جامعة الجزائر 3

كليـة العلوم الاقتصاديـة والعلوم التجاريـة وعلوم التسييـر

قسم العلوم االتجاريـة

الإحصاء 3:

الإحصاء الاستدلالي

حاند أمينـة

أستاذة محاضرة - ب-

السنـة الجامعية 2017-2018

الفهرس

تمهيد

تشمل هذه المطبوعة دروس الإحصاء الاستدلالي المقرر في مقياس الإحصاء 3 للسنة الثانية جدع مشترك علوم المحاسبة و المالية و علوم التسيير. يأتي هذا المقياس لتكملة مقاييس الإحصاء 1 و 2 المبرمجين في السنة الأولى حيث تمت دراسة الإحصاء الوصفي و نظرية الاحتمالات و التي يعتمد عليها الإحصاء الاستدلالي.

تحوي المطبوعة أربع فصول أساسية، بدءا بالفصل الأول الذي يشمل التوزيعات الاحتمالية و أهم خصائصها. يليه الفصل الثاني المخصص للمعاينة و أهم توزيعاتها، في هذا الفصل تتم دراسة العينات انطلاقا من عملية انتقائها ثم العلاقة التي تجمع بين خصائص العينة و المجتمع أي دراسة نظرية المعاينة. الفصل الثالث خاص بالتقدير و مجالات الثقة، و يعتبر هذا الفصل مهم جدا في الاستدلال الإحصائي بحيث يتم تقدير معالم المجتمع من خلال معطيات العينة. تعتبر عملية التقدير احد الأهداف الأساسية للاستدلال الإحصائي. الفصل الرابع مخصص للاختبارات الإحصائية التي لها أهمية كبيرة في الجانب التطبيقي لكونها تساعد في اتخاذ القرارات وهذا في شتى الميادين.

الدروس المقترحة عبر هذه الفصول مقدمة بطريقة بسيطة حتى يتمكن الطالب من استوعباها دون الوقوع في صعوبات و تعقيدات الصيغ الرياضية. إضافة إلى أمثلة تطبيقية لتدعيم الدروس.

مقدمة

يعتبر الإحصاء فرع من فروع الرياضيات و يهتم بجمع' ترتيب و عرض البيانات الرقمية من اجل الاستفادة منها بغرض الاستدلال' التنبؤ و اتخاذ القرار في ظل عدم التأكد. الإحصاء في الوقت الحاضر يطبق في العديد من الميادين' نذكر منها الاقتصادية 'الاجتماعية' في ميدان الطب و الفيزياء وغيرها.

إذا أردنا تعريف كلمة الإحصاء' فيقصد بها تعداد و تصنيف الأشياء, و لها معنى آخر حيث أنها تطلق على العلم الذي يهتم بتعميم النتائج المستخلصة من العينات على المجتمعات. يعرف الإحصاء أيضا بأنه العلم الذي يهدف إلى جمع و تنسيق الوقائع العديدة بغرض الحصول على علاقات رقمية[(1)].

يمكن تقسيم الإحصاء إلى ثلاثة أجزاء رئيسية: إحصاء وصفي' إحصاء رياضي و إحصاء استدلالي الذي يجمع بين الإحصاء الوصفي و الرياضي. يهتم الإحصاء الوصفي بجمع البيانات المرتبطة بظاهرة معينة ثم ترتيبها و تمثيلها بغرض الاستفادة منها و تحليلها. أما الإحصاء الرياضي الذي يعرف أيضا بنظرية الاحتمالات فيهتم بدراسة الظواهر العشوائية و التوزيعات الاحتمالية و أخيرا الإحصاء الاستدلالي الذي يسمح باستنتاج معالم المجتمع التي تعتبر مجهولة من إحصائيات العينة. حيث تعرف معالم المجتمع بالخصائص الوصفية كالوسط الحسابي' التباين و الانحراف المعياري أو نسبة الأفراد الذين يحملون صفة معينة و التي يواجه الباحثين صعوبة في الحصول عليها باستعمال بيانات المجتمع ككل, مما أدى إلى اللجوء إلى أساليب الإحصاء الاستدلالي.

(1) مدخل إلى علم الإحصاء' عبد القادر حليمي' ديوان المطبوعات الجامعية' الطبعة السادسة' 2009.

الفصل الأول التوزيعات الاحتمالية

1- مقدمة

يعتبر هذا الدرس مراجعة لاهم التوزيعات الاحتمالية التي تمت دراستها في مقياس الاحصاء 2 المبرمج في السنة الاولى. لذلك نكتفي باعطاء بعض التوزيعات الاحتمالية المنقطعة والمستمرة الشهيرة الأكثر استخداما في الاستدلال الإحصائي. نلفت النظر إلى أن هناك توزيعات أخرى لم نقم بذكرها لكن في الجدول المرفق في الملحق 1 لخصنا أهم خصائصها.

2- **التوزيعات لاحتمالية المتقطعة**

1-2- توزيع برنولي Distribution de Bernoulli

بإسم Jacques Bernoulli الذي درس هذا التوزيع في أواخر القرن 17.

نقول عن تجربة عشوائية أنها "برنولية" إذا كانت تحتمل نتيجتين (حدثين) متنافيتين A و’A.نسمي A نجاح و’A فشل.

نعتبر المتغير العشوائي X الذي يمثل عدد مرات النجاح، يأخذ X القيمة 1 عند تحقق الحدث A و0 في الحالة المعاكسة.

نرمز عادة ب p "احتمال النجاح" لاحتمال تحقق الحدث A و$q = 1-p$ احتمال الحدث المعاكس (الفشل).

يعين توزيع برنولي كما يلي : $P(X=1)=p, P(X=0)=q, X=0,1.$

نرمز لهذا التوزيع ب: $\boldsymbol{X \sim B(1, p)}$

- خصائص توزيع برنولي

التوقع: $E(X) = \Sigma x_i p_i = 1.p + 0.q = p \Rightarrow \boldsymbol{E(X) = p}$

التباين: $V(X) = E(X^2) - E(X)^2 = (1^2.p + 0^2.q) - p^2 = p - p^2 = p(1-p) = pq \Rightarrow \boldsymbol{V(X) = pq}$

2-2- التوزيع الثنائي Distribution binomiale

إذا كررنا تجربة برنولي n مرة فإن المتغير العشوائي X الذي يمثل عدد مرات النجاح يأخذ القيم: $X = 0, 1, 2, 3, \ldots n$

لنفترض التجربة البرنولية رمي قطعة نقدية مكررة العدد n من المرات، وX عدد مرات الحصول على صورة (F):

أ. حاند

حالة $n = 2$: $X = 0, 1, 2.$

$P(X = 0) = q*q = q^2$

$P (X=1) = P(FP) + P(PF) = p*q + q*p = \mathbf{2p^1q^1}$

حالة $n = 3$: $X = 0, 1, 2, 3.$

$P(X=3) = P(FFF) = p*p*p = p^3$

$P(X=2) = P(FFP \text{ ou } PFF \text{ ou } FPF) = \mathbf{3p^2q^1}$

$P(X=1) = P(FPP \text{ ou } PFP \text{ ou } PPF) = \mathbf{3p^1q^2}$

$P(X=0) = P(PPP)=q*q*q = \mathbf{q^3}$

حالة : $n = 4$ $X = 0, 1, 2, 3, 4.$

$P(X=4)=P(FFFF)=p*p*p*p=\mathbf{p^4}$

$P(X=3)=P(FFFP \text{ ou } FFPF \text{ ou } FPFF \text{ ou } PFFF)=\mathbf{4p^3q^1}$

$P(X=2)=P(FFPP \text{ ou } PPFF \text{ ou } FPFP \text{ ou } PFPF)=\mathbf{6p^2q^2}$

$P(X=1)=P(FPPP \text{ ou } PFPP \text{ ou } PPFP \text{ ou } PPPF)=\mathbf{4p^1q^3}$

$P(X=0)=P(PPPP)= q*q*q*q=\mathbf{q^4}$

والصيغة العامة لحساب احتمال عدد ما x من النجاحات من بين n تجربة برنولية هي**:**

$$P(X = x) = C_n^x p^x q^{1-x} \;\; , \;\; x = 0,1,2, \dots , n, \;\; n = 1,2,3, \dots \quad (1.1)$$

حيث x عدد مرات النجاح، p احتمال النجاح في التجربة الواحدة (يبقى ثابت عند تكرار التجربة)، $q = 1\text{-}p$ احتمال الفشل وn عدد التجارب. مع $C_n^x = \dfrac{n!}{x!(n-x)!}$

يرمز للتوزيع الثنائي ب: $\mathbf{X \sim B(n, p)}$**.**

ـ شروط استخدام التوزيع الثنائي

حتى نطبق قانون التوزيع الثنائي يجب ان تتوفر الشروط التالية :

- تجربة برنولية مكررة عدد محدد من المرات بصفة مستقلة
- احتمال النجاح في التجربة ثابت

- خصائص التوزيع الثنائي

يمكن اعتبار X مجموع متغيرات برنولية مستقلة $X = X_1+X_2+...X_i+...+X_n$ لها نفس المعلمة p وبالتالي نفس التوقع ($E(X_i) = p$) أيضا. إذا باستخدام خصائص التوقع والتباين نجد:

التوقع: $E(X) = E(X_1+X_2+...X_i+...+X_n) = \Sigma E(Xi) = \Sigma pi = n\,p \;\; => \mathbf{E(X) = np}$

التباين: $V(X) = V(X_1+X_2+...X_i+...+X_n)$

X_i مستقلة إذن $V(X) = \Sigma V(Xi) = \Sigma pq => \mathbf{V(X) = npq}$

3-2- توزيع بواسون Distribution de Poisson

باسم سيميون دونيز بواسون الفيزيائي و الرياضي الفرنسي الذي استخدم هذا لقانون سنة 1837.

لتكن لدينا تجربة برنولية مكررة عدد كبير جدا أو لانهائي من المرات. مبدئيا المتغير X الذي يمثل عدد النجاحات يتبع التوزيع الثنائي، لكن قد يصعب حساب الاحتمال باستعمال صيغة هذا التوزيع عندما تكون n كبيرة. مثلا إحتمال 20 نجاح إذا كانت $n = 100$ هو: $P(20) = C_{100}^{20} \cdot 0.001^{20} \cdot 0.999^{80}$

عندما تتكرر التجربة باستمرار؛ يصبح عدد مرات تكرار التجربة مقاسا بالزمن، ويكون احتمال تحقق الحدث في لحظة زمن صغيرا جدا. نحتاج في هذه الحالة إلى إيجاد صيغة عامة تعادل صيغة التوزيع الثنائي عندما يؤول n إلى ∞ .

نضع λ ثابت بحيث $p = \lambda/n$ ’ الصيغة العامة لاحتمال تحقق x هي: (2.1) $P(x) = \frac{\lambda^x}{x!}e^{-\lambda} \;\; , x = 0,1,2,...$

هذا الاحتمال يمثل احتمال x نجاح في وحدة زمن واحدة’ حيث $\lambda > 0$.

يرمز لتوزيع بواسون ب: $\boldsymbol{X \sim P(\lambda)}$.

- خصائص توزيع بواسون

- التوقع و التباين: $\boldsymbol{E(X)=V(X)= \lambda}$

ـ حساب احتمال عدد من الأحداث في *t* وحدة زمن:

من أجل عدد أو مقدار t من وحدات الزمن نعوض λ ب λt فنجد:

$$P_t(X = x) = \frac{(\lambda t)^x e^{-\lambda t}}{x!}, \qquad X = 0, 1, 2, 3, \ldots$$

مثال 1:

نفرض أن عدد المكالمات الهاتفية التي تصل إلى مركز هاتفي معين تتبع توزيع بواسون بمعدل λ=5 في الثانية. أحسب احتمال وصول 7 مكالمات في ثانية ونصف.

$$t\lambda = 1.5(5) \qquad P(X = 7) = \frac{(1.5(5))^7 e^{-1.5(7)}}{7!}$$

ـ حساب احتمال عدد من الأحداث من فئة معينة:

إذا كان X يتبع توزيع بواسون بمعدل λ، فإن $Y= aX$ هو الآخر يتبع توزيع بواسون بمعدل $a\lambda$.

مثال 2:

نفرض أن عدد المكالمات الهاتفية التي تصل إلى مركز هاتفي معين تتبع توزيع بواسون بمعدل λ=5 في ثانية، وأن 5% من هذه المكالمات هي مكالمات دولية. أحسب احتمال أن تصل 9 مكالمات دولية في ثانية.

$$P(X = 9) = \frac{(0.05(5))^9 e^{-0.05(5)}}{9!}$$

ملاحظة1:

عندما $n \to \infty$ والمتوسط ثابت يؤول التوزيع الثنائي إلى التوزيع بواسون. عمليا يعطي توزيع بواسون نتائج قريبة من التوزيع الثنائي لما: ***np<5*/و*nq<5*** و ***n≥ 30***

ويستخدم بعض من الإحصائيين أيضا كشرط لاستعمال قانون بواسون بدلا من القانون الثنائي القاعدة التالية:

$$p \leq 0,1 \text{ و } n \geq 25$$

ملاحظة 2:

هناك توزيعات احتمالية اخرى لم يتم ذكرها في هذا الدرس لكن صيغة قانون الاحتمال و اهم خصائصها مذكورة في الملحق 1.

3- التوزيعات لاحتمالية المستمرة

3-1- التوزيع الطبيعي أو توزيع لابلاس قوس Distribution Normale ou de Laplace –Gausse

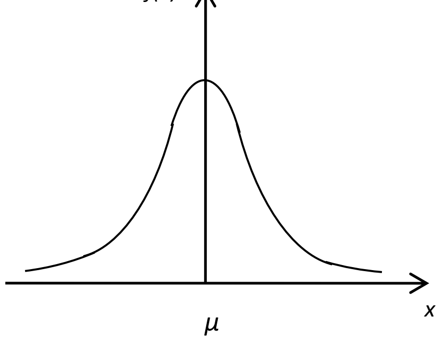
باسم العالمان الرياضيان الفيزيائيان و الفلكيان الفرنسي Pière Simon de Laplace والألماني Carl Freidrich Gauss. أما تسمية التوزيع الطبيعي فهي راجعة للعالم Pearson. يعد التوزيع الطبيعي من أهم التوزيعات الاحتمالية شائعة الاستخدام لما له من خصائص تنطبق على نسبة كبيرة من الظواهر الطبيعية والاجتماعية والاقتصادية. و له اهمية كبيرة في الاستدلال الإحصائي لانه يستعمل في تعيين مجالات الثقة و في الاختبارات الاحصائية.

نعتبر X متغير عشوائي له توزيع طبيعي' دالة كثافته الاحتمالية تكتب من الشكل:

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-(1/2)\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2} \qquad -\infty < x < \infty \qquad (3.1)$$

حيث μ وσ هما على التوالي التوقع والانحراف المعياري. نرمز للتوزيع الطبيعي ب: $\boldsymbol{X \sim N(\mu, \sigma^2)}$

تأخذ دالة الكثافة الشكل التالي:



الشكل 1.1

- التوزيع الطبيعي المعياري

تستخدم تحويل المتغير و نعرف المتغير المعياري: $Z = (X-\mu)/\sigma \quad (4.1)$

يسمح هذا التحويل بكتابة دالة الكثافة الاحتمالية f وتابع الاحتمالات F بدلالة مجهول واحد Z وذلك كما يلي:

$$f(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-z^2/2} \qquad -\infty < z < \infty \qquad (5.1)$$

$$F(z) = P(Z \le z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{z} e^{\frac{-u^2}{2}} du \qquad (6.1)$$

بالنظر إلى العلاقة الخطية بين المتغيرين X و Z، فإن Z يتبع التوزيع الطبيعي المعياري حيث:

$E(Z) = 0$* و *$V(Z) = 1$* و نكتب *$Z \sim N(0, 1)$

لحساب الاحتمالات نعتمد على تحويل المتغير و جدول التوزيع الطبيعي المعياري الذي يسمح بتعيين $F(z) = P(Z \le z)$

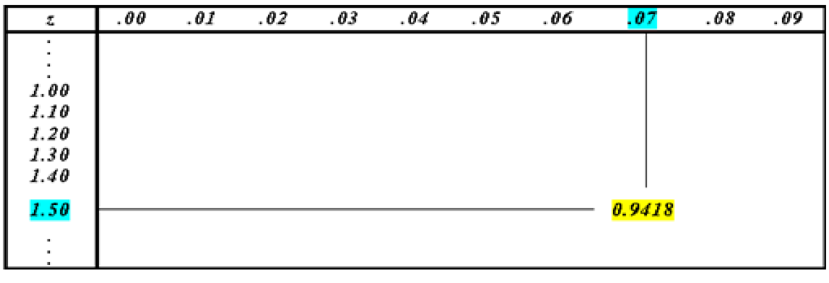
و هذا حسب الخطوات التالية:

- تحويل المتغير: $P(x_1 < X < x_2) = P((x_1-\mu)/\sigma < (X-\mu)/\sigma < (x_2-\mu)/\sigma)$

نتحصل على : $P(z_1 < Z < z_2) = F(z_2) - F(z_1)$

- قراءة قيم الاحتمالات $F(z_1), F(z_2)$ من جدول التوزيع الطبيعي المعياري حسب المثال التالي:

قيمة الاحتمال $P(z < 1.57)$ هي تقاطع السطر 1.5 و العمود 0.07 فنتحصل على القيمة 0.9418



جدول التوزيع الطبيعي المعياري مرفق في الملحق 2.

نعتمد في حساب الاحتمالات على القواعد التالية:

$$P(Z>z)= 1-P(Z\leq z)=1-F(z)$$

$$P(z_1<Z<z_2)=F(z_2)-F(z_1)$$

$$P(Z<-z)=1- F(z)$$

ملاحظة 3:

عمليا يستخدم التوزيع الطبيعي كتقريب للتوزيع الثنائي لما: np و nq كلاهما أكبر من 5.

عموما نعتبر التوزيع الطبيعي كتقريب ملائم لتوزيع بواسون عندما يكون $10\leq \lambda$.

3-2- التوزيع الأسي Distribution exponentielle

عادة ما يستخدم التوزيع الأسي في مسائل متعلقة بقياس الزمن مثل مدة مكالمة هاتفية، مدة تصليح آلة، مدة انتظار زبون قبل الحصول على الخدمة...

اذا اعتبرنا X متغير عشوائي يتبع التوزيع الأسي' فدالة كثافته الاحتمالية تكتب من الشكل:

$$f(x) = \lambda e^{-\lambda x},\ x > 0 \qquad (7.1)$$

حيث λ عدد حقيقي موجب.

- خصائص التوزيع الأسي

- التوقع: $E(X)=1/\lambda$

- التباين: $V(X)= 1/\lambda^2$

3-3- توزيع كاي مربع Distribution de Khi-deux

لتكن $X_1, X_2, . . . X_v$ متغيرات عشوائية مستقلة تتبع التوزيع الطبيعي المعياري. نعتبر المتغير العشوائي:

$X= X_1 +X_2 + ...+ X_v$ ' المتغير X له دالة الكثافة المعرفة كما يلي:

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{x^{(\frac{\upsilon}{2})-1}e^{-\frac{x}{2}}}{2^{\frac{\upsilon}{2}}\Gamma(\frac{\upsilon}{2})}, & x>0\\ 0\quad, & x\le 0\end{cases}\qquad(8.1)$$

حيث $\Gamma(\alpha)$ هي دالة قاما المعرفة ب:

$$\Gamma(\alpha)=\int_0^{\infty}t^{\alpha-1}e^{-t}dt\qquad \alpha>0\qquad(9.1)$$

نقول أن X يتبع توزيع كاي مربع بدرجة حرية υ و نكتب $X\sim\chi^2_{\upsilon}$.

- خصائص توزيع كاي مربع

- التوقع: $E(X)=\nu$

- التباين: $V(X)=2\nu$

ملاحظة 4:

عمليا نستعين بالجداول الإحصائية الخاصة بتوزيع كاي مربع لتعيين قيمة المتغير χ^2_{υ} على المحور الأفقي و هذا حسب درجة الحرية υ والاحتمال p او $\alpha=1-p$. الجدول الخاص بهذا التوزيع مرفق في الملحق 2.

3-4- توزيع ستيودنت Distribution de Student

ليكن متغيران عشوائيان مستقلان X و Y حيث X يتبع التوزيع الطبيعي المعياري $X\sim N(0,1)$ و Y يتبع توزيع كاي مربع بدرجة حرية υ $Y\sim\chi^2_{\upsilon}$. نعرف المتغير T كما يلي:

$$T=\frac{X}{\sqrt{\frac{Y}{\upsilon}}}\qquad(10.1)$$

المتغير T يتبع توزيع ستيودنت بدرجة حرية υ و نكتب $T\sim t_{\upsilon}$. له دالة الكثافة الاحتمالية التالية:

$$f(t)=\frac{\Gamma\left(\frac{\nu+1}{2}\right)}{\sqrt{\nu\pi}\,\Gamma\left(\frac{\nu}{2}\right)}\left(1+\frac{t^2}{\nu}\right)^{-\left(\frac{\nu+1}{2}\right)}\qquad -\infty<t<\infty\qquad(11.1)$$

مع

$$\Gamma(\alpha)=\int_0^{\infty}t^{\alpha-1}e^{-t}dt\qquad \alpha>0\qquad(12.1)$$

- خصائص توزيع ستيودنت

- التوقع: $E(T) = 0$

- التباين: $V(T) = v/(v-2),\ v>2$

ملاحظة 5:

عمليا نستعين بالجداول الإحصائية الخاصة بتوزيع ستيودنت لتعيين قيمة المتغير t على المحور الأفقي و هذا حسب درجة الحرية v والاحتمال p او $\alpha = 1-p$. الجدول الخاص بهذا التوزيع مرفق في الملحق 2.

الفصل الثاني المعاينة و توزيعاتها

1 - مقدمة

إن عملية الاستدلال هي استنتاج احد معالم المجتمع من إحصائيات العينة و نعتمد في هذا على التقدير و الاختبارات القائمة على العينة. إذن عملية انتقاء العينة هي عملية مهمة و تعرف بالمعاينة أما نظرية المعاينة فهي تهتم بدراسة العلاقة بين العينة والمجتمع و توزيعات المعاينة. تسمح أيضا من معرفة هل الفوارق الملاحظة بين عينتين راجعة للصدفة أم لها دلالة. قبل الشروع في دراسة توزيعات المعاينة وأهم خصائصها’ نذكر ببعض المفاهيم التي سبق دراستها في الإحصاء الوصفي. نذكر بالمجتمع الذي يشمل مجموعة من الأفراد التي تشترك في صفة أو أكثر. للقيام بدراسة إحصائية يمكن الاعتماد على طريقة المسح الشامل التي تجمع كل بيانات المجتمع مثل عملية تعداد السكان. لكن هذه الطريقة تستهلك الوقت والعديد من الإمكانيات’ كما أنها تؤدي في بعض الحالات إلى إتلاف أفراد المجتمع مثلا إذا أردنا معرفة مدة اشتعال مصباح كهربائي فلا يمكننا إشعال كل المصابيح حتى تحترق و حساب هذه المدة لان هذه الطريقة تؤدي إلى إتلاف كل المصابيح. إذن نلجأ إلى طريقة أخرى و هي طريقة العينة.

يقصد بالعينة مجموعة من الأفراد التي تشترك في صفة على الأقل و التي تم اختيارها بطريقة معينة من المجتمع الذي تقوم عليه الدراسة. هناك عدة طرق تسمح باختيار العينة وهذا ما يؤدي إلى التمييز بين عدة أنواع من العينات أهمها:

أ- العينة العشوائية البسيطة

يكون فيها لكل فرد من المجتمع نفس الفرصة أو الاحتمال في الظهور في العينة. ويمكن انتقاء العينة بالاعتماد على:

- السحب بدون إرجاع مما يؤدي إلى تقليص عدد أفراد المجتمع و كل فرد يظهر مرة واحدة على الأكثر في العينة. العينة المختارة بهذه الطريقة تسمى بعينة نفادية.

- السحب بالإرجاع حيث يمكن للفرد أن يظهر أكثر من مرة في العينة و تكرار عملية السحب لا تؤدي إلى تقليص عدد أفراد المجتمع. العينة المختارة بهذه الطريقة تسمى بعينة غيرنفادية.

ان عدد العينات التي حجمها n التي يمكن انتقاءها من مجتمع حجمه N هو:

- في حالة السحب بدون ارجاع (معاينة نفادية): $C_N^n = \frac{N!}{n!(N-n)!}$ (1.2)

في حالة السحب بإرجاع (معاينة غير نفادية): N^{n} (2.2)

ب ـ العينة الطبقية

يتم فيها تقسيم المجتمع إلى مجموعات جزئية تسمى طبقات’ بعد هذا يتم اختيار عينة عشوائية بسيطة من كل طبقة.

ج ـ العينة العنقودية

يتم فيها تقسيم المجتمع إلى مجموعات متصلة فيما بينها’ ومن كل مجموعة يتم اختيار عينة عشوائية بسيطة. مثلا تقسيم الولاية إلى دوائر و الدائرة إلى بلديات و البلدية إلى أحياء.

سوف نهتم في دراستنا لتوزيعات المعاينة على العينة العشوائية البسيطة.

2- توزيعات المعاينة

ذكرنا سابقا أن تقدير معالم المجتمع انطلاقا من معايير أو إحصائيات العينة هي احد أهداف الاستدلال الإحصائي. الأسلوب المعتمد عليه يرتكز على معرفة توزيع معايير العينات. مثلا إذا أخذنا عينة حجمها n من طلبة الجامعة الذي يعتبر المجتمع الذي حجمه N و أردنا معرفة متوسط طول كل الطلبة اعتمادا على متوسط الطول في العينة $\bar{x}$.

نتساءل ما هو توزيع الإحصائية $\bar{x}$ عندما نأخذ كل العينات ذات حجم متساوي n و ما هي خصائص هذا التوزيع الذي يعرف بتوزيع المعاينة.

2-1- توزيع المعاينة للمتوسط

نعتبر المثال التالي:

مثال 1:

ليكن مجتمع مكون من الأفراد : 3, 5, 7, 9, 11

متوسط المجتمع هو $\mu = \frac{3+5+7+9+11}{5} = 7$

الانحراف المعياري للمجتمع هو $\sigma = 2{,}82$

عدد العينات التي حجمها n=2 الممكنة دون إرجاع هو $C_5^2 = \frac{5!}{2!\,(5-2)!} = 10$

تكتب هذه العينات كما يلي: $\{3{,}5\},\{3{,}7\},\{3{,}9\},\{3{,}11\},\{7{,}5\},\{9{,}5\},\{11{,}5\},\{7{,}9\},\{7{,}11\},\{11{,}9\}$

كل عينة لها احتمال $\frac{1}{10}$ ان تكون مختارة.

نحسب متوسط كل عينة ونمثل النتائج في الجدول التالي:

العينة i	$\{3,5\}$	$\{3,7\}$	$\{3,9\}$	$\{3,11\}$	$\{7,5\}$	$\{9,5\}$	$\{11,5\}$	$\{7,9\}$	$\{7,11\}$	$\{11,9\}$
المتوسط $_i$	4	5	6	7	6	7	8	8	9	10

الجدول 1.2

إن كل من المتوسطات μ_i تمثل قيم متغير عشوائي $\overline{X}$ ذو توزيع احتمالي يعرف بتوزيع المعاينة للمتوسط.

نلخص هذا التوزيع في الجدول التالي:

$\bar{X}_i$	4	5	6	7	8	9	10
$f(\bar{X}_i)$	1/10	1/10	2/10	2/10	2/10	1/10	1/10

الجدول 2.2

يتميز المتغير $\overline{X}$ بالخصائص التالية :

- التوقع(الوسط الحسابي): $\mu_{\bar{X}} = E(\overline{X}) = \sum \bar{X}_i\, f(\bar{X}_i) = 7$

- التباين: $\sigma_{\bar{X}}^2 = \sum (\bar{X}_i - \mu_{\bar{X}})^2 \quad f(\bar{X}_i) = 3$

- الانحراف المعياري: $\sigma_{\bar{X}} = \sqrt{\sigma_{\bar{X}}^2} = 1{,}73$

بمقارنة متوسط توزيع المعاينة للمتوسط $\bar{X}$ نلاحظ ان $\mu_{\bar{X}} = E(\overline{X}) = \mu$ أي متوسط توزيع المعاينة للمتوسط يساوي متوسط المجتمع. فيما يخص الانحراف المعياري لتوزيع المعاينة للمتوسط $\bar{X}$ فهو اصغر من الانحراف المعياري للمجتمع أي $\sigma_{\bar{X}} < \sigma$.

نلخص النتائج السابقة فيما يلي:

متوسط توزيع المعاينة لعينات حجمها n مختارة من مجتمع حجمه N هو عبارة عن متغير عشوائي $\bar{X}$ يتميز بالخصائص التالية:

أ- المتوسط

- متوسط توزيع المعاينة للمتوسط $\bar{X}$: $\mu_{\bar{X}} = \mu \quad (3.2)$

ب- التباين

- تباين توزيع المعاينة للمتوسط $\bar{X}$:

- حالة معاينة نفادية (سحب بدون إرجاع) : $\sigma_{\bar{X}}^2 = \frac{\sigma^2}{n}\left(\frac{N-n}{N-1}\right) \quad (4.2)$

- حالة معاينة غير نفادية (سحب بإرجاع) : $\sigma_{\bar{X}}^2 = \frac{\sigma^2}{n} \quad (5.2)$

ج- الانحراف المعياري

- الانحراف المعياري لتوزيع المعاينة للمتوسط $\bar{X}$:

- حالة معاينة نفادية (سحب بدون إرجاع) : $\sigma_{\bar{X}} = \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\sqrt{\left(\frac{N-n}{N-1}\right)} \quad (6.2)$

- حالة معاينة غير نفادية (سحب بارجاع) : $\sigma_{\bar{X}} = \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \quad (7.2)$

ملاحظة1

- إذا كان حجم المجتمع N صغير أو عندما تكون النسبة $\frac{n}{N} \geq 5\%$ أو يكون السحب بدون إرجاع، فان تباين توزيع المعاينة للمتوسط هو $\sigma_{\bar{X}}^2 = \frac{\sigma^2}{n}\left(\frac{N-n}{N-1}\right)$.

- إذا كان حجم المجتمع N غير محدد أو عندما تكون النسبة $\frac{n}{N} < 5\%$ أو يكون السحب بإرجاع, فان تباين توزيع المعاينة للمتوسط هو $\sigma_{\bar{X}}^2 = \frac{\sigma^2}{n}$.

د- طبيعة التوزيع

لتعيين طبيعة التوزيع الذي يتبعه المتغير العشوائي الذي يمثل توزيع المعاينة للمتوسط $\bar{X}$ نعتمد على نظرية النهاية المركزية التالية:

إذا أخذنا عينة حجمها n من مجتمع له متوسط μ وتباين σ^2 فان توزيع المعاينة للمتوسط $\bar{X}$ له توزيع طبيعي وهذا إذا كان :

- المجتمع له توزيع طبيعي' أو

- حجم العينة $n \geq 30$ و مهما يكن توزيع المجتمع.

أي $\boldsymbol{\bar{X} \to N(\mu_{\bar{X}}, \sigma_{\bar{X}}^2)}$

مثال2

مجتمع حجمه $N=900$ متوسطه $\mu= 20$ و انحرافه المعياري $\sigma =12$, سحبت منه عينات حجمها $n=36$ و $n=64$.

1- احسب المتوسط و الانحراف المعياري لتوزيع المعاينة للمتوسط $\bar{X}$ في الحالتين.

2- احسب احتمال أن يكون $\bar{X}$ محصور بين 18 و 22 في الحالتين.

الحل

1- حساب المتوسط و الانحراف المعياري

نعلم أن $\mu_{\bar{X}} = \mu=20$ في الحالتين.

الحالة الأولى $n=36$:

بما أن طريقة سحب العينات غير محددة' نعتمد على الملاحظة1. نحسب النسبة $\frac{n}{N} = \frac{36}{900} = 0{,}04 < 5\%$ إذن

$\sigma_{\bar{X}}^2 = \frac{\sigma^2}{n} = \frac{12^2}{36} = 4$ ومنه $\sigma_{\bar{X}} = \frac{12}{\sqrt{36}} = 2$

الحالة الثانية $n=64$:

نحسب النسبة $\frac{n}{N} = \frac{64}{900} = 0,071 \geq 5\%$ إذن $\sigma_{\bar{X}}^2 = \frac{\sigma^2}{n}\left(\frac{N-n}{N-1}\right) = \frac{12^2}{64}\left(\frac{900-64}{900-1}\right) = 2,09$

ومنه $\sigma_{\bar{X}} = 1,44$

2- حساب الاحتمال

في البداية نعين توزيع الذي يتبعه $\bar{X}$ حسب نظرية النهاية المركزية $\bar{X} \to N(\mu_{\bar{X}}, \sigma_{\bar{X}}^2)$ لان حجم العينة $n \geq 30$ في الحالتين.

الحالة الاولى n=36: $\bar{X} \to N(20, 4)$

$$P(18 < \bar{X} < 22) = P\left(\frac{18-20}{2} < \frac{\bar{X}-20}{2} < \frac{22-20}{2}\right)$$
$$= P(-1 < Z < 1)$$
$$= \varphi(1) - \varphi(-1)$$
$$= 2\varphi(1) - 1 = 0,6826$$

الحالة الثانية n=64: $\bar{X} \to N(20, 2,09)$

$$P(18 < \bar{X} < 22) = P\left(\frac{18-20}{1,44} < \frac{\bar{X}-20}{1,44} < \frac{22-20}{1,44}\right)$$
$$= P(-1,38 < Z < 1,38)$$
$$= \varphi(1,38) - \varphi(-1,38)$$
$$= 2\varphi(1,38) - 1 = 0,8324$$

2-2- توزيع المعاينة للنسبة

ليكن مجتمع ما غير محدود, و لتكن p نسبة الأفراد الذين يحملون صفة معينة في هذا المجتمع. إذا اعتبرنا كل العينات الممكنة و التي حجمها n المسحوبة من هذا المجتمع فإننا تتحصل على توزيع المعاينة للنسبة p'.

لدينا النتائج التالية:

أ- المتوسط

- متوسط توزيع المعاينة للنسبةp' : $\mu_{p'} = p$ (8.2)

ب- التباين

- تباين توزيع المعاينة للنسبةp':

- حالة معاينة نفادية (سحب بدون إرجاع) : $\sigma^2_{p'} = \frac{pq}{n}(\frac{N-n}{N-1})$ (9.2)

- حالة معاينة غير نفادية (سحب بإرجاع) : $\sigma^2_{p'} = \frac{pq}{n}$ (10.2)

مع p-1=q نسبة الأفراد الذين لا يحملون الصفة المدروسة.

ج- الانحراف المعياري

- الانحراف المعياري لتوزيع المعاينة للنسبةp':

- حالة معاينة نفادية (سحب بدون إرجاع) : $\sigma_{p'} = \sqrt{\frac{pq}{n}(\frac{N-n}{N-1})}$ (11.2)

- حالة معاينة غير نفادية (سحب بإرجاع) : $\sigma_{p'} = \sqrt{\frac{pq}{n}}$ (12.2)

د- طبيعة التوزيع

لتعيين طبيعة التوزيع الذي يتبعه المتغير العشوائي الذي يمثل توزيع المعاينة للنسبةp' نعتمد أيضا على نظرية النهاية المركزية و نستنتج أنp' يتبع التوزيع الطبيعي أي $\boldsymbol{p' \rightarrow N(\mu_{p'}, \sigma^2_{p'})}$

مثال3

من بين قطع الغيار المصنوعة على آلة ما وجد أن 2 % منها تالفة.

1- احسب احتمال أن تكون في احد الطلبيات المؤلفة من 400 قطعة' 3% أو أكثر من القطع التالفة.

2- احسب احتمال أن تكون 2% أو اقل من القطع التالفة.

الحل

لدينا الطلبية المؤلفة من 400 قطعة تمثل العينة التي حجمها $n=400$.

نسبة القطع التالفة المصنوعة على الآلة هي $p=2\%$.

بما أن $n\geq 30$ فان التوزيع الذي يتبعه توزيع النسبة p' هو توزيع طبيعي $p' \to N(\mu_{p'}, \sigma_{p'}^2)$ حيث

$\mu_{p'} = p = 2\% = 0,02$ و بما ان حجم المجتمع غير محدود فان $\sigma_{p'} = \sqrt{\frac{pq}{n}} = \sqrt{\frac{0,02 * 0,08}{400}} = 0,007$

1- حساب $P(p' \geq 0,03)$

$$P(p' \geq 0,03) = 1 - P(p' < 0,03)$$
$$= 1 - P\left(\frac{p' - 0,02}{0,007} < \frac{0,03 - 0,02}{0,007}\right)$$
$$= 1 - P(Z < 1,42)$$
$$= 1 - \varphi(1,42)$$
$$= 1 - 0,9222 = 0,0778$$

2- حساب $P(p' \leq 0,02)$

$$P(p' \leq 0,02) = P\left(\frac{p' - 0,02}{0,007} < \frac{0,02 - 0,02}{0,007}\right)$$
$$= P(Z < 0)$$
$$= \varphi(0) = 0,5$$

الفصل الثالث التقدير و مجالات الثقة

1 - مقدمة

من خلال دراسة المعاينة توصلنا إلى علاقة رياضية تربط بين خصائص توزيع العينات و المجتمع. تساعد هذه العلاقة في تقدير معالم المجتمع التي تعتبر مجهولة انطلاقا من خصائص العينة.

إذا اعتبرنا مجتمع ما ونريد تعيين احد معالمه (المتوسط μ, التباين σ^2 أو النسبة p)' لتكن θ احد هذه العالم. من اجل هذا نعتبر عينة حجمها n من هذا المجتمع. باستعمال معطيات العينة' يمكننا تعيين قيمة عددية ل θ و لتكن $\hat{\theta}$.

تعتبر $\hat{\theta}$ تقدير لθ وبما أنها قيمة عددية واحدة فهي تدعى بمقدر نقطي.

يمتاز المقدر النقطي بالخصائص التالية:

أ - مقدر غير متحيز: نقول عن المقدر$\hat{\theta}$ انه غير متحيز إذا كان $E(\hat{\theta}) = \theta$

ب - الكفاءة : إذا اعتبرنا مقدرين غير متحيزين $\hat{\theta}_1$ و$\hat{\theta}_2$, المقدر الأكثر كفاءة هو الذي له اصغر تباين.

ج - التقارب: نقول عن المقدر$\hat{\theta}$ انه متقارب عندما يؤول إلى قيمة المعلمةθ عندما يؤول حجم العينة إلى ما لانهاية.

2- التقدير النقطي

2-1- تقدير متوسط المجتمع μ

نعتبر عينة حجمها n مسحوبة من مجتمع ما (طريقة السحب لا تهم). ليكن $\bar{x}$ متوسط العينة' لدينا النتيجة التالية:

يعتبر متوسط العينة مقدر غير متحيز لمتوسط المجتمع μ و نكتب: (1.3) $\hat{\mu} = \bar{x}$

يتميز المقدر$\hat{\mu}$ بالخصائص التالية:

- توقع $\hat{\mu}$: (2.3) $E(\hat{\mu}) = \mu$ لأنه مقدر غير متحيز.

- تباين $\hat{\mu}$:

- حالة سحب العينة بإرجاع: (3.3) $V(\hat{\mu}) = \frac{\sigma^2}{n}$

- حالة سحب العينة بدون إرجاع: (4.3) $V(\hat{\mu}) = \frac{\sigma^2}{n}\left(\frac{N-n}{N-1}\right)$

حيث: σ^2 تباين المجتمع و N حجم المجتمع.

2-2- تقدير تباين المجتمع σ^2

نعتبر عينة حجمها n مسحوبة من مجتمع ما. ليكن s^2 تباين العينة'حيث: (5.3) $s^2 = \frac{1}{n}\sum(x_i - \bar{x})^2$

لدينا النتيجة التالية:

يعتبر $\hat{\sigma}^2$ مقدر غير متحيز لتباين المجتمع حيث:

- حالة سحب العينة بإرجاع: (6.3) $\hat{\sigma}^2 = \frac{n}{n-1}s^2$

- حالة سحب العينة بدون إرجاع: (7.3) $\hat{\sigma}^2 = \frac{n}{N}\left(\frac{N-1}{n-1}\right)s^2$

ملاحظة 1

اذا كان حجم المجتمع غير محدود فان $\hat{\sigma}^2 = \frac{n}{n-1}s^2$

مثال1

قمنا بقياس قطر 5 كرات مسحوبة بإرجاع من صندوق به 200 كرة. فكانت النتائج(بالسنتمتر) كما يلي:

6,33- 6,37 - 6,36 -6,32- 6,37 .

عين مقدر غير متحيز لمتوسط وتباين قطر الكرات في الصندوق.

الحل

تقدير متوسط قطر الكرات في الصندوق: لدينا $\hat{\mu} = \bar{x}$

$$\bar{x} = \frac{1}{n}\sum x_i = \frac{6{,}33 + 6{,}37 + 6{,}36 + 6{,}32 + 6{,}37}{5} = 6{,}35$$

إذن $\hat{\mu} = \bar{x} = 6{,}35$

تقدير التباين: بما أن السحب تم بإرجاع إذن $\hat{\sigma}^2 = \frac{n}{n-1} s^2$

$$s^2 = \frac{1}{n}\sum (x_i - \bar{x})^2 = \frac{(6{,}33-6{,}35)^2 + (6{,}37-6{,}35)^2 + (6{,}36-6{,}35)^2 + (6{,}32-6{,}35)^2 + (6{,}37-6{,}35)^2}{5} = 0{,}00055$$

ومنه $\hat{\sigma}^2 = \frac{n}{n-1} s^2 \cong 0{,}0005$

3-2- تقدير النسبة p

نعتبر مجتمع ما و لتكن p نسبة الأفراد الذين يحملون صفة معينة. لتكن p' نسبة الأفراد الذين يحملون نفس الصفة في عينة حجمها n مسحوبة من هذا المجتمع.

تقدر النسبة p بالمقدر: $\hat{p} = p'$ (8.3)

يتميز المقدر $\hat{p}$ بالخصائص التالية:

- *توقع* $\hat{p}$: (9.3) $E(\hat{p}) = p'$ لأنه مقدر غير متحيز.
- تباين $\hat{p}$:
- حالة سحب العينة بإرجاع: (10.3) $V(\hat{p}) = \frac{pq}{n}$
- حالة سحب العينة بدون إرجاع: (11.3) $V(\hat{p}) = \frac{pq}{n}(\frac{N-n}{N-1})$

حيث : p-1=q و N حجم المجتمع.

أ. حاند

مثال2

في دراسة لاختبار إحدى الطرق لعلاج مرض معين' أخذت عينة مكونة من 400 شخص مريض وقدم لهم العلاج فأبدى 136 شخص استجابتهم لهذا العلاج.

- قدر نسبة الأشخاص الذين استجابوا للعلاج من بين 1000 شخص مريض.

- ما هي نسبة الأشخاص الذين لم يستجيبوا للعلاج؟

الحل

لدينا N=1000, n=400, نسبة الأشخاص الذين استجابوا للعلاج في العينة $p' = \frac{136}{400} = 0{,}34$

- تقدير النسبة في المجتمع: $\hat{p} = p' = 0{,}34$ أي $\hat{p} = 34\%$

- نسبة الأشخاص الذين لم يستجيبوا للعلاج هي: $q = 1 - p = 1 - 0{,}34 = 0{,}66$ أي $q = 66\%$

2-4- الخطأ في التقدير

عند تقدير معلمة المجتمع θ على أساس عينة مسحوبة من هذا المجتمع فان هناك احتمال أن يختلف المقدر $\hat{\theta}$ عن القيمة الفعلية ل θ بمقدار يعرف بالخطأ في التقدير. نرمز للخطأ ب E حيث: (12.3) $E = z_{1-\frac{\alpha}{2}}\sigma_{\hat{\theta}}$

مع:

$z_{1-\frac{\alpha}{2}}$ معاملات الثقة التي تستنتج من جدول التوزيع الطبيعي المعياري من اجل قيم محدد ل α الذي يعرف باحتمال الخطأ.

$\sigma_{\hat{\theta}}$ الانحراف المعياري للمقدر $\hat{\theta}$.

ملاحظة 2

يعرف α باحتمال الخطأ و الاحتمال المعاكس له $(1-\alpha)$ بمستوى أو درجة الثقة. يكون هذا الاحتمال محدد مسبقا مما يسمح بتعيين معاملات الثقة $z_{1-\frac{\alpha}{2}}$ من جدول التوزيع الطبيعي المعياري. عادة ما نستعمل القيم المبينة في الجدول التالي:

α	%1	%2	%5	%10	%50
α-1	%99	%98	%95	%90	%50
$z_{1-\frac{\alpha}{2}}$	2,58	2,33	1,96	1,645	0,6745

الجدول 1.3

أ- الخطأ في تقدير المتوسط

إذا أردنا حساب مقدار الخطأ في تقدير متوسط المجتمع فان $E = z_{1-\frac{\alpha}{2}}\sigma_{\hat{\mu}}$ أي (13.3) $E = z_{1-\frac{\alpha}{2}}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$

من اجل α=5%: $E = 1,96\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$

ب ـ الخطأ في تقدير النسبة

إذا أردنا حساب مقدار الخطأ في تقدير النسبة فان $E = z_{1-\frac{\alpha}{2}}\sigma_{\hat{p}}$ أي (14.3) $E = z_{1-\frac{\alpha}{2}}\sqrt{\frac{pq}{n}}$

من اجل α=5% : $E = 1,96\sqrt{\frac{pq}{n}}$

ملاحظة 3

يمكننا أيضا أن نتكلم عن الدقة في التقدير التي تعتبر عكس الخطأ في التقدير لأننا عادة ما نعمل على جعل الدقة اكبر ما يمكن أما الخطأ فنعمل على أن يكون اصغر ما يمكن.

2-5- تعيين حجم العينة اللازم للدراسة

من اجل دقة محددة أو خطأ في التقدير محدد' يمكن أن نحدد حجم العينة اللازم للدراسة وهذا كما يلي:

أ- حالة الخطأ في تقدير المتوسط: لدينا $E = z_{1-\frac{\alpha}{2}}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$ و منه (15.3) $n = \left(\frac{\sigma}{E}z_{1-\frac{\alpha}{2}}\right)^2$

ب ـ حالة الخطأ في تقدير النسبة: لدينا $E = z_{1-\frac{\alpha}{2}}\sqrt{\frac{pq}{n}}$ و منه (16.3) $n = pq\left(\frac{z_{1-\frac{\alpha}{2}}}{E}\right)^2$

مثال 3

لدراسة نمو نوع من الأزهار في مشتلة أخذت عينة من 50 زهرة فوجد ان متوسط النمو هو 44,8 سنتيمتر بانحراف معياري 4,7.

1- ما هو متوسط النمو لدى هذا النوع من الأزهار في المشتلة؟

2- قدر الانحراف المعياري للمجتمع المدروس

3- ما هو مقدار الخطأ في تقدير المتوسط؟ باحتمال خطأ 5%

4- إذا أردنا أن تكون الدقة في التقدير 0,75 على الأقل’ فما هو حجم العينة اللازم؟

الحل

لدينا المعطيات التالية:

حجم العينة n=50, متوسط العينة $\bar{x} = 44,8$, الانحراف المعياري للعينة s=4,7.

1- تقدير متوسط النمو في المشتلة يكفي أن نحسب $\hat{\mu} = \bar{x} = 44,8$

2- تقدير الانحراف المعياري

نلاحظ أن حجم المجتمع المدروس غير محدود’ إذن $\hat{\sigma}^2 = \frac{n}{n-1} s^2$ ومنه $\hat{\sigma} = \sqrt{\frac{n}{n-1}} s = \sqrt{\frac{50}{49}} 4,7 = 4,74$

3- حساب الخطأ في تقدير المتوسط

من اجل α=5% لدينا $z_{1-\frac{\alpha}{2}} = 1,96$ ومنه $E = 1,96 \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$

بما أن σ مجهول’ نستعمل المقدر $\hat{\sigma}$ إذن $E = 1,96 \frac{4,74}{\sqrt{50}} = 1,31$

4- تعيين حجم العينة من اجل دقة على الأقل تساوي 0,75 أي الخطأ يكون اصغر أو يساوي 0,75

لدينا

$$E \leq 0,75 \rightarrow 1,96\frac{\hat{\sigma}}{\sqrt{n}} \leq 0,75$$

$$n \geq (1,96\frac{\hat{\sigma}}{E})^2$$

$$n \geq (1,96\frac{4,74}{0,75})^2$$

$$n \geq 153,44$$

بما أن n عدد طبيعي’ نأخذ n=154

3- مجالات الثقة

مجال الثقة هو مجال يحوي ’باحتمال معين (α-1)’ القيمة الفعلية للمعلمة θ. يسمى الاحتمال (α-1) بدرجة او مستوى الثقة. يكتب المجال من الشكل: $[\hat{\theta} - z_{1-\frac{\alpha}{2}}\sigma_{\hat{\theta}} \;;\; \hat{\theta} + z_{1-\frac{\alpha}{2}}\sigma_{\hat{\theta}}]$ (17.3)

حيث $z_{1-\frac{\alpha}{2}}$ هي معاملات الثقة التي تم ذكرها في الملاحظة 2.

3-1- مجال الثقة للمتوسط

لتعيين مجال الثقة لمتوسط المجتمع نميز بين حالتين:

- حالة مجتمع غير محدود أو معاينة غير نفادية (بإرجاع) على مجتمع محدود أو عندما تكون $\frac{n}{N} < 5\%$:

$$[\bar{x} - z_{1-\frac{\alpha}{2}}\frac{\sigma}{\sqrt{n}} \;;\; \bar{x} + z_{1-\frac{\alpha}{2}}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}] \qquad (18.3)$$

- حالة مجتمع محدود أو معاينة نفادية (بدون إرجاع) أو عندما تكون $\frac{n}{\mathrm{N}} \geq 5\%$:

$$[\bar{x} - z_{1-\frac{\alpha}{2}}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\sqrt{\frac{N-n}{N-1}} \;;\; \bar{x} + z_{1-\frac{\alpha}{2}}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\sqrt{\frac{N-n}{N-1}}] \qquad (19.3)$$

ملاحظة 4

عادة ما يكون الانحراف المعياري للمجتمع σ مجهول' لذا نستعمل المقدر $\hat{\sigma}$ بالنسبة للعينات التي يكون حجمها اكبر أو يساوي 30 ($n \geq 30$). أما العينات الصغيرة ($n<30$) فنعتمد على توزيع ستيودنت (Student) فيصبح المجال من الشكل:

$$\left[\bar{x} - t_{n-1}(\alpha)\frac{\hat{\sigma}}{\sqrt{n}} \ ; \ \bar{x} + t_{n-1}(\alpha)\frac{\hat{\sigma}}{\sqrt{n}}\right] \qquad (20.3)$$

بتعويض $\hat{\sigma} = \sqrt{\frac{n}{n-1}}s$ نحصل على المجال:

$$\left[\bar{x} - t_{n-1}(\alpha)\frac{s}{\sqrt{n-1}} \ ; \ \bar{x} + t_{n-1}(\alpha)\frac{s}{\sqrt{n-1}}\right] \qquad (21.3)$$

حيث $\pm t_{n-1}(\alpha)$ معاملات تستنتج من جدول توزيع ستيودنت بدرجة حرية $n-1$ و α محدد مسبقا (انظر الملحق 2).

مثال 4

أخذت عينة عشوائية من 36 طالب من بين مجموعة من 800 طالب فوجد أن متوسط العلامات في مقياس الإحصاء هو 12,25 بانحراف معياري 1,75.

1- اوجد مجال الثقة لمتوسط العلامات (بدرجة ثقة 95%)

2- كيف يصبح هذا المجال إذا كان عدد الطلبة في العينة 25؟

الحل

لدينا المعطيات التالية:

حجم العينة $n=36$, متوسط العينة $\bar{x} = 12,25$, الانحراف المعياري للعينة s=1,75.

1- مجال الثقة لمتوسط العلامات بدرجة ثقة 95% :

لدينا المجال $\left[\bar{x} - 1,96\frac{\sigma}{\sqrt{n}} \ ; \ \bar{x} + 1,96\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right]$

بما أن الانحراف المعياري للمجتمع مجهول' و حسب الملاحظة 4 نستعين بالمقدر $\hat{\sigma} = \sqrt{\frac{n}{n-1}}s$ فيصبح المجال من الشكل $\left[\bar{x} - 1,96\frac{s}{\sqrt{n-1}} \ ; \ \bar{x} + 1,96\frac{s}{\sqrt{n-1}}\right]$ بالتعويض نجد: [11,68 ; 12,82].

أ. حاند

2- إذا كان عدد الطلبة في العينة 25 أي $n=25$:

بما أن $n<30$ و الانحراف المعياري للمجتمع مجهول’ نعتمد على توزيع ستيودنت فيصبح المجال من الشكل:

$$[\bar{x} - t_{n-1}(\alpha)\frac{s}{\sqrt{n-1}} \ ; \quad \bar{x} + t_{n-1}(\alpha)\frac{s}{\sqrt{n-1}}]$$

من اجل درجة ثقة 95% (α=5%)’ لدينا $t_{24}(5\%)=2,063$’ بالتعويض نجد المجال: [11,52 ; 12,98].

3-2- مجال الثقة للنسبة

نعتبر مجتمع ما و لتكن p نسبة الأفراد الذين يحملون صفة معينة. لتكن p' نسبة الأفراد الذين يحملون نفس الصفة في عينة حجمها n مسحوبة من هذا المجتمع. نذكر ان المقدر النقطي للنسبة p هو $\hat{p} = p'$.

لتعيين مجال الثقة للنسبة نميز بين حالتين:

- حالة مجتمع غير محدود او معاينة غير نفادية (بارجاع) على مجتمع محدود او عندما تكون $\frac{n}{N} < 5\%$:

$$[p' - z_{1-\frac{\alpha}{2}}\sqrt{\frac{pq}{n}} \ ; \quad p' + z_{1-\frac{\alpha}{2}}\sqrt{\frac{pq}{n}}] \qquad (22.3)$$

- حالة مجتمع محدود او معاينة نفادية (بدون ارجاع) او عندما تكون $\frac{n}{N} \geq 5\%$:

$$[p' - z_{1-\frac{\alpha}{2}}\sqrt{\frac{pq}{n}}\sqrt{\frac{N-n}{N-1}} \ ; \quad p' + z_{1-\frac{\alpha}{2}}\sqrt{\frac{pq}{n}}\sqrt{\frac{N-n}{N-1}}] \qquad (23.3)$$

عادة ما تكون النسبة p مجهولة لذا نستعمل المقدر $\hat{p}$ وهذا من اجل العينات التي حجمها $n \geq 30$.

مثال 5

في أحد البنوك تم اختيار 45 حساب من بين 432 حساب’ فوجد أن 14 حساب له رصيد أكبر من 10000 دج من بين الحسابات المختارة.

1- قدر نسبة الحسابات التي رصيدها أكبر من 10000دج في المجتمع المدروس

2- أعط مجال الثقة لهذه النسبة وهذا بمستوى ثقة 95%

3- كيف يصبح المجال عند مستوى ثقة 99%؟

الحل

لدينا N, 45=n=432

1- تقدير نسبة الحسابات التي رصيدها أكبر من 10000دج

لدينا $\hat{p} = p' = \frac{14}{45} = 0{,}31$

2- مجال الثقة بمستوى ثقة 95%

نحسب النسبة $\frac{n}{\mathrm{N}} = \frac{45}{432} = 0{,}1 \geq 5\%$ إذن المجال من الشكل

$$[p' - z_{1-\frac{\alpha}{2}}\sqrt{\frac{pq}{n}}\sqrt{\frac{N-n}{N-1}} \;;\; p' + z_{1-\frac{\alpha}{2}}\sqrt{\frac{pq}{n}}\sqrt{\frac{N-n}{N-1}}]$$

بالتعويض:

$$[0{,}31 - 1{,}96\sqrt{\frac{0{,}31 * 0{,}69}{45}}\sqrt{\frac{432-45}{432-1}} \;;\; 0{,}31 + 1{,}96\sqrt{\frac{0{,}31 * 0{,}69}{45}}\sqrt{\frac{432-45}{432-1}}]$$

نجد المجال [0,182 ; 0,438].

3- مجال الثقة بمستوى ثقة 99%

في هذه الحالة $z_{1-\frac{\alpha}{2}} = 2{,}58$ إذن المجال يصبح:

$$[0{,}31 - 2{,}58\sqrt{\frac{0{,}31 * 0{,}69}{45}}\sqrt{\frac{432-45}{432-1}} \;;\; 0{,}31 + 2{,}58\sqrt{\frac{0{,}31 * 0{,}69}{45}}\sqrt{\frac{432-45}{432-1}}]$$

نحصل على المجال: [0,15 ; 0,47].

الفصل الرابع اختبار الفرضيات

1- مقدمة

عادة ما نريد اتخاذ قرارات بشان أحد معالم المجتمع’ تعتبر هذه القرارات قرارات إحصائية و للوصول إليها نقوم بوضع فرضيات عن معالم المجتمع ثم تختبر هذه الفرضيات على أساس عينة عشوائية. مثلا نفرض أن متوسط المجتمع يساوي قيمة معينة ولمعرفة صحة هذه الفرضية نقوم باختبار إحصائي.

قبل الشروع في مختلف الاختبارات الإحصائية’ نعطي بعض التعاريف ثم مبدأ هذه الاختبارات يليه أهم الاختبارات الإحصائية مع أمثلة تطبيقية.

2- تعاريف

- الفرضية الصفرية و البديلة

تعرف الفرضية الصفرية بالفرضية الأساسية التي نريد اختبارها. تعرف أيضا بفرضية العدم’ يرمز لها ب $0H$.

كل فرضية تختلف عن الفرضية الصفرية تعرف بالفرضية البديلة و يرمز لها ب $1H$.

مثلا نكتب : $\begin{array}{l} H0: \mu = \mu_0 \\ H1: \mu \neq \mu_0 \end{array}$

يؤدي الاختبار إما إلى رفض $0H$ او قبولها.

- اختبار الفرضيات

هو الطرق التي تسمح باتخاذ القرار فيما يخص الفرضية $0H$ هل هي صحيحة أم خاطئة. يسمح الاختبار أيضا بمعرفة هل الفروق الملاحظة بين المجتمع و العينة راجعة للصدفة أم هناك فروق حقيقية.

هناك عدة اختبارات منها ما هو متعلق بمعالم المجتمع حيث تكون فيه الفرضية الصفرية مرتبطة بأحد معالم المجتمع كالمتوسط أو النسبة. منها ما هو متعلق بالتوزيع و تكون فيه الفرضية الصفرية حول توزيع المجتمع. يمكن أن نذكر بعض الاختبارات:

- اختبار التطابق أو الامتثال : الهدف منه مقارنة قيمة نظرية لأحد معالم المجتمع مع قيمة فعلية أو قيمة ملاحظة.

- اختبار التجانس : الهدف منه مقارنة عينتين' هل هما من نفس المجتمع أم لا؟

- اختبار التعديل: الهدف منه معرفة هل التوزيع الملاحظ يوافق توزيع نظري أو توزيع نظري معروف؟

إضافة إلى اختبارات أخرى كاختبارات الارتباط و تحليل التباين لمقارنة عدة عينات أو معرفة مدى تجانس العينات.

- الخطأ من النوع الأول و الخطأ من النوع الثاني

الخطأ من النوع الأول هو الخطأ الذي يكون عندما نقوم برفض الفرضية $H0$ عندما تكون صحيحة و يجب قبولها.

الخطأ من النوع الثاني هو الخطأ الذي يكون عندما نقوم بقبول الفرضية $H0$ عندما تكون خاطئة و يجب رفضها.

نلخص الحالات الممكنة في الجدول التالي:

	قبول	رفض
$H0$ صحيحة	قرار صحيح	خطأ من النوع الأول
$H0$ خاطئة	خطأ من النوع الثاني	قرار صحيح

جدول 1.4

- درجة المعنوية

تعرف درجة أو مستوى معنوية اختبار ما باحتمال أن يكون هناك خطأ من النوع الأول. نرمز له ب α و يكون محدد قبل القيام بالاختبار. عادة ما يكون $\alpha=5\%$ أو $\alpha=1\%$ أي هناك5 % من الفرص لرفض $H0$ عندما تكون صحيحة او 95% من الفرص لاتخاذ القرار الصحيح.

للقيام بالاختبار نقوم بتعيين دالة بالاستعانة بمعطيات العينة. هذه الدالة تشكل إحصائية عادة ما يكون توزيعها معروف (التوزيع الطبيعي في حالة العينات الكبيرة). اعتمادا على شكل التوزيع و من اجل مستوى معنوية محدد نعين مناطق تعرف بمنطقة الرفض و منطقة القبول.

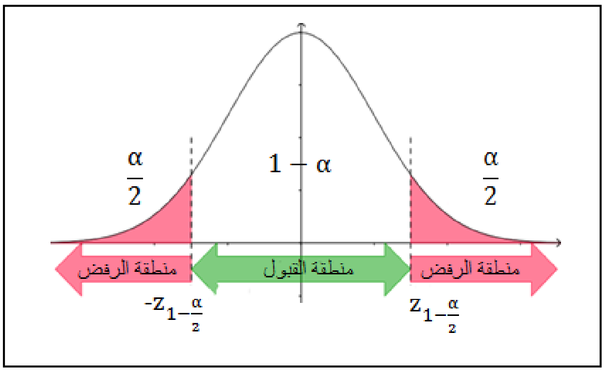
حسب صيغة الفرضيات الصفرية و البديلة يمكن أن نميز بين نوعين من الاختبارات. سنقوم بتعريفها فيما يلي:

- اختبار ثنائي الاتجاه

تصاغ فيه الفرضيات كما يلي:

من اجل اختبار لمتوسط المجتمع

$H0: \mu = \mu_0$
$H1: \mu \neq \mu_0$
في هذه الحالة تكون منطقة رفض الفرضية $0H$ مجزئة الى جزئين حسب الشكل.



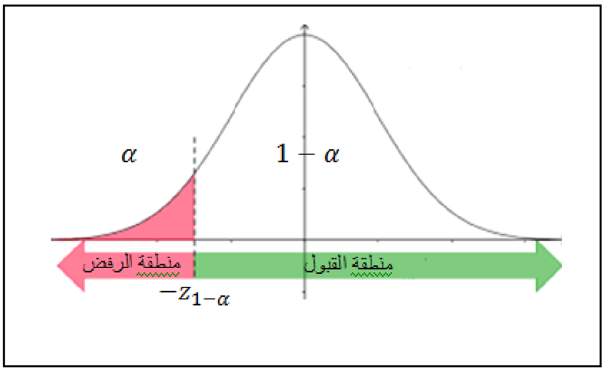
الشكل 1.4

- اختبار احادي الاتجاه

تصاغ فيه الفرضيات كما يلي:

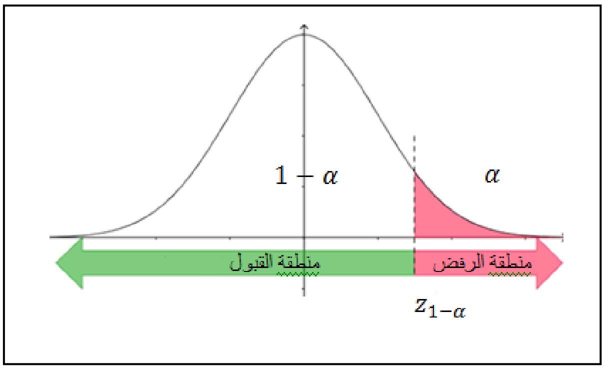
من اجل اختبار لمتوسط المجتمع

$H0: \mu = \mu_0$
$H1: \mu < \mu_0$
تكون منطقة الرفض من الجهة اليسرى كما هو موضح في الشكل ادناه.



الشكل 2.4

أو $\begin{matrix} H0: \mu = \mu_0 \\ H1: \mu > \mu_0 \end{matrix}$ تكون منطقة الرفض من الجهة اليمنى كما هو موضح في الشكل التالي:



الشكل 3.4

3- خطوات الاختبار

يتم الاختبار حسب الخطوات التالية:

أ- صياغة الفرضيات الصفرية و البديلة

ب- باستخدام معطيات العينة نحسب القيمة الفعلية للإحصائية

ج- من اجل مستوى معنوية محدد α نعين القيم الجدولية للإحصائية. من اجل التوزيع الطبيعي المعياري نعطي بعض القيم المبينة في الجدول أدناه.

نوع الاختبار	α	%5	1%
ثنائي الاتجاه	$\pm z_{1-\frac{\alpha}{2}}$	$\pm 1,96$	$\pm 2,58$
أحادي الاتجاه	$\pm z_{1-\alpha}$	$\pm 1,65$	$\pm 2,33$

جدول 2.4

د- تعيين قاعدة القرار و اتخاذ القرار و هذا حسب نوع الاختبار و مناطق القبول و الرفض.

4 – اختبار التطابق أو الامتثال

الهدف منه مقارنة قيمة نظرية لأحد معالم المجتمع مع قيمة فعلية أي قيمة تم الحصول عليها بالملاحظة أو التجربة و عادة ما تكون هذه القيمة نتيجة الملاحظة على عينة مختارة من المجتمع المدروس.

4-1- اختبار التطابق للمتوسط

الهدف من هذا الاختبار هو معرفة هل متوسط المجتمع يساوي قيمة معينة (قيمة نظرية). نفرض أن الانحراف المعياري للمجتمع معلوم.

4-1-1- اختبار ثنائي الاتجاه للمتوسط

للقيام بالاختبار نتبع الخطوات التالية:

أ- صياغة الفرضيات: من اجل القيمة النظرية μ_0 لدينا:

$$H0: \mu = \mu_0$$
$$H1: \mu \neq \mu_0$$

ب- حساب القيمة الفعلية للإحصائية z_0 المعرفة كما يلي: (1.4)

$$z_0 = \frac{\bar{x} - \mu_0}{\sigma/\sqrt{n}} \quad (1.4)$$

حيث : $\bar{x}$ متوسط العينة’ n حجم العينة و σ الانحراف المعياري للمجتمع.

تعتبر z_0 القيمة الفعلية لمتغيرة عشوائية z لها توزيع طبيعي معياري $N(0\ ,1)$

عندما يكون الانحراف المعياري للمجتمع مجهول نستعمل المقدر $\hat{\sigma} = \sqrt{\frac{n}{n-1}}\, s$

ج- من اجل مستوى معنوية % α=5 نعين القيم الجدولية : $z_{1-\frac{\alpha}{2}} = 1{,}96$ و $-z_{1-\frac{\alpha}{2}} = -1{,}96$

د- قاعدة القرار و اتخاذ القرار: نقارن قيمة الإحصائية z_0 مع القيم الجدولية حيث:

إذا كانت $-z_{1-\frac{\alpha}{2}} < z_0 < z_{1-\frac{\alpha}{2}}$ إذن تقبل $H0$

إذا كانت $z_0 \leq -z_{1-\frac{\alpha}{2}}$ او $z_0 \geq z_{1-\frac{\alpha}{2}}$ إذن ترفض $H0$

بصيغة أخرى’ حسب الشكل 1.4 عندما تكون z_0 في منطقة القبول إذن تقبل $H0$ معادا ذلك ترفض.

مثال 1

في احد الورشات آلة لصنع قطع الغيار. قام احد العمال بضبط هذه الآلة حتى يكون قطر القطع المصنوعة يساوي 12,6 ميليمتر. بعد عملية الصنع تم فحص عينة مؤلفة من 100 قطعة فوجد متوسط القطع المفحوصة 12,65 ميليمتر بانحراف معياري 0,4.

هل هذا الاختلاف راجع للصدفة أم الآلة تحتاج إلى ضبط آخر؟ (بمستوى معنوية 5%)

الحل

للإجابة عن هذا السؤال نختبر الفرضية

$$H0: \mu = 12,6$$
$$H1: \mu \neq 12,6$$

لدينا المعطيات التالية :

حجم العينة n = 100 ، متوسط العينة $\bar{x} = 12,65$ ، الانحراف المعياري للعينة s = 0,4

نحسب القيمة الفعلية للإحصائية z_0 حيث $$z_0 = \frac{\bar{x} - \mu_0}{\sigma / \sqrt{n}}$$

بما أن الانحراف المعياري للمجتمع مجهول نستعمل المقدر $$\hat{\sigma} = \sqrt{\frac{n}{n-1}}s = \sqrt{\frac{100}{99}}0,4 \cong 0,4$$

اذن قيمة z_0 هي $$z_0 = \frac{12,65 - 12,6}{0,4 / \sqrt{100}} = 1,25$$

من اجل مستوى معنوية 5% لدينا القيم الجدولية $$z_{1-\frac{\alpha}{2}} = 1,96 , \quad -z_{1-\frac{\alpha}{2}} = -1,96$$

حسب قاعدة القرار : $-z_{1-\frac{\alpha}{2}} < z_0 < z_{1-\frac{\alpha}{2}}$ إذن تقبل $H0$ أي أن الاختلاف راجع للصدفة و الآلة لا تحتاج إلى ضبط جديد.

2-1-4- اختبار أحادي الاتجاه للمتوسط

يتم الاختبار بإتباع نفس الخطوات السابقة؛ يكون الاختلاف في صياغة الفرضيات و في القيم الجدولية للمتغيرة z.

أ- صياغة الفرضيات: من اجل القيمة النظرية μ_0 لدينا:

$$H0: \mu = \mu_0$$
$$H1: \mu < \mu_0$$
تكون منطقة الرفض من الجهة اليسرى حسب الشكل 2.4

او

$$H0: \mu = \mu_0$$
$$H1: \mu > \mu_0$$
تكون منطقة الرفض من الجهة اليمنى حسب الشكل 3.4.

ب- حساب القيمة الفعلية للإحصائية z_0 حيث : $z_0 = \dfrac{\bar{x} - \mu_0}{\sigma/\sqrt{n}}$

ج- من اجل مستوى معنوية α نعين القيم الجدولية $z_{1-\alpha}$ ، $-z_{1-\alpha}$

بعض القيم مبينة في الجدول 2.4 السابق.

د- قاعدة القرار و اتخاذ القرار: نقارن قيمة الإحصائية z_0 مع القيم الجدولية حيث :

اذا كانت $z_0 > z_{1-\alpha}$ ترفض $H0$ في حالة الاختبار على اليمين.

اذا كانت $z_0 < -z_{1-\alpha}$ ترفض $H0$ في حالة الاختبار على اليسار.

مثال 2

نريد اختبار فرضية حول متوسط دخل عامل حديث التوظيف و لتكن القيمة الافتراضية لمتوسط الدخل15000دج. حسب بيانات عينة مكونة من 100 موظف وجد أن متوسط الدخل 15000دج. نفرض أن الانحراف المعياري للمجتمع هو 1500.

هل متوسط الدخل هو 15000دج أم أكثر و هذا بمستوى معنوية 5%؟

الحل

للإجابة عن هذا السؤال نختبر الفرضية
$$H0: \mu = 15000$$
$$H1: \mu > 15000$$

لدينا المعطيات التالية :

حجم العينة $n = 100$ ، متوسط العينة $\bar{x} = 15800$ ، الانحراف المعياري للمجتمع $\sigma = 1500$

نحسب القيمة الفعلية للإحصائية z_0 حيث $z_0 = \frac{\bar{x} - \mu_0}{\sigma/\sqrt{n}}$ بالتعويض نجد $z_0 = 5,33$

من اجل مستوى معنوية 5% لدينا $z_{1-\alpha} = 1,65$

نلاحظ أن $z_0 > z_{1-\alpha}$ إذن ترفض $H0$ نستنتج أن متوسط الدخل أكثر من 15000دج.

4-2- اختبار التطابق للنسبة

الهدف من هذا الاختبار هو معرفة هل نسبة الأفراد الذين يحملون صفة معينة في المجتمع يساوي قيمة نظرية من اجل مستوى معنوية محدد مسبقا.

4-2-1- اختبار ثنائي الاتجاه للنسبة

للقيام بالاختبار نتبع الخطوات التالية:

أ- صياغة الفرضيات: من اجل القيمة النظرية p_0 لدينا:
$$H0: p = p_0$$
$$H1: p \neq p_0$$

ب- حساب القيمة الفعلية للإحصائية z_0 المعرفة كما يلي: (2.4)
$$z_0 = \frac{p' - p_0}{\sqrt{\frac{p_0\, q_0}{n}}}$$

حيث: p' النسبة في العينة، n حجم العينة و $q_0 = 1-p_0$.

تعتبر z_0 القيمة الفعلية لمتغيرة عشوائية z لها توزيع طبيعي معياري $N(0,1)$

ج- من اجل مستوى معنوية α نعين القيم الجدولية $z_{1-\frac{\alpha}{2}}$ ، $-z_{1-\frac{\alpha}{2}}$

د- قاعدة القرار و اتخاذ القرار: نقارن قيمة الإحصائية z_0 مع القيم الجدولية حيث:

اذا كانت $-z_{1-\frac{\alpha}{2}} < z_0 < z_{1-\frac{\alpha}{2}}$ اذن تقبل $H0$

اذا كانت $z_0 \leq -z_{1-\frac{\alpha}{2}}$ او $z_0 \geq z_{1-\frac{\alpha}{2}}$ اذن ترفض $H0$

مثال 3

في احد مصانع المصابيح الكهربائية أخذت عينة من 100 مصباح مصنوعة على آلة طاقتها الإنتاجية 1000 مصباح' فوجد أن عدد المصابيح التي بها عيب هو 25 مصباح.

إذا كان مواصفات الإنتاج تقتضي بان تكون نسبة الوحدات التي بها عيب هي 7%. فهل نستطيع أن نقرر أن الآلة تحتاج إلى ضبط أم لا؟(بمستوى معنوية 1%)

الحل

للإجابة عن هذا السؤال نختبر الفرضية
$$H0: p = 0,07$$
$$H1: p \neq 0,07$$

لدينا المعطيات التالية :

حجم العينة n = 100' نسبة المصابيح التي بها عيب في العينة هي: $p' = \frac{25}{100} = 0,25$, p_0=0,07 , q_0=1-0,07

نحسب القيمة الفعلية للإحصائية z_0 حيث $z_0 = \frac{p' - p_0}{\sqrt{\frac{p_0\, q_0}{n}}}$ بالتعويض نجد $z_0 = 7,054$

من اجل مستوى معنوية 1% لدينا $z_{1-\alpha} = 2,58$

نلاحظ أن $z_0 > z_{1-\alpha}$ إذن ترفض $H0$ نستنتج أن الآلة تحتاج إلى ضبط آخر.

4-2-2- اختبار أحادي الاتجاه للنسبة

يتم الاختبار بإتباع نفس الخطوات السابقة.

أ- صياغة الفرضيات: من اجل القيمة النظرية p_0 لدينا:

$$H0: p = p_0$$
$$H1: p < p_0$$
تكون منطقة الرفض من الجهة اليسرى حسب الشكل 2.4.

أو

$$H0: p = p_0$$
$$H1: p > p_0$$
تكون منطقة الرفض من الجهة اليمنى حسب الشكل 3.4.

ب- حساب القيمة الفعلية للإحصائية z_0 المعرفة بالعلاقة (2.4).

ج- من اجل مستوى معنوية α نعين القيم الجدولية $z_{1-\alpha}$, $-z_{1-\alpha}$

د- قاعدة القرار و اتخاذ القرار: نقارن قيمة الإحصائية z_0 مع القيم الجدولية حيث :

اذا كانت $z_0 > z_{1-\alpha}$ ترفض $H0$ في حالة الاختبار على اليمين.

اذا كانت $z_0 < -z_{1-\alpha}$ ترفض $H0$ في حالة الاختبار على اليسار.

مثال 4

يدعي احد مصانع الأدوية ان دواء من إنتاجه له فعالية 90% في تخفيف الحساسية. للتأكد من هذا أخذت عينة عشوائية من 200 شخص مصاب بالحساسية و قدم لهم هذا الدواء حيث أدى العلاج إلى تخفيف الحساسية لدى 160 شخص منهم.

هل هذا الادعاء صحيح أم خاطئ و هذا بمستوى معنوية 1%؟

الحل

للإجابة على السؤال نختبر الفرضيات $H0: p = 0,9$ ، $H1: p < 0,9$ حيث $p < 0,9$ توافق الادعاء الخاطئ أي أن نسبة الفعالية اقل من 90%.

نحسب قيمة الاحصائية z_0 حيث: $z_0 = \dfrac{p' - p_0}{\sqrt{\dfrac{p_0\, q_0}{n}}}$

حسب المعطيات لدينا $p' = \dfrac{160}{200} = 0,8$ ، $q_0 = 1 - p_0 = 0,1$ ، $p_0 = 0,9$ و $n = 200$

إذن $z_0 = -4,76$

من اجل مستوى معنوية α =1% لدينا $-z_{1-\alpha} = -2,33$

نلاحظ أن $z_0 < -z_{1-\alpha}$ إذن ترفض $H0$ ومنه تقبل $H1$ أي أن $p < 0,9$ وهذا يعني أن الادعاء خاطئ.

5- اختبار التجانس

عند دراسة عينتين أو أكثر، نتساءل هل هناك اختلاف أم هناك تجانس بين النتائج المتحصل عليها. للإجابة على هذا السؤال نقوم باختبار التجانس القائم على مبدأ مقارنة نفس مؤشرات العينات كالمتوسط أو النسبة. إذا كان هناك اختلاف فهل هو راجع للصدفة مما يدل على تجانس العينات أم هو يدل على أن هناك اختلاف فعلي مما يدل على تنافر العينات.

كما ان الهدف من هذا الاختبار هو مقارنة عينتين، هل هما من نفس المجتمع ام لا؟ ويتم هذا بمقارنة المتوسط او النسبة.

5-1- مقارنة متوسطين

نعتبر عينتين حجمهما n_1, n_2 (نفرض أن n_1, n_2 اكبر أو يساوي 30) و متوسطهما $\bar{x}_1$, $\bar{x}_2$ على التوالي. لمعرفة هل العينتين مسحوبتان من نفس المجتمع، أي هل هناك تجانس بين العينتين أم لا؟ نقوم بمقارنة المتوسط و هذا باختبار الفرضية:

$$H0: \mu_1 = \mu_2$$
$$H1: \mu_1 \neq \mu_2$$

الفرضية $H0$ تدل على انه لا يوجد فرق معنوي بين المتوسطين μ_1, μ_2 اللذان يمثلان متوسط المجتمعان اللذان سحبت منهما العينتين، إذن يمكننا أن نستنتج أن العينتين مسحوبتان من نفس المجتمع.

نحسب الإحصائية: (3.4)

$$z_0 = \frac{\bar{x}_1 - \bar{x}_2}{\sqrt{\frac{s_1^2}{n_1} + \frac{s_2^2}{n_2}}}$$

حيث s_1^2, s_2^2 تباين العينتين.

تعتبر z_0 القيمة الفعلية لمتغيرة عشوائية لها توزيع طبيعي معياري *N(0 ,1)*.

بعد تعيين القيم الجدولية $z_{1-\frac{\alpha}{2}}$ نطبق قاعدة القرار التالية:

إذا كانت $-z_{1-\frac{\alpha}{2}} < z_0 < z_{1-\frac{\alpha}{2}}$ تقبل $H0$، أي لا يوجد فرق معنوي بين المتوسطين و نستنتج أن العينتين متجانستين.

إذا كانت $z_0 \geq z_{1-\frac{\alpha}{2}}$ أو $z_0 \leq z_{1-\frac{\alpha}{2}}$ ترفض $H0$، أي العينتين غير متجانستين.

مثال5

لمعرفة هل هناك فرق بين طول (بالسنتيمتر) شجيرات حديثة النشأة في منطقتين مختلفتين، تمت معاينة مجموعتين فكانت النتائج كما يلي:

$$n_1 = 120, \bar{x}_1 = 62{,}7, s_1 = 2{,}5$$
$$n_2 = 150, \bar{x}_2 = 61{,}8, s_2 = 2{,}62$$

من اجل هذا نضع الفرضيات: $H0: \mu_1 = \mu_2$ ، $H1: \mu_1 \neq \mu_2$ أو $H0: \mu_1 - \mu_2 = 0$ ، $H1: \mu_1 - \mu_2 \neq 0$

باستعمال المعطيات نحسب

$$z_0 = \frac{\bar{x}_1 - \bar{x}_2}{\sqrt{\frac{s_1^2}{n_1} + \frac{s_2^2}{n_2}}} = \frac{62,7 - 61,8}{\sqrt{\frac{2,5^2}{120} + \frac{2,62^2}{150}}} = 2,9$$

من اجل مستوى معنوية $\alpha = 1\%$ لدينا $z_{1-\frac{\alpha}{2}} = 2,58$

بما أن $z_0 \geq z_{1-\frac{\alpha}{2}}$ إذن ترفض $H0$ ومنه يوجد فرق حقيقي و ليس راجع للصدفة.

ملاحظة 1

إذا كان $n_1<30$ و $n_2<30$ فان (4.4)

$$z_0 = \frac{\bar{x}_1 - \bar{x}_2}{S\sqrt{\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}}}$$

حيث

$$S = \frac{n_1 s_1^2 + n_2 s_2^2}{n_1 + n_2 - 2}$$

في هذه الحالة z_0 تتبع توزيع ستيودنت بدرجة حرية (n_1+n_2-2) فتصبح قاعدة القرار كما يلي:

إذا كانت $-t_{n_1+n_2-2}(\alpha) < z_0 < t_{n_1+n_2-2}(\alpha)$ تقبل $H0$.

إذا كان $z_0 \geq t_{n_1+n_2-2}(\alpha)$ أو $z_0 \leq -t_{n_1+n_2-2}(\alpha)$ ترفض $H0$.

مثال 6

لمعرفة هل هناك فرق معنوي بين طول (بالسنتيمتر) شجيرات حديثة النشأة في منطقتين مختلفتين' تمت معاينة مجموعتين فكانت النتائج كما يلي:

$$n_1 = 21, \bar{x}_1 = 78, s_1 = 8$$

$$n_2 = 21, \bar{x}_2 = 74, s_2 = 7$$

هل يمكننا أن نقول أن العينتين متجانستين بمستوى معنوية 1%؟

الحل

للإجابة عن السؤال نقارن متوسط العينتين و هذا باختبار الفرضيات: $H0: \mu_1 = \mu_2$ ، $H1: \mu_1 \neq \mu_2$

بما أن $n_1<30$ و $n_2<30$ فان $z_0 = \frac{\bar{x}_1 - \bar{x}_2}{S\sqrt{\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}}}$ نحسب أولا $S = \frac{n_1 s_1^2 + n_2 s_2^2}{n_1 + n_2 - 2}$

بالتعويض $S = \frac{n_1 s_1^2 + n_2 s_2^2}{n_1 + n_2 - 2} = \frac{21 \times 64 + 21 \times 49}{21 + 21 - 2} = \frac{2373}{40} = 59{,}325$

$$z_0 = \frac{\bar{x}_1 - \bar{x}_2}{S\sqrt{\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}}} = \frac{78 - 74}{59{,}325\sqrt{\frac{1}{21} + \frac{1}{21}}} = 0{,}218$$

من اجل مستوى معنوية 5% لدينا $t_{40}(1\%) = 2{,}7045$

بما أن $z_0 < t_{40}(1\%)$ إذن تقبل الفرضية $H0$ ' أي الفرق الملاحظ بين العينتين راجع للصدفة و يمكن أن نقول أن العينتين متجانستين.

2-5- مقارنة نسبتين

نعتبر عينتين حجمهما n_1, n_2 (نفرض أن n_1, n_2 اكبر أو يساوي 30). لتكن p_1, p_2 نسبة الأفراد الذين يحملون صفة معينة في العينتين. نريد معرفة هل الفرق بين النسبة في العينتين راجع للصدفة أم هناك فرق حقيقي مما يؤدي إلى الاستنتاج أن العينتين من مجتمعين مختلفين. من اجل هذا نختبر الفرضيات:

$$H0: p_1 = p_2$$
$$H1: p_1 \neq p_2$$

نعتبر الإحصائية: (5.4)

$$z_0 = \frac{|p_1 - p_2|}{\sqrt{p(1-p)(\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2})}}$$

حيث $p = \frac{n_1 p_1 + n_2 p_2}{n_1 + n_2}$

بعد تعيين القيم الجدولية $z_{1-\frac{\alpha}{2}}$ نطبق قاعدة القرار التالية:

اذا كانت $z_0 < z_{1-\frac{\alpha}{2}}$ تقبل $H0$.

اذا كانت $z_0 \geq z_{1-\frac{\alpha}{2}}$ ترفض $H0$.

مثال7

نأخذ عينتين من الغنم' تتألف العينة الأولى من 100 رأس و الثانية من 300 رأس. وجد أن نسبة الأغنام من جنس ذكر في العينة الأولى هي 0,4 و في العينة الثانية 0,36 . هل يمكننا أن نقول أن العينتين متجانستين بمستوى معنوية 1%؟

الحل

للإجابة عن السؤال نقارن النسبة في العينتين و هذا باختبار الفرضيات: $H0: p_1 = p_2$ ، $H1: p_1 \neq p_2$

لدينا المعطيات التالية: $n_1 = 100;\ p_1 = 0{,}4;\ n_2 = 300;\ \ p_2 = 0{,}36$

لحساب الإحصائية: $z_0 = \dfrac{|p_1 - p_2|}{\sqrt{p(1-p)(\frac{1}{n_1}+\frac{1}{n_2})}}$ نحسب أولا: $p = \dfrac{n_1p_1 + n_2p_2}{n_1 + n_2}$

بالتعويض
$$p = \frac{n_1p_1 + n_2p_2}{n_1 + n_2} = \frac{40 + 110}{100 + 300} = 0{,}375$$

إذن
$$z_0 = \frac{|p_1 - p_2|}{\sqrt{p(1-p)(\frac{1}{n_1}+\frac{1}{n_2})}} = \frac{|0{,}4 - 0{,}36|}{\sqrt{0{,}375(1-0{,}375)(\frac{1}{100}+\frac{1}{300})}} = 0{,}72$$

من اجل مستوى معنوية 1% لدينا $z_{1-\frac{\alpha}{2}} = 2{,}58$.

بما أن $z_0 < z_{1-\frac{\alpha}{2}}$ إذن تقبل $H0$ و يمكن أن نقول أن العينتين متجانستين و يمكن ان تنحدران من نفس المجتمع.

6- اختبار التعديل

الهدف من هذا الاختبار هو معرفة هل يمكن تعديل توزيع معين بتوزيع آخر، و يسمح أيضا بمعرفة هل التوزيع الملاحظ للعينة يوافق التوزيع النظري للمجتمع. يعرف هذا الاختبار باختبار كاي مربع χ^2 .

1-6- مقارنة توزيع ملاحظ مع توزيع نظري

لإجراء هذا الاختبار نعتبر عينة حجمها n موزعة على k فئة ' ليكن o_i تكرار الفئة i حيث $o_1+o_2+o_3+...+o_k= n$.

نعرف التكرار النظري للفئة i ب: $c_i=p_i\, n$ و p_i هو احتمال أن تنتمي المشاهدة إلى الفئة i.

نتبع الخطوات التالية :

أ- صياغة الفرضية الصفرية $H0$: هناك تطابق بين التوزيع الملاحظ و التوزيع النظري.

ب- حساب الإحصائية χ^2_{cal} المعرفة كما يلي: (6.4) $\chi^2_{cal} = \sum_{i=1}^{k} \frac{(o_i - c_i)^2}{c_i}, \forall c_i \geq 5$

هذه الإحصائية تمثل المسافة بين التوزيع الملاحظ و التوزيع النظري'وتتبع توزيع كاي مربع بدرجة حرية *k-1*.

ج- من اجل مستوى معنوية محدد' نقارن قيمة الإحصائية مع القيم الجدولية و نطبق قاعدة القرار التالية:

إذا كانت $\chi^2_{cal} < \chi^2_{k-1}(\alpha)$ تقبل $H0$' أي التوزيع الملاحظ يتطابق مع التوزيع النظري.

إذا كانت $\chi^2_{cal} \geq \chi^2_{k-1}(\alpha)$ ترفض $H0$.

مثال8

النتائج النظرية لأحد الامتحانات في احد المعاهد هي كالتالي: 60% ناجحين' 25% مؤجلين و 15% راسبين.

تم امتحان 160 طالب فكانت النتائج كما يلي:75 ناجحين'53 مؤجلين و 32 راسبين.

هل النتائج المتحصل عليها تطابق النتائج النظرية؟

الحل

للإجابة على هذا السؤال نقوم باختبار الفرضية $H0$: هناك تطابق بين التوزيع الملاحظ و التوزيع النظري.

من اجل حساب الإحصائية' نعين التكرارات الملاحظة و النظرية. حسب المعطيات هناك 3 فئات: ناجح' مؤجل و راسب.

$(o_i-c_i)^2/c_i$	$(o_i-c_i)^2$	c_i	p_i	o_i	
4,593	441	96	0 ,6	75	ناجح
4,225	169	40	0,25	53	مؤجل
2,666	64	24	0,15	32	راسب
11,484			1	160	المجموع

جدول 3.4

إذن قيمة الإحصائية $\chi^2_{cal} = 11,484$

من اجل درجة حرية $2=3-1= k-1$ و مستوى معنوية $\alpha = 1\%$ لدينا $\chi^2_2(0,01) = 9,21$

نلاحظ أن $\chi^2_{cal} > \chi^2_2$ إذن ترفض الفرضية $H0$ أي التوزيع الملاحظ غير مطابق للتوزيع النظري.

6-2- مقارنة توزيع ملاحظ مع توزيع نظري معروف

في هذه الحالة نقارن التوزيع الملاحظ للعينة مع احد التوزيعات النظرية المعروفة كالتوزيع الثنائي أو بواسون أو التوزيع الطبيعي. نتع نفس خطوات اختبار كاي مربع' الاختلاف يكمن في أن الإحصائية لها توزيع كاي مربع بدرجة حرية $r-k-1$ مع r عدد المعالم المجهولة و التي تم تقديرها باستخدام معطيات العينة.

نعطي بعض القيم الممكنة ل r حسب التوزيعات التي تم ذكرها:

- التوزيع لثنائي $B(n', p)$: إذا كان p معلوم فان $r=0$ أما إذا كان مجهول فان $r=1$ و يتم تقديره ب $\hat{p} = \frac{\bar{x}}{n'}$.

- توزيع بواسون $P(\lambda)$: إذا كان λ معلوم فان $r=0$ أما إذا كان مجهول فان $r=1$ و يتم تقديره ب $\hat{\lambda} = \bar{x}$.

- التوزيع الطبيعي $N(m,\sigma^2)$: إذا كان σ^2 و m معلومان فان $r=0$, أما إذا كان احدهما مجهول فان $r=1$ و إذا كان الاثنان مجهولان فان $r=2$ و يتم تقديرهما ب: $\hat{m} = \bar{x}$ و $\hat{\sigma}^2 = \frac{n}{n-1}s^2$

نذكر أن $\bar{x}$ هو متوسط العينة و s^2 تباينها.

مثال9

تمت دراسة إحصائية على 1877 أسرة من 7 أطفال لمعرفة عدد الذكور في كل أسرة. النتائج ممثلة في الجدول أدناه أين x يمثل عدد الذكور.

هل يمكننا تعديل هذا التوزيع بالتوزيع الثنائي؟(بمستوى معنوية 5%)

الحل

للإجابة على السؤال نطبق اختبار كاي مربع’ من اجل هذا نضع الفرضية $H0$: التوزيع الملاحظ يتطابق مع التوزيع الثنائي. لحساب الإحصائية χ^2_{cal} نقوم بتعيين التكرارات النظرية : $c_i=p_i\,n$ و p_i *الاحتمال الذي سوف* يحسب بتطبيق قانون التوزيع الثنائي.

$(o_i-c_i)^2/c_i$	c_i	p_i	o_i	x_i
4,202	13,475	0 ,00718	21	0
2,140	96,62	0,0515	111	1
0,333	296,90	0,158	287	2
1,423	506,86	0,270	480	3
0,186	519,17	0,276	529	4
0,711	319 ,07	0,17	304	5
2,67	108,94	0,058	126	6
0,583	15,95	0,0085	19	7
12,248		1	1877	المجموع

جدول 4.4

ليكن X المتغير العشوائي الذي يمثل عدد الذكور في أسرة من 7 أطفال’ X يتبع التوزيع الثنائي $B(n', p)$ حيث p مجهول اذن $r=1$. يتم تقدير p ب: $\hat{p}=\frac{\bar{x}}{n'}=\frac{3,543}{7}=0,506$ مع $\bar{x}=\sum\frac{x_i o_i}{o_i}=\frac{6650}{1877}=3,543$

نستنتج $\hat{q}=1-\hat{p}=0,494$

حسب قانون التوزيع الثنائي لدينا: $P(X=x_i)=C_{n'}^{x_i}p^{x_i}q^{n'-x_i}$

نطبق هذا القانون من اجل كل قيم x_i :

$$P(X=0)=C_7^0 0{,}506^0 0{,}496^{7-0}=0{,}00718$$

$$P(X=1)=C_7^1 0{,}506^1 0{,}496^{7-1}=0{,}0515$$

$$P(X=2)=C_7^2 0{,}506^2 0{,}496^{7-2}=0{,}0158$$

$$P(X=3)=C_7^3 0{,}506^3 0{,}496^{7-3}=0{,}270$$

$$P(X=4)=C_7^4 0{,}506^4 0{,}496^{7-4}=0{,}276$$

$$P(X=5)=C_7^5 0{,}506^5 0{,}496^{7-5}=0{,}170$$

$$P(X=6)=C_7^6 0{,}506^6 0{,}496^{7-6}=0{,}058$$

$$P(X=7)=C_7^7 0{,}506^7 0{,}496^{7-7}=0{,}0085$$

نتائج حساب التكرارات النظرية ممثلة في الجدول (4.4) السابق.

نجد: $\chi^2_{cal}=\sum_{i=1}^{k}\frac{(o_i-c_i)^2}{c_i}=12{,}248$

لدينا درجة الحرية $r\text{-}k\text{-}1=8\text{-}1\text{-}1=6$ ومن اجل مستوى معنوية $\alpha=5\%$ لدينا $\chi^2_6(0{,}05)=12{,}59$

نلاحظ أن $\chi^2_{cal}<\chi^2_6(0{,}05)$ إذن تقبل الفرضية$H0$' أي التوزيع الملاحظ يتطابق مع التوزيع الثنائي $B(7,\ 0{,}506)$.

ملاحظة 2

يمكن تطبيق اختبار كاي مربع عندما تكون التكرارات النظرية c_i اكبر أو تساوي 5 أي $\forall i, c_i\geq 5$. في حالة وجود c_i اصغر من 5 نقوم بتجميع الفئات حيث يتم دمج الفئة التي لها تكرار اقل من 5 مع الفئة السابقة أو اللاحقة لها و يصبح العدد الجديد للفئات k'.

مثال 10

نعتبر البيانات الممثلة في الجدول (4.5)' هل يمكننا تعديل هذا التوزيع بالتوزيع الطبيعي؟ (بمستوى معنوية 5%)

الحل

الفئات	o_i
1.20-0.61	1
1.80-1.21	3
2.40-1.81	4
3.00-2.41	65
3.60-3.01	180
4.20-3.61	328
4.80-4.21	408
5.40-4.81	284
6.00-5.41	83
6.60-6.01	13
7.20-6.61	1
7.80-7.21	1
8.40-7.81	0
9.00-8.41	1
المجموع	1372

جدول 5.4

نلاحظ وجود تكرارات اقل من 5 لبعض الفئات' لذا نقوم بتجميع الفئات. نتائج التجميع' حساب الاحتمالات و التكرارات النظرية ممثلة في الجدول 6.4.

الفئات	o_i	p_i	c_i	$(o_i-c_i)^2 /c_i$
اقل او يساوي 2.40	8	0 ,091	12,5	1,62
3.00-2.41	65	0,0435	59,68	0,47
3.60-3.01	180	0,1368	187,96	0 ,35
4.20-3.61	328	0,2549	349 ,72	1,34
4.80-4.21	408	0,2814	386 ,08	1,24
5.40-4.81	284	0,1858	254,92	3,31
6.00-5.41	83	0,0702	96,31	1,83
اكبر او يساوي 6.01	16	0,0183	25,11	3,3
المجموع	1372	1		13 ,46

جدول 6.4

لحساب الاحتمالات اعتمادا على التوزيع الطبيعي' نحتاج لحساب الوسط الحسابي و الانحراف المعياري للبيانات السابقة.

لدينا : $m = \bar{x} = \frac{\sum x_i o_i}{\sum o_i} = 4{,}32$ و $\sigma = \sqrt{\frac{n}{n-1}}s = \sqrt{\frac{n}{n-1}\frac{\sum(x_i-\bar{x})^2 o_i}{\sum o_i}} = 0{,}81$

نطبق تحويل المتغير $Z = \frac{x-m}{\sigma}$.تحسب الاحتمالات كما يلي:

$$P\left(Z \le \frac{2{,}41-4{,}32}{0{,}81}\right) = 0{,}091$$

$$P\left(\frac{2{,}41-4{,}32}{0{,}81} \le Z \le \frac{3{,}00-4{,}32}{0{,}81}\right) = 0{,}0435$$

$$P\left(\frac{3{,}01-4{,}32}{0{,}81} \le Z \le \frac{3{,}60-4{,}32}{0{,}81}\right) = 0{,}1368$$

$$P\left(\frac{3{,}61-4{,}32}{0{,}81} \le Z \le \frac{4{,}20-4{,}32}{0{,}81}\right) = 0{,}2549$$

$$P\left(\frac{4{,}21-4{,}32}{0{,}81} \le Z \le \frac{4{,}80-4{,}32}{0{,}81}\right) = 0{,}2814$$

$$P\left(\frac{4{,}81-4{,}32}{0{,}81} \le Z \le \frac{5{,}40-4{,}32}{0{,}81}\right) = 0{,}1858$$

$$P\left(\frac{5{,}41-4{,}32}{0{,}81}\leq Z\leq\frac{6{,}00-4{,}32}{0{,}81}\right)=0{,}0702$$
$$P\left(Z\geq\frac{6{,}01-4{,}32}{0{,}81}\right)=0{,}0183$$

بعد الحساب، نجد $\chi^2_{cal}=\sum_{i=1}^{k}\frac{(o_i-c_i)^2}{c_i}=13{,}46$

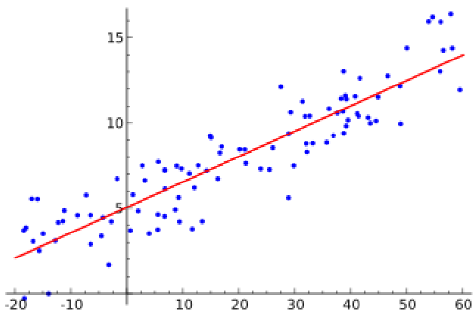
درجة الحرية $r\text{-}k\text{-}1=8\text{-}2\text{-}1=5$ ومن اجل مستوى معنوية $\alpha=5\%$ لدينا: $\chi^2_5(0{,}05)=11{,}07$

نلاحظ أن $\chi^2_{cal}>\chi^2_6(0{,}05)$ إذن ترفض الفرضية $H0$، أي التوزيع الملاحظ لا يتطابق مع التوزيع الطبيعي.

7- اختبار الارتباط

في بعض الأحيان نريد معرفة أو دراسة العلاقة الموجودة بين متغيرين كميين x و y. من اجل هذا نعتبر عينة حجمها n التي تمثل القيم $X_1,X_2,\dots,X_n$ و أخرى التي تمثل القيم $Y_1,Y_2,\dots,Y_n$.

التمثيل البياني للنقاط (X_i,Y_i) من اجل $i=1,\dots,n$ يعطي الشكل 4.4. الهدف هو إيجاد دالة التي تقارب تمثيل النقاط و تمثل العلاقة بين المتغيرين x و y.



الشكل 4.4

1-7- الارتباط الخطي البسيط

يسمح الارتباط الخطي بتمثيل العلاقة بين المتغيرين x و y بدالة خطية أي معادلة مستقيم من الشكل: $xa=y+b$.

لتعيين المعاملات b و a, نبحث عن القيم التي تصغر الفرق: $E(a,b)=\sum_{i=1}^{n}(y_i-(ax_i+b))^2$

من اجل ذلك نبحث عن النقطة التي من اجلها تنعدم المشتقة الأولى بالنسبة ل a وb.

$$\frac{\partial E(a,b)}{\partial \mathrm{a}}=0 \quad \rightarrow \hat{a}=\frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})(y_i-\bar{y})}{\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})^2} \quad (7.4)$$

$$\frac{\partial E(a,b)}{\partial \mathrm{b}}=0 \quad \rightarrow \hat{b}=\bar{y}-\hat{a}\bar{x} \quad (8.4)$$

مع: $\bar{x}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}x_i, \bar{y}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}y_i$

- معامل الارتباط

لقياس العلاقة بين المتغيرين x وy نعرف معامل الارتباط الذي يحسب بالمقدار: $r_{xy}=\frac{S_{xy}}{S_xS_y}$ (9.4)

حيث S_{yx} هو التباين المشترك للمتغيرين x وy الذي يحسب كما يلي:

$$S_{xy}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})(y_i-\bar{y}) \quad (10.4)$$

أو

$$S_{xy}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}x_iy_i-\bar{x}\,\bar{y} \quad (11.4)$$

حيث $S_{xy}\in R$ و $|r_{xy}|\leq 1$

ملاحظة 3:

إذا كان $|r_{xy}|\approx 1$ إذن هناك ارتباط قوي بين المتغيرين x وy. عمليا نعتبر $|r_{xy}|\approx 1$ عندما يكون $|r_{xy}|\geq 0{,}85$

إذا كان $|r_{xy}|=0$ إذن لا يوجد ارتباط بين المتغيرين x وy. نقول أن المتغيرين مستقلين.

إذا كان $|r_{xy}|>0$ إذن هناك ارتباط موجب بين المتغيرين x وy.

إذا كان $|r_{xy}|<0$ إذن هناك ارتباط سالب بين المتغيرين x وy.

7-2- اختبار التطابق لمعامل الارتباط

الهدف من هذا الاختبار هو مقارنة معامل الارتباط الملاحظ على مستوى العينة r_{yx} مع قيمة نظرية $r=0$ (هذا يدل على أن المتغيرين x وy مستقلين).

للقيام بالاختبار تتبع الخطوات التالية:

أ- صياغة الفرضيات :
$$H0: r_{xy} = r = 0$$
$$H1: r_{xy} \neq r$$

الفرضية $H0$ توافق ان المتغيرين x وy مستقلين لان $r_{yx}=r=0$.

ب- حساب الإحصائية T_{cal} المعرفة كما يلي:
$$T_{cal} = \frac{|r_{xy} - r|}{\sqrt{\frac{1-r_{xy}^2}{n-2}}} \qquad (12.4)$$

هذه الإحصائية تتبع توزيع ستيودنت بدرجة حرية $n-2$.

ج- من اجل مستوى معنوية محدد، نقارن قيمة الإحصائية مع القيم الجدولية و نطبق قاعدة القرار التالية:

إذا كانت $T_{cal} < t_{n-2}(\alpha)$ تقبل $H0$، أي المتغيرين x وy مستقلين.

إذا كانت $T_{cal} \geq t_{n-2}(\alpha)$ ترفض $H0$.

مثال 11

نعتبر المعطيات التالية من اجل n=12:

المجموع	12	11	10	9	8	7	6	5	4	3	2	1	x_i
78	5 ,5	5	4	4,5	3,5	4	4	3	2	2	2,5	1,5	y_i
41,5	144	121	100	81	64	49	36	25	16	9	4	1	x_i^2
650	30,25	25	16	20,25	12,25	16	16	9	4	4	6,26	2,25	y_i^2
161,25	66	55	40	40,5	28	28	24	15	8	6	5	1,5	$x_i y_i$

جدول 7.4

هل المتغيرين مرتبطين أم مستقلين؟

الحل

نختبر الفرضية: $H0: r_{xy} = r = 0$ اي المتغيرين مستقلين.
$H1: r_{xy} \neq r$

لحساب الإحصائية $T_{cal} = \frac{|r_{xy} - r|}{\sqrt{\frac{1-r_{xy}^2}{n-2}}} = \frac{|r_{xy} - 0|}{\sqrt{\frac{1-r_{xy}^2}{n-2}}}$ نحسب أولا معامل الارتباط $r_{xy} = \frac{S_{xy}}{S_x S_y}$

حيث:

$$\bar{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i = 6,5$$

$$\bar{y} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} y_i = 3,45$$

$S^2{}_x = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x^2{}_i - \bar{x}^2$ =11,916 ; $S_x = 3,45$

$$S^2{}_y = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} y^2{}_i - \bar{y}^2 = 1,535;\ S_y = 1,23$$

$$S_{xy} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i y_i - \bar{x}\,\bar{y} = 3,985 \approx 4$$

$$r_{xy} = \frac{S_{xy}}{S_x S_y} = 0,94$$

نحسب الآن الإحصائية $T_{cal} = \frac{|r_{xy} - r|}{\sqrt{\frac{1-r_{xy}^2}{n-2}}} = \frac{|r_{xy} - 0|}{\sqrt{\frac{1-r_{xy}^2}{n-2}}} = \frac{0,94}{\sqrt{\frac{1-0,94^2}{12-2}}} = 8,71$

الحسابات مبينة في الجدول 7.4.

من اجل مستوى معنوية 5% لدينا $t_{n-2}(\alpha) = 2,22$

نلاحظ أن $T_{cal} \geq t_{n-2}(\alpha)$ اذن ترفض الفرضية’ هناك فرق معنوي و نستنتج ان المتغيران مرتبطان.

من خلال قيمة معامل الارتباط $r_{yx} = 0,94$ نلاحظ ان هناك ارتباط قوي.

7-3- اختبار التجانس لمقارنة معاملين مختلفين

الهدف من هذا الاختبار هو مقارنة معاملين مختلفين لمقارنة عينتين. من اجل هذا نعتبر عينتين حجمهما n_1 و n_2 مع r_1 و r_2 معاملي الارتباط للعينتين.

مراحل الاختبار:

أ- صياغة الفرضيات :
$$H0: r_1 = r_2$$
$$H1: r_1 \neq r_2$$

الفرضية $H0$ توافق انه لا يوجد فرق معنوي بين المعاملين r_1 و r_2 مما يدل على أن العينتين متجانستين.

ب- حساب الإحصائية Z_{cal} المعرفة كما يلي:
$$Z_{cal} = \frac{|r_1 - r_2|}{\sqrt{\frac{1}{n_1-3} + \frac{1}{n_2-3}}} \qquad (13.4)$$

هذه الإحصائية تتبع التوزيع الطبيعي المعياري.

ج- من اجل مستوى معنوية محدد، نقارن قيمة الإحصائية مع القيم الجدولية و نطبق قاعدة القرار التالية:

إذا كانت $Z_{cal} < z_{1-\frac{\alpha}{2}}$ تقبل $H0$، أي لا يوجد فرق معنوي بين المعاملين.

إذا كانت $Z_{cal} \geq z_{1-\frac{\alpha}{2}}$ ترفض $H0$.

مثال 12

لتكن عينتين حيث حجم العينة الأولى $n_1 = 400$ و معامل الارتباط $r_1 = 0,2$. أما العينة الثانية فحجمها $n_2 = 625$ و معامل الارتباط $r_2 = 0,38$. هل يمكن القول ان العينتين متجانستين و هذا بمستوى معنوية 5%؟

الحل

نختبر الفرضية لا يوجد فرق معنوي بين المعاملين r_1 و r_2.

لذا نحسب الإحصائية:
$$Z_{cal} = \frac{|r_1 - r_2|}{\sqrt{\frac{1}{n_1-3} + \frac{1}{n_2-3}}} = \frac{|0,2 - 0,38|}{\sqrt{\frac{1}{397} + \frac{1}{622}}} = 43,9$$

من اجل مستوى معنوية 5%، $z_{1-\frac{\alpha}{2}} = 1,96$. بما أن $Z_{cal} \geq z_{1-\frac{\alpha}{2}}$ اذن ترفض الفرضية و منه يوجد فرق معنوي.

خاتمة

قدمنا في الفصول السابقة أهم دروس الإحصاء الاستدلالي. هذه الدروس مبرمجة في مقياس الإحصاء 3 لطلبة السنة الثانية' شعبة مالية و محاسبة و علوم التسيير. تعتبر هذه الدروس أداة تسمح للطالب من تقدير معالم المجتمع و القيام بالاختبارات الإحصائية التي تساعد في اتخاذ القرارات الاقتصادية.

الدروس مقدمة بأسلوب مختصر لان الطالب غير مطالب بالبرهنة على مختلف الصيغ المقدمة و إنما معرفة تطبيقها و استعمالها.

المطبوعة مقسمة إلى أربعة فصول' حيث الفصل الأول يعتبر كتذكير بأهم التوزيعات الاحتمالية التي سبقت دراستها في مقياس الإحصاء 2 المبرمج في السنة الأولى. كما أن هناك ملحق يلخص هذه التوزيعات و أهم خصائصها. قمنا بإدراج هذا الدرس لان هناك عدة استعمالات للتوزيعات الاحتمالية و خاصة التوزيع الطبيعي في توزيعات المعاينة و الاختبارات الإحصائية.

الفصل الثاني خاص بالمعاينة و أهم توزيعاتها. يليه الفصل الثالث الذي يشمل التقدير و مجالات الثقة. أخيرا الفصل الرابع الذي يعتبر أطول فصل و يشمل أهم الاختبارات الإحصائية. عدة أمثلة تطبيقية تأتي لتدعيم كل جزء من الدروس المقدمة.

ملحق 1 : التوزيعات الاحتمالية الأكثر استخداما

نلخص في الجدول الأول و الثاني أهم التوزيعات الاحتمالية المنقطعة و خصائصها.

التوزيع	متى يستخدم	القيم الممكنة للمتغيرة	قانون التوزيع الاحتمالي	التوقع والتباين
برنولي$X\sim B(1, p)$	تجربة واحدة (غير مكررة) تقبل نتيجتين.	$X = \{0, 1\}$	$P(X = 1) = p$, $P(X = 0) = 1 - p = q$	$\mu = p$, $\sigma^2 = pq$
الثنائي$X\sim B(n, p)$	تجارب ثنائية النتيجة، مكررة ومستقلة (p ثابت).	$X = \{0,1,2\ldots,n\}$	$P(X = x) = C^x_n\, p^x\, q^{n-x}$ $C_n^x = \frac{n!}{x!(n-x)!}$	$\mu = np$, $\sigma^2 = npq$
الهندسي الزائد **$X\sim H(N, b,p)$**	سحب بدون إرجاع. كريات من صنفين.	$X = \{0,1,2,\ldots,b\}$, $b \leq b + r = N$	$P(X = x) = \frac{C_b^x \cdot C_r^{n-x}}{C_N^n}$	$\mu = np,$ $\sigma^2 = npq\left(\frac{N-n}{N-1}\right)$ $q = r/N$ و $p = b/N$ n عدد الكريات المسحوبة Nالعدد الكلي للكريات b عدد الكريات البيضاء r ع الكريات الحمراء
الهندسي الزائد المتعدد	نفس شروط ت الهندسي الزائد مع وجود أكثر من صنفين من الكريات.	$X_i = \{0,1,2,\ldots,N_i\}$, $\Sigma x_i = n$, $\Sigma N_i = N$	$P(X_1=x_1,X_2=x_2,\ldots X_k=x_k)=$ $= \frac{C_{N1}^{x1} C_{N2}^{x2} C_{N3}^{x3} \cdots C_{Nk}^{xk}}{C_N^n}$	$E[X_i] = n\,(N_i/N) = np_i$

التوزيع	متى يستخدم	القيم الممكنة للمتغيرة	قانون التوزيع الاحتمالي	التوقع والتباين
باسكال (الثنائي السالب)	X هي عدد التجارب اللازمة للحصول على عدد r من النجاحات في تجارب برنولية مكررة.	$X = \{r, r+1, r+2, \ldots, +\infty\}$	$P(X = x) = C^{r-1}_{x-1}\, p^r\, q^{x-r}$	$\mu = r/p$, $\sigma^2 = rq/p^2$
الهندسي	X هي عدد التجارب اللازمة للحصول على النجاح الأول في تجارب برنولية مكررة.	$X = \{1,2,\ldots,+\infty\}$	$P(X = x) = q^{x-1}p$	$\mu = 1/p$, $\sigma^2 = q/p^2$
التوزيع المتعدد	هو تعميم للتوزيع الثنائي على تجربة مكررة متعددة النتائج.	$\forall i, 0 \le xi \le Ni,$ $\sum_{i=1}^{k} xi = n,$ $\sum_{i=1}^{k} Ni = N$	$P(X_1 = x_1, X_2 = x_2, \ldots, X_k = x_k) = \frac{n!}{x_1!x_2!\ldots x_k!} p_1^{x_1} p_2^{x_2} \ldots p_k^{x_k}$	$E(X_k) = np_k$ $V(X_k) = np_kq_k$
بواسون $X \sim P(\lambda)$ **$\lambda > 0$**	Xعدد النجاحات في عدد كبير جدا من التجارب البرنولية (عدد الوحدات التالفة في شحنة). أو أيضا عدد من الأحداث في فترة زمن.	$X = \{0,1,2,\ldots,+\infty\}$	$P(X = x) = \frac{\lambda^x e^{-\lambda}}{x!}$ $P(X = 0) = e^{-\lambda}$ $P(X \ge 1) = 1 - e^{-\lambda}$	$E(x) = V(x) = \lambda$

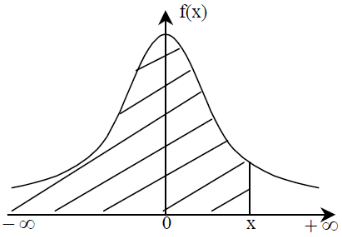
نلخص في الجدول الثالث أهم التوزيعات الاحتمالية المستمرة و خصائصها

التوزيع	دالة الكثافة	التوقع والتباين
الطبيعي المعياري X~N(0, 1)	$f(z)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-z^2/2} \qquad -\infty<z<\infty$	$\mu=0$ $\sigma^2=1$
الأسي	$f(\tau)=\begin{cases}\lambda e^{-\lambda\tau} & , \quad \tau>0\\ 0 & , \quad \tau\leq 0\end{cases}$	$\mu=1/\lambda$, $\sigma^2=1/\lambda^2$
كاي مربع χ^2_v درجة υ الحرية	$f(x)=\begin{cases}\frac{x^{(\nu/2)-1}e^{-x/2}}{2^{\nu/2}\Gamma(\nu/2)} & x>0\\ 0 & x\leq 0\end{cases}$ حيث $\Gamma(\alpha)$ هي الدالة قاما: $\Gamma(\alpha)=\int_0^\infty t^{\alpha-1}e^{-t}dt \qquad \alpha>0$	$\mu=\upsilon$, $\sigma^2=2\upsilon$
ستيودنت t_v درجة υ الحرية	$f(t)=\frac{\Gamma\left(\frac{\nu+1}{2}\right)}{\sqrt{\nu\pi}\,\Gamma\left(\frac{\nu}{2}\right)}\left(1+\frac{t^2}{\nu}\right)^{-\left(\frac{\nu+1}{2}\right)} \qquad -\infty<t<\infty$	$\mu=0$, $\sigma^2=\upsilon/(\upsilon-2)$ si $\upsilon>2$

ملحق 2 : الجداول الإحصائية

جدول التوزيع الطبيعي المعياري

الاحتمال المبين في الجدول يمثل المساحة المخططة



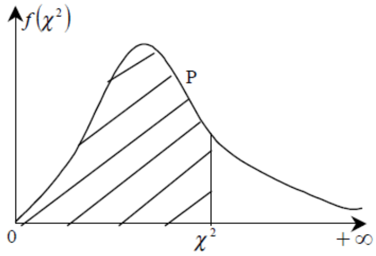
X	0,00	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06	0,07	0,08	0,09
0,0	0,5000	0,5040	0,5080	0,5120	0,5160	0,5199	0,5239	0,5279	0,5319	0,5359
0,1	0,5398	0,5438	0,5478	0,5517	0,5557	0,5596	0,5636	0,5675	0,5714	0,5753
0,2	0,5793	0,5832	0,5871	0,5910	0,5948	0,5987	0,6026	0,6064	0,6103	0,6141
0,3	0,6179	0,6217	0,6255	0,6293	0,6331	0,6368	0,6406	0,6443	0,6480	0,6517
0,4	0,6554	0,6591	0,6628	0,6664	0,6700	0,6736	0,6772	0,6808	0,6844	0,6879
0,5	0,6915	0,6950	0,6985	0,7019	0,7054	0,7088	0,7123	0,7157	0,7190	0,7224
0,6	0,7257	0,7291	0,7324	0,7357	0,7389	0,7422	0,7454	0,7486	0,7517	0,7549
0,7	0,7580	0,7611	0,7642	0,7673	0,7704	0,7734	0,7764	0,7794	0,7823	0,7852
0,8	0,7881	0,7910	0,7939	0,7967	0,7995	0,8023	0,8051	0,8078	0,8106	0,8133
0,9	0,8159	0,8186	0,8212	0,8238	0,8264	0,8289	0,8315	0,8340	0,8365	0,8389
1,0	0,8413	0,8438	0,8461	0,8485	0,8508	0,8531	0,8554	0,8577	0,8599	0,8621
1,1	0,8643	0,8665	0,8686	0,8708	0,8729	0,8749	0,8770	0,8790	0,8810	0,8830
1,2	0,8849	0,8869	0,8888	0,8907	0,8925	0,8944	0,8962	0,8980	0,8997	0,9015
1,3	0,9032	0,9049	0,9066	0,9082	0,9099	0,9115	0,9131	0,9147	0,9162	0,9177
1,4	0,9192	0,9207	0,9222	0,9236	0,9251	0,9265	0,9279	0,9292	0,9306	0,9319
1,5	0,9332	0,9345	0,9357	0,9370	0,9382	0,9394	0,9406	0,9418	0,9429	0,9441
1,6	0,9452	0,9463	0,9474	0,9484	0,9495	0,9505	0,9515	0,9525	0,9535	0,9545
1,7	0,9554	0,9564	0,9573	0,9582	0,9591	0,9599	0,9608	0,9616	0,9625	0,9633
1,8	0,9641	0,9649	0,9656	0,9664	0,9671	0,9678	0,9686	0,9693	0,9699	0,9706
1,9	0,9713	0,9719	0,9726	0,9732	0,9738	0,9744	0,9750	0,9756	0,9761	0,9767
2,0	0,9772	0,9778	0,9783	0,9788	0,9793	0,9798	0,9803	0,9808	0,9812	0,9817
2,1	0,9821	0,9826	0,9830	0,9834	0,9838	0,9842	0,9846	0,9850	0,9854	0,9857
2,2	0,9861	0,9864	0,9868	0,9871	0,9875	0,9878	0,9881	0,9884	0,9887	0,9890
2,3	0,9893	0,9896	0,9898	0,9901	0,9904	0,9906	0,9909	0,9911	0,9913	0,9916
2,4	0,9918	0,9920	0,9922	0,9925	0,9927	0,9929	0,9931	0,9932	0,9934	0,9936
2,5	0,9938	0,9940	0,9941	0,9943	0,9945	0,9946	0,9948	0,9949	0,9951	0,9952
2,6	0,9953	0,9955	0,9956	0,9957	0,9959	0,9960	0,9961	0,9962	0,9963	0,9964
2,7	0,9965	0,9966	0,9967	0,9968	0,9969	0,9970	0,9971	0,9972	0,9973	0,9974
2,8	0,9974	0,9975	0,9976	0,9977	0,9977	0,9978	0,9979	0,9979	0,9980	0,9981
2,9	0,9981	0,9982	0,9982	0,9983	0,9984	0,9984	0,9985	0,9985	0,9986	0,9986
3,0	0,9987	0,9987	0,9987	0,9988	0,9988	0,9989	0,9989	0,9989	0,9990	0,9990
3,1	0,9990	0,9991	0,9991	0,9991	0,9992	0,9992	0,9992	0,9992	0,9993	0,9993
3,2	0,9993	0,9993	0,9994	0,9994	0,9994	0,9994	0,9994	0,9995	0,9995	0,9995
3,3	0,9995	0,9995	0,9995	0,9996	0,9996	0,9996	0,9996	0,9996	0,9996	0,9997
3,4	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9998
3,5	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998

من اجل القيم الكبرى ل x

x	3	3,2	3,4	3,6	3,8	4	4,2	4,4	4,6	4,8
F(x)	0,99865003	0,99931280	0,99966302	0,99984085	0,99992763	0,99996831	0,99998665	0,99999458	0,99999789	0,99999921

جدول توزيع كاي مربع

القيم المبينة في الجدول هي قيم χ^2 على المحور الافقي

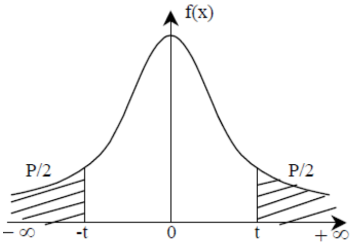


ddl/P	0,5%	1,0%	2,5%	5,0%	10,0%	50,0%	90,0%	95,0%	97,5%	99,0%	99,5%
1	0,000	0,000	0,001	0,004	0,016	0,455	2,706	3,841	5,024	6,635	7,879
2	0,010	0,020	0,051	0,103	0,211	1,386	4,605	5,991	7,378	9,210	10,597
3	0,072	0,115	0,216	0,352	0,584	2,366	6,251	7,815	9,348	11,345	12,838
4	0,207	0,297	0,484	0,711	1,064	3,357	7,779	9,488	11,143	13,277	14,860
5	0,412	0,554	0,831	1,145	1,610	4,351	9,236	11,070	12,832	15,086	16,750
6	0,676	0,872	1,237	1,635	2,204	5,348	10,645	12,592	14,449	16,812	18,548
7	0,989	1,239	1,690	2,167	2,833	6,346	12,017	14,067	16,013	18,475	20,278
8	1,344	1,647	2,180	2,733	3,490	7,344	13,362	15,507	17,535	20,090	21,955
9	1,735	2,088	2,700	3,325	4,168	8,343	14,684	16,919	19,023	21,666	23,589
10	2,156	2,558	3,247	3,940	4,865	9,342	15,987	18,307	20,483	23,209	25,188
11	2,603	3,053	3,816	4,575	5,578	10,341	17,275	19,675	21,920	24,725	26,757
12	3,074	3,571	4,404	5,226	6,304	11,340	18,549	21,026	23,337	26,217	28,300
13	3,565	4,107	5,009	5,892	7,041	12,340	19,812	22,362	24,736	27,688	29,819
14	4,075	4,660	5,629	6,571	7,790	13,339	21,064	23,685	26,119	29,141	31,319
15	4,601	5,229	6,262	7,261	8,547	14,339	22,307	24,996	27,488	30,578	32,801
16	5,142	5,812	6,908	7,962	9,312	15,338	23,542	26,296	28,845	32,000	34,267
17	5,697	6,408	7,564	8,672	10,085	16,338	24,769	27,587	30,191	33,409	35,718
18	6,265	7,015	8,231	9,390	10,865	17,338	25,989	28,869	31,526	34,805	37,156
19	6,844	7,633	8,907	10,117	11,651	18,338	27,204	30,144	32,852	36,191	38,582
20	7,434	8,260	9,591	10,851	12,443	19,337	28,412	31,410	34,170	37,566	39,997
21	8,034	8,897	10,283	11,591	13,240	20,337	29,615	32,671	35,479	38,932	41,401
22	8,643	9,542	10,982	12,338	14,041	21,337	30,813	33,924	36,781	40,289	42,796
23	9,260	10,196	11,689	13,091	14,848	22,337	32,007	35,172	38,076	41,638	44,181
24	9,886	10,856	12,401	13,848	15,659	23,337	33,196	36,415	39,364	42,980	45,558
25	10,520	11,524	13,120	14,611	16,473	24,337	34,382	37,652	40,646	44,314	46,928
26	11,160	12,198	13,844	15,379	17,292	25,336	35,563	38,885	41,923	45,642	48,290
27	11,808	12,878	14,573	16,151	18,114	26,336	36,741	40,113	43,195	46,963	49,645
28	12,461	13,565	15,308	16,928	18,939	27,336	37,916	41,337	44,461	48,278	50,994
29	13,121	14,256	16,047	17,708	19,768	28,336	39,087	42,557	45,722	49,588	52,335
30	13,787	14,953	16,791	18,493	20,599	29,336	40,256	43,773	46,979	50,892	53,672
31	14,458	15,655	17,539	19,281	21,434	30,336	41,422	44,985	48,232	52,191	55,002
32	15,134	16,362	18,291	20,072	22,271	31,336	42,585	46,194	49,480	53,486	56,328
33	15,815	17,073	19,047	20,867	23,110	32,336	43,745	47,400	50,725	54,775	57,648
34	16,501	17,789	19,806	21,664	23,952	33,336	44,903	48,602	51,966	56,061	58,964
35	17,192	18,509	20,569	22,465	24,797	34,336	46,059	49,802	53,203	57,342	60,275

ldd هو درجة الحرية.

جدول توزيع ستيودنت

القيم المبينة في الجدول هي قيم t على المحور الافقي



ν \P	90%	80%	70%	60%	50%	40%	30%	20%	10%	5%	1%
1	0,1584	0,3249	0,5095	0,7265	1,0000	1,3764	1,9626	3,0777	6,3137	12,7062	63,6559
2	0,1421	0,2887	0,4447	0,6172	0,8165	1,0607	1,3862	1,8856	2,9200	4,3027	9,9250
3	0,1366	0,2767	0,4242	0,5844	0,7649	0,9785	1,2498	1,6377	2,3534	3,1824	5,8408
4	0,1338	0,2707	0,4142	0,5686	0,7407	0,9410	1,1896	1,5332	2,1318	2,7765	4,6041
5	0,1322	0,2672	0,4082	0,5594	0,7267	0,9195	1,1558	1,4759	2,0150	2,5706	4,0321
6	0,1311	0,2648	0,4043	0,5534	0,7176	0,9057	1,1342	1,4398	1,9432	2,4469	3,7074
7	0,1303	0,2632	0,4015	0,5491	0,7111	0,8960	1,1192	1,4149	1,8946	2,3646	3,4995
8	0,1297	0,2619	0,3995	0,5459	0,7064	0,8889	1,1081	1,3968	1,8595	2,3060	3,3554
9	0,1293	0,2610	0,3979	0,5435	0,7027	0,8834	1,0997	1,3830	1,8331	2,2622	3,2498
10	0,1289	0,2602	0,3966	0,5415	0,6998	0,8791	1,0931	1,3722	1,8125	2,2281	3,1693
11	0,1286	0,2596	0,3956	0,5399	0,6974	0,8755	1,0877	1,3634	1,7959	2,2010	3,1058
12	0,1283	0,2590	0,3947	0,5386	0,6955	0,8726	1,0832	1,3562	1,7823	2,1788	3,0545
13	0,1281	0,2586	0,3940	0,5375	0,6938	0,8702	1,0795	1,3502	1,7709	2,1604	3,0123
14	0,1280	0,2582	0,3933	0,5366	0,6924	0,8681	1,0763	1,3450	1,7613	2,1448	2,9768
15	0,1278	0,2579	0,3928	0,5357	0,6912	0,8662	1,0735	1,3406	1,7531	2,1315	2,9467
16	0,1277	0,2576	0,3923	0,5350	0,6901	0,8647	1,0711	1,3368	1,7459	2,1199	2,9208
17	0,1276	0,2573	0,3919	0,5344	0,6892	0,8633	1,0690	1,3334	1,7396	2,1098	2,8982
18	0,1274	0,2571	0,3915	0,5338	0,6884	0,8620	1,0672	1,3304	1,7341	2,1009	2,8784
19	0,1274	0,2569	0,3912	0,5333	0,6876	0,8610	1,0655	1,3277	1,7291	2,0930	2,8609
20	0,1273	0,2567	0,3909	0,5329	0,6870	0,8600	1,0640	1,3253	1,7247	2,0860	2,8453
21	0,1272	0,2566	0,3906	0,5325	0,6864	0,8591	1,0627	1,3232	1,7207	2,0796	2,8314
22	0,1271	0,2564	0,3904	0,5321	0,6858	0,8583	1,0614	1,3212	1,7171	2,0739	2,8188
23	0,1271	0,2563	0,3902	0,5317	0,6853	0,8575	1,0603	1,3195	1,7139	2,0687	2,8073
24	0,1270	0,2562	0,3900	0,5314	0,6848	0,8569	1,0593	1,3178	1,7109	2,0639	2,7970
25	0,1269	0,2561	0,3898	0,5312	0,6844	0,8562	1,0584	1,3163	1,7081	2,0595	2,7874
26	0,1269	0,2560	0,3896	0,5309	0,6840	0,8557	1,0575	1,3150	1,7056	2,0555	2,7787
27	0,1268	0,2559	0,3894	0,5306	0,6837	0,8551	1,0567	1,3137	1,7033	2,0518	2,7707
28	0,1268	0,2558	0,3893	0,5304	0,6834	0,8546	1,0560	1,3125	1,7011	2,0484	2,7633
29	0,1268	0,2557	0,3892	0,5302	0,6830	0,8542	1,0553	1,3114	1,6991	2,0452	2,7564
30	0,1267	0,2556	0,3890	0,5300	0,6828	0,8538	1,0547	1,3104	1,6973	2,0423	2,7500
40	0,1265	0,2550	0,3881	0,5286	0,6807	0,8507	1,0500	1,3031	1,6839	2,0211	2,7045
50	0,1263	0,2547	0,3875	0,5278	0,6794	0,8489	1,0473	1,2987	1,6759	2,0086	2,6778
60	0,1262	0,2545	0,3872	0,5272	0,6786	0,8477	1,0455	1,2958	1,6706	2,0003	2,6603
80	0,1261	0,2542	0,3867	0,5265	0,6776	0,8461	1,0432	1,2922	1,6641	1,9901	2,6387
100	0,1260	0,2540	0,3864	0,5261	0,6770	0,8452	1,0418	1,2901	1,6602	1,9840	2,6259
120	0,1259	0,2539	0,3862	0,5258	0,6765	0,8446	1,0409	1,2886	1,6576	1,9799	2,6174
200	0,1258	0,2537	0,3859	0,5252	0,6757	0,8434	1,0391	1,2858	1,6525	1,9719	2,6006
∞	0,1257	0,2533	0,3853	0,5244	0,6745	0,8416	1,0364	1,2816	1,6449	1,9600	2,5758

المراجع

1- السعدي رجال' نظرية الاحتمالات: دروس و تمارين محلولة' الجزء الثاني' ديوان المطبوعات الجامعية' 2006.

2- بوعبد الله صالح' محاضرات الإحصاء الرياضي لطلبة كلية العلوم الاقتصادية' مطبوعة جامعية 2005- 2006

3- عبد القادر حليمي' مدخل إلى الإحصاء' ديوان المطبوعات الجامعية' 2009.

4- معتوق احمد' الإحصاء الرياضي و النماذج الإحصائية' ديوان المطبوعات الجامعية' 2007.

5- جلال الصياد' عبد الحميد محمد ربيع' مبادئ الطرق الاحصائية' الكتاب الجامعي' الطبعة الاولى 1983 ' المملكة العربية السعودية.

6- Murray R. Spiegel, Théorie et application de la statistique, Série Schaum, 1991.

7- Verlant Bernard, Statistiques & Probabilités, 2008.

8- Grais Bernard, Méthodes statistiques, Dunod, 1981.

9- Jean Christophe Breton, Statistiques, Université de la Rochelle, 2008.

10- Mathieu Gentes, Cours de probabilités et statistiques, Tome 2, IUT d'Orsay, 2010.

11-I. Gannaz, Introduction à la statistique, INSA de Lyon, 2008.