38	0.46	0.51	0.57	0.65
0.975	60	0.00	0.03	0.07	0.12	0.16	0.20	0.24	0.26	0.29	0.31	0.40	0.45	0.52	0.60
0.99	60	0.00	0.01	0.04	0.07	0.11	0.14	0.17	0.20	0.22	0.24	0.33	0.38	0.45	0.54
0.995	60	0.00	0.01	0.02	0.05	0.08	0.11	0.14	0.16	0.18	0.21	0.29	0.34	0.41	0.51
0.90	100	0.02	0.11	0.19	0.26	0.32	0.36	0.40	0.43	0.46	0.48	0.56	0.61	0.66	0.74
0.95	100	0.00	0.05	0.12	0.18	0.23	0.27	0.31	0.34	0.36	0.39	0.47	0.52	0.59	0.68
0.975	100	0.00	0.03	0.07	0.12	0.16	0.20	0.24	0.27	0.29	0.32	0.40	0.46	0.53	0.63
0.99	100	0.00	0.01	0.04	0.07	0.11	0.14	0.17	0.20	0.23	0.25	0.34	0.39	0.47	0.57
0.995	100	0.00	0.01	0.02	0.05	0.08	0.11	0.14	0.16	0.19	0.21	0.29	0.35	0.43	0.54



جدول توزيع فيشر F



Lower Critical Values of F-Distributions

F tail area	df_2 \ df_1	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	15	20	30	60
0.90	1	0.03	0.12	0.18	0.22	0.25	0.26	0.28	0.29	0.30	0.30	0.33	0.34	0.35	0.36
0.95	1	0.01	0.05	0.10	0.13	0.15	0.17	0.18	0.19	0.20	0.20	0.22	0.23	0.24	0.25
0.975	1	0.00	0.03	0.06	0.08	0.10	0.11	0.12	0.13	0.14	0.14	0.16	0.17	0.18	0.19
0.99	1	0.00	0.01	0.03	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09	0.09	0.10	0.12	0.12	0.13	0.14
0.995	1	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.07	0.08	0.09	0.10	0.11	0.12
0.90	2	0.02	0.11	0.18	0.23	0.26	0.29	0.31	0.32	0.33	0.34	0.37	0.39	0.40	0.42
0.95	2	0.01	0.05	0.10	0.14	0.17	0.19	0.21	0.22	0.23	0.24	0.27	0.29	0.30	0.32
0.975	2	0.00	0.03	0.06	0.09	0.12	0.14	0.15	0.17	0.17	0.18	0.21	0.22	0.24	0.25
0.99	2	0.00	0.01	0.03	0.06	0.08	0.09	0.10	0.12	0.12	0.13	0.16	0.17	0.19	0.20
0.995	2	0.00	0.01	0.02	0.04	0.05	0.07	0.08	0.09	0.10	0.11	0.13	0.14	0.16	0.17
0.90	3	0.02	0.11	0.19	0.24	0.28	0.30	0.33	0.34	0.36	0.37	0.40	0.42	0.44	0.46
0.95	3	0.00	0.05	0.11	0.15	0.18	0.21	0.23	0.25	0.26	0.27	0.30	0.32	0.34	0.36
0.975	3	0.00	0.03	0.06	0.10	0.13	0.15	0.17	0.18	0.20	0.21	0.24	0.26	0.28	0.30
0.99	3	0.00	0.01	0.03	0.06	0.08	0.10	0.12	0.13	0.14	0.15	0.18	0.20	0.22	0.24
0.995	3	0.00	0.01	0.02	0.04	0.06	0.08	0.09	0.10	0.11	0.12	0.15	0.17	0.19	0.21
0.90	4	0.02	0.11	0.19	0.24	0.28	0.31	0.34	0.36	0.37	0.38	0.42	0.44	0.47	0.49
0.95	4	0.00	0.05	0.11	0.16	0.19	0.22	0.24	0.26	0.28	0.29	0.33	0.35	0.37	0.40
0.975	4	0.00	0.03	0.07	0.10	0.14	0.16	0.18	0.20	0.21	0.22	0.26	0.28	0.31	0.33
0.99	4	0.00	0.01	0.03	0.06	0.09	0.11	0.13	0.14	0.16	0.17	0.20	0.23	0.25	0.27
0.995	4	0.00	0.01	0.02	0.04	0.06	0.08	0.10	0.11	0.13	0.14	0.17	0.19	0.22	0.24
0.90	5	0.02	0.11	0.19	0.25	0.29	0.32	0.35	0.37	0.38	0.40	0.44	0.46	0.49	0.51
0.95	5	0.00	0.05	0.11	0.16	0.20	0.23	0.25	0.27	0.29	0.30	0.34	0.37	0.39	0.42
0.975	5	0.00	0.03	0.07	0.11	0.14	0.17	0.19	0.21	0.22	0.24	0.28	0.30	0.33	0.36
0.99	5	0.00	0.01	0.04	0.06	0.09	0.11	0.13	0.15	0.17	0.18	0.22	0.24	0.27	0.30
0.995	5	0.00	0.01	0.02	0.04	0.07	0.09	0.11	0.12	0.13	0.15	0.19	0.21	0.24	0.27
0.90	6	0.02	0.11	0.19	0.25	0.29	0.33	0.35	0.37	0.39	0.41	0.45	0.48	0.50	0.53
0.95	6	0.00	0.05	0.11	0.16	0.20	0.23	0.26	0.28	0.30	0.31	0.36	0.38	0.41	0.44
0.975	6	0.00	0.03	0.07	0.11	0.14	0.17	0.20	0.21	0.23	0.25	0.29	0.32	0.35	0.38
0.99	6	0.00	0.01	0.04	0.07	0.09	0.12	0.14	0.16	0.17	0.19	0.23	0.26	0.29	0.32
0.995	6	0.00	0.01	0.02	0.05	0.07	0.09	0.11	0.13	0.14	0.15	0.2	00.22	0.25	0.29
0.90	7	0.02	0.11	0.19	0.25	0.30	0.33	0.36	0.38	0.40	0.41	0.46	0.49	0.52	0.55
0.95	7	0.00	0.05	0.11	0.16	0.21	0.24	0.26	0.29	0.30	0.32	0.37	0.40	0.43	0.46
0.975	7	0.00	0.03	0.07	0.11	0.15	0.18	0.20	0.22	0.24	0.25	0.30	0.33	0.36	0.40
0.99	7	0.00	0.01	0.04	0.07	0.10	0.12	0.14	0.16	0.18	0.19	0.24	0.27	0.30	0.34
0.995	7	0.00	0.01	0.02	0.05	0.07	0.09	0.11	0.13	0.15	0.16	0.21	0.23	0.27	0.3

Lower Critical Values of F-Distributions

F tail area	df_2 \ df_1	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	15	20	30	60
0.90	8	0.02	0.11	0.19	0.25	0.30	0.34	0.36	0.39	0.40	0.42	0.47	0.50	0.53	0.56
0.95	8	0.00	0.05	0.11	0.17	0.21	0.24	0.27	0.29	0.31	0.33	0.38	0.41	0.44	0.48
0.975	8	0.00	0.03	0.07	0.11	0.15	0.18	0.20	0.23	0.24	0.26	0.31	0.34	0.38	0.41
0.99	8	0.00	0.01	0.04	0.07	0.10	0.12	0.15	0.17	0.18	0.20	0.25	0.28	0.32	0.35
0.995	8	0.00	0.01	0.02	0.05	0.07	0.09	0.12	0.13	0.15	0.16	0.21	0.24	0.28	0.32
0.90	9	0.02	0.11	0.19	0.25	0.30	0.34	0.37	0.39	0.41	0.43	0.48	0.51	0.54	0.58
0.95	9	0.00	0.05	0.11	0.17	0.21	0.24	0.27	0.30	0.31	0.33	0.39	0.42	0.45	0.49
0.975	9	0.00	0.03	0.07	0.11	0.15	0.18	0.21	0.23	0.25	0.26	0.32	0.35	0.39	0.43
0.99	9	0.00	0.01	0.04	0.07	0.10	0.13	0.15	0.17	0.19	0.20	0.26	0.29	0.33	0.37
0.995	9	0.00	0.01	0.02	0.05	0.07	0.10	0.12	0.14	0.15	0.17	0.22	0.25	0.29	0.33
0.90	10	0.02	0.11	0.19	0.26	0.30	0.34	0.37	0.39	0.41	0.43	0.49	0.52	0.55	0.59
0.95	10	0.00	0.05	0.11	0.17	0.21	0.25	0.27	0.30	0.32	0.34	0.39	0.43	0.46	0.50
0.975	10	0.00	0.03	0.07	0.11	0.15	0.18	0.21	0.23	0.25	0.27	0.33	0.36	0.40	0.44
0.99	10	0.00	0.01	0.04	0.07	0.10	0.13	0.15	0.17	0.19	0.21	0.26	0.30	0.34	0.38
0.995	10	0.00	0.01	0.02	0.05	0.07	0.10	0.12	0.14	0.16	0.17	0.23	0.26	0.30	0.34
0.90	11	0.02	0.11	0.19	0.26	0.30	0.34	0.37	0.40	0.42	0.43	0.49	0.52	0.56	0.60
0.95	11	0.00	0.05	0.11	0.17	0.21	0.25	0.28	0.30	0.32	0.34	0.40	0.43	0.47	0.51
0.975	11	0.00	0.03	0.07	0.11	0.15	0.18	0.21	0.24	0.26	0.27	0.33	0.37	0.41	0.45
0.99	11	0.00	0.01	0.04	0.07	0.10	0.13	0.15	0.17	0.19	0.21	0.27	0.30	0.34	0.39
0.995	11	0.00	0.01	0.02	0.05	0.07	0.10	0.12	0.14	0.16	0.17	0.23	0.27	0.31	0.36
0.90	12	0.02	0.11	0.19	0.26	0.31	0.34	0.37	0.40	0.42	0.44	0.50	0.53	0.56	0.60
0.95	12	0.00	0.05	0.11	0.17	0.21	0.25	0.28	0.30	0.33	0.34	0.40	0.44	0.48	0.52
0.975	12	0.00	0.03	0.07	0.11	0.15	0.19	0.21	0.24	0.26	0.28	0.34	0.37	0.41	0.46
0.99	12	0.00	0.01	0.04	0.07	0.10	0.13	0.15	0.18	0.20	0.21	0.27	0.31	0.35	0.40
0.995	12	0.00	0.01	0.02	0.05	0.07	0.10	0.12	0.14	0.16	0.18	0.24	0.27	0.31	0.36
0.90	13	0.02	0.11	0.19	0.26	0.31	0.35	0.38	0.40	0.42	0.44	0.50	0.53	0.57	0.61
0.95	13	0.00	0.05	0.11	0.17	0.21	0.25	0.28	0.31	0.33	0.35	0.41	0.44	0.48	0.53
0.975	13	0.00	0.03	0.07	0.11	0.15	0.19	0.22	0.24	0.26	0.28	0.34	0.38	0.42	0.47
0.99	13	0.00	0.01	0.04	0.07	0.10	0.13	0.16	0.18	0.20	0.22	0.28	0.31	0.36	0.41
0.995	13	0.00	0.01	0.02	0.05	0.08	0.10	0.12	0.14	0.16	0.18	0.24	0.28	0.32	0.37
0.90	14	0.02	0.11	0.19	0.26	0.31	0.35	0.38	0.40	0.43	0.44	0.50	0.54	0.58	0.62
0.95	14	0.00	0.05	0.11	0.17	0.22	0.25	0.28	0.31	0.33	0.35	0.41	0.45	0.49	0.54
0.975	14	0.00	0.03	0.07	0.12	0.15	0.19	0.22	0.24	0.26	0.28	0.35	0.38	0.43	0.48
0.99	14	0.00	0.01	0.04	0.07	0.10	0.13	0.16	0.18	0.20	0.22	0.28	0.32	0.36	0.42
0.995	14	0.00	0.01	0.02	0.05	0.08	0.10	0.12	0.15	0.16	0.18	0.24	0.28	0.33	0.38