جامعة الجزائر 3

كلية العلوم الاقتصادية والعلوم التجارية وعلوم التسيير

مطبوعة

الرياضيات لطلاب السنة الأولى

فرع العلوم الاقتصادية والعلوم التجارية وعلوم التسيير

رياضيات Maths I

السنة أولى L.M.D

رئيس المجلس العلمي

أ.د. باشي أحمد

من إعداد الأستاذ:

محمدي عز الدين

السنة الجامعية: 2017-2018

مقـــــــدمة

تضع بين يدي الطالب الكريم (بجامعة الجزائر3) الطبعة الأولى من مطبوعة الرياضيات الخاصة بالطور الأول من تخصصات العلوم الإقتصادية، بهدف اكتساب العديد من الأدوات والتقنيات في تناول المواضيع المطروقة في مقياس الرياضيات 1، من خلال أمثلة وتمارين متنوعة وهادفة، لأنه غالبا ما تكون مثل هذه التمارين والأمثلة، غير متاحة في حصص المحاضرات والأعمال التوجيهية.

ومطبوعتنا تتجاوز كونها تخص مقياس الرياضيات 1 إلى تناول مجموعة مكتملة من القضايا ذات الصلة ببرنامج المقياس، مثل مقياس الإحصاء، الإقتصاد الجزائي، الإقتصاد الكلي، بحوث العمليات، مقياس الإقتصاد القياسي إلى غيرها من المقاييس ذات الصلة ولعلها تكون حافزا للتوسع فيها.

كما أن الواجب يدعونا بالتوجه إلى كل من ساعدنا في هذا العمل، ونخص بالذكر إدارة الجامعة، ومجلسها العلمي وهيئة تدريسها.

وأرجو في الختام أن يجد الطالب الكريم ما يحتاجه ويساعده في فهم مقرره" رياضيات 1"، ويتيح له أيضا سد الثغرات، ولا يمكن التسليم بقيمة مطبوعتنا إلا بعد تداولها وذلك ما ننتظره.

المحتويات

تمهيد.......................................أ
مقدمة.......................................ب
فهرس المحتويات ....ج
الفصل الأول: المتتاليات والسلاسل.......................................01
المتتاليات العددية : 02
1. تعريف المتتالية العددية.......................................02
2. متتاليات رتيبة.......................................02
3. الحواد.......................................03
4. نهاية متتالية 04
5. متتاليات مستخرجة 06
6. متتاليات متجاورة.......................................06
7. متتالية تدريجية 07
8. تمارين محلولة.......................................08
السلاسل العددية : 22
1. مفهوم السلسلة العددية 22
2. تقارب سلسلة 22
3. اختبارات تقارب السلاسل.......................................23
4. التقارب المطلق.......................................25
5. سلاسل هندسية.......................................25
6. السلسلة الصحيحة ونصف تقاربها 26
7. تمرين محلول.......................................26
8. تمارين.......................................27

الفصل الثاني: الدوال العددية **31**

1. عموميات حول الدوال العددية 32

2. النهاية 34

3. الاستمرار 35

4. الاشتقاق 36

5. الدوال القابلة للاشتقاق 40

6. الدالة العكسية 45

7. تطبيقات المشتقات 48

8. الدوال اللوغاريتمية والأسية 54

9. تمارين 56

الفصل الثالث: الدوال الدائرية والزائدية وعكسها **73**

الدوال الدائرية العكسية : 74

1. الدالة arcsin 74

2. الدالة arccos 75

3. الدالة arctan 77

4. دراسة وتمثيل بعض الدوال العكسية 80

5. الدوال القطعية الزائدية 84

6. الدوال القطعية الزائدية العكسية 86

7. تمارين 89

الفصل الرابع: التكامل وبعض طرق حسابه **91**

1. مفاهيم عامة حول التكامل 92

2. بعض طرق حساب التكامل 94

3. توسيع مفهوم التكامل 98

4. تمارين محلولة 99

5. تمارين.. 101

الفصل الخامس: المشتقات المتتالية والنشر المحدود.. 104

1. المشتقات المتتالية وتعميم نظرية التزايدات المنتهية 105

2. مفهوم الصنف.. 106

3. نظرية تايلور 108

4. النشر المحدود بجوار الصفر.. 110

5. بعض تطبيقات النشر المحدود 111

6. تمارين محلولة 116

7. وضعية منحنى دالة بالنسبة لخطوط 121

8. النشر المحدود بجوار المالانهاية 123

9. تمارين.. 125

الفصل الخامس: المعادلات التفاضلية.. 128

1. معادلات تفاضلية من الرتب الأولى والثانية 129

2. دراسة المعادلات التفاضلية من الرتب الأولى والثانية 130

3. حل بعض المعادلات التفاضلية.. 132

4. معادلات تفاضلية خطية من الرتبة الأولى 137

5. معادلات تفاضلية خطية من الرتبة الثانية.. 141

6. تمارين.. 144

قائمة المراجع 147

الفصل الأول

المتتاليات والسلاسل

- المتتالية العددية
- متتاليات متقاربة
- متتاليات تدريجية
- سلاسل متقاربة
- اختبارات تقارب السلاسل
- سلاسل هندسية
- تمارين

المتتاليات

1. تعريف المتتالية العددية

نسمي متتالية منتهية بـــ p حد، كل دالة عددية معرفة على الأعـــداد الطبيعيـــة الأولى $n=1,2,...,p$ ، وإذا كانت هذه الدالة معرفة على كل الأعداد الطبيعية، نقول عن المتتالية المرفقة بأنها غير منتهية.

نستخدم الرمز $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ لتمثيل المتتالية (غير المنتهية) $u_1,u_2,\cdots,u_n,\cdots$ أو (u_n).

u_n: قيمة الحد من الرتبة n.

2. متتاليات رتيبة

- (u_n) متزايدة $\Leftrightarrow$ $\forall n\ ,\ u_{n+1}\geq u_n$
- (u_n) متزايدة تماما $\Leftrightarrow$ $\forall n\ ,\ u_{n+1}>u_n$
- (u_n) ثابتة $\Leftrightarrow$ $\forall n\ ,\ u_{n+1}=u_n$
- (u_n) رتيبة $\Leftrightarrow$ (u_n) متناقصة أو متزايدة.

1.2 متتاليات حسابية وهندسية

متتالية حسابية: (u_n) متتالية حسابية إذا تحقق $\forall n\in\mathbb{N},\ \ u_{n+1}=u_n+r$.

الحد العام: $u_n=u_0+r\cdot n$

مجموع الحدود الأولى: $S_n=(n+1)\cdot\dfrac{u_0+u_n}{2}$

متتالية هندسية: (u_n) متتالية هندسية إذا تحقق $\forall n\in\mathbb{N},\ \ u_{n+1}=q\cdot u_n$

الحد العام: $u_n=u_0\times q^n$

إذا كان $q=0$ ، فإن u_n يكون معدوما؛ ربما ليس كذلك من أجل $n=0$.

إذا كان $q=1$. تكون كل الحدود متساوية .

مجموع الحدود الأولى: $S_n=u_0\cdot\dfrac{1-q^{n+1}}{1-q}$.

3. الحواد

1.3 تعاريف

لتكن A جزء من $\mathbb{R}$. نقول عن $M \in \mathbb{R}$ أنه حاد من الأعلى لـــ A (A محدودة من الأعلى)، إذا تحقق

$$\forall x \in A\ ,\quad x \leq M$$

ونقول عن $m \in \mathbb{R}$ أنه حاد من الأدنى لـــ A (A محدودة من الأدنى)، إذا تحقق

$$\forall x \in A\ ,\quad x \geq m$$

وإذا كان M حاد من الأعلى لـــ A بحيث $M \in A$ فإن M يُسمى العنصر الأعظمي لـــ A.

ونرمز له بالرمز $\max(A)$

وإذا كان m حاد من الأدنى لـــ A بحيث $m \in A$ فإن m يُسمى العنصر الأصغري لـــ A.

ونرمز له بالرمز $\min(A)$

ملاحظة : العنصر الأعظمي (أو الأصغري) إن وُجد فهو وحيد.

مثلا المجموعة $A =]1,2[\cup \{3\}$ محدودة.

2.3 الحد الأعلى والحد الأدنى

لتكن A جزء من $\mathbb{R}$.

نقول عن μ أنه حد أعلى لـــ A، ونكتب $\mu = \sup(A)$، إذا تحقق

$$\forall x \in A\ ,\quad x \leq \mu\ ,\ \forall \varepsilon > 0\ ,\exists a \in A\ ,\ \mu - \varepsilon < a$$

بمعنى أن μ هو حاد من الأعلى لـــ A، وكل عدد حقيقي أصغر تماما من μ بالشكل $\mu-\varepsilon$، مع $\varepsilon > 0$ لن يكون حادا من الأعلى لـــ A.

تعريف مشابه للحد الأدنى.

خواص

إذا وُجد $\max(A)$، فإن $\sup(A) = \max(A)$

إذا كان $\sup(A) \in A$، فإن $\max(A)$ موجود و $\sup(A) = \max(A)$

نقبل النتيجة : كل مجموعة محدودة وغير خالية من $\mathbb{R}$ تقبل حدا أعلى.

3.3 متتاليات محدودة

يكون العدد M **حاد من الأعلى** للمتتالية (u_n)، عندما يتحقق $u_n \leq M$ من أجل كل u، ويسمى **أصغر** الحواد العليا **بالحد الأعلى** للمتتالية. وعندئذ نقول عن المتتالية (u_n) بأنها محدودة من الأعلى.

وإذا وجدت أكبر قيمة لـــ u_n تساوي a (الحد الأعلى)، فإن هذه القيمة هي ذروة المتتالية.

تعريف مشابه يخص المحدودية من الأدنى.

ملاحظة

تكون المتتالية (u_n) **محدودة**، إذا كانت محدودة من الأعلى ومن الأدنى. أي إذا وجد عدد C حيث

$$\forall n, \ \left|u_n\right| \leq C$$

أمثلة

- $\left(\frac{1}{n}\right)$: محدودة بــ 0 و1 .
- $u_n = 2-n \quad (n \in \mathbb{N}^*)$: حدها الأعلى 1، لكنها ليست محدودة من الأدنى.

4. نهاية متتالية

يكون العدد ℓ نهاية للمتتالية (u_n)، ونكتب $\lim u_n = \ell$ أو $u_n \to \ell$؛ عندما يكون، من أجل كـــل عـــدد $\varepsilon > 0$، يوجد n، بحيث يكون لدينا ابتداء من هذه المرتبة: $\ell - \varepsilon < u_n < \ell + \varepsilon$.

أو بعبارة أخرى إذا كان من أجل كل عدد $\varepsilon > 0$، تكون كل حدود المتتالية (u_n) باستثناء عدد منته منـــها تحقق المتراجحتين $\ell - \varepsilon < u_n < \ell + \varepsilon$، أو تحقق $\left|u_n - \ell\right| < \varepsilon$.

– عندما تقبل متتالية نهاية نقول عنها بأنها **متقاربة**، وتكون **متباعدة** بخلاف ذلك.

– مثلا في المتتالية $\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)_{n \in \mathbb{N}^*} \to 0$، إذا رمزنا بـــ n للمرتبة الأولى الأكبر من $\frac{1}{\varepsilon^2}$، فإنه يكون لدينا ابتداء من هذه المرتبة $\frac{1}{n} < \varepsilon^2$ وبالتالي $-\varepsilon < u_n < +\varepsilon$ والمتتالية متقاربة نحو الصفر.

1.4 متتاليات متقاربة

- كل متتالية تقبل نهاية واحدة على الأكثر.
- كل متتالية متزايدة ومحدودة من الأعلى تكون متقاربة.
- إذا كانت (u_n) و (v_n) متقاربتين، وكان $v_n < u_n$ من أجل كل n، فإن $\lim v_n < \lim u_n$.
- إذا كانت (u_n) و (v_n) متقاربتين، فإن $\lim(u_n - v_n) = 0 \iff \lim u_n = \lim v_n$

- كل متتالية متقاربة تكون محدودة.
- كل متتالية متزايدة وغير محدودة من الأعلى تكون متباعدة نحو $+\infty$.
- إذا كانت متتالية (u_n) محدودة و (v_n) متقاربة نحو 0، فإن المتتالية $(u_n \cdot v_n)$ تكون متقاربة نحو 0
- إذا حققت متتالية (u_n) الشرط الآتي :

$$\forall h>0,\ \exists k\in\mathbb{N},\ p>k\ \wedge\ q>k\ \Rightarrow\ |u_p-u_q|<h$$

تكون متقاربة.

- إذا لم تنعدم متتاليتان (u_n) و (v_n)، فإنهما تكونان متكافئتين إذا تحقق $\lim \frac{v_n}{u_n}=1$ ، وعندئذ يكون لهما نفس النهاية.

2.4 عمليات على المتتاليات المتقاربة

إذا تقاربت متتاليتان (u_n) و (u'_n) نحو ℓ و ℓ' على الرتيب، فإنه يكون لدينا:

$$\ell\pm\ell' \leftarrow u_n \pm v_n$$
$$\ell.\ell' \leftarrow u_n \cdot v_n$$
$$(\ell'\neq 0) \qquad \frac{\ell}{\ell'} \leftarrow \frac{u_n}{v_n}$$

ملاحظة تؤول المتتالية (u_n) نحو النهاية $+\infty$ إذا تحقق: $\forall h>0,\ \exists k\in\mathbb{N},\ n>k\ \Rightarrow\ u_n>h$

3.4 تمرين محلول

نعتبر المتتالية ذات الحد العام: $v_n=\frac{1}{n!}$ $\qquad (\mathbb{N}\ni n)$.

1. أحسب $\frac{v_{n+1}}{v_n}$ وأثبت أن المتتالية (v_n) متناقصة مهما كان $\mathbb{N}\ni n$.
2. أثبت أنه من أجل كل $1\le n$ يكون $\frac{v_{n+1}}{v_n}\le\frac{1}{2}$.
3. استنتج أن $v_n\le\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$ ، $\forall\ 1\le n$. ماذا نقول عن المتتالية (v_n) والسلسلة $\sum v_n$ ؟

الحل

1. حساب $\frac{v_{n+1}}{v_n}$ والمتتالية (v_n)

لدينا : $\frac{v_{n+1}}{v_n}=\frac{1}{n+1}\le 1$ $\quad \forall n\in\mathbb{N}$. ومنه المتتالية ذات الحدود الموجبة (v_n)، متناقصة .

2. نثبت أنه من أجل كل $1 \leq n$ يكون $\frac{v_{n+1}}{v_n} \leq \frac{1}{2}$.

إذا كان $1 \leq n$ فإن $2 \leq n+1$ ، وبما أن $\frac{v_{n+1}}{v_n} = \frac{1}{n+1}$، فإن $\frac{v_{n+1}}{v_n} \leq \frac{1}{2}$ مهما كان $1 \leq n$.

3. المتتالية (v_n) والسلسلة $\sum v_n$

لنثبت صحة الخاصية P_n : $0 \leq v_n \leq \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$ من أجل كل $1 \leq n$.

لدينا P_1 صحيحة. إذا انتقلنا إلى القيمة $1 \leq n$ ، فسيكون لدينا $0 \leq v_{n+1} \leq \left(\frac{1}{2}\right)^{n}$، أي أن P_n مهما كان $1 \leq n$.

إذن لدينا $$\forall n \geq 1, \quad 0 \leq v_n \leq \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$$

بالمرور على النهاية لما $n \to \infty$، نستنتج أن $\lim\limits_{n \nearrow +\infty} v_n = 0$

5. متتاليات مستخرجة

نعتبر المتتالية $u_1, u_2, \cdots, u_n, \cdots$. لنستخرج الحد u_{n_1} ذي الرتبة n_1، ثم الحد الثاني u_{n_2} الذي مرتبته $n_1 < n_2$، وهكذا مع بقية الحدود؛ وبذلك نحصل على المتتالية المستخرجة (غير المنتهية):

$$v_1 = u_{n_1},\ v_2 = u_{n_2}, \ldots, v_n = u_n, \ldots$$

مثلا: المتتالية $1,3,5,\ldots$ مستخرجة من المتتالية $1,2,3,\ldots$

- في كل متتالية محدودة، يمكن استخراج متتالية جزئية متقاربة.
- في كل متتالية عددية، توجد متتالية مستخرجة تكون إما متزايدة، وإما متناقصة، وإما ثابتة.
- إذا آلت متتالية إلى نهاية معلومة، فإن أية متتالية مستخرجة منها ستؤول إلى نفس النهاية.

مثلا: تؤول المتتاليات $\left(\frac{1}{n}\right)$ و $\left(\frac{1}{2n}\right)$ و $\left(\frac{1}{3n}\right)$ إلى نفس النهاية، وهي الصفر.

6. متتاليات متجاورة

تكون المتتاليتان (u_n) و (v_n) متجاورتين إذا تحقق ما يلي:

- (u_n) متزايدة و (v_n) متناقصة؛ أو بالعكس،
- $\forall n \quad u_n \leq v_n \Rightarrow u_n \leq u_{n+1} \leq v_{n+1} \leq v_n$،
- $\lim (u_n - v_n) = 0$.

وعندئذ تتقارب المتتاليتين (u_n) و (v_n) نحو نفس النهاية.

7. متتاليات تدريجية

f دالة عددية، نستطيع تعريف المتتالية (u_n) بإعطاء حدها الأول u_0 وعلاقة التدريج $u_n = f(u_{n-1})$

لدراسة هذا النمط من المتتاليات، ندرس تغيرات f، ونحدد المجال I الذي يحوي جميع حدود المتتالية (u_n).

- إذا كانت الدالة f متزايدة على مجال I، فإن المتتالية (u_n) تكون رتيبة. مقارنة بين قيمتي الحدين الأولين منها تدلنا على تناقص أو تزايد المتتالية (u_n).

بالفعل، إذا ما اعتبرنا $I = [a;b]$، وكانت $u_0 \le u_1$، فإن $f(u_0) \le f(u_1)$. بالتراجع يمكن إثبات أن (u_n) المحدودة من الأعلى بـــ b، تكون متزايدة. فهي إذن متقاربة.

وكذلك إذا كانت $u_0 \ge u_1$، فإن $f(u_0) \ge f(u_1)$. ونثبت أيضا بالتراجع إثبات أن (u_n) المحدودة من الأدنى بـــ a، تكون متناقصة. إذن فهي متقاربة.

إذا كانت ℓ هي نهاية (u_n)، ولكون f مستمرة على I، فإن $(f(u_n))$ ستتقارب نحو $f(\ell)$.

إذن لدينا $u_n \longrightarrow \ell$، ومن العلاقة $u_n = f(u_{n-1})$ والمرور على النهاية، نحصل على المساواة $f(\ell) = \ell$.

- إذا كانت الدالة f متناقصة على I، فإن المتتاليتين المستخرجتين (u_{2n}) و (u_{2n+1}) تكونان رتيبتين، وبجهتين متعاكستين.

بالفعل، إذا كانت f متناقصة، فإن $f \circ f$ تكون متزايدة. ومنه يكون لدينا:

$$\forall x, y \in I : x \le y \Rightarrow f(x) \ge f(y) \Rightarrow f \circ f(x) \le f \circ f(y)$$

بتطبيق النظرية السابقة على الدالة $f \circ f$، تكون المتتالية $(u_0; u_2 = f \circ f(u_0); u_4 = f \circ f(u_2); \ldots)$ رتيبة ومتقاربة، وكذلك المتتالية $(u_1; u_3 = f \circ f(u_1); u_5 = f \circ f(u_3); \ldots)$، تكون رتيبة ومتقاربة.

- لتكن f دالة عددية مستمرة. إذا كانت المتتالية التدريجية $u_n = f(u_{n-1})$ متقاربة، فإن نهايتها ℓ هي حل للمعادلة $f(x) = x$.

وهذا ما يدفع بيانيا للاستعانة بمنحنى $y = f(x)$ و $y = x$.

- إذا كانت (u_n) متقاربة وتقبل النهاية ℓ، فإن المتتالية $f(u_n)$ تكون متقاربة وتقبل النهاية $f(\ell)$، حيث f دالة عددية مستمرة.

- لتكن f دالة تقبل الاشتقاق، إذا كان $|f'(x)| \le \omega < 1$ على مجال I مركزه ℓ: حل للمعادلة $f(\ell) = \ell$، فإنه توجد متتالية تدريجية $u_n = f(u_{n-1})$ تتقارب نحو ℓ.

8 تمارين محلولة

- نعتبر المتتالية $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ حيث:

$$\begin{cases} u_1 = 1 \\ u_{n+1} = \dfrac{2u_n}{u_n - 1}, \quad n \geq 2 \end{cases}$$

أ) نضع $v_n = \dfrac{u_n - 3}{u_n}$.

بين أن (v_n) متتالية هندسية؛ جد أساسها واكتب حدها العام.

اكتب u_n بدلالة n، ثم احسب $\lim\limits_{x\to+\infty} u_n$

ب) ادرس u_n في الحالتين $u_1 = 0$، $u_1 = -1$.

الحل

- v_{n+1} بدلالة v_n:

$$v_{n+1} = \frac{u_{n+1} - 3}{u_{n+1}} = 1 - \frac{3}{u_{n+1}} = 1 - \frac{3}{\dfrac{2u_n}{u_n - 1}} = -\frac{1}{2} + \frac{3}{2u_n} = -\frac{1}{2}\left(1 - \frac{3}{u_n}\right) = -\frac{1}{2}v_n$$

والمتتالية (v_n) هندسية؛ أساسها $-\dfrac{1}{2}$ وحدها الأول $v_1 = \dfrac{u_1 - 3}{u_1} = -2$.

عبارة v_n بدلالة n:

$$v_n = (-2)\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1}$$

ومنه عبارة u_n:

$$v_n = \frac{u_n - 3}{u_n} \iff u_n = \frac{3}{1 - v_n}$$

$$u_n = \frac{3}{1 - v_n} = \frac{3}{1 - 4(-1/2)^n}$$

$$\lim_{n\to+\infty} u_n = \lim_{n\to+\infty} \frac{3}{1 - 4(-1/2)^n} = 3$$

- الحالة $u_1 = 0$:

المتتالية (v_n) ليس لها معنى. لكن (u_n) ثابتة، ومساوية للصفر $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = 0$.

- الحالة $u_1 = -1$:

المتتالية (v_n) هندسية، حدها الأول 4 وأساسها $-\dfrac{1}{2}$؛ وحدها العام:

مهما يكون n: $v_n = 4\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1} = -8\left(-\frac{1}{2}\right)^n$ ، ومنه $u_n = \frac{3}{1-8(-1/2)^n}$

وفي هذه الحالة تكون أيضا (u_n) متقاربة (نحو 3).

- **أ) نعرف المتتالية التدريجية (u_n)، بالشكل:**

$$\begin{cases} u_0 \in \mathbb{R}_+ \\ u_{n+1} = \dfrac{1+u_n^2}{2} \quad , n \geq 0 \end{cases}$$

1. **ما هي النهايات الممكنة لـ (u_n) ؟**
2. **بين أن المتتالية (u_n) متزايدة مهما كان $n \in \mathbb{N}$.**
3. **من أجل $u_0 \in [0,+1]$، أثبت أنه من أجل كل $n \in \mathbb{N}$ يكون لدينا $0 \leq u_n < 1$.**
   واستنتج أن المتتالية (u_n) متقاربة. ما هي نهايتها في هذه الحالة ؟
4. **من أجل $1 < u_0$، أثبت أنه من أجل كل $n \in \mathbb{N}$ يكون لدينا $1 < u_n$، استنتج أن $\lim_{n\to\infty} u_n = +\infty$.**

ب) نعتبر المتتالية (u_n) المُعرفة بالشكل: $u_{n+1} = 0,5\, u_n + 1$ مع $u_0 = 0,5$.

1. **أحسب الحدود u_1 و u_2 و u_3 و u_4 .**
2. **ليكن $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$، برهن أن: $\forall n \in \mathbb{N};\ 2-\varepsilon < u_n < 2+\varepsilon \Rightarrow 2-\varepsilon < u_{n+1} < 2+\varepsilon$**
   واستنتج أن $\lim_{n\to\infty} u_n = 2$

الحل

أ) **المتتالية التدريجية** $u_{n+1} = \frac{1+u_n^2}{2}$ **مع** $u_0 \in \mathbb{R}_+$:

1. **النهايات الممكنة لـ (u_n) :**

إذا تقاربت المتتالية (u_n) نحو ℓ، فإن ℓ يحقق: $\ell = \frac{1+\ell^2}{2}$، ومنه $\ell^2 - 2\ell + 1 = 0$.

وبالتالي إذا تقاربت (u_n) فإن نهايتها ستكون هي: $\ell = 1$.

2. **تزايد المتتالية (u_n) :**

نضع: $u_n = x$ ، $u_{n+1} = f(x)$ ، فيكون $f(x) = \frac{1+x^2}{2}$.

لدينا $f(x) - x = \frac{1+x^2}{2} - x = \frac{1}{2}(x-1)^2$

إذن $f(x) - x \geq 0$

ومنه نستنتج أن المتتالية (u_n) تحقق : $\forall n \in \mathbb{N};\quad u_{n+1} - u_n \geq 0$

أي أن (u_n) متزايدة مهما كان $n \in \mathbb{N}$.

3. من أجل $u_0 \in [0,+1]$، نثبت بالتراجع أنه من أجل كل $n \in \mathbb{N}$ يكون لدينا $0 \leq u_n < 1$:

الدالة $f(x) = \dfrac{1+x^2}{2}$ معرفة ومستمرة وتقبل الاشتقاق على $\mathbb{R}$، حيث: $f'(x) = x$

إذن $f'(x) \geq 0, \quad \forall x \geq 0$

لدينا: $\sup_{[0,+1]} f = 1$ و $\inf_{[0,+1]} f = \frac{1}{2}$

ومنه $f\left([0,+1]\right) \subseteq \left[\frac{1}{2},+1\right] \subseteq [0,+1]$

وأخيرا $\forall n \in \mathbb{N};\quad 0 \leq u_n < 1$.

نتيجة: بما أن (u_n) متزايدة ومحدودة من الأعلى، فهي متقاربة. (u_n) تتقارب نحو النهاية $\ell = 1$.

4. من أجل $1 < u_0$، نثبت من أجل كل $n \in \mathbb{N}$ ، يكون $1 < u_n$:

يوضع: $u_n = x$ و $u_{n+1} = f(x)$ ، وبما أن $f(x)$ متزايدة ، فإنه إذا كان $1 < u_0$، يكون:

$\forall n \in \mathbb{N};\quad u_n > 1$ ،

وتكون المتتالية (u_n) أيضا متزايدة، لكنها لن تكون متقاربة في هذه الحالة، لأننا لو فرضنا أن (u_n) محدودة، فستصبح (u_n) متقاربة نحو ℓ . $(\ell = 1)$، وعندئذ :

$\forall n \in \mathbb{N};\quad u_n > u_0$

بالمرور على النهاية لما $n \to \infty$، يكون : $\ell > u_0$. لكن $1 < u_0$ ، ومنه $1 < \ell$.

وهذا يناقض الفرض. إذن المتتالية المتزايدة (u_n) فهي ليست متقاربة.

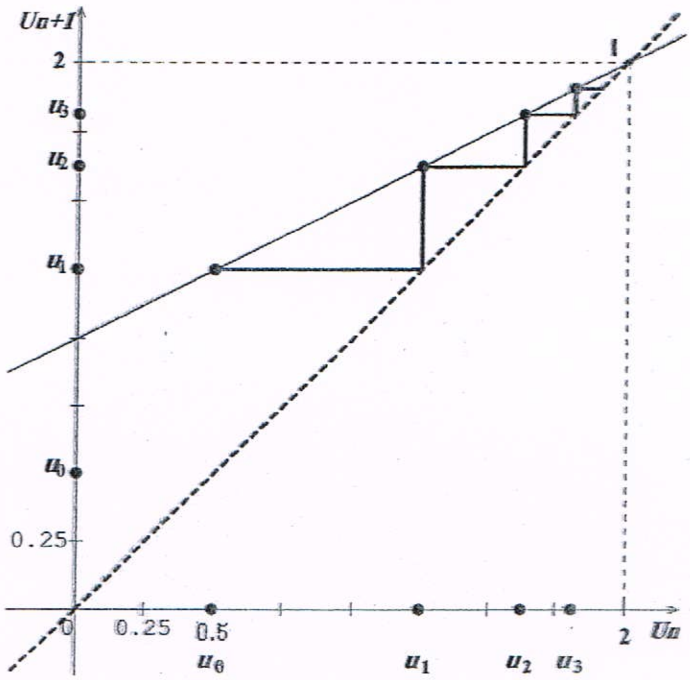
إذن $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = +\infty$

ب) المتتالية $u_{n+1} = 0,5\, u_n + 1$ مع $u_0 = 0,5$:

1. حساب الحدود u_1 ، u_2 ، u_3 ، u_4 :

لدينا: $u_0 = 0,5$ ، $u_1 = 1,25$ ، $u_2 = 1,625$ ، $u_3 = 1,8125$ ، $u_4 = 1,95313$.

وهذا تمثيل بياني لهذه الحدود: (الشكل **1.1**).



شكل 1.1

2. من أجل $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$، نبرهن: $\forall n \in \mathbb{N};\ 2-\varepsilon < u_n < 2+\varepsilon \Rightarrow 2-\varepsilon < u_{n+1} < 2+\varepsilon$

ليكن $\varepsilon > 0$، نفرض أن: $2-\varepsilon < u_n < 2+\varepsilon$

فيكون $1-0.5\,\varepsilon < 0.5\,u_n < 1+0.5\,\varepsilon$

وأيضا $2-0.5\,\varepsilon < 1+0.5\,u_n < 2+0.5\,\varepsilon$

وبما أن $0 < \varepsilon$ فإن $0.5\,\varepsilon < \varepsilon$ و $-\varepsilon < -0.5\,\varepsilon$

فإنه يكون لدينا $2-\varepsilon < u_{n+1} < 2+\varepsilon$

وهذا يعني من أجل $\varepsilon > 0$، ولو وضعنا $n = \mathrm{N}_0$ ، يمكن في ضوء ما سبق أن نصوغ التعريف:

$$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}_+^*, \exists \mathrm{N}_0 \in \mathbb{N},\ \forall n \ge \mathrm{N}_0;\ \left| u_n - 2 \right| < \varepsilon$$

وهو يعني أيضا : $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = 2$

• لتكن (u_n) المتتالية المعرفة بالشكل:

$$\begin{cases} u_0 = \dfrac{1}{2} \\ u_{n+1} = \sqrt{\dfrac{1+u_n}{2}} \end{cases}$$

1. أحسب u_1 و u_2. ما هي النهايات الممكنة للمتتالية (u_n) ؟
2. أثبت أنه من أجل كل عدد طبيعي n ، يكون لدينا: $0 < u_n < u_{n+1} < 1$.
واستنتج أن المتتالية (u_n) تكون متقاربة.
3. أثبت أنه من أجل كل $n \in \mathbb{N}$ ، يكون لدينا: $|u_{n+1} - 1| \le \frac{1}{2}|u_n - 1|$.
واستنتج من أجل كل $n \in \mathbb{N}$ ، يكون لدينا: $|u_n - 1| \le \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}$.

الحل :

1. الحدان u_1 و u_2 ، وتقارب المتتالية (u_n) .

الدالة $x \mapsto f(x) = \sqrt{\dfrac{1+x}{2}}$ مستمرة ومتزايدة على $[-1, +\infty[$، ولدينا $f([-1, +\infty[) = \mathbb{R}_+$

لدينا

$$u_1 = f(u_0) = \sqrt{\frac{1+u_0}{2}} = \sqrt{\frac{1+1/2}{2}} = \frac{\sqrt{3}}{2} \approx 0.866$$

$$u_2 = f(u_1) = \sqrt{\frac{1+u_1}{2}} = \sqrt{\frac{1+\sqrt{3}/2}{2}} = \frac{1}{4}\sqrt{2}(1+\sqrt{3}) \approx 0.966$$

النهايات الممكنة للمتتالية (u_n) :

المتتالية (u_n) ذات حدود موجبة، إذا تقاربت (u_n) نحو ℓ ، فإن ℓ يحقق: $\ell = \sqrt{\dfrac{1+\ell}{2}}$ ، أي ℓ هو الحل الوحيد للمعادلة $2\ell^2 - \ell - 1 = 0$. وهذه النهاية هي: $\ell = 1$.

2. إثبات $0 < u_n < u_{n+1} < 1 \quad , \forall n \in \mathbb{N}$.

بالتدريج : بدء التدريج $(n = 0)$: لدينا $u_0 = 0.5$ و $u_1 \approx 0.866$, ومنه $0 < u_0 < u_1 < 1$.

نفرض من أجل n من $\mathbb{N}$: $0 < u_n < u_{n+1} < 1$ ، بما أن الدالة f متزايدة على $[0,1]$ (لأنها متزايدة على $[-1, +\infty[$)، يكون لدينا : $f(0) < f(u_n) < f(u_{n+1}) < f(1)$ ، أي $\frac{\sqrt{2}}{2} < f(u_n) < f(u_{n+1}) < 1$.

ومنه صحة المتراجحات : $0 < u_{n+1} < u_{n+2} < 1$.

وأخيرا $\forall n \in \mathbb{N}\ ,\quad 0 < u_n < u_{n+1} < 1$.

إذن المتتالية (u_n) متزايدة ومحدودة من الأعلى بـــ(1) ، فهي متقاربة .

3. إثبات من أجل كل n من $\mathbb{N}$: $|u_{n+1} - 1| \le \frac{1}{2}|u_n - 1|$.

لدينا :

$$u_{n+1} - 1 = \sqrt{\frac{1+u_n}{2}} - 1 = \frac{\frac{1+u_n}{2} - 1}{\sqrt{\frac{1+u_n}{2}} + 1} = \frac{1}{2}\,\frac{u_n - 1}{\sqrt{\frac{1+u_n}{2}} + 1}$$

وبملاحظة $0 \le \sqrt{\frac{1+u_n}{2}} \Rightarrow 1 \le \sqrt{\frac{1+u_n}{2}} + 1$ ، ينتج $\frac{1}{\sqrt{\frac{1+u_n}{2}} + 1} \le 1$

وبالتالي يكون $|u_{n+1} - 1| \le \frac{1}{2}|u_n - 1|$

- استنتاج $\forall n \in \mathbb{N}\ ,\quad |u_n - 1| \le \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}$

بالتدريج : لدينا $|u_0 - 1| = \left(\frac{1}{2}\right)^{0+1}$ صحيحة . $(u_0 = 0.5)$.

نفرض من أجل n من $\mathbb{N}$ أن $|u_n - 1| \le \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}$. وقد برهنا أن : $|u_{n+1} - 1| \le \frac{1}{2}|u_n - 1|$.

إذن $$|u_{n+1} - 1| \le \frac{1}{2}|u_n - 1| \le \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}\quad |u_n - 1|$$

ومنه $|u_{n+1} - 1| \le \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}\quad |u_n - 1|$ صحيحة .

إذن $\forall n \in \mathbb{N}\ ,\quad |u_n - 1| \le \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}$

وبما أن $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^n = 0$ ، يكون $\lim\limits_{n\to+\infty}|u_n - 1| = 0$ ، أي $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 1$

- ندرس المتتالية بـــ $u_0 = 0{,}4$ وبعلاقة التدريج $u_{n+1} = u_n^2 + 0{,}25$ $\forall n \in \mathbb{N}^*$

يتعلق الأمر بدراسة متتالية من النمط $u_{n+1} = f(u_n)$ ، $f(x) = x^2 + 0{,}5$

بما أن كل الحدود u_n موجبة يكفي دراسة تغيرات الدالة f على المجال $[0, +\infty[$.

$$\forall x \in [0,+\infty[,\quad f'(x)=2x$$

الدالة f متزايدة على المجال $[0,+\infty[$، وبالتالي، حسب النظرية، المتتالية (u_n) رتيبة.

لدينا $u_1=0,66$، وبالتالي $u_0<u_1$، والمتتالية (u_n) متزايدة.

وبما أنها محدودة من الأعلى بـــ $0,5$ على سبيل المثال، فإنها متقاربة.

لتكن ℓ نهايتها، بما أن الدالة f مستمرة فإن ℓ تحقق المعادلة $\ell=f(\ell)$، التي تكافئ $\ell^2-\ell+0,25=0$.

ومنه $\ell=0,5$.

- دراسة المتتالية:

$$\begin{cases} u_0=0 \\ u_{n+1}=\dfrac{1}{1+u_n}, \quad \forall n\in\mathbb{N}^* \end{cases}$$

كل حدود u_n موجبة وتنتمي إلى المجال $[0,1]$:

لننظر في تغيرات الدالة المستمرة f على المجال $[0,1]$:

$$\forall x \in [0,1],\quad f'(x)<0$$

و f متناقصة على المجال $[0,1]$.

حسب النظرية فإن المتتاليتين المستخرجتين (u_{2n}) و(u_{2n+1}) رتيبتان وفي اتجاه معاكس:

تلاحظ بأن $u_0=0$ ، $u_1=1$، $u_2=\dfrac{1}{2}$، ومنه (u_{2n}) متزايدة و (u_{2n+1}) متناقصة.

ولكون (u_n) متقاربة ولتكن ℓ نهايتها، فإن (u_{2n}) و(u_{2n+1}) متقاربتان أيضا نحـــو نفـــس النهايـــة ℓ:

$\ell=(f\circ f)(\ell)$ (لأن $u_{2(n+1)}=(f\circ f)(u_{2n})$ و $f\circ f$ مستمرة).

لدينا إذن $\ell=\dfrac{1+\ell}{2-\ell}$ التي تعطي القيمة $\ell=\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}\approx 1.618$.

- نعتبر المتتالية التدريجية (u_n)، المعرفة كما يلي:

$$\begin{cases} u_0=\sqrt{2} \\ u_{n+1}=\sqrt{2+u_n}, \quad \forall n\in\mathbb{N}^* \end{cases}$$

- بين باستخدام بيان الدالة $y=f(x)=\sqrt{2+x}$ بأن $u_{n+1}=f(u_n)$

- برهن بأن هذه المتتالية محدودة من الأعلى بـــ 2. وبين أنها متزايدة، واستنتج تقاربها.

الحل

- إن قيمة $f(x)$ من أجل $x=u_n$، هي $f(u_n)=u_{n+1}=\sqrt{2+u_n}$

$f(x)$ متزايدة على المجال $]-2,+\infty[$.

بيانيا، تقترب النقط $M(x_0,f(x_0))$، $M(x_1,f(x_1))$، ....، $M(x_n,f(x_n))$ من النقطة $L(\ell,f(\ell))$: نقطة تقاطع منحنى f مع المستقيم $y=x$.

وبالتالي ℓ تحقق $\ell=\sqrt{2+\ell}>0$ ومنه $\ell=2$.

- بالتراجع، من أجل $n=0$، $u_0=\sqrt{2}<2$.

بفرض أن $u_n<2$، يكون $u_n<2 \Rightarrow u_n+2<2+2=4 \Rightarrow \sqrt{u_n+2}<\sqrt{4}=2$

ومنه المتتالية (u_n) محدودة من الأعلى بـــ 2.

- و (u_n) متزايدة لأن

$$\forall n\in\mathbb{N},\quad u_{n+1}-u_n=\sqrt{2+u_n}-u_n=\frac{2+u_n-u_n^2}{\sqrt{2+u_n}+u_n}=\frac{(1+u_n)(2-u_n)}{\sqrt{2+u_n}+u_n}>0$$

إذن (u_n) متزايدة ومحدودة من الأعلى بـــ 2؛ فهي متقاربة. لتكن ℓ نهايتها.

بما أن (u_n) و (u_{n+1}) لهما نفس النهاية ℓ، فإن ℓ تحقق $\ell=\sqrt{2+\ell}$ ومنه $\ell=2$.

- أ) نعتبر الدالة $f(x)=\frac{1}{3}x^2-x+3$

1. أدرس تغيرات $f(x)$، واستنتج أنه إذا كان $x\in[0\,;3]$ فإن $f(x)\in[0\,;3]$.

2. بين أنه من أجل كل x من $\mathbb{R}$ أن $f(x)\geq x$.

ب) نعرف المتتالية التدريجية (u_n)، بالشكل:

$$\begin{cases} u_0\in\mathbb{R}^+ \\ u_{n+1}=\frac{1}{3}u_n^2-u_n+3 \quad ,n\geq 0\end{cases}$$

1. باستخدام السؤال (أ-2)، استنتج أن المتتالية (u_n) متزايدة.

2. من أجل $u_0\in[0\,;3]$ وباستخدام السؤال (أ-1)، أثبت من أجل كل $n\in\mathbb{N}$ أن $0\leq u_n\leq 3$.

واستنتج أن (u_n) متقاربة، ما هي نهايتها في هذه الحالة ؟

3. من أجل $3<u_0$، أثبت من أجل كل $n\in\mathbb{N}$ أن $3<u_n$. ثم استنتج أن $\lim\limits_{n\to\infty}u_n=+\infty$.

الحل

أ)

1. الدالة $f(x)=\frac{1}{3}x^2-x+3$ معرفة ومستمرة وتقبل الاشتقاق على $\mathbb{R}$، حيث:

$$f'(x)=\frac{2}{3}x-1$$

جدول تغيرات $f(x)$:

x	$-\infty$		$2/3$		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	$\searrow$	$9/4$	$\nearrow$	$+\infty$

تغيرات $f(x)$، والاستلزام $x\in[0;3]$ $\Leftarrow$ $f(x)\in[0;3]$.

لدينا: $\inf_{[0,3]}f=f(3/2)=9/4$ و $\sup_{[0,3]}f=f(0)=f(3)=3$

ومنه $f\left([0,+3]\right)\subseteq[9/4,3]\subseteq[0,+3]$

2. تبين أنه من أجل كل $x\in\mathbb{R}$ يكون $f(x)\geq x$.

نضع $g(x)=f(x)-x$ فيكون: $g(x)=\frac{1}{3}x^2-x+3-x=\frac{1}{3}(x-3)^2$

ومنه المطلوب $\forall x\in\mathbb{R}\quad g(x)\geq 0$

ب)

$$\begin{cases}u_0\in\mathbb{R}\\ u_{n+1}=\frac{1}{3}u_n^2-u_n+3\ ;\ n\geq 0\end{cases}$$

1. من (أ-2)، استنتاج أن (u_n) متزايدة.

من (أ-2) وبأخذ x للقيمة u_n نحصل على:

$$u_{n+1}-u_n=f(u_n)-u_n$$
$$=\frac{1}{3}(u_n-3)^2\geq 0$$

ومنه (u_n) متزايدة.

2. دراسة تقارب المتتالية (u_n)

من أجل $u_0 \in [0;3]$ وبوضع $x = u_n$، يكون لدينا :

$$u_n \in [0,3] \Rightarrow u_{n+1} \in [0,3]$$

أو استخدام برهان التراجع.

المتتالية (u_n) متزايدة ومحدودة من الأعلى (بـــ 3) فهي متقاربة.

وهي تتقارب نحو العدد الحقيقي ℓ الذي يحقق: $f(\ell) = \ell$ $\ell \in [0,3]$

لدينا $f(\ell) = \ell \Leftrightarrow \frac{1}{3}(\ell - 3)^2 = 0$. ومنه $\lim\limits_{+\infty} u_n = \ell = 3$,

3. من أجل $u_0 > 3$، نثبت من أجل كل $n \in \mathbb{N}$ أن $u_n > 3$. واستنتاج النهاية $\lim\limits_{n\to\infty} u_n$.

من أجل $u_0 > 3$؛ نحسب نهاية (u_n) على $]3, +\infty[$ بوضع $x = u_n$

$$u_{n+1} = f(u_n) = \frac{1}{3}u_n^2 - u_n + 3$$

$$f(x) = \frac{1}{3}x^2 - x + 3$$

$$f'(x) = \frac{2}{3}x - 1 > 0 \ , \ \forall x > 3$$

إذن من أجل $u_0 > 3$ يكون $u_n > 3$ $\forall n \in \mathbb{N}$

ومن السؤال (أ-2) نستنتج أن المتتالية في هذه الحالة متزايدة.

ولنفرض أن (u_n) محدودة. فتصبح المتتالية في هذه الحالة متزايدة ومحدودة فهي إذن متقاربة، لتكن ℓ نهايتـــها.

التي تحقق $\ell = \frac{\ell^2}{3} - \ell + 3 \Leftrightarrow \ell = 3$

لكن (u_n) متزايدة إذن: $u_n \geq u_0$ $\forall n \geq 0$

بالمرور على النهاية نجد: $\ell \geq u_0$

لكن نعلم بأن $u_0 > 3$ إذن $3 < \ell$.

وهذا يناقض الفرض بأن: (u_n) محدودة.

وبما أن (u_n) متزايدة، فهذا يؤدي إلى أن (u_n) تؤول إلى $+\infty$.

أي $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$

• أ) نعتبر الدالة f المعرفة على المجال $[0, +\infty[$ بالشكل: $f(x)=3-\dfrac{2}{x+1}$

1. أدرس تغيرات f على المجال $[0, +\infty[$.

2. برهن بأنه إذا كان $x \in \left[0\,;\ 1+\sqrt{2}\right]$ فإن $f(x) \in \left[0\,;\ 1+\sqrt{2}\right]$.

ب) نعتبر المتتالية العددية (u_n) المعرفة على $\mathbb{N}$، بالشكل:

$$\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_{n+1} = 3-\dfrac{2}{u_n+1} \quad , n \geq 0 \end{cases}$$

1. أحسب u_1 و u_2 و u_3. ما هي النهايات الممكنة لـــ (u_n) ؟

2. مثل بيانيا المنحنيين اللذين معادلتيهما $y=f(x)$ و $y=x$ في معلم متعامد ومتجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$، ثم استخدمهما لإنشاء النقط A_0 و A_1 و A_2 ذات الفواصل u_0 و u_1 و u_2. على الترتيب. (الوحدة 4 سم).

3. أثبت باستخدام البرهان بالتراجع أنه من أجل كل $n \in \mathbb{N}$ يكون $0 \leq u_n \leq u_{n+1} \leq 1+\sqrt{2}$. ماذا تستنتج ؟

جـ) نعتبر المتتالية (v_n) المعرفة بحدها الأول $v_0 = 3$ والعلاقة $v_{n+1} = 3-\dfrac{2}{v_n+1}$ مهما كان $n \in \mathbb{N}$

1. أثبت، من أجل كل $n \in \mathbb{N}$، أن المتتالية (v_n) متناقصة.

2. بين من أجل كل $n \in \mathbb{N}$، أن $v_n - u_n \leq 2\cdot\left(\dfrac{1}{4}\right)^n$. واستنتج بأن (u_n) و (v_n) متجاورتان. ما هي $\lim\limits_{n\to\infty} v_n$ ؟

الحل

أ) 1. تغيرات f

الدالة $f(x)=3-\dfrac{2}{x+1}$ مستمرة وتقبل الاشتقاق على $\mathbb{R}^+$ حيث $f'(x)=\dfrac{2}{(x+1)^2}$

جدول تغيرات $f(x)$:

x	0 $\qquad\qquad\qquad$ $+\infty$
$f'(x)$	$+$
$f(x)$	$1 \nearrow +3$

2. الاستلزام $x \in \left[0;\ 1+\sqrt{2}\right] \Leftarrow f(x) \in \left[0;\ 1+\sqrt{2}\right]$

ليكن $x \in \left[0, 1+\sqrt{2}\right]$. بما أن $0 \le x \le 1+\sqrt{2}$ و f متزايدة على $\left]0, +\infty\right[$، فإن

$$f(0) \le f(x) \le f(1+\sqrt{2})$$

ومنه أيضا $1 \le f(x) \le 1+\sqrt{2}$ وأخيرا نحصل على :

$$f\left(\left[0,1+\sqrt{2}\right]\right) = \left[1,1+\sqrt{2}\right] \subset \left[0,1+\sqrt{2}\right]$$

ب) 1. الحدود u_1 و u_2 و u_3، والنهايات الممكنة لـ (u_n)

• بالحساب نجد: $u_1 = 2$ ، $u_2 = \frac{7}{3} \approx 2.33$ ، $u_3 = \frac{12}{5} = 2.4$

• إذا تقاربت المتتالية ذات الحدود الموجبة (u_n) نحو النهاية ℓ، فإن هذه النهاية تحقق: $\ell = 3 - \frac{2}{\ell+1}$،
أي: $\ell^2 - 2\ell - 1 = 0$. وبالتالي إذا تقاربت (u_n) فإن نهايتها ستكون هي: $\ell = 1+\sqrt{2} \approx 2.41$.

2. التمثيل البياني موضح في الشكل 1.

3. أثبات باستخدام البرهان بالتراجع : من أجل كل $n \in \mathbb{N}$ يكون

$$(*) \ldots 0 \le u_n \le u_{n+1} \le 1+\sqrt{2}$$

بما أن: $u_0 = 1$ و $u_1 = f(u_0) = 2$ ، فإن المتراجحات $(*)$ تتحقق من أجل $n = 0$.

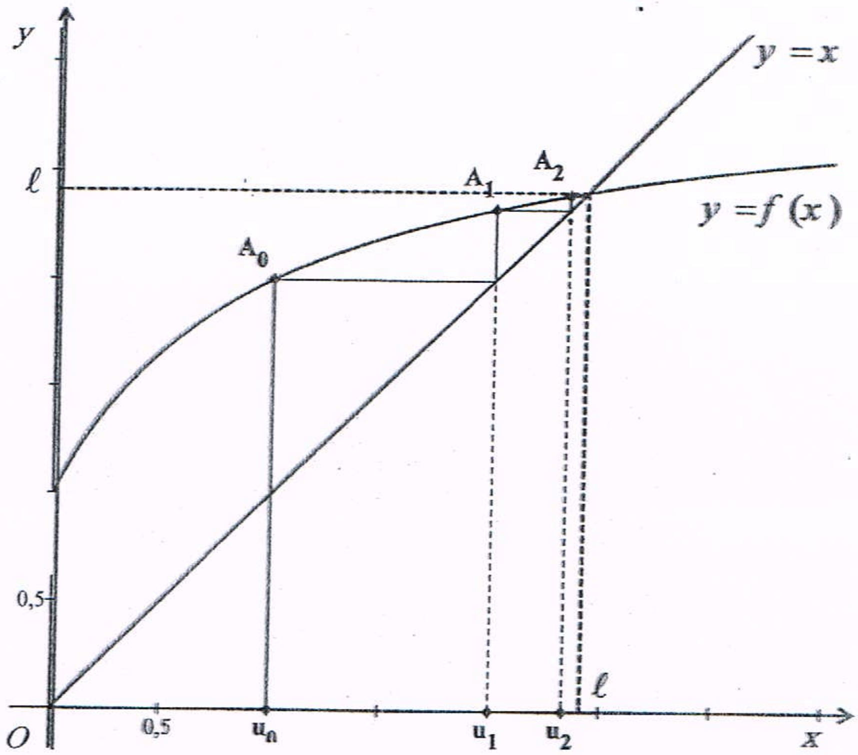
من أجل $0 \le n$، نفرض أن $0 \le u_n \le u_{n+1} \le 1+\sqrt{2}$.

بما أن f متزايدة على $\left]0, +\infty\right[$، يكون $f(0) \le f(u_n) \le f(u_{n+1}) \le f(1+\sqrt{2})$

أي $1 \le u_{n+1} \le u_{n+2} \le 1+\sqrt{2}$ ، ومنه : $0 \le u_{n+1} \le u_{n+2} \le 1+\sqrt{2}$

إذن : $\forall n \in \mathbb{N},\ 0 \le u_n \le u_{n+1} \le 1+\sqrt{2}$

نستنتج بأن المتتالية (u_n) متزايدة ومحدودة من الأعلى بـ $1+\sqrt{2}$ ، فهي إذن متقاربة، وحسب السؤال ب) فإن هذه النهاية ما هي إلا $\ell = 1+\sqrt{2} \approx 1.41$.



شكل 2.1

جـ) 1. نثبت، من أجل كل $n \in \mathbb{N}$ ، أن المتتالية (v_n) متناقصة

نثبت بالتراجع أن: $$\forall n \in \mathbb{N}, \quad v_{n+1} \leq v_n \quad \ldots (**)$$

(v_n) ذات حدود موجبة. لدينا $v_0 = 3$ و $v_1 = f(u_0) = 2.5$ ، ومنه المتراجحة $(**)$ متحققة من أجل $n = 0$. ومن أجل $0 \leq n$، نفرض أن $v_{n+1} \leq v_n$، بما أن الدالة f متزايدة على $[0, +\infty[$، يكون لدينا أيضا $f(v_{n+1}) \leq f(v_n)$ ، أي $v_{n+2} \leq v_{n+1}$

وحسب مبدأ التراجع نحصل على : $$\forall n \in \mathbb{N}, \quad v_{n+1} \leq v_n$$

2. نثبت أنه من أجل كل $n \in \mathbb{N}$ أن $\forall n \in \mathbb{N},\ v_n - u_n \leq 2 \cdot \left(\frac{1}{4}\right)^n$.

ليكن n عدد طبيعي.

لدينا :
$$v_{n+1}-u_{n+1}=\frac{3v_n+1}{v_n+1}-\frac{3u_n+1}{u_n+1}=\frac{2}{(u_n+1)(v_n+1)}(v_n-u_n)$$

وبما أن الجداء $(u_n+1)(v_n+1)$ موجب تماما، فإن إشارة $v_{n+1}-u_{n+1}$ هي من نفس إشارة v_n-u_n، التي هي من إشارة $v_0-u_0=3-1=2$ (الموجبة تماما). ومن جهة أخرى، ولكون $1\le u_n$ و $3\le v_n$، فإن $2\le u_n+1$ و $4\le v_n+1$ ، ينتج من ذلك أن $8\le(u_n+1)(v_n+1)$. وبالتالي $\frac{1}{(u_n+1)(v_n+1)}\le\frac{1}{8}$.

وبالتالي يكون
$$\forall n\in\mathbb{N},\ v_{n+1}-u_{n+1}\le\frac{1}{4}(v_n-u_n)$$

نستخدم الآن البرهان بالتراجع لإثبات الخاصية
$$\forall n\in\mathbb{N},\ v_n-u_n\le 2\cdot\left(\frac{1}{4}\right)^n$$

لدينا $v_0-u_0=2$ و $2\cdot\left(\frac{1}{4}\right)^0=2$ ومنه $v_0-u_0\le 2\cdot\left(\frac{1}{4}\right)^0$. ومنه المتراجحة متحققة من أجل $n=0$.

ومن أجل $0\le n$، وبفرض $v_n-u_n\le 2\cdot\left(\frac{1}{4}\right)^n$ ، يكون لدينا :
$$v_{n+1}-u_{n+1}\le\frac{1}{4}(v_n-u_n)\le\frac{1}{4}\cdot 2\left(\frac{1}{4}\right)^n=2\left(\frac{1}{4}\right)^{n+1}$$

وأخير نحصل على
$$\forall n\in\mathbb{N},\ v_n-u_n\le 2\cdot\left(\frac{1}{4}\right)^n$$

إذن، من أجل كل عدد طبيعي n، يكون لدينا
$$0\le v_n-u_n\le 2\cdot\left(\frac{1}{4}\right)^n$$

بأخذ نهاية أطراف هذه المتراجحة عندما $n\to+\infty$، نجد $\lim_{n\to\infty}(v_n-v_n)=0$. وهذا يدل على أن المتتاليتين (u_n) و (v_n) متجاورتان. لهما نفس النهاية، أي $\lim_{n\to\infty}v_n=\lim_{n\to\infty}u_n=\ell=1+\sqrt{2}$.

السلاسل العددية

1. مفهوم السلسلة العددية

لتكن $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ متتالية. نرفق بـــ $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$، المتتالية ذات الحد العام:

$$S_n = u_0 + u_1 + \ldots + u_n = \sum_{r=0}^{n} u_r$$

نرمز لهذه السلسلة بالرمز $\sum u_r$

S_n: المجموع الجزئي من الرتبة n للسلسلة ذات الحد العام u_n.

كما تسمى الكمية $u_{n+1} + u_{n+2} + \cdots$ بباقي السلسة من الرتبة n.

- مجموعة السلاسل بعملية الجمع والضرب بعدد حقيقي تؤلف فضاء شعاعيا.

2. تقارب سلسلة

حتى نقول أن السلسة $\sum u_r$ (ذات الحد العام u_n)، يجب أن تتقارب مجاميعها الجزئية (S_n).

$$(S_n) \to \ell \quad \Rightarrow \quad \sum u_r \to \ell$$

$$\lim S_n = \ell \quad \Rightarrow \quad \sum_{r=0}^{+\infty} u_r = \ell$$

وعندئذ نقول أن السلسلة بأنها متقاربة. وتكون السلسلة **متباعدة** بخلاف ذلك.

ملاحظة هامة $\sum u_r \to \ell \quad \Rightarrow \quad (u_n) \to 0$

وعلى العموم، العكس غير صحيح. مثل ما نراه في السلسة ذات الحد: $u_n = \sqrt{n} - \sqrt{n-1}$.

1.2 سلاسل متقاربة

لتكن السلسلتين $\sum u_n$ و $\sum v_n$ ذواتا الحدود الموجبة . وليكن a و b من $\mathbb{R}$

- إذا تقاربت $\sum u_n$ نحو U، وإذا كان من أجل كل n: $v_n \le u_n$، فإن $\sum v_n$ نحو V، بحيث $V \le U$
- إذا آلت $\sum u_n$ نحو $+\infty$، وإذا كان $\forall n \in \mathbb{N}, v_n \ge u_n$، فإن $\sum v_n$ تؤول نحو $+\infty$.
- إذا كان $\forall n \in \mathbb{N},\ a\,u_n \le v_n \le b\,u_n$، فإن السلسلتين $\sum u_n$ و $\sum v_n$ من نفس الطبيعة .

فإذا تقاربتا نحو مجموعهما U و V، فإنهما تحققان $aU \le V \le b\,U$.

مثال

في السلسلة ذات الحدود الموجبة $u_n = \dfrac{1}{\sqrt{n}}$

يكون لدينا من أجل كل $1 \le n$: $\sqrt{n} \le n$. ومنه $\frac{1}{\sqrt{n}} \ge \frac{1}{n}$، أي $u_n \ge \frac{1}{n}$ $\forall n \ge 1$

لكن نعلم بأن السلسلة ذات الحد العام $\frac{1}{n}$ متباعدة. ومنه نستنتج أن $\sum u_n$ تكون أيضا متباعدة .

3. اختبارات تقارب السلاسل

1.3 اختبار Riemann

تكون السلسلة ذات الحد العام $\frac{1}{n^\alpha}$ متقاربة إذا كان $1<\alpha$ ، وتكون متباعدة بخلاف ذلك.

مثلا في السلسلة ذات الحد العام $u_n = \frac{n^2+4}{\sqrt[3]{n}}$، لدينا بجوار $(+\infty)$ ، u_n تكافئ $\frac{1}{n^{-5/3}} = n^{5/3} = n^{2-1/3}$،

فهي حسب هذا الاختبار متباعدة.

2.3 اختبار D'Alembert:

يفرض أن السلسلة $\sum u_n$ ذات حدود موجبة وأن $\frac{u_{n+1}}{u_n} \to \ell \in [0,+\infty]$، عندما $n \to +\infty$، يكون لدينا:

إذا كان $\ell < 1$ فإن السلسلة ذات الحد العام u_n تكون متقاربة.

إذا كان $1 < \ell$ فإن السلسلة ذات الحد العام u_n تكون متباعدة.

إذا كان $\ell = 1$ لا يمكن استنتاج شيء بشأن تقارب أو تباعد $\sum u_n$.

مثلا في السلسلة $\sum \frac{\ln n}{n^2+3}$، لدينا $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{\dfrac{\ln(n+1)}{(n+1)^2+3}}{\dfrac{\ln n}{n^2+3}} = 2$ والسلسلة متباعدة

أما في السلسلة $\sum \frac{3n+2^n}{4^n}$، لدينا $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{\dfrac{3(n+1)+2^{n+1}}{4^{n+1}}}{\dfrac{3n+2^n}{4^n}} = \frac{1}{2}$ ومنه السلسلة متقاربة.

السلسلة $u_n = \ln\left(1+\frac{2}{n(n+3)}\right)$ بجوار $(+\infty)$ تكافئ $\frac{2}{n^2}$، فهي إذن متقاربة.

نلاحظ
$$u_n = \ln\left(1+\frac{2}{n(n+3)}\right) = \ln\frac{(n+1)(n+2)}{n(n+3)}$$
$$= \ln(n+1) + \ln(n+2) - \ln n - \ln(n+3)$$

ومنه المجموع الجزئي $S_n = \ln 3 + \ln\frac{n+1}{n+3}$ الذي ينتهي إلى $S = \ln 3$

3.3 اختبار Cauchy

بفرض أن السلسلة $\sum u_n$ ذات حدود موجبة وأن $\sqrt[n]{u_n} \to \ell \in [0,+\infty]$ عندما $n \to +\infty$، يكون لدينا:

إذا كان $\ell < 1$ فإن السلسلة ذات الحد العام u_n تكون متقاربة.

إذا كان $1 < \ell$ فإن السلسلة ذات الحد العام u_n تكون متباعدة.

إذا كان $\ell = 1$ لا يمكن استنتاج شيء بشأن تقارب أو تباعد $\sum u_n$.

مثلا في السلسلة $\sum\left(\frac{1}{\ln n}\right)^n$، نحصل على النهاية $\lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt[n]{\left(\frac{1}{\ln n}\right)^n} = 0$ والسلسلة متقاربة.

وفي السلسلة $u_n = n^n e^n$، نجد $\lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt[n]{n^n e^{-n}} = \lim\limits_{n\to+\infty} \frac{n}{e} = +\infty$ والسلسلة متباعدة

ملاحظة

إذا أجاب اختبار D'Alembert عن تقارب سلسلة ، فإن اختبار Cauchy سيجيب أيضا عن التقارب .

4.3 اختبار Raabe-Duhamel:

بفرض أن السلسلة $\sum u_n$ ذات حدود موجبة وأن $n\left(\frac{u_n}{u_{n+1}} - 1\right) \to \ell$، عندما $n \to +\infty$، يكون:

إذا كان $1 < \ell$ فإن السلسلة ذات الحد العام u_n تكون متقاربة.

إذا كان $\ell < 1$ فإن السلسلة ذات الحد العام u_n تكون متباعدة.

مثلا في السلسلة $\sum\left(\frac{1}{n^2+2n+2}\right)$، نحصل على النهاية $\lim\limits_{n\to+\infty} n\left(\dfrac{\frac{1}{n^2+2n+2}}{\frac{1}{(n+1)^2+2(n+1)+2}} - 1\right) = -2$

والسلسلة متباعدة.

5.3 اختبار Cauchy

وهو شرط كافي وضروري لتقارب سلسلة

تكون السلسلة $\sum u_r$ متقاربة $\Leftrightarrow \quad \sum\limits_{r=p+1}^{q} u_r \xrightarrow[q\to+\infty]{p\to+\infty} 0 \quad (p<q)$

مثلا السلسلة ذات الحد العام $\frac{1}{n}$ $(n \in \mathbb{N}^*)$ ليست متقاربة، لأنها ليست لكوشي.

ولدينا

$$\sum_{i=n+1}^{2n} \frac{1}{i} = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \ldots + \frac{1}{2n} \geq \frac{1}{2n} + \ldots + \frac{1}{2n} = \frac{1}{2}$$

وفي السلسلة ذات الحدود الموجبة $u_n = \frac{1}{\sqrt{n}}$

يكون لدينا من أجل كل $1 \le n$: $\sqrt{n} \le n$، ومنه $\frac{1}{\sqrt{n}} \ge \frac{1}{n}$، أي $u_n \ge \frac{1}{n}$ $\forall n \ge 1$

لكن نعلم بأن السلسلة ذات الحد العام $\frac{1}{n}$ تكون متباعدة. ومنه نستنتج أن $\sum u_n$ تكون أيضا متباعدة.

مثال

في السلسلة $u_n = \frac{1}{\sqrt[n]{n+5}}$ لدينا $\ln(u_n) = -\frac{1}{n}\ln(n+5) \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$، ومنه $u_n \xrightarrow[n\to\infty]{} 1$ $(\neq 0)$

ومنه السلسلة $\sum u_n$ متباعدة.

4. التقارب المطلق

تكون السلسة $\sum u_r$ متقاربة مطلقا، إذا كانت السلسلة $\sum |u_r|$ متقاربة.

مثلا: السلسلة ذات الحد العام $u_n = x^n$ تكون متقاربة، إذا كان $|x| < 1$، ولدينا $\sum_{r=0}^{+\infty} x^n = \frac{1}{1-x}$.

- كل سلسة متقاربة مطلقا، تكون متقاربة.
- حتى تتقارب سلسة ذات حدود موجبة، يكفي أن تكون محدودة من الأعلى.
- لتكن $\sum u_r$ و $\sum v_r$ سلسلتان ذواتا حدود موجبة. لدينا :

– كل سلسلة مستخرجة من سلسة متقاربة $\sum u_r$ ؛ تكون متقاربة.

– إذا تقاربت $\sum u_r$ نحو ℓ، وإذا كان $v_n \le u_n$ من أجل كل n ؛ فإن السلسة $\sum v_r$ ستتقارب نحو ℓ' حيث $\ell' \le \ell$.

مثلا السلسة $\frac{1}{n!}$ متقاربة، ولها المجموع e.

5. سلاسل هندسية

السلسلة الهندسية هي السلسة $\sum u_r$ ذات الحد العام $u_n = aq^n$ حيث $a \neq 0$

ملاحظة

إذا كان $a = 0$، تكون السلسة $\sum u_r$ متباعدة،

وإذا كان $q = 1$، فإن $S_n = (n+1)a$،

وإذا كان $|q| > 1$، فإن السلسة $\sum u_r$ تكون متباعدة،

وإذا كان $|q| < 1$، فإن $\sum_{r=0}^{+\infty} a\,q^r = \frac{a}{1-q}$، والسلسة $\sum u_r$ متباعدة.

6. السلسلة الصحيحة ونصف تقاربها

تعريف: x عدد حقيقي معطى. تُسمى سلسلة صحيحة بمعاملات حقيقية العبارة الجبرية:

$$S(x)=a_0+a_1x+a_1x^2+\cdots a_nx^n+\cdots=\sum_{r=0}^{+\infty}a_rx^r$$

وتكون السلسلة الصحيعة $\sum_{r=0}^{+\infty}a_rx^r$ ، متقاربة إذا وُجدت قيمة x_0 من $\mathbb{R}$ بحيث تكون السلسلة الصحيحة $\sum_{r=0}^{+\infty}a_rx_0^r$ متقاربة. وعندئذ تكون السلسلة $\sum_{r=0}^{+\infty}a_rx^r$ من أجل كل x بحيث $|x_0|>|x|$

نسمي **نصف قطر تقارب** سلسلة صحيحة $\sum_{r=0}^{+\infty}a_rx^r$ العدد الحقيقي الموجب R بحيث تكون السلسلة $\sum_{r=0}^{+\infty}a_rx^r$: متقاربة مطلقامن أجل كل x بحيث $|x|<R$، ومتباعدة من أجل كل x بحيث $|x|>R$

ملاحظة 1 يمكن اشتقاق ومكاملة حدود السلسلة الصحية داخل مجال تقاربها.

ملاحظة 2 في حالة وجود النهاية $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ يكون نصف قطر التقارب للسلسلة الصحيحة هو R حيث:

$$\lim_{n\to+\infty}\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right|=\frac{1}{R}$$

7. تمرين محلول

نعتبر المجموع:

$$S_n=2+\frac{5}{3^3}+\frac{8}{3^6}+\ldots+\frac{3n+2}{3^{3n}}$$

أحسب المجموع $S_n-\frac{1}{3^3}S_n$، واستنتج S_n بدلالة n. واستنتج قيمة النهاية $\lim_{x\to+\infty}S_n$.

الحل

لنحسب $S_n-\frac{1}{3^3}S_n$

$$S_n-\frac{1}{3^3}S_n=\left(2+\frac{5}{3^3}+\frac{8}{3^6}+\ldots+\frac{3n+2}{3^{3n}}\right)-\left(\frac{2}{3^3}+\frac{5}{3^6}+\ldots+\frac{3n-1}{3^{3n}}+\frac{3n+2}{3^{3(n+1)}}\right)$$

$$S_n-\frac{1}{3^3}S_n=2+\left(\frac{5-2}{3^3}+\frac{8-5}{3^6}+\ldots+\frac{(3n+2)-(3n-1)}{3^{3n}}\right)\frac{3n+2}{3^{3(n+1)}}$$

$$=2+\left(\frac{1}{3^2}+\frac{1}{3^5}+\ldots+\frac{1}{3^{3n-1}}\right)-\frac{3n+2}{3^{3(n+1)}}$$

$$=2\frac{1}{2}\left[1+\frac{1}{3^2}+\ldots+\frac{1}{3^{3n-1}}\right]-\frac{3n+2}{3^{3(n+1)}}$$

$1+\frac{1}{3^2}+\ldots+\frac{1}{3^{3n-4}}$: هومجموع $(n-1)$ حد الأولى من متتالية هندسية أساسها $\frac{1}{3^3}$،

يكون إذن:

$$S_n-\frac{1}{3^3}S_n=2+\frac{1}{3^2}\cdot\frac{1-\left(\frac{1}{3^3}\right)^n}{1-\frac{1}{3^3}}-\frac{3n+2}{3^{3(n+1)}}$$

$$\frac{26}{27}S_n=2+\frac{3}{26}\left(1-\frac{1}{3^{3n}}\right)-\frac{3n+2}{3^{3(n+1)}}$$

ومنه

$$S_n=2\cdot\frac{27}{26}+\frac{3\times 27}{26^2}\left(1-\frac{1}{3^{3n}}\right)-\frac{27}{26}\cdot\frac{3n+2}{3^{3(n+1)}}$$

$$=\frac{1486}{676}-\frac{1}{676}\cdot\frac{1}{3^{3(n-1)-1}}-\frac{1}{26}\cdot\frac{3n+2}{3^{3n}}$$

$$\lim_{n\to+\infty}S_n=\frac{1486}{676}\cong 2{,}1967$$

8. تمارين

تمرين 1 لتكن المتتالية (u_n) المعرفة على $\mathbb{N}$ بحدها العام

$$u_n=\frac{1}{(2n+1).(2n+3)}$$

بين أن (u_n) متناقصة وتنتهي إلى الصفر.

عين العددين a و b بحيث $\forall n\in\mathbb{N}\quad u_n=\frac{a}{2n+1}+\frac{b}{2n+3}$

جد المجموع $S_n=u_0+u_1+\ldots+u_n$ بدلالة n واستنتج نهاية S_n.

تمرين 2 بين أن كل من المتتاليات المعرفة من أجل $1\le n$ ، تقبل كلها نهايات يُطلب حسابها:

$u_n=\frac{n+1}{n}$ ، $u_n=\frac{n}{n+1}$ ، $u_n=\frac{1}{n^2+1}$ ، $u_n=\frac{n}{n^2+1}$

تمرين 3 أحسب، عندما تتقارب، نهاية المتتالية u_n في الحالات الآتية:

$n-\sqrt{n^2-n}$ ، $n+\sqrt[3]{1-n^3}$ ، 2^n-n^2 ، $2^n-3^n+n^{10}$ ، $(-2)^n+\frac{1}{3^n}$

تمرين 4 أدرس المتتالية الآتية $u_n=\sqrt{1+u_{n-1}}$ مع $u_0=\sqrt{3}$.

تمرين 5 أدرس المتتالية الآتية $u_n=\ln\left(1+u_{n-1}\right)$ مع $u_0\geq 0$. أحسب نهاية u_n.

تمرين 6 بين أن كل من المتتاليات المعرفة من أجل $1\leq n$ ، تقبل كلها نهايات يُطلب حسابها:

$u_n=\frac{n+1}{n}$ ، $u_n=\frac{n}{n+1}$ ، $u_n=\frac{1}{n^2+1}$ ، $u_n=\frac{n}{n^2+1}$

تمرين 7 نعتبر المتتالية العددية $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ المعرفة بالتدريج كما يلي:

$$\begin{cases} u_0=1 \\ u_{n+1}=\frac{1}{5}u_n+4, \; n\geq 1 \end{cases}$$

أ) أثبت أن المتتالية (u_n) محدودة من الأعلى بـــ5. بين أن (u_n) متزايدة تماما، ماذا تستنتج؟

ب) نضع من أجل كل n من $\mathbb{N}$: $v_n=u_n-5$

أثبت أن (v_n) متتالية هندسية. أكتب u_n بدلالة n، ثم احسب $\lim\limits_{x\to+\infty}u_n$.

تمرين 8 نعتبر المتتالية (u_n) حيث $\forall n\in\mathbb{N}\,,\; u_n=\frac{2^n-6}{3}$

أحسب u_0,u_1,u_2,u_3 وادرس اتجاه تغير المتتالية (u_n). ثم أحسب نهايتها.

أدرس المتتالية (u_n) حيث
$$\begin{cases} u_0=2 \\ u_n=\frac{3}{4-u_{n-1}}, \quad n\geq 1 \end{cases}$$

تمرين 9 أدرس المتتالية الآتية: $u_n=\sqrt{1+u_{n-1}}$ مع $u_0=\sqrt{3}$.

تمرين 10 أدرس تقارب المتتالية: $u_{n+1}=\sqrt{2u_n+3}$ مع $u_0>-\frac{3}{2}$.

تمرين 11 نعتبر المتتالية (u_n) المعرفة بالشكل $u_n=\ln\left(1+u_{n-1}\right)$ مع $u_0\geq 0$. أحسب نهاية u_n.

تمرين 12 أ) نعتبر المتتالية (U_n) المعرفة كما يلي:

$$\begin{cases} U_0=e \\ U_{n+1}=\sqrt{U_n} \quad ,n\geq 0 \end{cases}$$

نضع من أجل كل $n \in \mathbb{N}$، $V_n=\ln(U_n)$.

1. أثبت أنه من أجل كل عدد طبيعي n، يكون $V_{n+1}=\frac{V_n}{2}$. واستنتج طبيعة المتتالية (V_n).
2. هات عبارة V_n بدلالة n. واستنتج عبارة U_n بدلالة n.

ب) من أجل كل عدد طبيعي n، نضع:

$S_n=V_0+V_1+\cdots+V_n$ و $P_n=U_0\times U_1\times\cdots\times U_n$.

1. بين أن $P_n=e^{S_n}$.
2. عبر عن S_n بدلالة n. واستنتج عبارة P_n بدلالة n.

جـ) عين نهاية المتتالية (S_n)، واستنتج نهاية (P_n) .

تمرين 13 أ) نعرف المتالية التدريجية (u_n)، بالشكل:

$$\begin{cases} u_0=5 \\ 3u_{n+1}=u_n+4 \quad ,n\geq 0 \end{cases}$$

1. أحسب u_1 و u_2. ما هي النهايات الممكنة لـــ(u_n) ؟
2. أثبت أنه من أجل كل $n\ni\mathbb{N}$ يكون لدينا: $2\leq u_n$.
3. بين أن المتتالية (u_n) متناقصة مهما كان $n\ni\mathbb{N}$.
4. أستنتج أن (u_n) متقاربة، ثم أحسب نهايتها.

ب) نضع من أجل كل $n\ni\mathbb{N}$: $v_n=u_n-2$

1. بين أن (v_n) متتالية هندسية. واستنتج عبارة v_n بدلالة n. هل (v_n) متقاربة ؟
2. ليكن $S_n=v_0+v_1+\ldots+v_n$ و $T_n=u_0+u_1+\ldots+u_n$

عين عبارة S_n، ثم عبارة T_n بدلالة n. ثم أحسب $\lim\limits_{n\to\infty}S_n$ و $\lim\limits_{n\to\infty}T_n$

ماذا نقول عن السلسلتين: $\sum\limits_{n=0}^{+\infty}v_n$ و $\sum\limits_{n=0}^{+\infty}u_n$ ؟

تمرين 14 نعرف المتالية التدريجية (u_n)، حيث: $u_0=\frac{3}{2}$ و $u_n=\frac{2}{3-u_{n-1}}$ $(1\leq n)$

1. ما هي النهايات الممكنة لـــ(u_n) ؟
2. أثبت بالتراجع أنه من أجل كل $n\ni\mathbb{N}$، يكون لدينا $1\leq u_n\leq 2$.
3. بين أن (u_n) متناقصة، واستنتج أنها متقاربة .

تمرين 15 ما طبيعة كل من السلاسل الآتية المعرفة بحدودها العامة ؟

$$\frac{1}{9n+6},\quad \frac{1}{9n+6},\quad \frac{3n}{n\cdot(2n-1)\cdot(n+1)},\quad \frac{1}{\sqrt{n}},\quad \frac{n}{(2n+1)!},\quad n^n\cdot e^{-n}$$

تمرين 16 نفس السؤال السابق من أجل السلاسل الآتية.

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{2n+1},\quad \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{\ln n}{n},\quad \sum_{n=3}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{2^n}{n!},\quad \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n!}$$

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{n(n+3)}{(n+1)(n+2)(n+5)},\quad \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt[3]{8n^2-3n}},\quad \sum_{n=1}^{\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$$

تمرين 17 أدرس السلاسل الآتية:

$$\sum_{n\in\mathbb{N}}\frac{n}{\sqrt{n^5+1}} \ ،\ \sum_{n\in\mathbb{N}}\left(\sqrt{(n+1)^5}-\sqrt{n^3}\right) \ ،\ \sum_{n\in\mathbb{N}}\frac{(n!)^2}{(2n!)}$$

تمرين 18 أدرس تقارب كل من السلاسل الآتية:

$$،\ \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{2^n+1}\ ،\ \sum_{n=1}^{+\infty}\left(\frac{3n+1}{3n+3}\right)^2\ ،\ \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n(n+1)(n+2)}\ ،\ \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{2^n}\ ،\ \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{n+\sqrt{n}}{n^3+1}$$

$$،\ \sum_{n=1}^{+\infty}\left(\frac{-1}{\ln n}\right)^n\ ،\ \sum_{n=1}^{+\infty}\left(\frac{n}{2n+1}\right)^n\ ،\ \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{2^n}{n^{10}}\ ،\ \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1+n}{3n+2}\ ،\ \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{n}{3n-1}\ ،\ \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{\left(\sqrt{5}-1\right)^n}{n^2+1}$$

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^n n}{(n+1)\cdot e^n}\ ،\ \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{n^{10}}{n!}\ ،\ \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{2^n}\ ،\ \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{2^n}{1+2^n}\ ،\ \sum_{n=1}^{+\infty}\left(\frac{3n+1}{3n+3}\right)^2\ ،\ \sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^{n+1}\left(1+\frac{1}{10^n}\right)$$

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{-(-1)^n n}{n^2+1}\ ،\ \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{3n}{1+\ln n}\ ،\ \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{3n+2^n}{4^n}\ ،\ \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{n^2+2n+1}\ ،\ \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{\sqrt{n!}}\ ،\ \sum_{n=1}^{+\infty}n^4\cdot e^{-n^2}$$

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{\ln n}{2n^3-1}\ ،\ \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{4n^2-n+3}{n^2+2n}\ ،\ \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{3^n}{n^3}\ ،\ \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{\ln n}{n^2+3}\ ،\ \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^{n-1}2^n}{n^2}$$

الفصل الثاني

الدوال العددية

- عموميات حول الدوال العددية
- الدوال القابلة للاشتقاق
- تطبيقات المشتقات
- الدالة العكسية
- الدوال اللوغاريتمية والأسية
- تمارين

I. عموميات حول الدوال العددية

1.I تمهيد ومراجعة

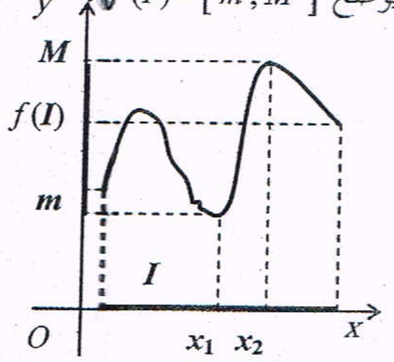
- الدالة العددية (الحقيقية) لمتغير حقيقي: هي الدالة التي مجموعة بدئها $\mathbb{R}$، ومجموعة وصولها هي $\mathbb{R}$.
  ونكتب $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ حيث $x \mapsto f(x)$
- **مجموعة التعريف دالة:** هي مجموعة القيم x التي تجعل $f(x)$ معرفة.
- **الدالة الزوجية** تحقق: $\forall x \in D_f \quad -x \in D_f \wedge f(-x) = f(x)$
- **الدالة الفردية** تحقق: $\forall x \in D_f \quad -x \in D_f \wedge f(-x) = -f(x)$
- تكون الدالة f **دورية** إذا وجد عدد حقيقي غير معدوم T: $\forall x \in D_f \quad f(x+T) = f(x)$
- **بيان الدالة** f $(\subset \mathbb{R} \times \mathbb{R})$ هو منحنى المعادلة $f(x) = 0$ في معلم كيفي للمستوى.
- **المجالات المفتوحة** في $\mathbb{R}$ تكون من الشكل: $\{\ \}$, $]a,+\infty[$, $]-\infty,b[$, $]a,b[$ حيث a و b من $\mathbb{R}$ مع $a<b$.
- **الدالة** المتزايدة: $\forall a,b \quad b \neq a \Rightarrow \dfrac{f(b)-f(a)}{b-a} \geq 0$
- **الدالة المتزايدة تماما:** $\forall a,b \quad b \neq a \Rightarrow \dfrac{f(b)-f(a)}{b-a} > 0$

تعريف مشابه للدالة المتناقصة.

- **الدالة الرتيبة** هي الدالة التي تكون إما متزايدة وإما متناقصة.
- **دالة رتيبة على مجال** هي الدالة التي يكون اقتصارها على هذا المجال رتيبة.

2.I صورة مجال مغلق بدالة مستمرة

كل دالة f مستمرة على مجال مغلق I، تكون محدودة من الأعلى بحدها الأعلى $M = \text{Sup} f$ ومحدودة من الأدنى بحدها الأدنى $m = \text{Inf} f$ (الشكل 1.2 يوضح $f(I) = [m, M]$).



شكل 1.2

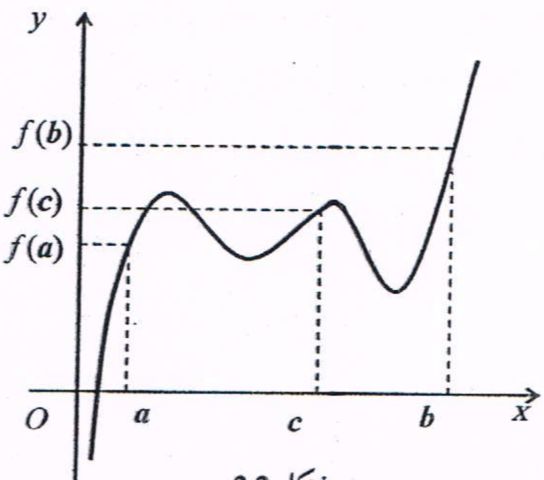
3.4 نظرية القيم المتوسطة

f دالة معرفة ومستمرة على $[a,b]$

من أجل كل قيمة y محصورة بين $f(a)$ و $f(b)$، توجد قيمة c محصورة بين a و b بحيث

$y=f(c)$

الشكل 2.2 يوضح $f(c)$ بين $f(a)$ و $f(b)$.



شكل 2.2

نتيجة

إذا كانت f معرفة ومستمرة على مجال مغلق ومحدود $[a,b]$، بحيث يكون $f(a)$ و $f(b)$ من إشارتين مختلفتين، فإن f تنعدم على الأقل عند قيمة c من $]a,b[$.

4.4 أمثلة

- **كثير الحدود** $a_0+a_1x+a_2x^2+a_3x^3$ $(0<a_3)$ **ينعدم عند قيمة على الأقل من** $\mathbb{R}$.

دالة كثير الحدود مستمرة على $\mathbb{R}$، فهي مستمرة على أي مجال $[a,b]$ من $\mathbb{R}$.

تبين بأنه يوجد بالفعل عددين a و b من $\mathbb{R}$ بحيث تكون صورتيهما من إشارتين متعاكستين.

لدينا $\lim\limits_{x\to+\infty}(a_0+a_1x+a_2x^2+a_3x^3)=+\infty$ الذي يعني بالتعويف

$$\forall\varepsilon\in\mathbb{R},\exists\eta\in\mathbb{R},\quad \forall x\in\mathbb{R}: x>\eta \Rightarrow f(x)>\varepsilon$$

ومنه نستنتج بأنه يوجد عدد حقيقي b بحيث $0<f(b)$

وكذلك عندما $\lim\limits_{x\to-\infty}(a_0+a_1x+a_2x^2+a_3x^3)=-\infty$ الذي يعني :

$$\forall\varepsilon\in\mathbb{R},\exists\eta\in\mathbb{R},\quad \forall x\in\mathbb{R}: x<\eta \Rightarrow f(x)<\varepsilon$$

ومنه نستنتج بأنه يوجد عدد حقيقي a بحيث $0>f(a)$

بتطبيق نظرية التزايدات المنتهية : $f(a)$ و $f(b)$ من إشارتين مختلفتين ،فالصفر يكون محصورا بينهما، وهو صورة لقيمة على الأقل محصورة ما بين a و b .

- نعتبر الدالة $f(x)$ المعرفة والمستمرة على $[0,2]$ بحيث $f(0)=f(2)$

نُبين بأنه يوجد α من $]0,1[$: $f(\alpha)=f(\alpha+1)$.

نعرف الدالة $g:[0,1]\to\mathbb{R}$ بحيث $g(x)=f(x+1)-f(x)$.

نلاحظ بأن $g(0)=f(1)-f(0)=-(f(2)-f(1))=-g(1)$

نظرية القيم المتوسطة تضمن وجود α من $]0,1[$، تحقق $g(\alpha)=0$ أو $f(\alpha)=f(\alpha+1)$

2. النهاية

1.2 مفهوم النهاية

ليكن x_0 من $]a,b[$ و f دالة عددية معرفة على $]a,b[$، لا تشترط أن تكون f معرفة عند x_0. تعني العبارة "عندما يؤول x إلى x_0، تؤول $f(x)$ إلى ℓ " أنه بإعطاء $\varepsilon>0$، يمكن إيجاد $\eta>0$ يرتبط بـ ε، بحيث $|x-x_0|<\eta$، الذي يقتضي $|f(x)-\ell|<\varepsilon$.

ونكتب $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=\ell$، مع x قد يختلف عن x_0.

مثلا: الدالة f التي تساوي $x-$ من أجل $x<0$ و 1 من أجل $x>0$ غير معرفة من أجل $x=0$، ولا تقبل نهاية عند $x=0$، $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x)\neq \lim\limits_{x\to 0^+} f(x)$.

2.2 تعريف

ليكن $c\in D_f$ مجموعة تعريف دالة. نقول أن f تقبل عن يمين c النهاية ℓ، ونكتب : $\lim\limits_{x\to c^+} f(x)=\ell$ إذا

$$\forall\varepsilon>0,\exists\eta>0,x\in D_f\cap]c,c+\eta[\ \Rightarrow |f(x)-\ell|<\varepsilon$$

ولدينا أيضا :

$$\lim_{x\to c^+} f(x)=+\infty \iff \forall M>\mathbb{R},\exists\eta>0,x\in D_f\cap]-\infty,c[\wedge]-\infty,c[<\eta\Rightarrow f(x)>M$$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=\ell \iff \forall\varepsilon>0,\exists\rho>0,x\in D_f\ \wedge x>\rho\Rightarrow|f(x)-\ell|<\varepsilon$$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=+\infty \text{ ssi } \forall M>\mathbb{R},\exists P>0,x\in D_f\ \wedge\ x>\rho\Rightarrow f(x)>M$$

وإذا قبلت الدالتان f و g نهايتين عند c فإن الدوال الآتية : $f+g$, $g\times f$, $\dfrac{f}{g}$ $(g\neq0)$ ستقبل أيضا نهايات مأخوذة عند c.

إضافة إلى ذلك، إذا قبلت دالة h نهاية عند $f(c)$، فإن $h\circ f$ ستقبل نهاية عند c.

3.2 نتائج

- ليكن $c \in D_f$. f دالة تقبل النهاية ℓ عند c . إذا قبلت الدالة g النهاية ℓ' عند c ، فإنه يكون :

إذا كان $f = g$ على مجال مفتوح I من $D_f \cap D_g$ ، فإن $\ell = \ell'$

إذا كان $f \geq g$ على مجال مفتوح I من $D_f \cap D_g$ ، فإن $\ell \geq \ell'$

- بفرض أن الدالة f تقبل النهاية ℓ عند c ، والدالة g تقبل نفس النهاية ℓ عند c . فإنه إذا ما تحققت المتراجحة المزدوجة $f \leq h \leq g$ على مجال مفتوح يشمل c ، فستقبل الدالة h النهاية ℓ عند c .

- بفرض أن $I =]a,+\infty[\subset D_f \cap D_g$.

إذا كانت $f \leq g$ على I و $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$ ، فإن $\lim\limits_{x \to +\infty} g(x) = +\infty$.

- ليكن $c \in \mathbb{R}$ ، الدالة $f(x)$ تقبل النهاية ℓ عند c إذا وإذا فقط من أجل كل متتالية $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ من عناصر D_f متقاربة نحو c ، تكون المتتالية $(f(x_n))_{n\in\mathbb{N}}$ متقاربة نحو ℓ .

3. الاستمرار

1.3 مفهوم الاستمرار

إذا افترضنا أن الدالة $f(x)$ المعرفة على المجال $]a,b[$ تقبل، عندما $x \to x_0$ ، النهاية ℓ (التي قد تختلف عن $f(x_0)$. في حالة العكس $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$ نقول أن f مستمرة عند x_0 .

تكون الدالة f مستمرة عند x_0 إذا تحقق: $\lim\limits_{x \to x_0^-} f(x) = \lim\limits_{x \to x_0^+} f(x) = f(x_0)$ $\quad x_0 \in D_f$

مثلا ندرس استمرارية الدالة:

$$f(x) = \begin{cases} x \sin\dfrac{1}{x} & , x \neq 0 \\ 0 & , x = 0 \end{cases}$$

f معرفة على $D_f = \mathbb{R}$. على $\mathbb{R}^*$ الدالة f مستمرة.

الاستمرار عن 0: $\quad f(0) = 0$ و $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = 0$. ومنه f مستمرة عند 0.

- إذا كانت دالة $f(x)$ مستمرة عند كل نقطة من مجال I من $\mathbb{R}$ ، نقول أن f مستمرة على المجال I .

تمرين

تعتبر الدالة $f(x)$ المعرفة على $[0,2]$ حيث

$$f(x)=\begin{cases} x\ , & x\in[0,1] \\ 2-x\ , & x\in]1,2] \end{cases}$$

برهن أن f مستمرة على المجال $[0,2]$

استخدام التعريف لحساب $f(x_0)$ عندما $x_0=1$.

2.3 الاستمرار والمتتالية

ليكن $c\in\mathbb{R}$، الدالة $f(x)$ مستمرة عند c إذا وإذا فقط من أجل كل متتالية $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ من عناصر D_f متقاربة نحو c، تكون المتتالية $(f(x_n))_{n\in\mathbb{N}}$ متقاربة نحو $f(c)$.

3.3 التمديد بالاستمرار

إذا كانت الدالة f غير معرفة عند x_0 مع $\lim\limits_{x\to x_0^+} f(x)=\lim\limits_{x\to x_0^-} f(x)$ ، فإنه يمكن تمديد f بالاستمرار كما يلي :

$$g(x)=\begin{cases} f(x) & ,\ x\neq x_0 \\ \lim\limits_{x\to x_0} f(x) & ,\ x=x_0 \end{cases}$$

4.3 قضية

ليكن $0<k$، إذا حققت دالة f على مجال I من D_f الشرط:

$$\forall x,y\in I\ ,\quad |f(x)-f(y)|\le k\,|x-y|$$

فإنها تكون مستمرة على I .

4. الاشتقاق

1.4 تعريف ونظرية

نفرض أن $f(x)$ مستمرة عند x_0. إذا افترضنا أن الدالة $\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ غير المعرفة عند $x=x_0$ تقبل نهاية عندما يؤول x إلى x_0، نقول أن الدالة $f(x)$ تقبل الاشتقاق عند النقطة x_0.

تسمى هذه النهاية العدد المشتق عند x_0.

f تقبل الاشتقاق عن x_0 $\Leftrightarrow$ وجدت النهاية $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$

أي إذا وفقط إذا وجد العدد المشتق $f'(x_0)$.

الشرطان الآتية متكافئين :

- الدالة f تقبل الاشتقاق عند a .
- يوجد $A \in \mathbb{R}$ وتوجد دالة ε معرفة على $I-\{a\}$ بحيث يكون من أجل كل $h \in \mathbb{R}$ يحقق :

$$\begin{cases} f(a+h)=f(a)+hA+h\varepsilon(h) \\ \lim\limits_{h \to 0}\varepsilon(h)=0 \end{cases}$$

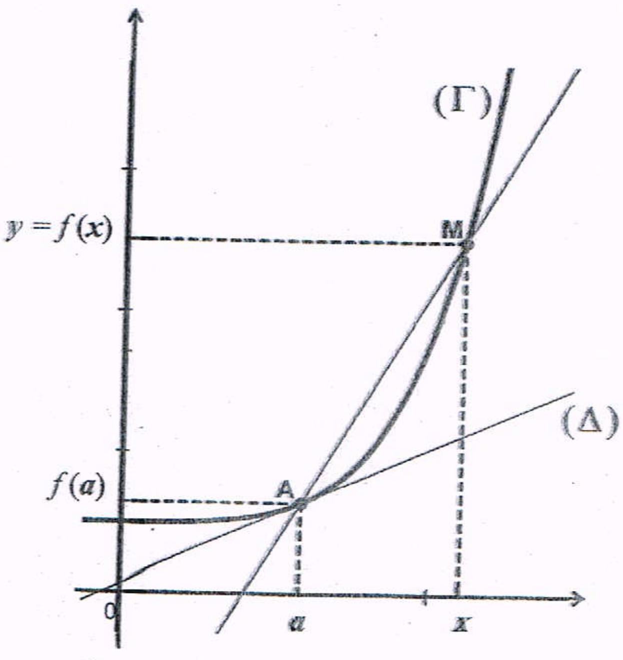
يكون لدينا إذا $A=f'(a)$

2.2.4 التفسير الهندسي

ليكن (Γ) المنحنى الممثل للدالة $f(x)$ في معلم كيفي. $A(a;f(a))$ و $M(x;f(x))$ من (Γ).

إذا كان $x \neq a$ فإن $A \neq M$، ويكون معامل توجيه المستقيم AM هو $\dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}$.

(الشكل 3.2)



شكل 3.2

إذا كانت الدالة f تقبل للاشتقاق عند النقطة a فإن AM ينتهي إلى المماس (Δ) لـ (Γ) عند a الذي معادلته : $y-f(a)=(x-a)f'(a)$ وغير الموازي لمحور التراتيب (الشكل 3.2).

3.4 الاشتقاق عن اليمين

f دالة معرفة على D . $x_0 \in D$.

f تقبل الاشتقاق عن يمين x_0 $\Leftrightarrow$ وجدت النهاية $\lim\limits_{x \to x_0^+} \dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$

أي إذا وجد العدد المشتق عن اليمين $f'(x_0+0) = f'(x_0^+)$

منحنى f يقبل نصف مماس غير عمودي عند $M(x_0, f(x_0))$

في هذه الحالة، معادلة المماس عند x_0 تُعطى بالعلاقة : $y-f(x_0)=f'(x_0)(x-x_0)$

نقول إن f تقبل للاشتقاق عن يمين x_0 إذا كانت النهاية الآتية موجودة (العدد المشتق عن يمين x_0):

$$f'_d(x_0)=\lim_{h\to 0^+}\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$$

نقول إن f تقبل للاشتقاق عن يمين x_0 إذا كانت النهاية الآتية موجودة (العدد المشتق عن يسار x_0):

$$f'_g(x_0)=\lim_{h\to 0^-}\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$$

4.4 تمرينان محلولان

• نعتبر الدالة g حيث:

$$g(x)=\begin{cases} e^{-\frac{1}{x^2}} , & x \neq 0 \\ 0 \quad , & x=0 \end{cases}$$

نعين مجموعة تعريف g ، وندرس استمرار وقابلية اشتقاقها عند $x_0=0$.

الحل :

بالإمكان دراسة تغيرات الدالة الزوجية $g(x)$ على نصف المجال $[0,+\infty[$.

نلاحظ بأن $g(x)$ مستمرة عند الصفر لأن: $\lim\limits_{x\to 0^-} e^{-\frac{1}{x^2}} = \lim\limits_{x\to 0^+} e^{-\frac{1}{x^2}} = 0$

من المساواة: $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{g(x)-g(x)}{x-0}=0$ نستنتج أن $g(x)$ تقبل الاشتقاق عند الصفر.

ولدينا

$$g'(x)=\begin{cases} \dfrac{2e^{-\frac{1}{x^2}}}{x^3}, & x\neq 0 \\ 0 \quad , & x=0 \end{cases}$$

والدالة g مستمرة ومشتقتها g' موجودة ولدينا أيضا $\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{2e^{-\frac{1}{x^2}}}{x^3}=\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{2e^{-\frac{1}{x^2}}}{x^3}=g'(0)=0$

ومنه $g'(x)$ مستمرة عند $x_0=0$.

• نعتبر الدالة $f(x)$ المعرفة على $\mathbb{R}$ كما يلي:

$$f(x)=\begin{cases} x^2\sin\frac{1}{x}, & x\neq 0 \\ 0, & x=0 \end{cases}$$

نحسب $f'(0)$ ، ونعين $f'(x)$ من أجل $x\neq 0$، وكذلك استمراوية $f'(x)$ عند $x_0=0$.

لدينا باستخدام التعريف : $f'(0)=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2\sin\frac{1}{x}}{x}=\lim\limits_{x\to 0}x\sin\frac{1}{x}=0$

والدالة f تقبل الاشتقاق عند $x_0=0$.

ونلاحظ من أجل $x\neq 0$، الدالة $f(x)$ تقبل الاشتقاق ، حيث :

$$f'(x)=2x\sin\frac{1}{x}-\cos\frac{1}{x}$$

وبما أن $\lim\limits_{x\to 0}x\sin\frac{1}{x}$ موجودة و $\lim\limits_{x\to 0}\cos\frac{1}{x}$ غير موجودة فإن $\lim\limits_{x\to 0}f'(x)$ غير موجودة .

والدالة f مستمرة ومشتقتها f' موجودة لكنها غير مستمرة عند $x_0=0$.

• نعتبر الدالة $f(x)$ المعرفة على $\mathbb{R}$ كما يلي:

$$f(x)=\begin{cases} \dfrac{\sin^2(\pi x)}{x-3}, & x\neq 3 \\ 0, & x=3 \end{cases}$$

ادرس قابلية اشتقاق الدالة f عند القيمة 3، ثم فسر النتيجة هندسيا .

الحل :

نلاحظ بأن الدالة f تقبل الاشتقاق على $\mathbb{R}-\{3\}$ (لكونها مركبة من دوال قابلة للاشتقاق) .

ندرس الاشتقاق عند $x_0=3$، يمكن ملاحظة أن الدالة f مستمرة عند $x_0=3$.

ندرس الاشتقاق عن يمين $x_0=3$: بوضع $x=3+h$ حيث $0<h$ ، يكون $h=x-3$، وبالتالي :

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(3+h)-f(3)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{\sin^2(\pi(3+h))}{h(h+3-3)}=\lim_{h\to 0}\frac{\sin^2(\pi(3+h))}{h\cdot h}=\lim_{h\to 0}\left(\frac{\pi\sin(\pi h)}{\pi h}\right)^2=\pi^2$$

وكذلك في الاشتقاق عن يسار $x_0=3$: نضع $x=3-h$ حيث $0<h$، فسيكون $h=3-x$ ونحصل أيضا على:

$$\lim_{h\to0}\frac{f(3-h)-f(3)}{h}=\lim_{h\to0}\frac{\sin^2(\pi(3-h))}{h(3-h+3)}=\lim_{h\to0}\frac{-\sin^2(\pi h)}{h(-h)}=\lim_{h\to0}\left(\frac{\pi\sin(\pi h)}{\pi h}\right)^2=\pi^2$$

منحنى f يقبل مماس عند $x_0=3$ معادلته $y=\pi^2(x-3)$، وهو متناظرا بالنسبة إلى $M(3,0)$.

5.4 استمرار دالة مشتقة

إذا كانت الدالة f تقبل للاشتقاق عند النقطة a، فإنها مستمرة عند a.

لدينا $$f(x)-f(a)=\left(\frac{f(x)-f(a)}{x-a}\right)\cdot(x-a)$$

بأخذ نهاية الطرفين عندما يؤول x إلى a:

$$\begin{aligned}\lim_{x\to a}f(x)-f(a)&=\lim_{x\to a}\left(\frac{f(x)-f(a)}{x-a}\right)\cdot(x-a)\\&=\lim_{x\to a}\left(\frac{f(x)-f(a)}{x-a}\right)\cdot\lim_{x\to a}(x-a)=f'(a)\cdot0=0\end{aligned}$$

وبالتالي $\lim_{x\to a}f(x)=f(a)$، مما يعني أن f مستمرة عند a.

ملاحظة عكس هذه النظرية غير صحيح.

5. الدوال القابلة للاشتقاق

تذكير

إذا كانت دالة f قابلة للاشتقاق على مجال من الشكل $[a-\alpha;a+\alpha]$ فإن الشرطان الآتيان متكافئين:

- f تقبل الاشتقاق عند a.
- f تقبل الاشتقاق عن يمين النقطة a وعن يسار النقطة a و $f'(a)=f'_d(a)=f'_g(a)$

1.5 تعريف الدالة المشتقة

f دالة عددية لمتغير حقيقي x من $D\subset\mathbb{R}$.

f تقبل الاشتقاق على D $\Leftrightarrow$ f تقبل الاشتقاق عند أية قيمة x_0 من D

2.5 عمليات على الدوال القابلة للاشتقاق

إذا كانت f و g دالتين تقبلان الاشتقاق على مجال I، فإن

- $f+g$ تقبل الاشتقاق على مجال I، ولدينا : $\forall x\in I \quad (f+g)'(x)=f'(x)+g'(x)$
- $f\cdot g$ تقبل الاشتقاق على مجال I، ولدينا : $\forall x\in I \quad (f\cdot g)'(x)=f'(x)\cdot g(x)+f(x).g'(x)$
- من أجل كل λ من $\mathbb{R}$، λf تقبل الاشتقاق على مجال I، ولدينا : $\forall x\in I \quad (\lambda f)'(x)=\lambda f'(x)$
- إذا كان $g(x)$ لا ينعدم على I فإن $\frac{f}{g}$ تقبل الاشتقاق على مجال I، ولدينا :

$$\forall x\in I \quad \left(\frac{f}{g}\right)'(x)=\frac{f'(x)\cdot g(x)-f(x)\cdot g'(x)}{g^2(x)}$$

مثلا الدالة $f(x)=\frac{\ln x}{1+x-\ln x}$ تقبل الاشتقاق على $\mathbb{R}_+^*$: $f'(x)=\frac{-1-x+x\ln x}{x(1+x-\ln x)^2}$

3.5 الاشتقاق والرتابة

- f دالة تقبل الاشتقاق على المجال I.

إذا كان من أجل كل x من I $f'(x)\geq 0$، فإن f تكون متزايدة على I.

إذا كان من أجل كل x من I $f'(x)>0$، فإن f تكون متزايدة تماما على I.

إذا كان من أجل كل x من I $f'(x)=0$، فإن f تكون ثابتة على I.

- إذا كانت الدالة f تقبل الاشتقاق عند x_0، وتبلغ أحد حديها عند x_0 فإن $f'(x_0)=0$.

إذا افترضنا أن $f(x_0)=\inf_{x\in I} f(x)$ فسيكون لدينا $\forall x\in I \quad f(x)-f(x_0)\geq 0$

وبما أن f تقبل الاشتقاق عند x_0، وبفرض $x-x_0<0$ فإن $f'(x_0)=\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}\leq 0$.

أما إذا كان $x-x_0>0$ فإن $f'(x_0)\geq 0$ وينتج في الأخير $f'(x_0)=0$.

- إذا كان $f'(x_0)=0$ و f' تغير إشارتها على جانبي x_0، فإن f تقبل قيمة حدية عند النقطة x_0.
- إذا كان $f''(x_0)=0$ و f'' تغير إشارتها على جانبي x_0، فإن f يقبل نقطة انعطاف عند النقطة x_0.

4.5 مشتق تركيب دالتين

إذا كانت f و g دالتين عدديتين معرفتين على المجالين المفتوحين I و J من $\mathbb{R}$: $f:I\to\mathbb{R}$ و $g:J\to\mathbb{R}$، بحيث:

$f(I)\subset J$

$a\in I$ و f تقبل الاشتقاق عند a .

g تقبل الاشتقاق عند $b=f(a)$.

فإن الدالة $g\circ f$ تقبل الاشتقاق عند a و $(g\circ f)'(a)=g'(f(a))\times f'(a)$

نتيجة

إذا كانت f تقبل الاشتقاق عند كل نقط المجال I و g تقبل الاشتقاق عند كل نقط المجال $f(I)$ فإن $g\circ f$ تقبل الاشتقاق عند كل نقط المجال I . ولدينا:

$$\forall x\in I\quad (g\circ f)'(x)=g'(f(x))\times f'(x)$$

5.5 أمثلة

- نحسب مشتق الدالة $\sin x=\cos(x-\frac{\pi}{2})$. بوضع $g(x)=\cos x$ و $f(x)=x-\frac{\pi}{2}$

يكون لدينا : $(g\circ f)(x)=\cos(x-\frac{\pi}{2})=\sin x$

ومنه $(g\circ f)'(x)=g'(f(x))\cdot f'(x)=-\sin(x-\frac{\pi}{2})\times 1=-\sin(x-\frac{\pi}{2})=\cos x$

ومنه العلاقة $\forall x\in\mathbb{R}\quad (\sin x)'=\cos x$

- مشتق دالة وحيد الحد $f(x)=x^n$ هو $f'(x)=nx^{n-1}$ وهذا من أجل كل عدد صحيح n.

- مشتق الدالة $f(x)=|x|$

من أجل $x\neq 0$: $f'(x)=\begin{cases}1 & :x>0\\ -1 & :x<0\end{cases}$

عند النقطة $a=0$ الدالة لا تقبل الاشتقاق لأن $f_d'(0)\neq f_g'(0)$.

- مشتق الدالة $f(x)=\cos x$. لدينا :

$$\lim_{x\to a}\frac{\cos x-\cos a}{x-a}=\lim_{x\to a}\frac{-2\sin\left(\frac{x+a}{2}\right).\sin\left(\frac{x-a}{2}\right)}{x-a}$$

$$=-\lim_{x\to a}\sin\left(\frac{x+a}{2}\right)\lim_{x\to a}\frac{\sin\left(\frac{x-a}{2}\right)}{\frac{x-a}{2}}=-\sin a\times 1=-\sin a$$

ومنه العلاقة $\forall x\in\mathbb{R}\quad (\cos x)'=-\sin x$.

- مشتق الدالة $f(x)=e^x$. لدينا :

$\lim_{x\to a}\frac{e^x-e^a}{x-a}=e^a\cdot\lim_{x\to a}\frac{e^{x-a}-1}{x-a}=e^a.\lim_{t\to 0}\frac{e^t-1}{t}=e^a\cdot 1=e^a$. ومنه $\forall x\in\mathbb{R}\quad (e^x)'=e^x$

* ننظر فيما إذا كانت الدالة الآتية تقبل الاشتقاق أم لا عند $x=0$:

$$f(x)=\begin{cases} x\sin\dfrac{1}{x} & ; x\neq 0 \\ 1 & ; x=0 \end{cases}$$

لدينا : $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim\limits_{x\to 0}\sin\dfrac{1}{x}$

إذا اخترنا $x=\dfrac{1}{n\pi}$ $(n\in\mathbb{N}^*)$ ، تكون النهاية: $\lim\limits_{x\to 0}\sin\dfrac{1}{x}=\lim\limits_{n\to+\infty}\sin n\pi=0$

أما إذا اخترنا $x=\dfrac{1}{(4n+1)\dfrac{\pi}{2}}$ $(n\in\mathbb{N})$ ، فيكون $\lim\limits_{x\to 0}\sin\dfrac{1}{x}=\lim\limits_{n\to+\infty}\sin(4n+1)\dfrac{\pi}{2}=1$.

بما أن النهايتين مختلفتين، فإن f لا يقبل الاشتقاق عند 0. وبالتالي f لا تقبل الاشتقاق على $\mathbb{R}$.

* نعتبر الدالة

$$f(x)=\begin{cases} x^2.\sin\dfrac{1}{x} & : x\neq 0, \\ 0 & : x=0. \end{cases}$$

هل يقبل f الاشتقاق عند نقطة $x\neq 0$ ؟

لدينا : $\lim\limits_{n\to 0}\dfrac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim\limits_{n\to 0}x\sin\dfrac{1}{x}=0=f'(0)$

$$0\leq\lim_{x\to 0}\left|x\sin\frac{1}{x}\right|\leq\lim_{n\to 0}|x|=0 \;\Rightarrow\; \lim_{n\to 0}x\sin\frac{1}{x}=0.$$

ومنه $f(x)$ تقبل الاشتقاق عند كل $x\in\mathbb{R}$.

6.5 تمارين محلولة

- f و g دالتان مستمرتان على $[a,b]$ وتقبلان الاشتقاق $]a,b[$.

بفرض أن $f(a)\leq g(a)$ ومن أجل كل x من $]a,b[$: $f'(x)\leq g'(x)$

نثبت أن $\forall x\in]a,b[,\ f(x)\leq g(x)$

الحل

لدينا

$$f(a)\leq g(a)\Leftrightarrow f(a)-g(a)\leq 0\Leftrightarrow (f-g)(a)\leq 0$$
$$\forall x\in]a,b[,\ f'(x)\leq g'(x)\Leftrightarrow f'(x)-g'(x)\leq 0\Leftrightarrow (f'-g')(x)\leq 0$$

أي أن الدالة $f-g$ على المجال $]a,b[$ متناقصة. ومنه

$$\forall x\in]a,b[,\ x>a\Rightarrow (f-g)(x)\leq(f-g)(a)\leq 0$$

- لتكن f دالة مستمرة على $[a,b]$ بحيث $a<f(a)$ و $f(b)<b$

يفرض أن $f(a)\leq g(a)$ ومن أجل كل x من $]a,b[$: $f'(x)\leq g'(x)$

نثبت أنه يوجد c من $]a,b[$ بحيث $f(c)=c$

الحل

من أجل ذلك نعتبر الدالة $g(x)=f(x)-x$. g مستمرة على $[a,b]$، ولدينا :

$$a<f(a) \Leftrightarrow f(a)-a>0 \Leftrightarrow g(a)>0$$
$$f(b)<b \Leftrightarrow f(b)-b<0 \Leftrightarrow g(b)<0$$

ومنه يوجد c من $]a,b[$ بحيث $g(c)=0$ أي $f(c)=c$

- لتكن الدالة $g(x)$ المعرفة بالشكل:

$$g(x)=\begin{cases}\dfrac{x}{e^x-1}, & x\neq 0\\ 1, & x=0\end{cases}$$

1. بيـن أن $g(x)$ مستمرة وتقبل الاشتقاق عند $x_0=0$. أحسب $g'(0)$.
2. ادرس تغيرات $g(x)$ على مجموعة تعريفها، وأثبت أن منحناها (Γ) يقبل خط مقاربا مائلا.
3. هـات معادلة المماس للمنحنى البياني الممثل للدالة g عند النقطة التي فاصلها $x_0=0$.

الحل

1. دراسة الاستمرار والاشتقاق لـ $g(x)$ عند $x_0=0$.

- $g(x)$ مستمرة عند الصفر لأن: $g(0)=\lim\limits_{x\to 0^-} g(x)=\lim\limits_{x\to 0^+} g(x)=+1$

- ومن العلاقة: $g'(0)=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{g(x)-g(0)}{x-0}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\frac{x}{e^x-1}-1}{x-0}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x-e^x+1}{x(e^x-1)}=-\dfrac{1}{2}$,

ومنه $g(x)$ تقبل الاشتقاق عند الصفر.

$g(x)$ مستمرة وتقبل الاشتقاق على المجال $]-\infty,+\infty[$: حيث: $f'(x)=\dfrac{-x\,e^x+e^x-1}{(e^x-1)^2}$

ولدينا : $\lim\limits_{x\to -\infty} g(x)=+\infty$ و $\lim\limits_{x\to +\infty} g(x)=0$

$\lim\limits_{x\to -\infty}(g(x)-x)=0$ و $\lim\limits_{x\to -\infty}\dfrac{g(x)}{x}=-1$

المنحنى (Γ) يقبل خطا مقاربا مائلا معادلته : $y=-x$ (الشكل 41).

جدول تغيرات $g(x)$:

x	$-\infty$ $\qquad$ $+\infty$
$g'(x)$	$-$
$g(x)$	$+\infty \searrow 0$

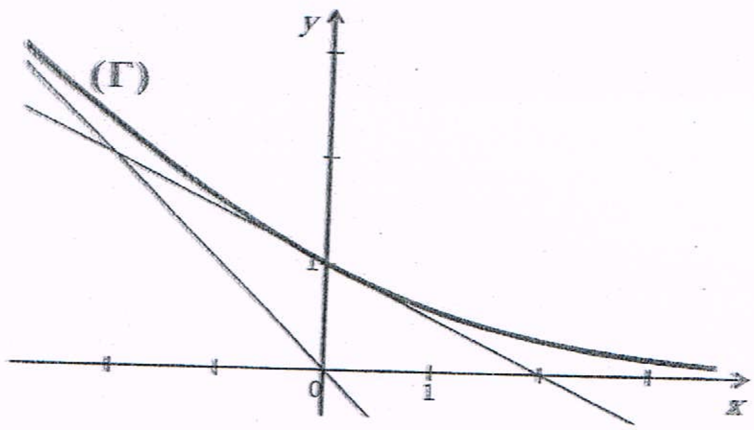
2. معادلة المماس للمنحنى البياني الممثل للدالة g عند النقطة التي فاصلتها $x_0 = 0$.

من النشر المحدود من الرتبة الأولى بجوار الصفر للدالة $g(x)$:

$$g(x) = g(0) + g'(0) \cdot x + o(x)$$

$$g(x) = 1 - \tfrac{1}{2}x + o(x)$$

تنتج معادلة المماس لمنحنى $y = g(x)$ عند نقطة المبدأ: $\quad y = 1 - \frac{1}{2}x$.



شكل 4.2

6. الدالة العكسية

1.6. شرط وجود الدالة العكسية

إذا كانت الدالة العددية f رتيبة تماما على المجال I ومستمرة على I فإن:

- $f(I)$ هو مجال.
- واقتصار f على I تقابل.

الدالة f، تقبل دالة عكسية f^{-1}، وهي أيضا رتيبة (بنفس تغير f على I)، ومستمرة على I .

2.6 ملاحظة

- إذا أعطيت f بتمثيلها البياني في معلم متجانس، فإنه تمثيل f^{-1} (في نفس المعلم) يكون بالتناظر الذي محوره المستقيم $y=x$.
- وإذا قبلت f الاشتقاق على I ، وكانت هذه المشتقة غير معدومة، فإن f^{-1} تقبل أيضا الاشتقاق على $f(I)$، ولدينا:

$$\forall x \in I\ ,\ f \circ f^{-1}(x)=x$$

$$\forall x \in I\ ,\ f'\left(f^{-1}(x)\right)\cdot\left(f^{-1}\right)'(x)=1$$

ومنه

$$\left(f^{-1}\right)'(x)=\frac{1}{f'\left(f^{-1}(x)\right)} \quad f'\neq 0$$

3.6 تمرين محلول

لتكن f دالة عددية حيث :

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{\sqrt{-1+2x}-1}{x-1} & , x\neq 1\\ +1 & , x=1\end{cases}$$

1. عين D_f مجموعة تعريف f . وادرس استمرار الدالة $f(x)$ على D_f .
2. ادرس قابلية اشتقاق f على D_f، ثم عين $f'(x)$.
3. ادرس تغيرات f ، ثم بين أن f هي تطبيق تقابلي من D_f في مجموعة قيمها.
4. هل تقبل f^{-1} الاشتقاق عند $y_0=f(1)$ ؟ في حالة نعم، أحسب $f^{-1}\left(f(1)\right)$.

الحل

1. تعيين D_f واستمرارية $f(x)$.

مجموعة تعريف f : $D_f=[1/2,\ +\infty[$.

الدالة f مستمرة على $D_f=[1/2,\ 1[\cup]1,\ +\infty[$ وعند $x_0=1$، لدينا :

$$\lim_{x\to 1} f(x)=\lim_{x\to 1}\frac{\sqrt{-1+2x}-1}{x-1}=f(1)=1$$

ومنه f مستمرة على D_f .

2. قابلية اشتقاق f عند $x_0=1$,

الدالة f تقبل الاشتقاق على $]1/2,\ 1[\cup]1,\ +\infty[$ (مركبة من دوال قابلة لاشتقاق) :

$$f'(x)=\frac{\sqrt{2x-1}-x}{\sqrt{2x-1}(x-1)^2}$$

الاشتقاق عند $x_0=1$، لدينا :

$$\lim_{x\to 1}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim_{x\to 1}\frac{\frac{\sqrt{-1+2x}-1}{x-1}-1}{x-1}=\lim_{x\to 1}\frac{\sqrt{-1+2x}-x}{(x-1)^2}=$$

$$\lim_{x\to 1}\frac{\left(\sqrt{-1+2x}-x\right)\left(\sqrt{-1+2x}+x\right)}{\left(\sqrt{-1+2x}+x\right)(x-1)^2}=\lim_{x\to 1}\frac{-\cancel{(x-1)^2}}{\left(\sqrt{-1+2x}+x\right)\cancel{(x-1)^2}}=-\frac{1}{2}$$

والدالة f تقبل الاشتقاق عند $x_0=1$:

الاشتقاق عن يمين $x_0=1/2$، لدينا : $f'(1)=-\frac{1}{2}$

$$\lim_{x\to\frac{1}{2}^+}\frac{f(x)-f(1/2)}{x-1/2}=\lim_{x\to\frac{1}{2}^+}\frac{\frac{\sqrt{-1+2x}-1}{x-1}-0}{x-\frac{1}{2}}=\lim_{x\to\frac{1}{2}^+}2\frac{\sqrt{-1+2x}-1}{(x-1)(2x-1)}=$$

$$\lim_{x\to\frac{1}{2}^+}\frac{\left(\sqrt{-1+2x}-1\right)\left(\sqrt{-1+2x}+1\right)}{(x-1)(2x-1)\left(\sqrt{-1+2x}+1\right)}=\lim_{x\to\frac{1}{2}^+}\frac{2\,\cancel{(2x-1)}}{\left(\sqrt{-1+2x}+1\right)(x-1)\,\cancel{(2x-1)}}=+\infty$$

والدالة f لا تقبل الاشتقاق عن يمين $x_0=1/2$.

خلاصة : الدالة f تقبل الاشتقاق على $]1/2,+\infty[$: ومشتقتها على هذا المجال هي:

$$f'(x)=\frac{\sqrt{2x-1}-x}{\sqrt{2x-1}(x-1)^2}$$

3. لدينا من أجل كل x من $]1/2,+\infty[$: $f'(x)=\frac{\sqrt{2x-1}-x}{\sqrt{2x-1}(x-1)^2}=\frac{-1}{\sqrt{2x-1}(\sqrt{2x-1}+x)}$

وكذلك لدينا $f(1/2)=2$ و $\lim_{x\to+\infty}f(x)=0$ ، ($y=0$ خط مقارب)، والدالة f متناقصة على D_f .

• نلاحظ بأن الدالة f مستمرة ومتناقصة تماما على D_f.

إذن f تطبيق تقابلي من $D_f=[1/2,+\infty[$ في المجال $]0,2]$، والتطبيق العكسي f^{-1} موجود.

وكذلك f^{-1} مستمرة ومتناقصة تماما على $]0,2]$).

لدينا : $f^{-1}(f(1))=f^{-1}(1)=f(1)=1$ ، $f'(1)=-\frac{1}{2}\ (\neq 0)$

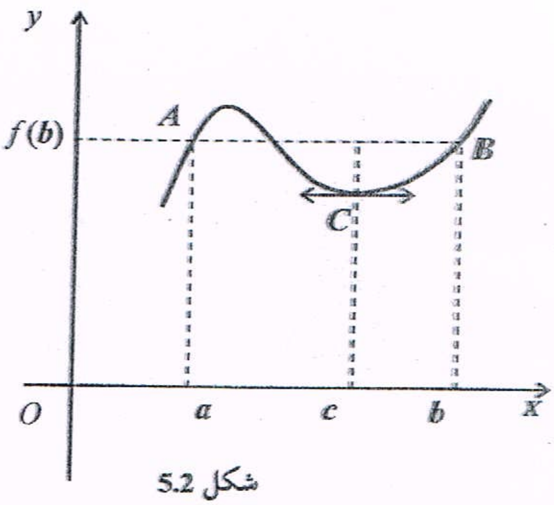
f^{-1} تقبل الاشتقاق عند $y_0=f(1)$ ولدينا $(f^{-1})'(1)=\frac{1}{f'(1)}=\frac{1}{-1/2}=-2$

7. تطبيقات المشتقات

1.7 نظرية رول

إذا كانت الدالة f
- مستمرة على $[a,b]$ ،
- قابلة للاشتقاق على $]a,b[$ ،
- بحيث $f(a)=f(b)$.

فإنه توجد على الأقل قيمة c من $]a,b[$ بحيث $f'(c)=0$



شكل 5.2

يدل التمثيل الهندسي على وجود نقطة واحدة c على الأقل من القوس $\widehat{AB}$ (A تختلف عن B) بحيث يكـــون المماس عندها يوازي Ox، وقد لا تكون هذه النقطة وحيدة . (الشكل 5.2).

2.7 الحساب على المشتقات

لتكن f و g دالتين معرفتين ومستمرتين على $[a,b]$ وقابلتين للاشتقاق على $]a,b[$. بفرض أن الدالـــة المشتقة g' لا تنعدم على $]a,b[$، عندئذ يوجد عدد α من المجال $]a,b[$ بحيث :

$$\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}=\frac{f'(\alpha)}{g'(\alpha)}$$

البرهان

على $[a,b]$ نعتبر الدالة h : $h(x)=f(x)-\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}g(x)$. h تحقق نظرية رول .

ومنه يوجد α من $]a,b[$ بحيث $h'(\alpha)=0$. ولدينا $h'(x)=f'(x)-\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}g'(x)$

فإن $g'(\alpha)=0$ $h'(\alpha)=f'(\alpha)-\dfrac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}$ ، وبالتالي $\dfrac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}=\dfrac{f'(\alpha)}{g'(\alpha)}$

3.7 قاعدة L'Hôpital

لتكن $f:]a,b[\to\mathbb{R}$ و $g:]a,b[\to\mathbb{R}$ دالتين قابلتين للاشتقاق على مجال $]a,b[$ ، وليكن α من المجال $]a,b[$. إذا كانت النهاية $\lim\limits_{x\to\alpha}\dfrac{f'(x)}{g'(x)}$ موجودة ، فإن النهاية $\lim\limits_{x\to\alpha}\dfrac{f(x)-f(\alpha)}{g(x)-g(\alpha)}$ موجودة، بحيث :

$$\lim_{x\to\alpha}\frac{f(x)-f(\alpha)}{g(x)-g(\alpha)}=\lim_{x\to\alpha}\frac{f'(x)}{g'(x)}$$

ملاحظة

عندما يكون $f(\alpha)=g(\alpha)=0$ ، فأن $\lim\limits_{x\to\alpha}\dfrac{f(x)}{g(x)}=\lim\limits_{x\to\alpha}\dfrac{f'(x)}{g'(x)}$.

4.7 أمثلة

- شروط نظرية رول تتحقق على الدالة $f(x)=x\cdot(x-2)\cdot(x+2)$

$$f(-2)=f(0)=f(2)\ ,\ \ f'(x)=3x^2-4$$

حسب رول فإن $f'(x)$ سينعدم عند x_0 من $]-2,0[$ وينعدم أيضا عند x_1 من $]0,2[$ وهذا ما تحققه المعادلة $f'(x)=3x^2-4$ على المجالين $]-2,0[$ و $]0,2[$ ، حيث نجد $x_0=-\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ ، $x_1=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

سؤال : هل يمكن تطبيق نظرية رول على الدالة $f(x)=\dfrac{x^2-4x}{x-2}$ على $[0;2]$ ؟

- المعادلة $e^{-x}=x$ تقبل حلا وحيدا x_0 من المجال $I=]0,1[$.

بوضع $f(x)=x-e^{-x}$، يكون لدينا: f مستمرة على I و $f(0)=-1<0$ و $f(1)=1-\frac{1}{e}>0$.
وحسب النتيجة السابقة، توجد قيمة x_0 من المجال المفتوح $]0,1[$ بحيث $f(x_0)=0$,
x_0 وحيد. لأنه لو كان معه x_1 من $]0,1[$ بحيث $f(x_1)=0$, لكان $f(x_0)=f(x_1)=0$ الأمر الذي يتطلب، حسب رول، وجود x'_0 من $]x_0,x_1[$ بحيث $f'(x'_0)=0$. وهذا محال لأن $f'(x'_0)\neq 0$.

- يبيّن المثال التالي أن شروط رول ليست لازمة :

$$f(x)=\begin{cases}x^2 & : \quad x\in]-1,1[\\ 0 & : \quad x=\pm 1\end{cases}$$

هذه الدالة ليست مستمرة عند طرفي المجال $[-1,1]$ ، ورغم ذلك لدينا $f'(0)=0$.

5.7 صيغة التزايدات المنتهية

إذا كانت دالة f مستمرة على $[a,b]$ وتقبل الاشتقاق على $]a,b[$، فإنه توجد على الأقل قيمة c من $]a,b[$ بحيث $f(b)-f(a)=(b-a)f'(c)$.

أي يوجد على الأقل θ من $]0;1[$، بحيث $f(b)-f(a)=(b-a)f'(a+\theta(b-a))$ (2)

وبوضع $b=a+h$ تأخذ العلاقة (2) الشكل: $f(a+h)-f(a)=hf'(a+\theta h)$

أمثلة

- الدالة $f(x)=\ln x$ تحقق شروط تطبيق نظرية التزايدات المنتهية على $[0;x]$، $x>0$، ومنه $0<x$

$$\exists c\in]x;x+1[\quad \ln(x+1)-\ln(x)=\frac{1}{c}$$

أو

$$\exists \theta\in]0;1[\quad \ln(x+1)-\ln(x)=\frac{1}{x+\theta}$$

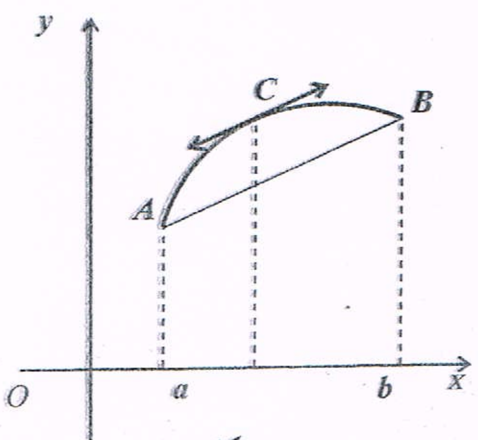
- طبق نظرية التزايدات المنتهية على الدالة $f(x)=e^{x}$، على $[0;x]$، $x>0$، $0<x$، بعد التحقق من شروطها.

مجموعة التعريف f هي $D_f=[0;+\infty[$، و f تقبل الاشتقاق على $D=]0;+\infty[$،

(f لا تقبل الاشتقاق عند 0 لأن $\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^{\sqrt{x}}-1}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{1}{\sqrt{x}}\frac{e^{\sqrt{x}}-1}{\sqrt{x}}=+\infty$)

لدينا من أجل $0<x$ $\quad f'(x)=\frac{e^{\sqrt{x}}}{2\sqrt{x}}$

التمثيل الهندسي :



شكل 6.2

يدل التمثيل الهندسي على وجود نقطة أو أكثر من القوس $\widehat{AB}$ بحيث يكون المماس للمنحنى يوازي الوتر AB. (معامل توجيه المستقيم AB هو $\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$) (الشكل 6.2).

6.7 نتيجة

لتكن f دالة معرفة ومستمرة على المجال $[a,b]$، وقابلة للاشتقاق على المفتوح $]a,b[$. نفرض وجود ثابتين موجبين m و M بحيث يكون

$$\forall x\in]a,b[: \quad m\leq f'(x)\leq M .$$

عندئذ يكون :

$$m\leq \frac{f(b)-f(a)}{b-a}\leq M .$$

تمرين

- حقق نظرية التزايدات المنتهية على الدالة $f(x)=e^x$ من أجل $a=0$ و $b=e$.
- هل شروط نظرية التزايدات المنتهية متحققة على المجال $[-1,+1]$ بالنسبة للدالتين : $\sqrt{|x|}$ و $\sqrt[3]{x}$ ؟

7.7 أمثلة

- **إثبات من أجل كل x و y من $\mathbb{R}$:** $\quad |\sin y-\sin x|\leq|y-x|$

عندما $x<y$ ، الدالة $\sin$ معرفة ومستمرة على المجال $[x,y]$ وتقبل الاشتقاق على $]x,y[$ ، فحسب نظرية التزايدت المنتهية توجد على الأقل قيمة c من $]a,b[$ بحيث $\sin y-\sin x=(y-x)\cos c$

وبما أن $\forall t\in\mathbb{R}\ \ |\cos t|\leq 1$ ، نستنتج $|\sin y-\sin x|\leq|y-x|$

- **إثبات من أجل كل $0<x$:** $\quad \frac{1}{x+1}\leq \ln(x+1)-\ln(x)\leq\frac{1}{x}$

نعتبر الدالة $f(x)=\ln(x)$ المعرفة على $\mathbb{R}_+^*$. لدينا $f'(x)=\frac{1}{x}$

حسب نظرية التزايدات المنتهية $\quad \exists c\in]x,x+1[,\ f(x+1)-f(x)=(x+1-x)f'(c)=\frac{1}{c}$

وبما أن $0<x<c<x+1$ فإن $\frac{1}{x+1}<\frac{1}{c}<\frac{1}{x}$ أي $\frac{1}{x+1}\leq\ln(x+1)-\ln(x)\leq\frac{1}{x}$.

تمرين

- f و g دالتان تقبلان الاشتقاق على $[a,b]$ بحيث : $\quad \forall x\in[a,b],\ \ |f'(x)|\leq g'(x)$

برهن أن $\quad |f(b)-f(a)|\leq g(b)-g(a)$

- **نعتبر الدالة $f(x)$ المعرفة والمستمرة على $[0,2]$.**

لنبين بأنه يوجد α من $[0,2]$: $\quad 7f(0)+10f(2)=23f(\alpha)$

بما أن $f(x)$ مستمرة على $[0,5]$ فإنها تدرك حضيضها m وذروتها M ويكون لدينا :

$$f\left(\left[0,2\right]\right)=\left[m\,,M\,\right]$$

إذن
$$m\le\frac{7f\,(0)+10f\,(2)}{23}\le M$$

ومنه يوجد α من $\left[0,2\right]$:
$$f\,(\alpha)=\frac{7f\,(0)+10f\,(2)}{23}$$

8.7 مخطط دراسة دالة عددية

في دراسة دالة عددية نتبع ما يلي:

- مجموعة التعريف.
- محاولة إرجاع مجموعة التعريف (الدورية، الفردية، ...).
- المشتقة ودراسة إشارتها.
- جدول التغيرات.
- حساب قيم النهايات التي تساعد في إنهاء جدول التغيرات.
- تعيين الخطوط المقاربة المستقيمة والمائلة.
- تحديد النقاط الخاصة: التقاطع مع المحورين، نقطة الانعطاف، ...
- رسم المنحنى.

9.7 تمرين محلول

نعتبر الدالة العددية $f\left(x\right)=-(x^{2}+x-1)e^{x}$

1. أدرس تغيرات f وفروعها اللانهائية ؟
2. بين أن (Γ): منحنى f يقبل نقطتي انعطاف، يطلب تعيين إحداثياتها.
3. ارسم المنحنى (Γ) والمستقيمين المماسين عند نقطتي الانعطاف في نفس المعلم.
4. أثبت أن (Γ) يقطع محور الفواصل في نقطة فاصلتها x_0 تحقق: $-1{,}62>x_0>+1{,}60-$
5. جد دالة أصلية للدالة f على $\mathbb{R}$, ثم احسب المساحة S للحيز المحدد بالمنحنى (Γ) والمستقيمات $y=0$ و $x=-\frac{1}{2}$ و $x=-2.5$.

الحل:

1. جدول تغيرات f

x	$-\infty$		-1		2		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	e	$\searrow$	0.67	$\nearrow$	0

2. الدالة المشتقة الأولى: $\forall x \in \mathbb{R} \quad f'(x) = -(x^2 - x - 2)e^{-x}$

الفروع اللانهائية: في جوار $(-\infty)$ يوجد فرع لانهائي باتجاه المحور الأفقي.

3. الدالة المشتقة الثانية ونقاط الانعطاف:

لدينا: $\forall x \in \mathbb{R} \quad f''(x) = (-x^2 + 3x + 1)e^{-x}$

المشتقة الثانية تنعدم عند كل من $x_1 = -\frac{1-\sqrt{13}}{2} \approx -0.303$ و $x_2 = \frac{1+\sqrt{13}}{2} \approx 3.303$، وتغير إشارتها عندهما . إذن للمنحنى (Γ) نقطتي انعطاف فاصلتاهما: x_1 و x_2: $f(x_1) \approx 1.639$ و $f(x_2) \approx -0.485$ (الشكل 7.2).

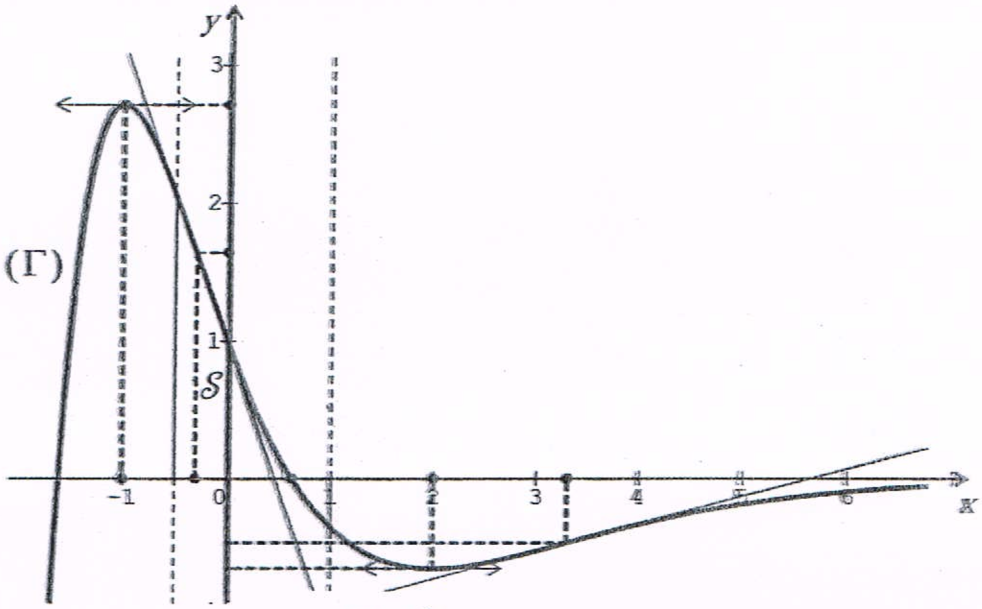
الدالة الأصلية لـ f على $\mathbb{R}$:

$F(x) = \int f(x)\, dx = x(x^2 + 3x + 2)e^{x} + c$ حيث c ثابت اختياري

وتكون المساحة بالوحدات المربعة : $S = \left| \int_{-0.5}^{1} f(x)\, dx \right| = 0.322$

1) تقاطع (Γ) مع محور الفواصل :

الدالة $x \mapsto f(x)$ مستمرة ومتناقصة تماما على $[0.61, 0.62]$ حيث $f(0.61) \times f(0.62) < 0$



شكل 7.2

حسب نظرية القيم المتوسطة، فإنه يوجد عدد حقيقي وحيد x_0 من $]0.61, 0.62[$ بحيث $f(x_0)=0$.

هندسيا: المنحنى (Γ) يقطع محور الفواصل في النقطة ذات الفاصلة $x_0 \approx 0.618$.

8 الدوال اللوغاريتمية والأسية

تسمى الدالة اللوغاريتمية النيبيرية، الدالة الأصلية على المجال $]0,+\infty[$ للدالة $x \mapsto \frac{1}{x}$ والتي تنعدم من أجل القيمة 1 للمتغير x . ورمزها كما هو معلوم $\ln$ أو $\log$.

مجموعة تعريفها هي $\mathbb{R}_+^*$ ، ولدينا إذن بالتعريف: $\forall x>0,\quad \ln x=\int_1^x \frac{dt}{t}$

التهايات

$$\lim_{x\to+\infty}(\ln x)=+\infty,\ \lim_{x\to 0^+}(\ln x)=-\infty,\ \lim_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{x}=0^+,\ \lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)}{x}=1$$

خواص

- على المجال $]0,+\infty[$: $a\in\mathbb{R}^*$ حيث $f(x)=\ln|ax| \Rightarrow f'(x)=\frac{1}{x}$
- إذا كانت الدالة $u(x)$ تقبل الاشتقاق وتحافظ على إشارتها في مجال I، فإن الدالة $f: x\mapsto \ln|u(x)|$ تقبل الاشتقاق على I، ويكون: $f'(x)=\frac{u'(x)}{u(x)}$
- إذا كانت الدالتان $u(x)$ و $v(x)$ تقبلان الاشتقاق ولا تنعدمان على المجال I فإن

$$\forall x \in I\ ,\ f(x)=u(x)\cdot v(x)\ \Rightarrow\ \frac{f'(x)}{f(x)}=\frac{u'(x)}{u(x)}+\frac{v'(x)}{v(x)}$$

$$\forall x \in I\ ,\quad f(x)=\frac{u(x)}{v(x)}\ \Rightarrow\ \frac{f'(x)}{f(x)}=\frac{u'(x)}{u(x)}-\frac{v'(x)}{v(x)}$$

$$\forall x \in I\ ,\quad f(x)=u^n(x)\ \Rightarrow\ \frac{f'(x)}{f(x)}=n\cdot\frac{u'(x)}{u(x)}\qquad (n\in\mathbb{Z})$$

خواص

$$\ln(u\cdot v)=\ln u+\ln v$$

$$\ln\frac{u}{v}=\ln u-\ln v$$

$$x>0,\ n\in\mathbb{Q}\quad \ln x^n=n\ln x$$

العدد e

الدالة اللوغاريتمية النيبيرية، تنعدم من أجل $x=1$، وهي مستمرة ومتزايدة تماما على $\mathbb{R}_+^*$.

توجد قيمة لـــ x: $\ln x=1$، وهي العدد e الذي نسميه **الأساس النيبيري**، يحقق هذه المعادلة ، $2,718...$ قيمة تقريبية له .

ملاحظة

قد تستخدم في الحسابات أسس للوغاريتمات أخرى، مثل الأساس العشري أو الثنائي.

الدالة اللوغاريتمية ذات الأساس a، هي الدالة $x\mapsto \log_a x=\dfrac{\ln x}{\ln a}$

(لها نفس تغيرات الدالة اللوغاريتمية النيبيرية). منحناهما موضح في (الشكل 8.2).

جدول تغيرات $x\mapsto \ln x$

x	0		1		e		$+\infty$
$(\ln x)'$		$+$	0	$+$	0	$+$	
$\ln x$	$-\infty$	$\nearrow$	0	$\nearrow$	1	$\nearrow$	$+\infty$

الدالة الأسية النيبيرية

الدالة الأسية ذات الأساس النيبيري e، التي نرمز لها بـــ $x\mapsto e^x$، هي الدالة العكسية للدالة $\ln$، فهي مستمرة ومتزايدة تماما من $\mathbb{R}_+^*$ في $\mathbb{R}$. ولدينا: $\quad y=e^x \iff x=\ln x\ ,\ x>0$

خواص ونهايات

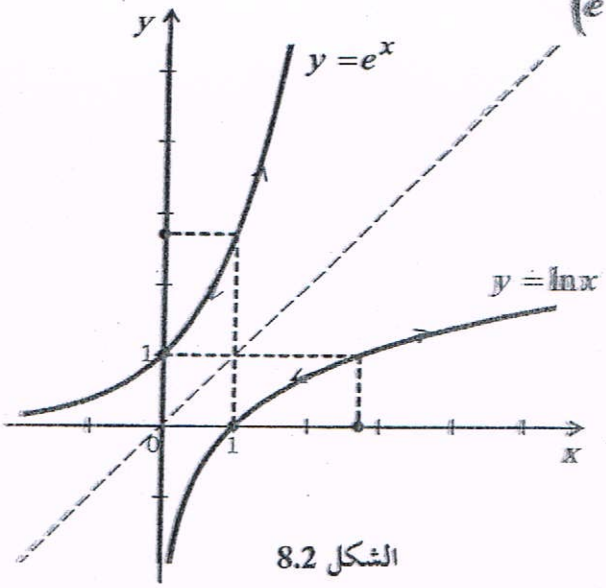
$$\frac{e^x}{e^y}=e^{x-y}\ ,\ e^x\cdot e^y=e^{x+y}\ ,\ \left(e^x\right)^y=e^{x\cdot y}$$

$$\lim_{x\to+\infty}e^x=+\infty,\ \lim_{x\to0}x\cdot e^x=0,\ \lim_{x\to+\infty}\frac{e^x}{x}=+\infty,\ \lim_{x\to0}\frac{e^x-1}{x}=1$$

الاشتقاق

- إذا كانت الدالة $u(x)$ تقبل على مجال I، فإن الدالة $x\mapsto e^{u(x)}$ تقبل الاشتقاق على I:

$$\left(e^{u(x)}\right)'=u'(x)\cdot e^{u(x)}$$



الشكل 8.2

9) تمارين محلولة

- نعتبر الدالة f حيث:

$$f(x)=\begin{cases}x^3\cdot\ln\left(x^2\right)\ , & x\neq0\\ 0\ , & x=0\end{cases}$$

أ. عين D_f مجموعة تعريف f. ثم أدرس استمرار وقابلية اشتقاق f على D_f.

ب. ادرس تغيرات f، وأنشئ منحناها (Γ) في معلم متعامد ومتجانس $(O,\vec{i},\vec{j})$.

حدد وضعية المماس عند النقطة O.

ج. بالاستعانة بالمنحنى (Γ)، أنشئ في نفس المعلم $(O,\vec{i},\vec{j})$ منحنى الدالة g حيث:

$$g:x\mapsto\left|f\left(|x|\right)\right|$$

الحل

أ) مجموعة التعريف $D_f =]-\infty, +\infty[$

f مستمرة على $\mathbb{R}^*$، ومستمرة عند $x = 0$ لأنّ $\lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0^+} f(x) = f(0) = 0$

الدالة f تقبل الاشتقاق على $\mathbb{R}^*$: $f'(x) = x^2\left(3\ln x^2 + 2\right)$، وكذلك تقبل الاشتقاق عند $x = 0$ لأنّ

$$\lim_{x\to 0^{\pm}} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x\to 0^{\pm}} x^2 \ln x^2 = 0$$

ب) تغيرات f

نلاحظ أنّ f فردية $f(-x) = -f(x)$ $\forall x \in \mathbb{R}$، والمنحنى (Γ) يكون متناظرا بالنسبة لنقطة المبدأ.

ندرس f على $]0, +\infty[$:

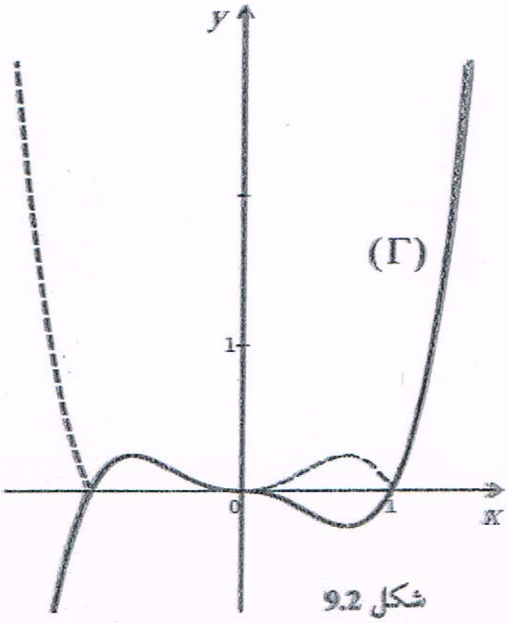
لدينا $\lim_{x\to +\infty} f(x) = +\infty$ ، $\lim_{x\to +\infty} \frac{f(x)}{x} = +\infty$ و (Γ) يقبل فرعا لا نهائيا باتجاه محور التراتيب.

إشارة $f'(x)$: $f'(x)$ ينعدم من أجل $x = 0$ و $x = \frac{1}{\sqrt[3]{e}} \approx 0,71$

ولدينا $f(0) = 0$ ، $f\left(1/\sqrt[3]{e}\right) = -\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{e} \approx -0,25$ (الشكل 9.2).

جدول تغيرات f

x	0		$1/\sqrt[3]{e}$		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	0	$\searrow$	$f\left(1/\sqrt[3]{e}\right)$	$\nearrow$	0



شكل 9.2

المنحنى (Γ) يقبل نقطة انعطاف عند نقطة المبدأ، وعندها يكون المماس محمولا على محور الفواصل.

ج) نلاحظ بأن:

$$f(|x|)=\begin{cases} f(x), & x \geq 0 \\ f(-x), & x < 0 \end{cases}$$

ومنحنى $f(|x|)$ على $]0,+\infty[$ ينطبق على (Γ)، وعلى $]-\infty,0]$ يتناظر مع (Γ) بالنسبة لمحور التراتيب.

أما منحنى $|f(|x|)|$ فهو ينطبق على منحنى $f(|x|)$ في نصف المستوى العلوي، ويتناظر معه بالنسبة لمحور التراتيب بالنسبة لنصف المستوى السفلي.

• $f(x)$ دالة مستمرة على $\mathbb{R}_+^*$ حيث :

$$f(x)=\begin{cases} (\ln x)^2-\ln x & , \quad 1 \geq x > 0 \\ (\ln x)^2 & , \quad x > 1 \end{cases}$$

1. عين الصور $f(\frac{1}{5})$ ،$f(\frac{1}{e})$ ،$f(\frac{1}{2})$ ، $f(1)$ ، $f(2)$ ، $f(e)$ ، $f(5)$.
2. أدرس قابلية الاشتقاق f عند $x_0=1$.
3. أدرس تغيرات f على $\mathbb{R}_+^*$ ، واستنتج بأن اقتصار f على $]1,+\infty[$ هو تطبيق تقابلي. عين التطبيق العكسي f^{-1}

4/ أنشئ منحنيَيْ الدالتين f و f^{-1} في معلم متعامد ومتجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$. (2 سم على المحورين).

هل يمكن تطبيق نظرية التزايدات المنتهية على الدالة $f(x)$ في المجال $[0.5\ ;\ 2]$ ؟

الحل

1/ حساب الصور $f(\frac{1}{5})$ ،$f(\frac{1}{e})$ ،$f(\frac{1}{2})$ ، $f(1)$ ، $f(2)$ ، $f(e)$ ، $f(5)$.

$f(\frac{1}{5})\approx 4.20$ ، $f(\frac{1}{e})=2$ ، $f(\frac{1}{2})\approx 1.17$ ، $f(1)=0$ ،

$f(2)\approx 0.48$ ، $f(e)=1$ ، $f(5)\approx 2.60$

2/ دراسة اشتقاق الدالة f

• نلاحظ بأن الدالة f تقبل الاشتقاق على $\mathbb{R}_+^* -\{1\}$:

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{2\ln x-1}{x}, & 1>x>0\\[2mm] \dfrac{2\ln x}{x}, & x>1\end{cases}$$

• دراسة الاشتقاق عند $x_0=1$ بحساب النهايتين:

$$\lim_{x\to 1^-}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim_{x\to 1^-}\frac{(\ln x)^2-\ln x-1}{x-1}=-1$$

$$\lim_{x\to 1^+}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim_{x\to 1^-}\frac{(\ln x)^2-1}{x-1}=0$$

ينتج أن الدالة f لا تقبل الاشتقاق عند $x_0=1$. ومنحنى f يقبل نصفي مماسين عند $x_0=1$.

3/ • تغيرات f على $\mathbb{R}_+^*$

لدينا $\lim_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$ و $\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=0$ ومنه منحنى f يقبل فرعا لا نهائيا باتجاه محور الفواصل.

$\lim_{x\to 0^+} f(x)=+\infty$. ومنه منحنى f يقبل محور التراتيب كخط مقارب. (الشكل 10.2).

نلاحظ بأن منحنى f يقبل نقطة انعطاف عند النقطة التي فاصلتها $x_0=e$. (لأن الدالة المشتقة الثانية f'' تنعدم عند $x_0=e$ وتغير إشارتها على جانبيها).

جدول تغيرات f

x	0		1		e		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	$-1 \| 0$	$+$		$+$	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	0	$\nearrow$	1	$\nearrow$	$+\infty$

• اقتصار f على $]1, +\infty[$ وتعيين $f^{-1}(x)$:

الدالة $f(x)$ مستمرة ومتزايدة تماما على $]1, +\infty[$، وتأخذ قيمها في $]0, +\infty[$ فهي تقابل.

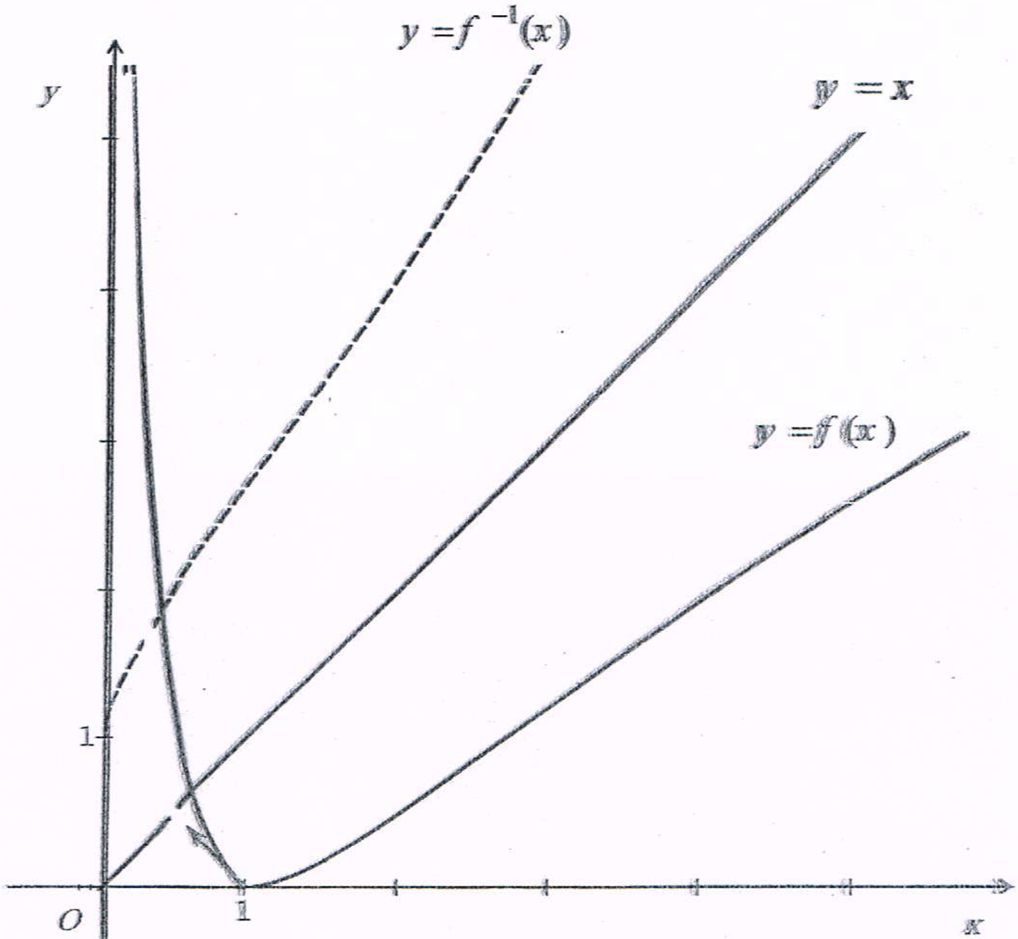
تكون أيضا الدالة العكسية $f^{-1}(x)$ مستمرة ومتزايدة تماما على المجال $]0, +\infty[$ في $]1, +\infty[$.

منحنيا f و f^{-1} يكونان في المعلم $(O;\vec{i},\vec{j})$ متناظرين بالنسبة للمستقيم $y=x$ (الشكل 2).

• بوضع: $y=f(x)=(\ln x)^2,\ x\geq 1$ نحصل على $x=e^{\sqrt{y}},\ y\geq 0$

ومنه
$$f^{-1}(x)=e^{\sqrt{x}} \qquad (x\geq 0)$$

4) منحنيا الدالتين f و f^{-1} في المعلم المتعامد والمتجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$ يوضحه (الشكل 2).



شكل 10.2

5. اختبار شروط نظرية التزايدات المنتهية على الدالة $f(x)$ في المجال $[0, 2]$

صحيح إن الدالة f مستمرة على $[0 , 2]$ ، لكنها لا تقبل الاشتقاق على $]0, 2[$. لأنها لا تقبل الاشتقاق عند $x_0 = 1$ وبالتالي لا يمكن تطبيق نظرية التزايدات المنتهية في هذه الحالة.

• ليكن (Γ) المنحنى البياني للدالة $f(x)$ حيث :

$$f(x) = \begin{cases} e^{\frac{1}{x}}, & x < 0 \\ 0, & x \geq 0 \end{cases}$$

1. عين D_f مجموعة تعريف f . وادرس استمرار الدالة $f(x)$ على D_f .

2. بين أن $f(x)$ تقبل الاشتقاق مرتين عند $x_0 = 0$ ، عين الدالتين المشتقتين $f'(x)$ و $f''(x)$.

3. ادرس تغيرات $f(x)$ وأنشئ منحناها (Γ) في معلم متعامد ومتجانس $(O, \vec{i}, \vec{j})$ (4 سم على المحورين) .

4. بين أن $f(x)$ هي تطبيق تقابلي من $]-\infty, 0]$ في $[0, +1[$.

عين دالتها العكسية f^{-1} ، ثم أنشئ منحناها (Φ) في نفس المعلم السابق .

5. عين معادلة المستقيم المماس (Δ) للمنحنى (Γ) عند $x_0 = -1$.

الحل

1. مجموعة تعريف f ، ودراسة الاستمرار :

مجموعة تعريف $f(x)$ هي $D_f =]-\infty, +\infty[$. f مستمرة على $\mathbb{R}^*$ ، لأنها مركبة من دوال مستمرة، وهي أيضا مستمرة عند الصفر لأن $\lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = \lim\limits_{x \to 0^-} f(x) = f(0) = 0$. إذن الدالة $f(x)$ مستمرة على $D_f = \mathbb{R}$.

2. دراسة الاشتقاق للدالة $f(x)$:

▫ على $]0 , +\infty[$ ، تكون الدالة $f(x)$ معدومة ومنه: $\forall x \in \mathbb{R}_+^* , f'(x) = f''(x) = 0$

▫ على $]-\infty , 0[$ ، الدالة $f(x)$ تقبل الاشتقاق مرتين، حيث :

$$\forall x \in \mathbb{R}_-^* , f'(x) = \frac{-e^{\frac{1}{x}}}{x^2} \; ; \; f''(x) = \frac{(2x+1)\, e^{\frac{1}{x}}}{x^4}$$

▫ عند $x_0 = 0$ ، يكون لدينا $\lim\limits_{x \to 0^-} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim\limits_{x \to 0^-} \frac{e^{\frac{1}{x}} - 0}{x - 0} = \lim\limits_{x \to 0^-} \frac{e^{\frac{1}{x}}}{x} = 0$

ومنه $f(x)$ تقبل الاشتقاق عند الصفر لأن: $\lim\limits_{x \to 0^-} f'(x) = \lim\limits_{x \to 0^+} f'(x) = f'(0) = 0$

ولدينا
$$\forall x \in \mathbb{R}, f'(x) = \begin{cases} \frac{-e^{\frac{1}{x}}}{x^2}, & x < 0 \\ 0 , & x \geq 0 \end{cases}$$

▫ وكذلك $f'(x)$ تقبل الاشتقاق عند الصفر، لأن : $f''(0) = \lim\limits_{x \to 0} \frac{f'(x) - f'(0)}{x - 0} = 0$ ،

ومنه $f(x)$ تقبل الاشتقاق مرتين عند الصفر. ويكون لدينا:

$$\forall x \in \mathbb{R} , f''(x) = \begin{cases} \frac{(2x+1)\, e^{\frac{1}{x}}}{x^4}, & x < 0 \\ 0 , & x \geq 0 \end{cases}$$

3. دراسة تغيرات $f(x)$ ، وإنشاء المنحنى (Γ) في المعلم المتعامد والمتجانس $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

▫ على $]0, +\infty[$ ، الدالة $f(x)$ معدومة، ولدينا: $\forall x \in \mathbb{R}_+^*$, $f(x) = f(0) = 0$

▫ على $]-\infty, 0[$ ، يكون لدينا $f'(x) = \frac{-e^{\frac{1}{x}}}{x^2} \leq 0$. ومنه الدالة $f(x)$ متناقصة على هذا المجال.

ولدينا $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to -\infty} e^{\frac{1}{x}} = 1$

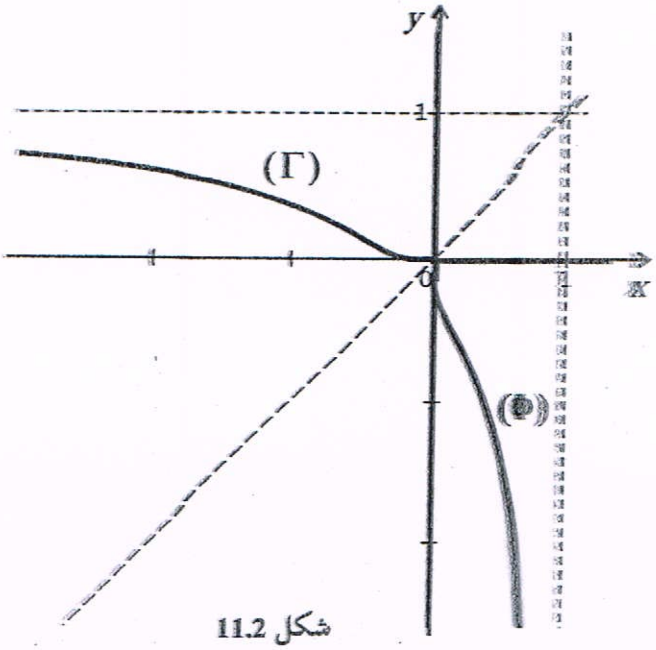
والجدول الآتي يلخص تغيرات $f(x)$ على نصف المجال $]-\infty, 0[$:

x	$-\infty$	0
$f'(x)$	$-$	
$f(x)$	$1 \searrow$	0

والمنحنى (Γ) في المعلم $(O, \vec{i}, \vec{j})$، يوضحه (الشكل **11.2**).

4. تبين أن $f(x)$ هي تطبيق تقابلي من $]-\infty, 0[$ في $]0, +1[$:

الدالة $f(x)$ مستمرة ومتناقصة تماما على $]-\infty, 0[$، وتأخذ قيمها في المجال $]0, +1[$، فهي تقابل. الدالة العكسية $f^{-1}(x)$ تكون مستمرة ومتناقصة تمام على المجال $]0, +1[$ في $]-\infty, 0[$. ويكون منحناها (Φ) مناظرا لـ (Γ) بالنسبة للمستقيم $y = x$ في المعلم السابق.



شكل 11.2

▫ تعيين $f^{-1}(x)$: نضع $y=f(x)=e^{\frac{1}{x}},\ x<0$

لدينا $\ln y=\frac{1}{x}\ ,\ x<0 \ \Leftrightarrow\ y=\frac{1}{\ln x}\ ,\ 0<x<1$

ومنه
$$f^{-1}(x)=\begin{cases}\frac{1}{\ln x}, & 0<x<1\\ 0\ , & x=0\end{cases}$$

المماس عند نقطة المبدأ O للمنحنى (Φ) يوازي المحور العمودي.

5. معادلة المماس (Δ) للمنحنى (Γ) عند النقطة ذات الفاصلة $x_0=-1$:

لدينا $f(-1)=\frac{1}{e},\ \ f'(-1)=-\frac{1}{e}\ ;\ \ \ y-\frac{1}{e}=\frac{1}{e}(x+1)$

فتكون معادلة المماس لمنحنى $y=f(x)$ عند النقطة $A\left(-1\ ,\ \frac{1}{e}\right)$ ، هي: $y=-\frac{1}{e}x$.

• **نعتبر الدالة العددية $f(x)$ حيث :**

$$f(x)=\frac{1}{3}e^{x^2}\left(1-e^{-\frac{3}{2}x^2}\right)$$

أدرس تغيرات $f(x)$ على مجموعة تعريفها، ثم أحسب $f(0,7)$ ، $f(1)$ ، $f(1,5)$ ، $f(1,7)$

ثم أنشئ المنحنى (Γ) الممثل للدالة $f(x)$ في معلم متعامد $(O,\vec{i},\vec{j})$.

(يؤخذ 3 سم على المحور الأفقي وَ 1,5 سم على المحور العمودي) .

الحل:

$f(x)$ معرفة ومستمرة وتقبل الاشتقاق على $\mathbb{R}$، وهي زوجية لدينا على $[0,+\infty[$:

$$f(0)=0\,,\ \lim_{x\to+\infty} f(x)=+\infty\,,\ \lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=+\infty\,,\ f'(x)=\frac{1}{3}e^{x^2}\left(2+e^{-\frac{3}{2}x^2}\right)$$

والمنحنى (Γ) يقبل فرع لا نهائي باتجاه محور التراتيب .

$$f'(x)=\frac{1}{3}e^{x^2}\left(2+e^{-\frac{3}{2}x^2}\right)$$

جدول التغيرات $f(x)$ على $[0,+\infty[$:

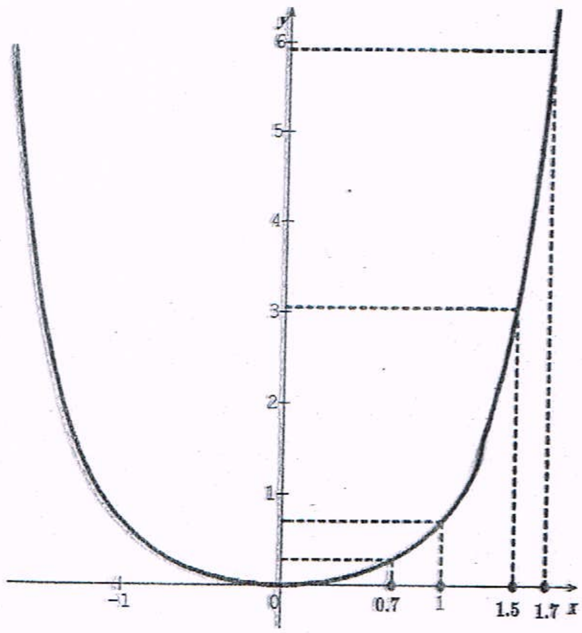
x	0	$+\infty$
$f'(x)$	+	
$f(x)$	0 ↗	$+\infty$

حساب الصور $f(x_i)$:

$f(0,7)\approx 0.28$ ، $f(1)\approx 0.70$ ،

$f(1,5)\approx 3.05$ ، $f(1,7)\approx 5.92$

المنحنى (Γ) الممثل للدالة $f(x)$، يوضحه (الشكل 12.2).



شكل 12.2

- $f(x)$ دالة مستمرة على $\mathbb{R}$ حيث :

$$f(x)=\begin{cases} e^{x-1}+1 & , \ x\geq 1 \\ xe^{x-1}+1 & , \ x<1 \end{cases}$$

5) عين الصور $f(-2)$، $f(-1)$، $f(0)$، $f(1)$، $f(1.5)$، $f(2)$.

6) أدرس قابلية اشتقاق f عند $x_0=1$.

7) ادرس تغيرات f على $\mathbb{R}$، واستنتج بأن اقتصار f على $[1,+\infty[$ هو تطبيق تقابلي. عين التطبيق العكسي f^{-1}

8) أنشئ منحنيي الدالتين f و f^{-1} في معلم متعامد ومتجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$. (2 سم على المحورين).

9) هل يمكن تطبيق نظرية التزايدات المنتهية على الدالة $f(x)$ في المجال $[0,2]$ ؟

10) استخدم التكامل بالتجزئة لحساب $I=\int_0^2 f(x)\,dx$. لوّن بقلم الرصاص مساحة الحيز من المستوي التي تمثل قيمة هذا التكامل (المحدد بالمستقيمات: $x=0$ و $y=0$ و $x=2$ ومنحنى $(y=f(x)$.

الحل

6) حساب الصور $f(-2)$، $f(-1)$، $f(0)$، $f(1)$، $f(1.5)$، $f(2)$.

بالحساب المباشر: $f(-2)=-\frac{2}{e^3}+1\simeq 0.90$ ، $f(-1)=-\frac{1}{e^2}+1\simeq 0.86$ ، $f(0)=1$،

$f(1)=2$ ، $f(1.5)=\sqrt{e}+1\simeq 2.65$ ، $f(2)=e+1\simeq 3.72$

7) دراسة اشتقاق الدالة f

- الدالة f تقبل الاشتقاق على $\mathbb{R}-\{1\}$:

$$f'(x)=\begin{cases} e^{x-1} & , \ x>1 \\ (x+1)\,e^{x-1} & , \ x<1 \end{cases}$$

- دراسة الاشتقاق عند $x_0=1$ بحساب النهايتين:

$$\lim_{x\to 1^-}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim_{x\to 1^-}\frac{xe^{x-1}+1-2}{x-1}=2$$

$$\lim_{x\to 1^+}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim_{x\to 1^-}\frac{e^{x-1}+1-2}{x-1}=1$$

يستنتج أن الدالة f لا تقبل الاشتقاق عند $x_0=1$. ومنحنى f يقبل نصفي مماسين عند $x_0=1$.

8. • تغيرات f على $\mathbb{R}$

لدينا $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$ و $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=+\infty$ ومنحنى f يقبل فرعا لا نهائيا باتجاه محور التراتيب.

$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=1$. ومنحنى f يقبل خط مقارب معادلته $y=1$. (الشكل 1).

جدول تغيرات f

x	$+\infty$		-1		$+1$		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	$2 \vert 1$	$+$	
$f(x)$	1	$\searrow$	$1-e^{-3}$	$\nearrow$	2	$\nearrow$	$+\infty$

نلاحظ بأن منحنى f يقبل نقطة انعطاف عند النقطة التي فاصلتها $x=-2$. (لأن الدالة المشتقة الثانية f'' تنعدم عند $x_0=1$ وتغير إشارتها على جانبيها).

• اقتصار f على $]1,+\infty[$ وتعيين $f^{-1}(x)$:

الدالة $f(x)$ مستمرة ومتزايدة تماما على $]1,+\infty[$، وتأخذ قيمها في $]1,+\infty[$ فهي تقابل. تكون أيضا الدالة العكسية $f^{-1}(x)$ مستمرة ومتزايدة تماما على المجال $]1,+\infty[$ في $]1,+\infty[$.

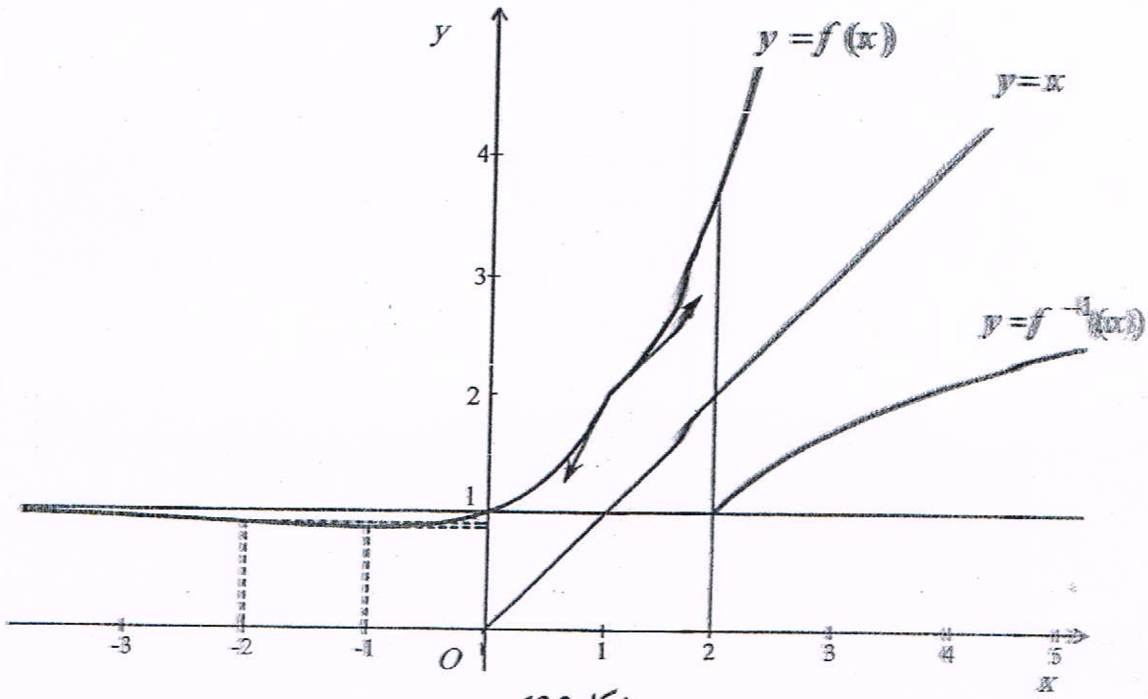
منحنيا f و f^{-1} يكونان في المعلم $(O;\vec{i},\vec{j})$ متناظرين بالنسبة للمستقيم $y=x$.

•بوضع: $y=f(x)=e^{x-1}+1,\ x\geq 1$ نحصل على

$$x=\ln(y-1)+1,\ y\geq 2$$

ومنه $\boxed{(x\geq 2)\qquad f^{-1}(x)=\ln(x-1)+1}$

9. منحنيا الدالتين f و f^{-1} في المعلم المتعامد والمتجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$ يوضحه (الشكل 13.2).



شكل 13.2

10. اختبار شروط نظرية التزايدات المنتهية على الدالة $f(x)$ في المجال $[0\,,2]$

صحيح أن الدالة f مستمرة على $[0,2]$ ، لكنها لا تقبل الاشتقاق على $]0\,,2[$. لأنها لا تقبل الاشتقاق عند $x_0=1$. وبالتالي لا يمكن تطبيق نظرية التزايدات المنتهية في هذه الحالة.

11. استخدام التكامل بالتجزئة لحساب $I=\int_0^2 f(x)\,dx$

لدينا $I=\int_0^2 f(x)\,dx=\int_0^1 (x\,e^{x-1}+1)\,dx+\int_1^2 e^{x-1}\,dx$

لنحسب (بالتجزئة) التكامل J : $J=\int x\,e^{x-1}dx$

نضع $u=x$ يكون $du=dx$ ، ونضع $dv=e^{x-1}dx$ يكون $v=e^{x-1}$

ومنه $J=x\,e^{x-1}-\int e^{x-1}dx=x\,e^{x-1}-e^{x-1}$

إذن $I=\int_0^2 f(x)\,dx=\left[x\,e^{x-1}-e^{x-1}+x\right]_0^1+\left[e^{x-1}\right]_1^2$

ومنه قيمة I بالوحدات المربعة : $\boxed{I=(e^{-1}+1)+(e-1)=e+e^{-1}\approx 3.08}$

9. تمارين

تمرين 1 أحسب إن أمكن:

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^{2x}-1}{3x^2+x} \text{ ، } \lim_{x\to\pm\infty} x(\sqrt{x^2+1}-x) \text{ ، } \lim_{x\to\infty}\frac{\sqrt{x^2+1}}{x+1}$$

$$\lim_{x\to 2}\frac{x-2}{\sqrt{x^2-4}} \text{ ، } \lim_{x\to+\infty}(\sqrt{x^2+1}-\sqrt{x^2-1}) \text{ ، } \lim_{x\to 0}\left(x+\frac{\sqrt{x^3}}{x}\right)$$

$$\lim_{x\to 1}\left(\frac{2}{1-x^2}-\frac{3}{1-x^3}\right) \text{ ، } \lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{x}+\sqrt{\frac{1}{x^2}-1}\right) \text{ ، } \lim_{x\to 3}\frac{\sqrt{x^2-9}}{x-3}$$

تمرين 2 عين مجموعة تعريف f حيث: $f(x)=\sqrt{x+2\sqrt{x+1}}+\sqrt{x-2\sqrt{x-1}}$

ثم احسب $(f(x))^2$ واستنتج عبارة بسيطة لـ: $f(x)$.

احسب $\lim_{x\to 2}\frac{f(x)-2}{x-2}$ ، وأنشئ منحنى f.

تمرين 3 عين الخطوط المقاربة لمنحنى كل من الدوال الآتية:

$$h(x)=x-2+\frac{x^2}{\sqrt{x^2+1}} \text{ ، } g(x)=x+\frac{1}{x}+\frac{1}{\sqrt{x-1}} \text{ ، } f(x)=\frac{1}{(x-2)^2}$$

تمرين 4 نعتبر الدالة العددية $f(x)=x^2+3|x-1|$

- احسب مشتقة f عند $x_0=-2$ و $x_0=+2$.
- هل تقبل f الاشتقاق عند $x_0=1$؟ في حالة العكس، هل تقبل f الاشتقاق عن يمين ويسار هذه القيمة ؟

تمرين 5 ادرس استمرار الدالتين الآتيتين على مجالي تعريفيهما:

$$f(x)=\begin{cases} e^{-\frac{1}{x^2}} & \text{si } x\neq 0 \\ 0 & \text{si } x=0 \end{cases} \text{ ، } g(x)=\begin{cases} \frac{x}{1+|x|} & \text{si } x\neq 0 \\ 0 & \text{si } x=0 \end{cases}$$

تمرين 6 نعتبر الدالة العددية ذات المتغير الحقيقي x المعرفة كما يلي: $f(x)=\dfrac{\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}}{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}$

عين D_f مجموعة تعريف f.

برهن أنه: $\forall x \in D_f \ , \ f(x)=\dfrac{1+\sqrt{1-x^2}}{x}$

أدرس استمرارية f.

أحسب $\lim\limits_{x\to 1^-}\dfrac{f(x)-f(1)}{x-1}$ ، ماذا تستنتج ؟

هل تقبل f الاشتقاق على D_f ؟ عين دالتها المشتقة f'.

تمرين 7 ادرس استمرار الدوال الآتية عند القيم المرفقة بها:

$f(x)=\sqrt{4-x}$ en $x_0=4$ ، $g(x)=\sqrt{1-x^2}$ en $x_0=1$ ،

$$h(x)=\begin{cases} e^{\frac{1}{x^2-1}} & \text{si } |x|<1 \\ 0 & \text{si } |x|\geq 1 \end{cases} \quad , \quad \text{en } x_0=-1 \text{ et } x_0=1$$

تمرين 8 ادرس إمكانية تمديد الدوال $f:\mathbb{R}^*\to\mathbb{R}$ المعرفة أدناه إلى الدوال $\tilde{f}$ المعرفة والمستمرة على $\mathbb{R}$:

$f(x)=x^2+\dfrac{|x|}{x}$ ، $f(x)=\dfrac{x^2+|x|}{x^2-|x|}$ ، $f(x)=x\sin\left(\dfrac{1}{2x}+\dfrac{1}{2|x|}\right)$.

تمرين 9 احسب مشتقات الدوال الآتية:

$x^3\sqrt{x}-x\sqrt[4]{x}$ ، $x^3-2x^2-\log(x^2-x)$ ، $e^{3x}-1$ ، $e^{\frac{1}{x}}$ ،

$\log\dfrac{x^3+1}{x}$ ، $e^{\frac{1}{x^2}}$ ، $e^{\sqrt{x}}$ ، e^{e^x} ، $\dfrac{e^{\sqrt{x}}}{\log(x-1)}$.

تمرين 10 نعتبر

$$f(x)=\begin{cases} \dfrac{\sqrt{x^2(x-1)^2}}{(x-1)(|x|+1)} & , x\in\mathbb{R}-\{1\} \\ -\dfrac{1}{2} & , x=1 \end{cases}$$

ادرس استمرار واشتقاق $f(x)$ عند $x_0=0$ و $x_0=1$.

تمرين 11 احسب المشتقات الثانية للدوال:

$f(x)=x^3(x+1)^2$ ، $f(x)=\sqrt{x^2-4}$ ، $f(x)=(4x+1)^{3/2}$.

تمرين 12 حقق نظرية رول على الدالة $f(x)=x^3-4x$.

تمرين 13 لتكن الدالة $f(x)=1-(x-1)^{2/3}$ حيث $0\le x\le 2$

بين لماذا لا يمكن تطبيق نظرية رول على هذه الدالة ؟

تمرين 14 هل يمكن تطبيق نظرية رول على الدالة $f(x)=1-\sqrt[3]{(x-1)^2}$ في المجال $[0,2]$ ؟

تمرين 15 أدرس وجود ووحدانية c حيث: $f(b)-f(a)=(b-a)f'(c)$

في الحالات:

$f(x)=(x+2)(x-1)$ $\quad a=-1, b=1$

$f(x)=\sqrt[3]{x^2}$ $\quad a=-1, b=1$

$f(x)=\sin x-2x$ $\quad a=0, b=2\pi$

$f(x)=\sqrt[3]{x}$ $\quad a=-1, b=1$

تمرين 16 ليكن التطبيق f المعرف كما يلي:

$$f(x)=\begin{cases} x^3\left(\frac{4}{3}-\ln(x^2)\right), & x\neq 0 \\ 0 \quad , & x=0 \end{cases}$$

اثبت أن f مستمر على $\mathbb{R}$.

هل يقبل f الاشتقاق على $\mathbb{R}$؟

ادرس تغيرات الدالة f، وأنشئ منحناها (Γ) في معلم متعامد ومتجانس.

بين أن (Γ) يقبل نقطة انعطاف، يطلب تعيين إحداثييها.

تمرين 17 أدرس ومثّل بيانيا الدالة. $f(x)=\frac{1}{x+1}+\ln\frac{1}{x+1}$.

عين نقطة تقاطع المنحنى مع (Ox)، حدد وضعية المماس عندها.

أحسب $f''(x)$، أوجد x حيث $f''(x)=0$.

تمرين 18 أدرس تغيرات الدالة f على $\mathbb{R}$، حيث $f(x)=x^2(x-1)$.

باعتبار أن $x\mapsto\sqrt[3]{x}$ هي دالة عكسية للدالة $x\mapsto x^3$ على $\mathbb{R}$، استنتج من الدراسة السابقة تغيرات g على $\mathbb{R}$، حيث $g(x)=\sqrt[3]{x^2(x-1)}$.

تمرين 19 ليكن (Γ) المنحنى البياني للدالة f حيث:

$$f(x)=(1+x)e^{-x}$$

1. بين أن f تقبل الاشتقاق مرتين على $\mathbb{R}$، أحسب $f'(x)$ و $f''(x)$.
2. أدرس تغيرات $f(x)$، أحسب $f(1)$ ونهايتي f عند $+\infty$ وعند $-\infty$.
3. أنشئ المنحنى (Γ) في معلم متعامد ومتجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$. (وحدة القياس 1,5 سم)
4. برر لماذا تقبل المعادلة $f(x)=-1$ حلا $x_0 \in \mathbb{R}$. هل هذا الحل وحيد ؟
5. بين أن الدالة f هي تطبيق تقابلي من $\mathbb{R}_+$ على المجال $]0\,;1]$.ما هي مجموعة تعريف دالتها العكسية f^{-1} ؟ أنشئ المنحنى (Φ) الممثل للدالة f^{-1} في نفس المعلم السابق.
6. بين أن f^{-1} تقبل الاشتقاق عند $y=\frac{2}{e}$. أحسب $(f^{-1})'(\frac{2}{e})$.

أنشئ التمثيل البياني لتغيرات الدالة f في معلم متعامدومتجانس.

تمرين 20 ادرس الدالة $f(x)$ وأنشئ تمثيلها البياني في معلم متعامد ومتجانس في كل حالة من الحالات :

$$f(x)=2x+1-\log x \text{ ،} \quad f(x)=\frac{2x^2+3x-2}{(x-1)^2} \text{ ،} \quad f(x)=\sqrt{(x+2)^2}+\frac{1}{x+1} \text{ ،}$$

$$f(x)=-\frac{x}{2}+\log\left|\frac{x-1}{x}\right| \text{ ،} \quad f(x)=-\frac{x}{2}+\log\left|\frac{x-1}{x}\right| \text{ ،} \quad f(x)=2x-|x|\log(x^2) \text{ ،}$$

$$f(x)=x+\sqrt{|x^2-2x|}\,,\ f(x)=\sqrt{\frac{x+1}{x+1}}\,,\ f(x)=\frac{2e^x-1}{e^x-1}$$

$$f(x)=\sqrt[3]{x^3-3x+2}\,,\ f(x)=\frac{\ln x}{1+x-\ln x}\,,\ f(x)=e^{\frac{1}{x}}\,,\ f(x)=\frac{|x+1|}{x+2}$$

$$f(x)=\ln|\ln x|\,,\ f(x)=\ln(x+1)^2\,, f(x)=\frac{2\ln x-1}{\ln x-1}\,,\ f(x)=e^{\frac{1}{x}}\sqrt{x^2+2}$$

الفصل الثالث

الدوال الدائرية والزائدية وعكسها

- الدوال الدائرية العكسية
- دراسة وتمثيل بعض الدوال العكسية
- الدوال القطعية الزائدية
- الدوال القطعية الزائدية العكسية
- تمارين

الدوال الدائرية العكسية

أ. الدالة arcsin

الدالة sin على المجال $\left[-\frac{\pi}{2},+\frac{\pi}{2}\right]$ مستمرة ومتزايدة تماما، فهي تقابل.

نرمز لتطبيقها العكسي بـ arcsin.

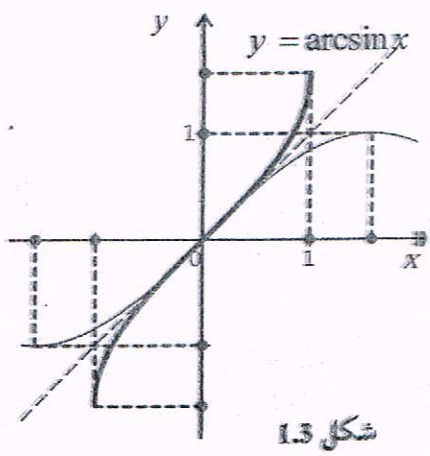
$$y=\arcsin x \ \ , x\in[-1,+1] \ \Leftrightarrow \ x=\sin y \ \ y\in\left[-\frac{\pi}{2},+\frac{\pi}{2}\right]$$

- الدالة arcsin فردية.
- الدالة arcsin مستمرة ومتزايدة تماما على $[-1,+1]$ وتأخذ قيمتها في $\left[-\frac{\pi}{2},+\frac{\pi}{2}\right]$.
- الدالة arcsin تقبل الاشتقاق على $]-1,+1[$:

$$(\arcsin x)'=\frac{1}{(\sin y)'}=\frac{1}{\cos y}=\frac{1}{\sqrt{1-\sin^2 y}}=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

جدول تغيرات arcsin

x	-1 $\qquad\qquad$ $+1$
$(\arcsin x)'$	$+$
$\arcsin x$	$-\frac{\pi}{2}$ $\nearrow$ $\frac{\pi}{2}$



شكل 1.3

1.1 أمثلة

• حساب $\arcsin\frac{1}{2}$

من العلاقة $y \in \left[-\frac{\pi}{2},+\frac{\pi}{2}\right] \wedge \sin y = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \arcsin\frac{1}{2}$ ينتج $y = \arcsin\frac{1}{2} = \frac{\pi}{6}$

• مجموعة التعريف الدالة $f(x) = \arcsin(x^2-1)$

لدينا
$$x \in D_f \quad \Leftrightarrow \quad x^2-1 \in [-1,+1] \quad \Leftrightarrow \quad x \in [-\sqrt{2},\sqrt{2}]$$

f تقبل الاشتقاق إذا كان $x^2-1 \in]-1,+1[$ أي: $x \in]-\sqrt{2},\sqrt{2}[$

ولدينا عبارة المشتق (باستخدام علاقة مشتق تركيب الدالتين $x \mapsto x^2-1$ و $x \mapsto \arcsin x$):

$$f'(x) = \frac{2x}{\sqrt{2x^2-x^4}}$$

2. الدالة arccos

الدالة العكسية لـــ cos على المجال $[0,\pi]$ موجودة، وهي الدالة التي نرمز لها بـــ arccos.

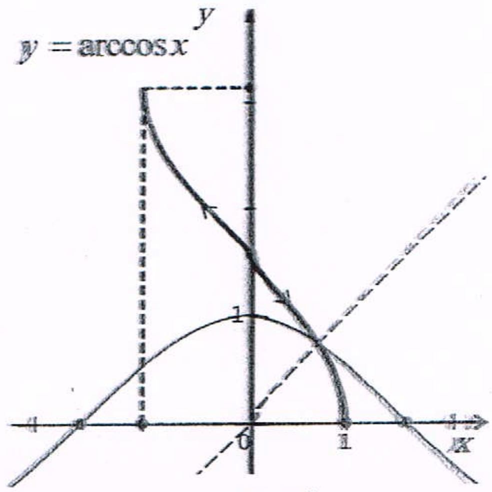
$$y = \arccos x \ , x \in [-1,+1] \quad \Leftrightarrow \quad x = \cos y \ , y \in [0,+\pi]$$

- الدالة arccos زوجية.
- الدالة arccos مستمرة ومتناقصة تماما على $[-1,+1]$ وتأخذ قيمتها في $[0,+\pi]$.
- الدالة arccos تقبل الاشتقاق على $]-1,+1[$:

$$(\arccos x)' = -\frac{1}{\sin y} = \frac{-1}{\sqrt{1-\cos^2 y}} = \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$$

جدول التغيرات arccos :

x	-1	$+1$
$(\arccos x)'$	$-$	
$\arccos x$	π ↘	0



شكل 23

1.2 أمثلة

• المتراجحة $\forall x \in]-1,+1[\ ,\quad \arccos x > \sqrt{1-x^2}$

نضع $g(x)=\arccos x-\sqrt{1-x^2}$ ، g تقبل الاشتقاق على $]-1,+1[$:

$$g'(x)=\frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}+\frac{x-1}{\sqrt{1-x^2}}=\frac{x-1}{\sqrt{1-x^2}}$$

ويستنتج أن g متناقصة تماما وتنعدم عند 1، ومنه $\forall x \in]-1,+1[\ ,\quad g(x)<0$

• حساب $\arccos\frac{\sqrt{3}}{2}$

لدينا $$y=\arccos\frac{\sqrt{3}}{2} \Leftrightarrow \cos y=\frac{\sqrt{3}}{2} \wedge y\in[0,\pi] \Leftrightarrow y=\frac{\pi}{6}$$

ومنه $$y=\arccos\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{\pi}{6}$$

بنفس الطريقة نجد : $$\arccos\left(\cos\left(\frac{-\pi}{1}\right)\right)=\frac{\pi}{2}$$

• العلاقة الشهيرة : $\arcsin x+\arccos x=\frac{\pi}{2}$

نعتبر الدالة $f(x)=\arcsin x+\arccos x$

مجموعة التعريف : $D_f=[-1,+1]$ ، ولدينا :

$\forall x \in]-1,+1[\ ,\quad f'(x)=0$

$\forall x \in]-1,+1[\ ,\quad f(x)=c \quad (c\in\mathbb{R})$

$$c = \arcsin 0 + \arccos 0 = \frac{\pi}{2}$$

نتحقق من $f(-1) = f(-1) = \frac{\pi}{2}$ ومنه $\forall x \in [-1, +1]$, $\arcsin x + \arccos x = \frac{\pi}{2}$

• صحة القضيتين :

$$\forall x \in [-1, +1], \quad \sin(\arcsin x) = x$$
$$\forall x \in [-1, +1], \quad \cos(\arccos x) = x$$

لدينا بالتعريف: $y = \arcsin x$, $-1 \le x \le 1 \Leftrightarrow x = \sin y$, $-\frac{\pi}{2} \le y \le \frac{\pi}{2}$

ومنه $\forall x \in [-1, +1], \quad \sin(\arcsin x) = x$

وكذلك: $y = \arccos x$, $-1 \le x \le 1 \Leftrightarrow x = \cos y$, $0 \le y \le \pi$

ومنه $\forall x \in [-1, +1], \quad \cos(\arccos x) = x$

• تعيين مجموعة تعريف الدالة : $f(x) = \arccos(2x + 5)$

$$x \in D_f \Leftrightarrow 2x + 5 \in [-1, +1] \Leftrightarrow x \in [-3, -2]$$

f تقبل الاشتقاق إذا كان: $2x + 5 \in]-1, +1[$ أي إذا كان $x \in]-3, -2[$

$$f'(x) = \frac{2}{\sqrt{1 - (2x+5)^2}}$$

الحساب يبين أن $f(x)$ غير قابلة للاشتقاق عند (-3) و (-2).

3. الدالة arctan

الدالة الدورية tan مستمرة ومتزايدة تماما على المجال $\left[-\frac{\pi}{2}, +\frac{\pi}{2}\right]$. نرمز لدالتها العكسية بـ arctan.

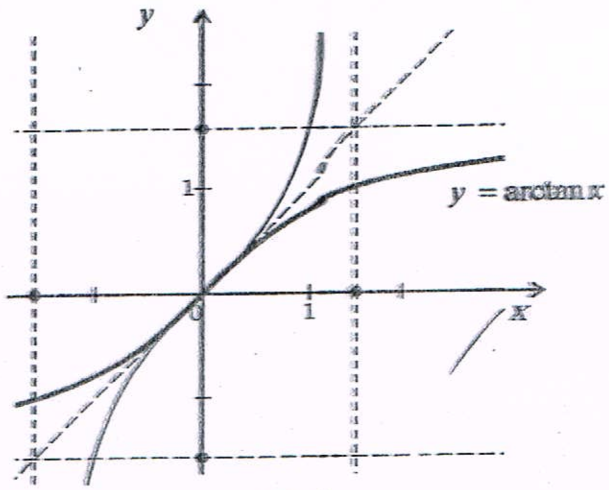
$$y = \arctan x \ , x \in [-\infty, +\infty] \quad \Leftrightarrow \quad x = \tan y \ , y \in \left[-\frac{\pi}{2}, +\frac{\pi}{2}\right]$$

– الدالة arctan فردية

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad (\arctan x)' = \frac{1}{(\tan y)'} = \frac{1}{1 + \tan^2 y} = \frac{1}{1 + x^2}$$

جدول التغيرات $\arctan x$

x	$-\infty \qquad\qquad +\infty$
$(\arctan x)'$	$+$
$\arctan x$	$-\frac{\pi}{2} \nearrow \frac{\pi}{2}$



شكل 3.3

1.3 أمثلة

• العبارة $\tan(2\arcsin x)$ بدلالة x.

نلاحظ أنّ $\tan(2\arcsin x)$ معرفة إذا $-\frac{\pi}{2} \leq \arcsin x \leq \frac{\pi}{2}$ إذا $-\frac{\sqrt{2}}{2} \leq x \leq \frac{\sqrt{2}}{2}$

لدينا
$$\tan(2\arcsin x) = \frac{\sin(2\arcsin x)}{\cos(2\arccos x)} = \frac{2\sin(\arcsin x)\cdot\cos(\arcsin x)}{1-2\sin^2(\arcsin x)}$$

وبما أنّ $\sin(\arcsin x) = x$ و $\cos(\arcsin x) = \sqrt{1-x^2}$

فإنّ
$$\tan(2\arcsin x) = \frac{2x\sqrt{1-x^2}}{1-2x^2}$$

• صحة العلاقة
$$\arctan\left(\frac{1+x}{1-x}\right) - \arctan x = \frac{\pi}{4}, \quad \forall x < 1$$

نعتبر الدالة $f:]-\infty, 1[\to \mathbb{R}$ المعرفة كما يلي: $f(x) = \arctan\left(\frac{1+x}{1-x}\right) - \arctan x$

بما أنّ الدالتين $\arctan x$ و $x \mapsto \frac{1+x}{1-x}$ تقبلان الاشتقاق على $]-\infty, 1[$. ولدينا :

$$f'(x)=\frac{1}{1+\left(\frac{1+x}{1-x}\right)^2}\cdot\frac{2}{(1-x)^2}-\frac{1}{1+x^2},\quad \forall x<1$$

$$=\frac{1}{1+x^2}-\frac{1}{1+x^2}=0,\quad \forall x<1$$

وكنتيجة الدالة f ثابتة على $]-\infty,1[$ ولدينا بالخصوص $\forall x<1 \quad f(x)=f(0)$

أي $f(x)=\arctan(1)-\arctan 0$ وأخيرا $\forall x<1$, $f(x)=\frac{\pi}{4}$

• تعيين مشتقة الدالة $\arctan(\ln x)$

$$\frac{d}{dx}\arctan(\ln x)=\arctan'(\ln x)\cdot(\ln x)'=\frac{\frac{1}{x}}{1+\ln^2 x}=\frac{1}{x(1+\ln^2 x)}$$

• دراسة اشتقاق الدالة $f(x)=\arctan\frac{1}{x-1}$

مجموعة تعريف f : $D_f=]-\infty,1[\cup]1,+\infty[$

f تقبل الاشتقاق على D_f ، ولدينا:

$$f'(x)=\frac{-\frac{1}{(1-x)^2}}{1+\left(\frac{1}{1-x}\right)^2}=-\frac{1}{(x-1)^2+1}$$

الاشتقاق عند $x=\pm 1$:

$$\lim_{x\to 1^+}\frac{1}{x-1}=+\infty \Rightarrow \lim_{x\to+\infty}\arctan\frac{1}{x-1}=\frac{\pi}{2}$$

$$\lim_{x\to 1^-}\frac{1}{x-1}=-\infty \Rightarrow \lim_{x\to-\infty}\arctan\frac{1}{x-1}=-\frac{\pi}{2}$$

• دراسة الاشتقاق للدالة f حيث:

$$f(x)=\begin{cases}\arctan x & , \quad |x|\le 1\\ \frac{\pi}{4}\frac{|x|}{x}-\frac{x-1}{2} & , \quad |x|>1\end{cases}$$

الدالة f تقبل الاشتقاق على $]-\infty,-1[\cup]1,1[\cup]1,+\infty[$:

$$f'(x)=\begin{cases}\frac{1}{1+x^2}, & |x|<1\\ \frac{1}{2}, & |x|>1\end{cases}$$

الاشتقاق عند $x = 1$

$$\lim_{x\to 1^+}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim_{x\to 1^+}\frac{\arctan x-\frac{\pi}{2}}{x-1}=\frac{1}{2}$$

$$\lim_{x\to 1^-}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=\frac{1}{2}$$

الاشتقاق عند $x = -1$

$$\lim_{x\to -1^+}\frac{f(x)-f(-1)}{x+1}=\lim_{x\to -1^+}\frac{\arctan x+\frac{\pi}{2}}{x+1}=\frac{1}{2}$$

$$\lim_{x\to -1^-}\frac{f(x)-f(-1)}{x+1}=+\infty$$

ومنه الدالة f لا تقبل الاشتقاق عند $x = -1$، ولدينا :

$$f'(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{1+x^2}, & -1<x\leq 1\\[2mm] \dfrac{1}{2}, & |x|>1\end{cases}$$

4. دراسة وتمثيل بعض الدوال العكسية

• الدالة $f(x)=\arcsin\dfrac{2x}{1+x^2}$

لدينا :

$$1+x^2-2|x|\geq 0,\quad \forall x\in\mathbb{R}$$

$$\left|\frac{2x}{1+x^2}\right|\leq 1,\quad \forall x\in\mathbb{R}$$

من جهة أخرى الدالة arcsin معرفة على $[-1,+1]$، ومنه f معرفة على $\mathbb{R}$.

نعلم أن الدالة arcsin تقبل الاشتقاق على $]-1,+1[$، ومنه الدالة f تقبل الاشتقاق عند كل x :

$\left|\dfrac{2x}{1+x^2}\right|\neq 1$ التي تكافئ $|x|\neq 1$

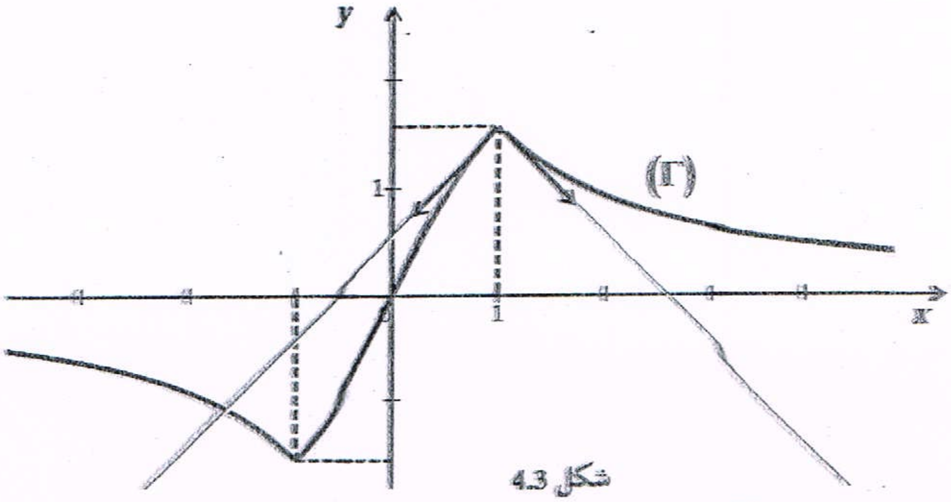
نستنتج أن f تقبل الاشتقاق على $D=\mathbb{R}-\{-1,1\}$:

$$f'(x)=\frac{1}{\sqrt{1-\left(\dfrac{2x}{1+x^2}\right)^2}}\cdot\left(\frac{2x}{1+x^2}\right)',\quad \forall x\in D$$

$$=\frac{2(1-x^2)}{(1+x^2)\sqrt{(1-x^2)^2}},\quad \forall x\in D$$

و f لا تقبل الاشتقاق عند $x_0 = \pm 1$ التمثيل البياني للدالة في (الشكل 4.3) يوضح ذلك .

أحسب المشتقات عن يمين ويسار $x_0 = \pm 1$ للدالة f .



شكل 4.3

• دراسة الدالة $f(x) = \arcsin \frac{2\sqrt{x}}{1+x}$

مجموعة التعريف

لدينا $-1 \le \frac{2\sqrt{x}}{x+1} \le 1 \;\Leftrightarrow\; 2\sqrt{x} \le 1+x \;\Leftrightarrow\; \left(\sqrt{x}-1\right)^2 \ge 0$

ومنه $x \in D_f \;\Leftrightarrow\; x \ge 0 \wedge \frac{2\sqrt{x}}{1+x} \in [-1,+1] \;\Rightarrow\; x \in [0,+\infty[$

إذن $D_f = [0,+\infty[$

الدالة $f(x)$ تقبل الاشتقاق على مجال اشتقاق $\frac{2\sqrt{x}}{1+x}$ وهو $]0,+\infty[$ وعندما يكون $1 > \frac{2\sqrt{x}}{1+x}$.

إذن f تقبل الاشتقاق على $D =]0,1[\cup]1,+\infty[$ ، ولدينا :

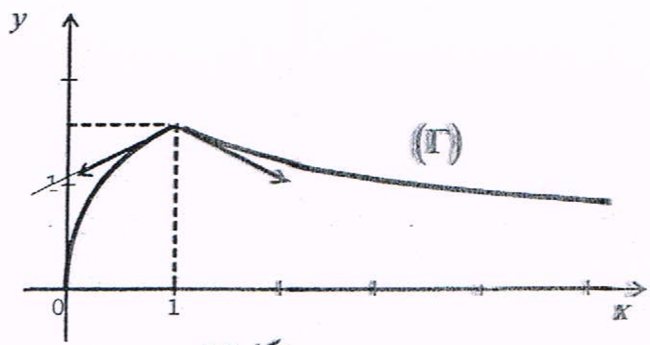
$$f'(x) = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{x}(1+x)}, & 0 < x < 1 \\ -\frac{1}{\sqrt{x}(1+x)}, & x > 1 \end{cases}$$

ولدينا أيضا : $f(0) = 0,\; f(1) = \frac{\pi}{2},\; \lim_{x\to+\infty} f(x) = 0$

جدول تغيرات $f(x)$

x	0		1		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	||	$-$	
$f(x)$	0	$\nearrow$	$\frac{\pi}{2}$	$\searrow$	0

تمثيل f موضح في (الشكل 5.3).



شكل 5.3

• دراسة الدالة $f(x)=\arctan\frac{2}{1+x}$

$D_f=\mathbb{R}-\{1\}$

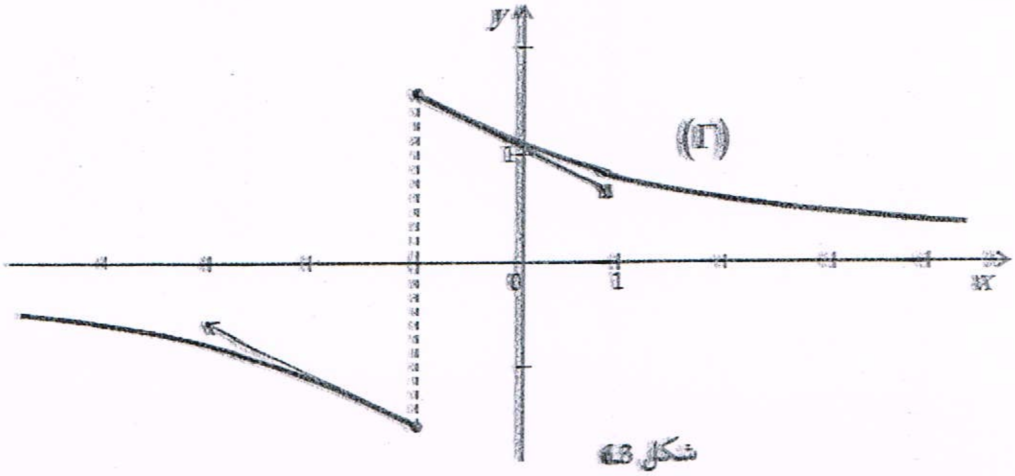
$\lim\limits_{x\to 1^+} f(x)=\frac{\pi}{2},\ \lim\limits_{x\to 1} f(x)=-\frac{\pi}{2},\ \lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x)=0$

$$f'(x)=\frac{1}{1+\left(\frac{2}{1-x}\right)^2}=\frac{2}{x^2-2x+5}>0$$

جدول التغيرات f

x	$-\infty$		-1		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	||	$-$	
$f(x)$	$\frac{\pi}{2}$	$\searrow$	0 || 0	$\searrow$	$-\frac{\pi}{2}$

تمثيل f موضح في الشكل 6.3 .



شكل 6.3

الدوال القطعية الزائدية وعكسها

5. الدوال القطعية الزائدية

تسمى الدالة $x \mapsto \sinh x = \dfrac{e^{x}-e^{-x}}{2}$ بدالة الجيب القطعي الزائدي، وترمز لها بـ $\sinh$.

وتسمى الدالة $x \mapsto \cosh x = \dfrac{e^{x}+e^{-x}}{2}$ بدالة جيب التمام القطعي الزائدي، وترمز لها بـ $\cosh$.

كما تسمى الدالة $x \mapsto \tanh x = \dfrac{\sinh x}{\cosh x}$ بدالة الظل القطعي الزائدي، وترمز لها بـ $\tanh$.

1.5 علاقات شهيرة

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad \begin{cases} e^{x} = \cosh x + \sinh x & (1) \\ e^{-x} = \cosh x - \sinh x & (2) \end{cases}$$

بضرب (1) بـ (2) نجد:
$$e^{x-x} = \cosh^2 x - \sinh^2 x = 1$$

ونحصل فيما يلي أهم العلاقات الزائدية:

$$\cosh(x \pm y) = \cosh x \cdot \cosh y \pm \sinh x \cdot \sinh y$$
$$\sinh(x \pm y) = \sinh x \cdot \cosh y \pm \sinh y \cdot \cosh x$$
$$\tanh(x \pm y) = \frac{\tanh x \pm \tanh y}{1 \pm \tanh x \cdot \tanh y}$$

1.5 دراسة تغيرات sinh و cosh

الدالتان sinh وcosh مستمرتان وتقبلان الاشتقاق على مجموعة تعريفيهما $\mathbb{R}$.

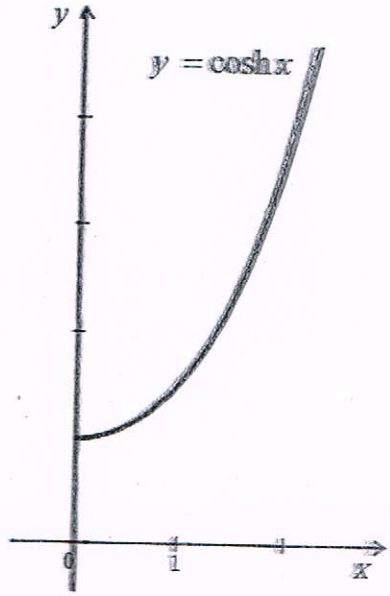
$$(\cosh x)' = \sinh x \;,\; (\sinh x)' = \cosh x$$

وملاحظة $\forall x \in [0,+\infty[,\ \cosh x > 0,\ \sinh x \geq 0$.

ونستنتج جدولي تغيرات sinh و cosh على المجال $[0,+\infty[$.

جدول تغيرات $x \mapsto \cosh x$.

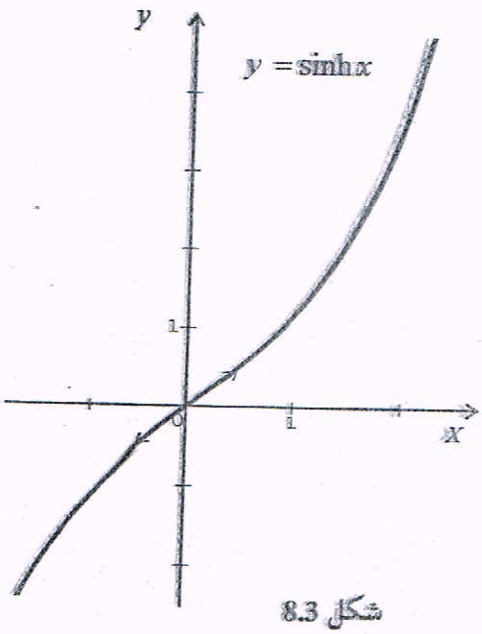
x	$0 \qquad\qquad +\infty$
$(\cosh x)'$	$+$
$\cosh x$	$1 \nearrow +\infty$



شكل 7.3

جدول تغيرات $x \mapsto \sinh x$

x	0 $\qquad\qquad$ $+\infty$
$(\sinh x)'$	$+$
$\sinh x$	$0 \nearrow +\infty$



شكل 8.3

1.5 تغيرات tanh

الدالة tanh مستمرة وتقبل الاشتقاق على مجموعة تعريفهما.

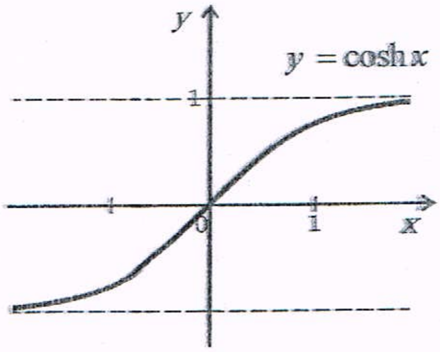
$$(\tanh x)' = \frac{1}{\cosh^2 x} = 1 - \tanh^2 x$$

نلاحظ $\tanh 0 = 0$ و $\tanh x \geq 0$, $\forall x \in [0, +\infty[$

ومنه جدول تغيرات tanh على المجال $]0, +\infty[$.

جدول تغيرات $x \mapsto \tanh x$

x	0 $\qquad$ $+\infty$
$(\tanh x)'$	$+$
$\tanh x$	$1 \nearrow +\infty$



شكل 9.3

6. الدوال القطعية الزائدية العكسية

1.6 الدالة arg cosh

الدالة $x \mapsto \cosh x$ مستمرة ومتزايدة تماما على المجال $]0, +\infty[$. فهي إذن، تقبل دالة عكسية. تسمى هذه الدالة العكسية بدالة قوس جيب تمام الزائدي، ونرمز لها بالرمز $\arg\cosh x$.

لدينا $\quad y = \arg\cosh x \iff x = \cosh y \, , \; y > 0$

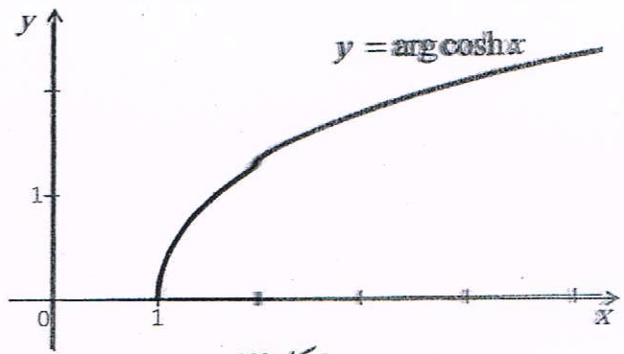
الاشتقاق : $\quad y'(x) = \dfrac{1}{x'(y)} = \dfrac{1}{\sinh y} = \dfrac{1}{\sqrt{\cosh^2 y - 1}}$

ومنه $\quad (\arg\cosh x)' = \dfrac{1}{\sqrt{x^2 - 1}}$

جدول تغيرات $x \mapsto \arg\cosh x$

x	$1 \qquad\qquad +\infty$
$(\arg\cosh x)'$	$+$
$\arg\cosh x$	$1 \nearrow +\infty$

ومنحنى الدالة $\arg\cosh x$ يقبل خط مقارب يوازي محور الفواصل.



شكل 103

ملاحظة

من أجل $x \geq 1$، الدالة $x \mapsto \arg\cosh x$ تساوي الدالة $x \mapsto \ln\left(x + \sqrt{x^2 - 1}\right)$.

2.6 الدالة $\arg\sinh$

نعلم الدالة $x \mapsto \sinh x$ مستمرة ومتزايدة تماما على $]-\infty, +\infty[$ وتأخذ قيمتها في $]-\infty, +\infty[$.

تعريف

تسمى دالتها العكسية بدالة قوس الجيب الزائدي. ونرمز لها بـ $\arg\sinh x$. ولدينا

$$y = \arg\sinh x \quad \Leftrightarrow \quad x = \sinh y$$

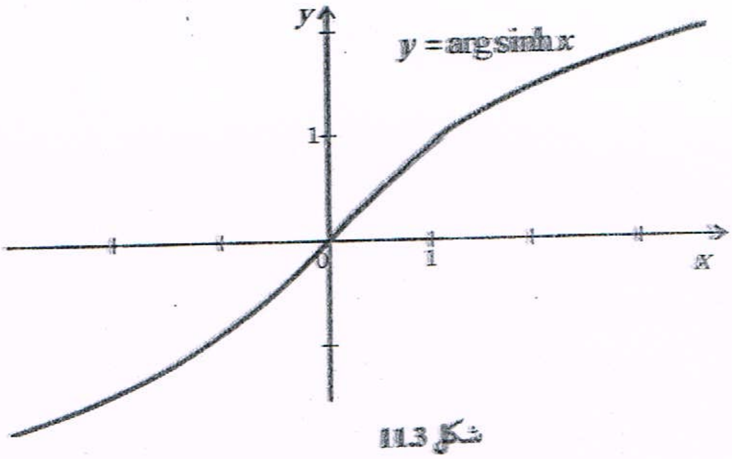
$\arg\sinh$ دالة فردية.

الاشتقاق :
$$y'(x) = \frac{1}{x'(y)} = \frac{1}{\cosh y} = \frac{1}{\sqrt{\sinh^2 y + 1}}$$

ومنه
$$(\arg\sinh x)' = \frac{1}{\sqrt{1 + x^2}}$$

جدول تغيرات $x \mapsto \arg\sinh x$

x	$-\infty$ $\qquad$ $+\infty$
$(\arg\sinh x)'$	$+$
$\arg\sinh x$	$-\infty \nearrow +\infty$



شكل 11.3

3.6 الدالة argtanh

الدالة $x \mapsto \tanh x$ مستمرة ومتزايدة تماما على المجال $]-\infty, +\infty[$ وتأخذ قيامها في المجال $]-1, +1[$ فهي إذن تقبل دالة عكسية. تسمى هذه الدالة العكسية بدالة قوس الظل الزائدي، وترمز لها بـــ $\arg\tanh x$.

الدالة $\arg\tanh$ فردية.

الاشتقاق :

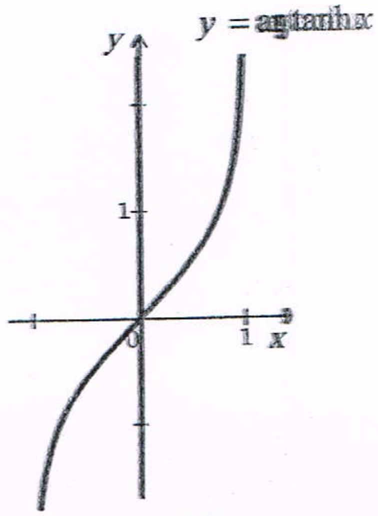
$$y'(x) = \frac{1}{x'(y)} = \frac{1}{\frac{1}{\cosh^2 y}} = \cosh^2 y = \frac{1}{1-\tanh^2 y},$$

ومنه

$$\left(\arg\tanh x\right)' = \frac{1}{1-x^2}$$

جدول تغيرات $x \mapsto \arg\tanh x$

x	$-\infty$ $\qquad$ $+\infty$
$(\arg\tanh x)'$	$+$
$\arg\tanh x$	$-1 \nearrow +1$



شكل 12.3

ملاحظة

الدالة $x \mapsto \operatorname{arg\,tanh} x$ المعرفة على $]-1, +1[$ ، تساوي الدالة $x \mapsto \frac{1}{2} \ln \frac{1-x}{1+x}$.

7. تمارين

تمرين 1 أثبت صحة العلاقات الآتية:

$$\operatorname{argch}(x) = \ln\left|x + \sqrt{x^2 - 1}\right|, \quad \forall x \geq 1$$

$$\operatorname{argsh}(x) = \ln\left|x + \sqrt{x^2 + 1}\right|, \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

$$\operatorname{argth}(x) = \frac{1}{2} \ln\left|\frac{1+x}{1-x}\right|, \quad \forall x \in]-1, +1[$$

تمرين 2 أثبت أن: $\forall x \in \mathbb{R} \ , \ 2|x| \leq 1 + x^2$

واستنتج مجموعة تعريف الدالة $f(x) = \arcsin \frac{2x}{1+x^2}$ ، ثم ادرس تغيراتها.

تمرين 3 عين مجموعة التعريف كل من الدوال الآتية:

$$f(x) = \arctan\left(\frac{x - \sqrt{1-x^2}}{x + \sqrt{1-x^2}}\right), \quad g(x) = \arcsin\left(\frac{1-x^2}{1+x^2}\right)$$

$$h(x) = \arg\cosh(\ln(x+1)), \quad k(x) = \operatorname{argsinh}(\ln(x+1))$$

تمرين 4 • عين D_f مجموعة تعريف الدالة: $f(x)=\arctan\dfrac{2}{1-x}$

• هل f مستمرة على D_f؟ ادرس تغيرات f، وأنشئ منحناها.

تمرين 5 نعتبر الدالة f حيث: $f(x)=\arcsin\left(\dfrac{1-x^2}{1+x^2}\right)$

• عين D_f مجموعة تعريف f.

• من أجل أي القيم للمتغير x، تكون هذه الدالة قابلة للاشتقاق ؟ أحسب $f'(x)$.

تمرين 6 اثبت صحة العلاقتين الآتيتين: $\forall x\in]-1,+1[\ ,\ \arcsin(x)=\arctan\dfrac{x}{\sqrt{1-x^2}}$

$$\forall x\in]-1,+1[\ ,\ \arctan(x)=\arcsin\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$$

تمرين 7 نعتبر الدالة f ذات المتغير الحقيقي x المعرفة كما يلي:

$$f(x)=\begin{cases}\arctan x & ,\ |x|\le 1\\ \dfrac{|x|}{x}+\dfrac{x-1}{2}, & |x|>1\end{cases}$$

• عين D_f مجموعة تعريف f.

• احسب $\lim\limits_{x\to 1^-}\dfrac{f(x)-f(1)}{x-1}$، ماذا تستنتج؟

• هل تقبل f الاشتقاق على D_f ؟ عين دالتها المشتقة f'.

تمرين 8 عين الخطوط المقاربة للمنحنيات المحددة بالدالتين:

$$f(x)=\sqrt{x^2-1}-\arcsin\frac{1}{x},\ g(x)=\left(2x+3+\frac{1}{x}\right)e^{\frac{1}{x}}$$

تمرين 9 نعتبر الدالة f ذات المتغير الحقيقي x المعرفة كما يلي:

$$f(x)=\arcsin\left(\frac{2e^x-3}{e^x-1}\right)$$

• ادرس تغيرات f على مجموعة تعريفها D_f، ثم أنشئ منحناها.

الفصل الرابع

التكامل وطرق حسابه

- مفاهيم عامة حول التكامل
- بعض طرق حساب التكامل
- توسيع مفهوم التكامل
- تمارين

1. مفاهيم عامة حول التكامل

1.1 مفهوم التكامل

تسمى التكامل من a إلى b للدالة f ، الحيز الجبري للسطح المحدد بالمنحنى الممثل لـ f ومحـــور الفواصـــل والمستقيمين : $x=a$ و $x=b$. نرمز له بالرمز $\int_a^b f(x)dx$

3.1 تكامل دالة مستمرة

f دالة مستمرة على مجال I من $\mathbb{R}$ ، و F دالة أصلية لـــ f على I. a و b من I.

التكامل من a إلى b للدالة f، هو العدد: $\int_a^b f(x)dx=\left[F(x)\right]_a^b=F(b)-F(a)$

الدوال المستمرة على مجال من الشكل $[a,b]$ تقبل المكاملة.

نتيجة

إذا كانت f مستمرة على I ، فإن f تقبل دالة أصلية على I.

إذا أخذت دالة أصلية لـــ f القيمة y_0 من أجل القيمة x_0 للمتغير من I ، فإن هذه الدالة الأصـــلية تكـــون وحيدة.

4.1 الإيحاء الهندسي للتكامل المحدود

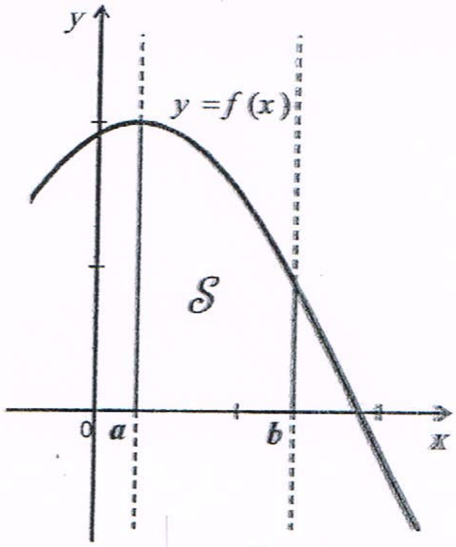
المستوي مُزود بمعلم . نسمي A المساحة المحددة بمحنى المعادلة $y=f(x)$ ومحور الفواصـــل والمـــستقيمين $x=a$ و $x=b$. ونميز حالين :

عندما تكون $f(x)$ موجبة على $[a,b]$، يكون $\int_a^b f(x)\,dx=A$

وعندما تكون $f(x)$ سالبة على $[a,b]$، يكون $\int_a^b f(x)\,dx=-A$

المساحة المحددة بمنحنى $y=f(x)$ ومحور الفواصل والمستقيمين $x=a$ و $x=b$

تُعطى بالعلاقة $S=\left|\int_a^b f(x)\,dx\right|$ (الشكل 1.4).



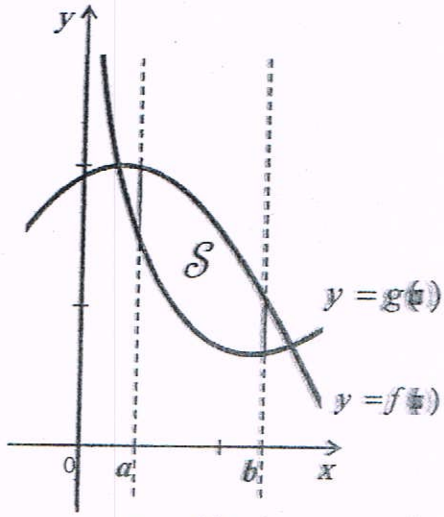
شكل 1.4

المساحة

نعتبر الحيز من المستوي المحدد بالمستقيمين $x=a$ و $x=b$ ومنحنيي المعادلتين $y=f(x)$ و $y=g(x)$

إذا كان من أجل كل x من $[a,b]$: $g(x)\leq f(x)$ ومساحة هذا المجال تُعطى بالعلاقة

$S=\int_a^b (f(x)-g(x))dx$ (الشكل 2.4).



شكل 2.4

5.1 نظرية المتوسط

f دالة مستمرة على المجال $[a,b]$ فهي تبلغ حضيضها وذروتها على هذا المجال : m و M .

فيكون : $m\leq f(x)\leq M$ ومنه $m(b-a)\leq \int_a^b f(x)\,dx\leq M(b-a)$.

وبالتالي : $m\leq \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx\leq M$

وحسب نظرية القيم المتوسطة، فإنه توجد نقطة c من المجال $[a,b]$ بحيث:

$$f(c)=\frac{1}{b-a}\int_a^b f(t)\,dt$$

تسمى c بالقيمة المتوسطة لـ f على $[a,b]$.

6.1 مشتق تكامل

إذا كانت f دالة مستمرة و $F(x)=\int_a^x f(t)\,dt$ ، فإنه يكون لدينا

$$\frac{F(x)-F(x')}{x-x'}=\frac{1}{x-x'}\int_x^{x'} f(t)\,dt$$

حسب نظرية المتوسط فإنه يوجد c يكون محصورا بين x و x':

$$f(c)=\frac{F(x)-F(x')}{x-x'}$$

وبالمرور على النهاية عندما $x\to x'$ ينتج: $\left(\int_a^x f(t)\,dt\right)'=f(x)$

7.1 خواص الدوال القابلة للمكاملة

$$\int_a^b (f(x)+g(x))\,dx=\int_a^b f(x)\,dx+\int_a^b g(x)\,dx$$

$$\int_a^b \lambda f(x)\,dx=\lambda\int_a^b f(x)\,dx$$

$m\le f(x)\le M$ على $[a,b]$ $\Rightarrow$ $m(b-a)\le\int_a^b f(x)\,dx\le M(b-a)$

$$f\le g \;\Rightarrow\; \int_a^b f(x)\,dx\le\int_a^b g(x)\,dx$$

$$a<b \qquad \int_a^b |f(x)|\,dx\le\left|\int_a^b f(x)\,dx\right|$$

$$\left(\int_a^b f(x)\cdot g(x)\,dx\right)^2\le\left(\int_a^b f(x)\,dx\right)\cdot\left(\int_a^b g(x)\,dx\right)$$

2. بعض طرق حساب التكامل

1.2 الدالة الأصلية (إذا علمت)

تسمى دالة أصلية للدالة f المعرفة على المجال I من $\mathbb{R}$. كل دالة F تقبل الاشتقاق على I بحيث:

$$\forall x\in I \quad F'(x)=f(x)$$

إذا كانت F أصلية لــ f، فإن كل الدوال من الشكل $F+\lambda$ هي أيضا دوال أصلية لــ f حيث λ ثابت حقيقي.

ولدينا
$$\int f(x)\,dx = F(x)+\lambda \quad \Leftrightarrow \quad dF = f(x)\,dx \quad \Leftrightarrow \quad \frac{dF}{dx}=f(x)$$

ليكن c عدد كيفي من المجال $[a,b]$. نعتبر الدالة $F(x)=\int_c^x f(t)\,dt$

F تقبل الاشتقاق على المجال $[a,b]$، فهي إذن الدالة الأصلية لــ f التي تنعدم من أجل $x=c$.

نرمز لــ $F(x)=\int f(x)dx$ لإحدى دوال f، الأصلية ونسميه بالتكامل غير المحدود.

2.2 أمثلة

في التكامل $F(x)=\int_a^x \frac{dt}{1+t^2}$، نلاحظ أن الدالة $f(x)=\frac{1}{1+x^2}$ مستمرة على $\mathbb{R}$، و F تقبل الاشتقاق على $\mathbb{R}$، ولدينا

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad F'(x)=f(x)=\frac{1}{1+x^2}$$

والمشتقة الثانية لــ F :
$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad F''(x)=f'(x)=\frac{-2x}{(1+x^2)^2}$$

$$\int \frac{x}{2x-3}dx=\frac{1}{2}\int \frac{x-\frac{3}{2}+\frac{3}{2}}{x-\frac{3}{2}}dx=\frac{1}{2}\int (1+\frac{3}{2}\frac{1}{x-\frac{3}{2}})dx=\frac{1}{2}x+\frac{3}{4}\ln(x-\frac{3}{2})+c$$

$$\int \frac{x+2}{x+1}dx=\int \frac{x+1+1}{x+1}dx=\int (1+\frac{1}{x+1})dx=x+\ln(x+1)+c$$

$$\int \frac{1}{9-x^2}dx=\int \frac{1}{(3-x)(3+x)}dx=\frac{1}{6}\int (\frac{1}{x+3}-\frac{1}{x-3})dx=\frac{1}{6}\left(\ln(x+3)-\ln(x-3)\right)+c$$

$$\int 3x\sqrt{1-2x^2}\,dx=-\frac{3}{4}\int \left(1-2x^2\right)^{1/2}(-4x)\,dx=-\frac{1}{2}\left(1-2x^2\right)^{3/2}+c$$

3.2 بتبديل المتغير

إذا كانت g رتيبة وتقبل للاشتقاق، واعتبرنا مثلا التحويل:

$$x=g(t) \quad a=g(\alpha) \quad b=g(\beta)$$

يكون
$$\int_a^b (t)\,dt=\int_\alpha^\beta f\left(g(t)\right).g'(t)\,dt$$

4.2 أمثلة

• لنحسب التكامل $\int \frac{2x}{(1-x^2)^2}dx$. من أجل كل x من $\mathbb{R}$:

$$u(x)=(1-x^2) \Rightarrow u'(x)=2x$$

ومنه $\int \frac{2x}{(1-x^2)^2}dx = \int \frac{u'(x)}{u^2(x)}dx$

ونعلم بأن $\frac{u'}{u^2}$ هي الدالة الأصلية للدالة $-\frac{1}{u}$.

وأخيرا $\int \frac{2x}{(1+x^2)^2}dx = -\frac{1}{1+x^2}+c$

• في التكامل $\int_{-1}^{0} x\sqrt{1-x}\,dx$. نستخدم التحويل $u=1-x$ ، فيكون $du=-dx$

من أجل $x=-1$ نجد $u=2$. و من أجل $x=0$ يكون $u=1$

$$\int_{-1}^{0} x\sqrt{1-x}\,dx = \int_{2}^{1}(1-u)\sqrt{u}\,(-du) = \int_{1}^{2}(\sqrt{u}-u\sqrt{u})du$$

$$=\frac{-4(\sqrt{2}+1)}{15}$$

• في التكامل $\int \frac{x\,dx}{\sqrt{x+3}}$ ، نستخدم التحويل :

$$t=\sqrt{x+3} \Leftrightarrow t^2=x+3 \Leftrightarrow x=t^2-3,\quad (t\geq 0)$$

$$x=t^2-3 \Rightarrow dx=2t\,dt$$

$$\int \frac{x}{\sqrt{x+3}}dx = \int \frac{(t^2-3)}{3}2t\,dt = 2\int (t^2-3)\,t\,dt = 2(\frac{t^2}{3}-3t)+c$$

نعبر عن النتيجة بدلالة x:

$$\int \frac{x}{\sqrt{x+3}}dx = 2(\frac{t^3}{3}-3t)+k = 2(\frac{(\sqrt{x+3})^3}{3}-\sqrt{x+3})+c$$

$\int \frac{dx}{e^x+e^{-x}}$ نضع $t=e^x$ فيكون $x=\ln t$ ومنه $x=\ln t \Rightarrow dx=\frac{1}{t}dt$

فنحصل على

$$\int \frac{dx}{e^x+e^{-x}} = \int \frac{1}{t+t^{-1}}\frac{dt}{t} = \int \frac{dt}{t^2+1} = \arctan t + c = \arctan e^x + c$$

5.2 التكامل بالتجزئة

F و G أصليتان لـ f و g : $f(x)$

$$\int F(x)\cdot g(x)\,dx = F(x)\cdot G(x) - \int f(x)\cdot G(x)\,dx$$

6.2 أمثلة

- $\int x e^{x} dx = xe^{x} - \int e^{x} dx = x e^{x} - e^{x} + c$
- $\int \ln(x-1) dx = x \ln(x-1) - \int \frac{x}{x-1} dx = x \ln(x-1) - \ln(x-1) - x + c$
- $\int x^{2} \ln x \, dx = \frac{1}{3} x^{3} \ln x - \int \frac{1}{3} x^{2} dx = \frac{1}{3} x^{3} \ln x - \frac{1}{9} x^{3} + c$
- في التكامل $\int_{0}^{\pi} \frac{x \sin x}{1+\cos^{2} x} dx$ ، يكون :

$$f'(x) = \frac{\sin x}{1+\cos^{2} x} \Rightarrow f(x) = \int \frac{\sin x}{1+\cos^{2} x} dx = -\arctan(\cos x)$$

$$g(x) = x \Rightarrow g'(x) = 1$$

بتطبيق صيغة التكامل بالتجزئة :

$$\int_{0}^{\pi} \frac{x \sin s}{1+\cos^{2} x} dx = \left[-x \arctan(\cos x)\right]_{0}^{\pi} - \int_{0}^{\pi} -\arctan(\cos x) dx$$

$$= -\pi \arctan(\cos \pi) + 0.\arctan(\cos 0) + \int_{0}^{\pi} \arctan(\cos x) dx$$

$$= -\pi \arctan(-1) + \int_{0}^{\pi} \arctan(\cos x) dx = -\pi - \frac{\pi}{4} + \int_{0}^{\pi} \arctan(\cos x) dx$$

$$= \frac{\pi^{2}}{4} + \int_{0}^{\pi} \arctan(\cos x) dx$$

نحاول حساب التكامل بطريقة تبديل المتغير : نضع $t = \cos x$ ، فيكون :

$$t = \cos x \Leftrightarrow x = \arccos t$$

$$\Rightarrow dx = (\arccos t)' dt = \frac{1}{\sqrt{1-t^{2}}} dt$$

ونحسب الحدين الجديدين : $x = 0 , \ t = \cos 0 = 1 \quad ; \quad x = \pi \ , \quad t = \cos \pi = -1$

فيأخذ التكامل $\frac{\pi^{2}}{4} + \int_{1}^{-1} \arctan t \cdot \frac{-1}{\sqrt{1-t^{2}}} dt = \frac{\pi^{2}}{4} + \int_{-1}^{1} \cdot \frac{\arctan t}{\sqrt{1-t^{2}}} dt = \frac{\pi^{2}}{4}$

7.2 تكاملات بعض الدوال المألوفة:

لتكن $F(x)$ دالة أصلية لـ $f(x)$.

$f(x)$	$F(x)$	$f(x)$	$F(x)$	$f(x)$	$F(x)$
$x^n\ (n \neq 1)$	$\frac{x^{n+1}}{n+1}$	$\frac{1}{x}$	$\ln\lvert x \rvert$	e^x	$\frac{1}{a}e^{ax}$
$\sin ax$	$-\frac{1}{a}\cos ax$	$\cos ax$	$\frac{1}{a}\sin ax$	$\frac{1}{\cos^2 x}$	$\tan x$
$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$\arcsin x$	$\frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$	$\arccos x$	$\frac{1}{1+x^2}$	$\arctan x$

8 توسيع مفهوم التكامل

f و g دالة معرفتان على $[a, +\infty[$ حيث: $g(x) = \int_a^x f(t)\,dt$

نضع $\lim_{x \to +\infty} g(x) = \int_a^{+\infty} f(t)\,dt$

إذا قبلت الدالة g نهاية حقيقية I، نقول أن التكامل $\int_a^{+\infty} f(t)\,dt$ بأنه متقارب. ويكون متباعدا في حالة العكس.

إذا كان التكامل $\int_a^{+\infty} |f(t)|\,dt$ متقاربا، فإن $\int_a^{+\infty} f(t)\,dt$ يكون أيضا متقاربا.

13 نتائج

- إذا كان f موجب فإن : $\int_a^{+\infty} f(t)\,dt$ متقارب $\Leftrightarrow$ $g(x) = \int_a^{+\infty} f(t)\,dt$ محدودة.

وإذا كانت u و v مستمرتين على $[a, +\infty[$ بحيث $v(t) \geq u(t) \geq 0 \quad \forall t \geq a$، يكون لدينا:

- $\int_a^{+\infty} v(t)\,dt$ متقارب $\Leftarrow$ $\int_a^{+\infty} u(t)\,dt$ متقارب.
- $\int_a^{+\infty} u(t)\,dt$ متباعد $\Leftarrow$ $\int_a^{+\infty} v(t)\,dt$ متباعد
- f دالة مستمرة على $\mathbb{R}$: $\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\,dt = \int_{-\infty}^{a} f(t)\,dt + \int_a^{+\infty} f(t)\,dt$

تمارين محلولة

• أدرس تقارب التكاملين الآتيين :

$$\int_1^{+\infty} \frac{\sin x}{x^3+4}dx \quad \text{و} \quad \int_0^{+\infty} \frac{1}{x+4}dx$$

لدينا $\forall x \in [4, +\infty[$ $\frac{1}{x+4} > \frac{1}{2x}$ ومنه التكامل $\int_4^{+\infty} \frac{1}{2x}dx$ متباعد.

إذن $\int_0^{+\infty} \frac{1}{x+4}dx$ متباعد

ولدينا $\forall x \in [1, +\infty[$ $\left|\frac{\sin x}{x^3+4}\right| < \frac{1}{x^3+4} < \frac{1}{x^3}$ وبما أن التكامل $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^3}dx$ متقارب.

فإن $\int_1^{+\infty} \frac{\sin x}{x^3+4}dx$ يكون أيضا متقاربا مطلقا، وبالتالي فهو متقارب.

• أدرس الدالة $F(x) = \int_0^x e^{-t^2}dt$.

نلاحظ أن الدالة $F(x)$ معرفة تماما لأن الدالة $f(x) = e^{-t^2}$ معرفة ومستمرة على $\mathbb{R}$،

من جهة أخرى $F'(x) = f(x)$ مهما كان x من $\mathbb{R}$،

وبالتالي الدالة $F(x)$ تكون متزايدة تماما على $\mathbb{R}$. ولدينا

$$\forall x \geq 1, \quad F(x) = F(1) + \int_1^x e^{-t^2}dt$$

وبما أن $e^{-t^2} \leq e^{-t}$ مهما كان $1 \leq t$. فإن

$$\forall x \geq 1, \quad F(x) \leq F(1) + \int_1^x e^{-t}dt$$
$$\leq F(1) + \frac{1}{e}$$

إذن الدالة F متزايدة ومحدودة من الأعلى، فهي تقبل نهاية (منتهية) عند $(+\infty)$

• أحسب التكامل الآتي $\int \frac{\tan x}{1+\cos x}dx$

لدينا $\tan x = \frac{2\tan\frac{x}{2}}{1-\tan^2\frac{x}{2}}$ ، $\cos x = \frac{1-\tan^2\frac{x}{2}}{1+\tan^2\frac{x}{2}}$

ومنه

$$\int \frac{\tan x}{1+\cos x}dx = \int \frac{\dfrac{2\tan\frac{x}{2}}{1-\tan^2\frac{x}{2}}}{1+\dfrac{1-\tan^2\frac{x}{2}}{1+\tan^2\frac{x}{2}}}dx = \int \frac{\dfrac{2\tan\frac{x}{2}}{1-\tan^2\frac{x}{2}}}{\dfrac{2}{1+\tan^2\frac{x}{2}}}dx$$

$$= \int \frac{\tan\frac{x}{2}}{1-\tan^2\frac{x}{2}}\cdot(1+\tan^2\frac{x}{2})dx$$

نجري التحويل $t = \tan\frac{x}{2}$ الذي يكافئ $x = 2\arctan t$ وبالتالي $dx = \frac{2}{1+t^2}dt$

نحصل على المطلوب

$$\int \frac{\tan x}{1+\cos x}dx = \int \frac{\tan\frac{x}{2}}{1-\tan^2\frac{x}{2}}\cdot(1+\tan^2\frac{x}{2})dx = \int \frac{t}{1-t^2}(1+t^2)\frac{2}{1+t^2}dt$$

$$= \int \frac{2t}{1-t^2}dt = -\int \frac{-2t}{1-t^2}dt = -\ln\left|1-t^2\right|+c$$

$$= -\ln\left|1-\tan^2\frac{x}{2}\right|+c$$

* عين مجموعة تعريف الدالة: $F(x) = \int \frac{dx}{e^x-1}$ ، ثم احسب $F(x)$ واستنتج $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{e^x-1}$.

- مجموعة تعريف $F(x)$ هي $\mathbb{R}^*$

بوضع $t = e^x - 1$ يكون $x = \ln(t+1)$ ، ومنه $dx = \frac{dt}{t+1}$

إذن $\int \frac{dx}{e^x-1} = \int \frac{dt}{t(t+1)}$

نكتب العبارة $\frac{1}{t(t+1)}$ بالشكل $\frac{a}{t}+\frac{b}{t+1}$

لدينا $\frac{1}{t(t+1)} = \frac{a}{t}+\frac{b}{t+1} = \frac{a(t+1)+bt}{t(t+1)} = \frac{(a+b)t+a}{t(t+1)}$

وبمطابقة معاملات الحدود نجد :

$$\begin{cases} a+b=0 \\ a=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b=-1 \\ a=1 \end{cases}$$

ومنه $\int \frac{dt}{t(t+1)} = \int (\frac{1}{t}-\frac{1}{t+1})\,dt = \ln|t|-\ln|t+1|+c = \ln\left|\frac{t}{t+1}\right|+c$

وبتعويض بقيمتها نجد: $F(x) = \ln\left|\frac{e^x-1}{e^x}\right|+c$

ولدينا بالتعريف $\displaystyle\int_1^{+\infty}\frac{dx}{e^x-1}=\lim_{t\to+\infty}\int_1^{t}\frac{dx}{e^x-1}$

لنحسب التكامل المحدود $\displaystyle\int_1^{t}\frac{dx}{e^x-1}=\left[\ln\frac{e^x-1}{e^x}\right]_1^t=\ln\frac{e^t-1}{e^t}-\ln\frac{e-1}{e}$

ومنه $\displaystyle\int_1^{+\infty}\frac{dx}{e^x-1}=\lim_{t\to+\infty}\int_1^{t}\frac{dx}{e^x-1}=\lim_{t\to+\infty}\left(\ln\frac{e^t-1}{e^t}-\ln\frac{e-1}{e}\right)$

وأخيرا $\displaystyle\int_1^{+\infty}\frac{dx}{e^x-1}=\lim_{t\to+\infty}\left(\ln(1-\frac{1}{e^t}\right)-\ln\frac{e-1}{e}=1-\ln(e-1)$

5.5 تمارين

تمرين 1 عين الثوابت A، B، C بحيث تكون $\displaystyle\frac{x^3+1}{x^2(x-1)}=1+\frac{A}{x}+\frac{B}{x^2}+\frac{C}{x-1}$

والستنتج $\displaystyle\int\frac{x^3-1}{x^2(x-1)}dx$

تمرين 2 عين الأعداد الحقيقية A، B، C بحيث تكون من أجل كل x من $\mathbb{R}_+^*$:

$$f(x)=\frac{A}{x}+\frac{Bx+C}{x^2+1}=\frac{x-1}{x(x^2+1)}$$

عين دالة أصلية لـــ $f(x)$، والتي تنعدم من أجل $x=1$.

تمرين 3 أحسب التكاملات الآتية:

$$\int_1^3\sqrt[4]{x^3}\,dx\ ,\ \int_1^{\pi}\frac{x+1}{\sqrt{x}}dx\ ,\ \int\frac{2x}{(x^2-1)^3}dx\ ,\ \int_1^{\ln 2}e^{\frac{e}{2}}\,dx$$

$$\int_1^3 x\left(x^2+1\right)^3dx\ ,\ \int\frac{x-1}{2x+1}dx\ ,\ \int 2x^2\cdot e^{\frac{x^3}{2}}\,dx\ ,$$

$$\int\left(x^3-x-\frac{1}{x^2}\right)dx\ ,\ \int\frac{x^4}{1-x}dx\ ,\ \int e^{2x}\,dx\ ,\ \int\frac{dx}{x^2+4},$$

$$\int\cos(2x-3)\,dx\ ,\ \int\frac{dx}{x\ \ln x^2},\ \int\frac{\arctan y}{1+y^2}dy\ ,\ \int\arctan 3y\,dy$$

تمرين 4 أثبت تقارب التكامل $\displaystyle I=\int_0^1\frac{t-1}{\ln t}dt$ $\quad(0<t<1\quad t=x^x)$

• أثبت $\displaystyle\int_0^x\frac{t}{\ln t}dt=\int_0^{x^2}\frac{1}{\ln t}dt\quad\forall t\in]0,1[$

وبوضع $F(x)=\int_0^{\pi/2} \ln(\sin x)\,dx$ استنتج $F(x)=\int_x^{x^2}\frac{dt}{\ln t}$

• أثبت تقارب كل من $I_1=\int_0^{\pi/2}\ln(\sin x)\,dx$ و $I_2=\int_0^{\pi/2}\ln(\cos x)\,dx$

• جد علاقة بين I_1 و I_2 واستنتج قيمة التكامل $I_3=\int_0^{\pi/2}\ln(\tan x)\,dx$، ثم قيمتي I_1 و I_2 ؟

تمرين 5 f دالة مستمرة على $\mathbb{R}$:

$$\forall x\in\mathbb{R},\quad \int_0^x f(t)\,dt=2\big(f(x)-f(0)\big)$$

بين أن f تقبل الاشتقاق على $\mathbb{R}$.

تمرين 6 نعتبر الدالة $f: x\mapsto \int_0^x \frac{dt}{1+t^2}$ المعرفة على $\mathbb{R}$.

بين أن f تقبل الاشتقاق على $\mathbb{R}$، ثم أحسب $f'(x)$.

تمرين 7 بتبديل المتغير: $u=\sqrt{1+t}$، أحسب $\int_0^x \frac{dt}{\sqrt{1+t^2}}$. $(0<x)$

تمرين 8 بتبديل المتغير: $u=\sqrt{\cos t}$، أحسب $\int_0^x \frac{\sin^3 t}{\sqrt{\cos t}}dt$ $(0<x<\pi/2)$

واستنتج قيمتي التكاملين: $I=\int_0^{\pi}\frac{x\sin x}{1+\sin^2 x}dx$ و $j=\int_0^{\pi}\frac{x\sin x}{1+\cos^2 x}dx$.

تمرين 9 نفس السؤال من أجل:

$\int_1^2 \frac{\sqrt{1+\ln x}}{x}dx$, $\int_1^{\pi/2} x\sin x\,dx$ (بوضع $z=1+\ln x$)،

$\int_{-\infty}^{1/2}\frac{dx}{\sqrt{|x\cdot(1-x)|}}$ (بوضع $u^2=x$ $0<x$ و $u^2=-x$ $0>x$).

تمرين 10 f دالة مستمرة على المجال $[0,2\pi]$ في $\mathbb{R}$.

برهن، بوضع $t=\pi-x$، أن $\int_0^{\pi} x f(\sin x)\,dx=\frac{\pi}{2}\int_0^{\pi} f(\sin x)\,dx$

تمرين 11 باستعمال التكامل بالتجزئة، أحسب، من أجل كل x و m موجبين تماما :

$$G(x)=\int_m^x t^3\ln t\,dt$$

احسب $\lim_{m\to 0}G(x)$، واستنتج دالة أصلية لـ f على $]0,+\infty[$.

تمرين 12 أدرس تغيرات الدالة $f(x)=\frac{1+\ln x}{x}$، ثم أحسب $\int_k f(t)\,dt$ ومثله.

تمرين 13 بين أن $\int_x^1 \frac{dt}{1+t^2}=\int_1^{\frac{1}{x}} \frac{dt}{1+t^2}$ حيث $0<x$.

تمرين 14 من أجل أي القيم لـ a من $\mathbb{R}$ تقبل المعادلة $\int_2^x (t+a)dt=-1$ حلا ؟

تمرين 15 أحسب التكاملات:

$$\int e^{\arcsin x}\,dx \ , \ \int x\left(\ln x\right)^2 dx \ , \ \int \frac{1}{x\cdot \ln x}dx \ , \ \int_{-t}^{t} \frac{\arcsin x}{x^3}dx$$

$$\int \sqrt{1+\sin x}\,dx \ , \ \int \frac{dx}{\cos x} \ , \ \int \frac{dx}{\sinh x} \ , \ \int \frac{dx}{\cosh x}$$

تمرين 16 ليكن $I=\int_0^{\pi/2} \frac{\cos^2 x}{\cos 2x}dx$ و $J=\int_0^{\pi/2} \frac{\sin^2 x}{\sin 2x}dx$

أحسب $I+J$ و $I-J$ واستنتج قيمة كل من I و J .

تمرين 17 عين مجموعة تعريف الدالة: $F(x)=\int \frac{dx}{3+5\cos x}$ ، ثم احسب $F(x)$ ،

واستنتج $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{3+5\cos x}$.

تمرين 18 احسب التكاملات الآتية:

$\int \frac{x}{\sin x}dx$ ، $\int x^2\cdot e^{3x}dx$ ، $\int \frac{dx}{x\ln x^2}$ ، $\int \frac{x^2\,dx}{(1+x^3)^3}$ ، $\int \frac{dx}{(2x-1)\cdot\sqrt{2x-1}}$ ،

$\int \frac{dx}{x^2+4}$ ، $\int_0^1 \frac{dx}{x^2+1}$ ، $\int \frac{x^2+\sqrt{x^3}+1}{\sqrt{x}}dx$ ، $\int (x^3-x^2+\frac{1}{x}-\frac{1}{x^2})dx$ ،

$\int_0^1 x\cdot\sin x\,dx$ ، $\int \frac{dx}{e^x+e^{-x}}$ ، $\int e^{2x}\sin x\,dx$ ، $\int \frac{e^x\,dx}{e^x+1}$ ، $\int x\cdot\ln^2 x\,dx$ ،

$\int \sqrt{\frac{1+x}{1-x}}\,dx$ ، $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2-6}}$ ، $\int \frac{x\cdot dx}{\sqrt{x+3}}$.

الفصل الخامس

المشتقات المتتالية والنشر المحدود

- المشتقات المتتالية و تعميم نظرية التزايدات المنتهية
- بعض صيغ نشر الدوال
- النشر المحدود بجوار الصفر
- بعض تطبيقات النشر المحدود
- تمارين

المشتقات المتتالية

1. المشتقات المتتالية وتعميم نظرية التزايدات المنتهية

1.1 المشتقات المتتالية:

تعريف: ليكن I مجال و $f:I\to\mathbb{R}$.

المشتقة من الرتبة n للدالة f الذي نرمز له بالرمز $f^{(n)}$ معرفة بالتراجع :

من أجل $n=0$ $\quad f^{(0)}=f$ و $\left(f^{(n)}\right)'=f^{(n+1)}$

نقول أن الدالة f تقبل الاشتقاق حتى الرتبة n عند $a\in I$ إذا كانت $f^{(n-1)}$ قابلة الاشتقاق عند a .

ونكتب $\left(f^{(n-1)}\right)'(a)=f^{(n)}(a)$

نقول أن الدالة f تقبل مشتقة من الرتبة n على I إذا قبلت f الاشتقاق n مرة على I . أي إذا كانت $f^{(n)}(x)$ معرفة عند كل $x\in I$.

2.1 مشتقات من الرتب العليا

لتكن $f:\left]a,b\right[\to\mathbb{R}$ دالة قابلة للاشتقاق على المفتوح $\left]a,b\right[$.

نقول عن f إنها تقبل الاشتقاق مرتين عند نقطة $x_0\in\left]a,b\right[$ إذا قبلت الدالة المشتقة f' الاشتقاق عند النقطة $x_0\in\left]a,b\right[$، أي إذا كانت النهاية التالية موجودة :

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f'(x)-f'(x_0)}{x-x_0}.$$

تسمى هذه النهاية عند وجودها المشتق الثاني لـ f عند $x_0\in\left]a,b\right[$، ونرمز له بـ $f''(x_0)$. إذا كانت $f:\left]a,b\right[\to\mathbb{R}$ تقبل الاشتقاق مرتين عند كل نقطة من $\left]a,b\right[$ أصبحت الدالة $f'':\left]a,b\right[\to\mathbb{R}$ معرفة، وهو ما يمكّننا من تعريف المشتق الثالث عند $x_0\in\left]a,b\right[$ بأنه يساوي النهاية التالية (إن وجدت) :

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f''(x)-f''(x_0)}{x-x_0}.$$

نعرف المشتق من الرتبة $n\in\mathbb{N}^*$ بالتراجع بوضع

$$f^{(n+1)}(x_0)=\lim_{x\to x_0}\frac{f^{(n)}(x)-f^{(n)}(x_0)}{x-x_0}$$

حيث يرمز $f^{(n)}(x)$ للمشتق f من الرتبة n عند النقطة $x\in\left]a,b\right[$.

مثلا بالحساب المباشر نجد $\left(\frac{1}{x-1}\right)^{(n)}=\frac{(-1)^{n+1}n!}{(x-1)^{n+1}}$

1.5 نظرية Leibniz

إذا كانت f و g دالتين عدديتين معرفتين على المجال I من $\mathbb{R}$ وتقبلان الاشتقاق n مرة على I ، فإن الدالة fg تقبل الاشتقاق n مرة على I ولدينا :

$$\forall x\in I,\quad (fg)^{(n)}(x)=\sum_{k=0}^{n}\frac{n!}{k!(n-k)!}f^{(k)}(x)g^{(n-k)}(x)$$

أمثلة:

$$(\sin x)^{(n)}=\sin\left(x+n\frac{\pi}{2}\right),\quad (\cos x)^{(n)}=\cos\left(x+n\frac{\pi}{2}\right),\quad (\log x)^{(n)}=\frac{(-1)^{n+1}}{x^{n}}(n-1)!$$

تمرين محلول

حساب المشتقة $f^{(n)}(x)$ ، حيث $f(x)=\frac{x}{(1+x)^2}$

لدينا $f(x)=\frac{1}{x+1}-\frac{1}{(1+x)^2}$ ومنه $f'(x)=-\frac{1}{(x+1)^2}-\frac{2}{(x+1)^3}$ ،

وكذلك $f''(x)=\frac{2}{(x+1)^3}+\frac{2\times 3}{(x+1)^4}$ ، ويكون $f'''(x)=-\frac{3!}{(x+1)^4}-\frac{4!}{(x+1)^5}$ ، ..

فيكون $f^{(n)}(x)=-\frac{(-1)^n n!}{(x+1)^{n+1}}-\frac{(-1)^n(n+1)!}{(x+1)^{n+2}}$ ، أي $f^{(n)}(x)=\frac{(-1)^n n!}{(x+1)^{n+1}}(x-n)$

تمرين

أحسب المشتقة من الرتبة n لكل من الدالتين: $\frac{2x}{1-x^2}$ و e^x.

أحسب المشتقة من الرتبة p للدالة $f(x)=x^n$ من أجل $n\in\mathbb{N}$

2. مفهوم الصنف

ليكن n من $\mathbb{N}^*$. نقول عن f أنها من الصنف $\mathcal{C}^n$ على I ($f\in\mathcal{C}^n(I)$)، إذا كانت f تقبل الاشـتقاق n مرة على I و كانت $f^{(n)}$ مستمرة على I .

ملاحظة

$$\forall n\in\mathbb{N}\quad \left(k\le n\ \Rightarrow\ \mathcal{C}^n(I)\subset\mathcal{C}^k(I)\right)$$

$\mathcal{C}^0(I)$: مجموعة الدوال المستمرة على I .

إذا رمزنا بـــ $\mathcal{D}(I)$ لمجموعة الدوال القابلة للاشتقاق على I ، يكون : $\mathcal{C}^1(I)\subset\mathcal{D}(I)\subset\mathcal{C}^0(I)$

إذا كان من أجل كل عدد طبيعي n، $f \in \mathcal{C}^n(I)$ نقول أن f من الصنف ما لا نهاية.
ونكتب $f \in \mathcal{C}^\infty(I)$. ولدينا :

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad \mathcal{C}^\infty(I) \subset \mathcal{C}^n(I)$$

مثلا الدالة الأسية، وكذلك دوال كثيرات الحدود من الصنف $\mathcal{C}^\infty$ على $\mathbb{R}$.

2.2 أمثلة

- عين مجال الاشتقاق $\mathcal{D}$ وأحسب العدد المشتق عند كل نقطة $x \in \mathcal{D}$ للدالة $f(x)=\ln|\ln x|$

مجموعة تعريف f : $D_f =]0;1[\cup]1;+\infty[$، و f تقبل الاشتقاق على $D_f = \mathcal{D}$: $f'(x)=\dfrac{1}{x\ln x}$

- عين مجال الاشتقاق $\mathcal{D}$ وأحسب العدد المشتق عند كل نقطة $x \in \mathcal{D}$ للدالة $f(x)=e^{\sqrt{x}}$

مجموعة التعريف f هي $D_f = [0;+\infty[$، و f تقبل الاشتقاق على $\mathcal{D} =]0;+\infty[$،

(f لا تقبل الاشتقاق عند 0 لأن $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{\sqrt{x}}-1}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1}{\sqrt{x}}\dfrac{e^{\sqrt{x}}-1}{\sqrt{x}}=+\infty$)

ولدينا من أجل $0<x$ $\qquad f'(x)=\dfrac{e^{\sqrt{x}}}{2\sqrt{x}}$

- الدالة $f(x)=x|x|$ من الصنف $\mathcal{C}^1(\mathbb{R})$، ودالتها المشتقة : $f'(x)=\begin{cases} 2x \ ; & x \geq 0 \\ -2x \ ; & x<0 \end{cases}$

- إثبات : $\forall x>0 \quad \dfrac{1}{x+1}<\log(x+1)-\log x<\dfrac{1}{x}$

نعم أن الدالة $\log$ من الصنف $\mathcal{C}^\infty$ على $]0,+\infty[$، وشرط نظرية التزايدات المنتهية على المجال $[x,x+1]$ متحققة، إذن يوجد c من $]x,x+1[$ بحيث يكون:

$$\log(x+1)-\log x=(x+1-x).\frac{1}{c}=\frac{1}{c}$$

لكن c من $]x,x+1[$، وبالتالي $\dfrac{1}{x+1}<\dfrac{1}{c}<\dfrac{1}{x}$.

- إثبات : $\forall x \in]0,1[\ \arcsin x<\dfrac{x}{\sqrt{1-x^2}}$

نعلم أن الدالة $\arcsin$ تقبل الاشتقاق على المجال المفتوح $]-1,+1[$، وشروط نظرية التزايدات المنتهية متحققة على المجال $[0,x]$، إذن يوجد c من $]0,x[$:

$$\arcsin x-\arcsin 0=(x-0)\frac{1}{\sqrt{1-c^2}}=\frac{x}{\sqrt{1-c^2}}$$

وبما أن c أقل من x، فإنه يكون $\dfrac{1}{\sqrt{1-c^2}}<\dfrac{x}{\sqrt{1-x^2}}$. ومنه المطلوب .

3. نظرية تايلور

f دالة تحقق الشروط التالية:

إذا حققت الدالة الشروط :
$$\begin{cases} f \text{ تقبل الاشتقاق } n \text{ مرة على } [a,b] \text{،} \\ f^{(n)} \text{ مستمرة على } [a,b] \text{،} \\ f^{(n)} \text{ تقبل الاشتقاق } n+1 \text{ مرة على }]a,b[. \end{cases}$$

فإنه يوجد c من $]a,b[$:

$$f(b)=f(a)+(b-a)f'(a)+\frac{(b-a)^2}{2!}f''(a)+\ldots+\frac{(b-a)^n}{n!}f^{(n)}(a)+\frac{(b-a)^{n+1}}{(n+1)!}f^{(n+1)}(c)$$

تسمى هذه العلاقة بدستور تايلور في المجال $[a,b]$.

1.3 صيغة Mac–Laurain

حالات خاصة في علاقة تايلور على المجال $[a,b]$:

من أجل $n=0$: $f(b)=f(a)+(b-a)f'(c)$

من أجل $n=1$: $f(b)=f(a)+(b-a)f'(a)+\frac{(b-a)^2}{2!}f''(c)$

إذا طبقنا دستور تايلور في المجال $[0,x]$ نجد:

$$\boxed{f(x)=f(0)+xf'(a)+\frac{x^2}{2!}f''(0)+\ldots+\frac{x^n}{n!}f^{(n)}(0)+\frac{x^{n+1}}{(n+1)!}f^{(n+1)}(c)}$$

التي يمكن كتابتها بالشكل:

$$f(x)=f(0)+xf'(0)+\frac{x^2}{2!}f''(0)+\ldots+\frac{x^n}{n!}f^{(n)}(0)+\frac{x^{n+1}}{(n+1)!}f^{(n+1)}(\theta x)$$

حيث $\theta\in]0,1[$

تسمى هذه الأخيرة بنشر ماك لوران **Mac-Laurain**

يعطى دستور ماك لوران من الرتبة الأولى، كمايلي:

$$f(x)=f(0)+xf'(0)+\frac{x^2}{2!}f''(\theta x) \quad 0<\theta<1$$

2.3 أمثلة

• نشر ماك لوران من الرتبة الأولى للدالة $f(x)=\sqrt{1+x}$ على المجال $]-1,+\infty[$.

بما أن f تقبل الاشتقاق بالاستمرار ما لا نهاية من المرات على $]-1,+\infty[$.

فإنه يمكن كتابة نشر ماك لوران من الرتبة الأولى للدالة f على مثل المجال $[0,x]$

لدينا $f'(x)=\dfrac{1}{2\sqrt{1+x}}$ ، $f''(x)=-\dfrac{1}{4\sqrt{(1+x)^3}}$

ومنه $\theta\in]0,1[$ $f(x)=1+\dfrac{1}{2}x-\dfrac{x^2}{8\sqrt{(1+\theta x)^3}}$

• تطبيق دستور ماك لوران على الدالة $f(x)=e^x$ ، نجد :

$$e^x=1+x+\frac{x^2}{2!}+\dots+\frac{x^n}{n!}+\frac{x^{n+1}}{(n+1)!}e^c$$ حيث c من $\mathbb{R}$

• الدالة $g(x)=\dfrac{1}{1-x}$ تعطي في المجال $]-1,1[$ علاقة ماك لوران بالشكل:

$$\frac{1}{1-x}=1+x+x^2+\dots+x^n+R_n(x)$$

ملاحظة تتيح شروط النظرية كتابة f بالشكل : $f(x)=p_n(x)+R_n(x)$

حيث p_n كثير حدود درجته n و $R_n(x)$ ما هو إلا $\dfrac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}x^{n+1}$ في نشر ماك لوران .

النشر المحدود بجوار الصفر

4) دوال متكافئة بجوار قيمة

1.4) اللامتناهي في الصغر

ϕ دالة معرفة على مجال مفتوح I يشمل x_0 وإذا كانت f أيضا دالة معرفة على مجال مفتوح I يشمل x_0،

تكون f لا متناهية في الصغر (أو مهملة) بالنسبة لـ ϕ بجوار x_0 ، ونكتب $f=o(\phi)$ بجوار x_0، إذا وإذا

فقط من أجل كل $\varepsilon>0$، يوجد $\eta>0$ يكون : $|f(x)|<\varepsilon|\phi(x)|$ ، $\forall x\in\left]x_0-\eta,x_0+\eta\right[$

إذا كانت ϕ لا تنعدم يمكن تبديل العبارة $|f(x)|<\varepsilon|\phi(x)|$ بـ $\left|\dfrac{f(x)}{\phi(x)}\right|<\varepsilon$.

ونقول إن f مهملة أمام ϕ بجوار x_0

إذا كانت $\phi=1$، أي إذا كان $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=0$ ، نقول إن f لا متناهي في الصغر عندما يؤول x إلى x_0.

أمثلة

$f(x)=x^3$: $f=o(x)$ بجوار 0. وكذلك f لا متناهية في الكبر بجوار $(+\infty)$.

$g(x)=\dfrac{1}{x^2+1}$: g لا متناهي الصغر بجوار اللانهاية ($+\infty$ أو $-\infty$).

$g(x)=\ln(x+1)$: g لا متناهي الكبر بجوار $+\infty$، وهو لا متناهي الصغر عندما يؤول x إلى 0.

2.4) تكافؤ دالتين

لتكن f و g دالتين معرفتين على مجال مفتوح يشمل x_0.

نقول عن f أنها تكافئ g بجوار x_0 إذا تحقق $f-g=o(x)$ بجوار x_0 . ونكتب $f\sim_{x_0}g$

مثال $\sin x\sim_0 x$

إذا كانت $f_1\sim_{x_0}g_1$ و $f_2\sim_{x_0}g_2$ فإن $f_1\cdot f_2\sim_{x_0}g_1\cdot g_2$

إذا كانت $f\sim_{x_0}g$ و $\frac{1}{f}$، $\frac{1}{g}$ معرفتان بجوار x_0 فإن $\frac{1}{f}\sim_{x_0}\frac{1}{g}$

إذا كانت h مستمرة بجوار u_0 يحقق $h(u_0)=x_0$ وإذا كان $f\circ g$ و $g\circ f$ معرفتان بجوار x_0 فإن العلاقة

$f\sim_{x_0}g$ تستلزم $f\circ g\sim_{u_0}g\circ f$

ملاحظة: بصورة عامة لا يمكن جمع المتكافئات

مثلا باستخدام النشر عند الصفر للدالة $\sin x-x\cos x$

$$\left(x-\frac{1}{6}x^3+x^4p_1(x)\right)-\left(x-\frac{1}{2}x^3+x^3p_2(x)\right)$$
$$=\frac{1}{3}x^3+x^4p(x)$$

ومنه لدينا التكافؤ : $(\sin x - x\cos x)\sim_0 \frac{1}{3}x^3$

ونستنتج $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x - x\cos x}{x^3}=\frac{1}{3}$

3.4 تكافؤ بعض الدوال بجوار الصفر

$\sin x\sim_0 x$ ، $(e^x-1)\sim_0 x$ ، $\ln(x+1)\sim_0 x$ ، $(1+x)^n\sim_0 1+nx$

$\tan x\sim_0 x$ ، $(1-\cos^2 x)\sim_0 \frac{x^2}{2}$ ، $\arcsin x\sim_0 x$ ، $\text{sh}x\sim_0 x$

4.4 دوال متكافئة بجوار ∞

لتكن f و g دالتين معرفتين على مجموعة A

نقول عن f أنها تكافيء g بجوار $+\infty$ إذا تحقق $f-g=o(x)$ بجوار $+\infty$. ونكتب $f\sim_{+\infty} g$

5. تعريف النشر المحدود

f دالة معرفة في جوار $x=0$

نقول أن f تقبل نشرا محدودا من الرتبة n بجوار 0، إذا وجد كثير حدود من درجة n:

$$f(x)=p(x)+x^n\varepsilon(x)=a_0+a_0x+a_1x^2+\dots+a_n+x^n+x^n\varepsilon(x)$$

مع $\lim\limits_{x\to 0}\varepsilon(x)=0$

أي إذا وُجد كثير حدود $p(x)$ بمعاملات حقيقية بحيث :

$$f(x)=p(x)+o(x^n) \quad \text{و} \quad \deg p(x)\le n$$

ملاحظة : كثير الحدود في نشر $f(x)$ وحيد .

إذا قبلت دالة f نشرا محدودا من الرتبة n بجوار a ، نكتب $f(x)=p_n(x)+o(x-a)^n$

$p_n(x)$ هو النشر المحدود من الرتبة n بجوار a .

يساعدنا هذا النشر في تعيين معادلة المماس عند النقطة المبدأ، ووضعيته بالنسبة لمنحنى f، وكذلك في حساب بعض النهايات لتحديد طبيعة الفروع اللانهائية. (خطوط مقاربة أو فروع لا نهائية).

النشر المحدود من الرتبة n في جوار الصفر.

إن النشر المحدود من الرتبة n لدالة f تقبل مشتقات مستمرة حتى المرتبة $n+1$، في جوار الـ هو:

$$f(x)=f(0)+xf'(0)+\frac{x^2}{2!}f''(0)+\dots+\frac{x^n}{n!}f^{n}(0)+x^n\varepsilon(x)$$

مع $\lim_{x\to 0}\varepsilon(x)=0$

$y=f(0)+xf'(0)$: هو نشر محدود من الرتبة الأولى لـ f عند 0 .

وهو أيضا معادلة المماس عند الصفر (في حالة $0\in D_f$)

عمليا نحسب المشتقات المتوالية $f^{(i)}(x_0)$ عند النقطة x_0 حتى الرتبة المطلوبة n، ثم نعوض قيمها في العلاقة

$$f(x)=f(x_0)+\frac{f'(x_0)}{1!}(x-x_0)+\frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2+\dots+\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n+o(x-x_0)^n.$$

أمثلة:

- **نشر الدالة $f(x)=\sqrt{4-x}$ حتى الرتبة الثانية بجوار الصفر.**

عبارة هذا النشر $f(x)=f(0)+\frac{f'(0)}{1!}x+\frac{f''(0)}{2!}x^2+o(x^2)$

لدينا $f(0)=2$ ، $f'(x)=\frac{1}{2\sqrt{4-x}}$ ومنه $f'(0)=\frac{1}{4}$ ، وكذلك $f''(x)=-\frac{1}{4}\frac{1}{4\sqrt{4-x}+x\sqrt{4-x}}$

ومنه $f''(0)=-\frac{1}{32}$،

وأخيرا $f(x)=2+\frac{1}{4}x-\frac{1}{64}x^2+o(x^2)$

- **انشر الدالة $f(x)=\ln(1+\sin x)$ حتى الرتبة الرابعة بجوار الصفر.**

نحسب مشتقات الدالة f حتى الرتبة الرابعة عند الصفر، ونعوض قيمها في النشر الآتي:

$$f(x)=f(0)+\frac{f'(0)}{1!}x+\frac{f''(0)}{2!}x^2+\frac{f'''(0)}{3!}x^2++\frac{f^{(4)}(0)}{4!}x^2+o(x^4)$$

لدينا :

$$f'(x)=\frac{\cos x}{1+\sin x}$$

$$f''(x)=-\frac{1}{1+\sin x}$$

$$f'''(x)=\frac{\cos x}{(1+\sin x)^2}$$

$$f^{(4)}(x)=2\frac{2-\sin x}{\cos^2 x-4\sin x-\sin^2 x-3}$$

ومنه $f(0)=0\ ,\ f'(0)=1,\ f''(0)=-1,\ f'''(0)=1,\ f^{(4)}(0)=-2$

والنشر المطلوب هو :

$$f(x)=0+1\cdot x-\frac{1}{2!}x^2+\frac{1}{3!}x^3-\frac{1}{12}x^4+o(x^4)$$
$$=x-\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{6}\cdot x^3\frac{1}{12}x^4+o(x^4)$$

نستطيع كتابة النشر بجوار x_0 بالشكل

$$f(x)=a_0+a_1(x-x_0)+a_2(x-x_0)^2+\dots+a_n(x-x_0)^n+o\left((x-x_0)^n\right).$$

أما بجوار اللانهاية فالنشر يكتب

$$f(x)=a_0+a_1\frac{1}{x}+a_2\frac{1}{x^2}+\dots+a_n\frac{1}{x^n}+o\left(\frac{1}{x^n}\right).$$

2.5 ملاحظة

يمكن أن تقبل دالة نشرا محدودا حتى الرتبة n دون أن تكون قابلة للاشتقاق في الرتبة n.

مثلا : الدالة الآتية :

$$f(x)=\begin{cases} x^3\sin\frac{1}{x^2}, & x\neq 0\\ 0, & x=0\end{cases}$$

التي لا تقبل مشتقة ثانية عند الصفر، ورغم ذلك في تكتب بالشكل $f(x)=0+o(x^2)$

الذي يمثل نشر الدالة المعطاة من الرتبة الثانية بجوار الصفر.

بتطبيق نظرية تايلور تقدم طريقة الحصول على نشر محدود من الرتبة n لكل دالة $f:]a,b[\to\mathbb{R}$

من الصنف C^n على $]a,b[$ إذا ما قبلت $f^{(n)}$ الاشتقاق عند كل x_0 من $]a,b[$.

3.5 النشر المحدود من الرتبة n بجوار الصفر لبعض الدوال المألوفة

$$e^x=1+\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!}+\dots+\frac{x^n}{n!}+x^n\varepsilon(x)$$

$$\ln(1+x)=x-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\dots+(-1)^{n+1}\frac{x^n}{n!}+x^n\varepsilon(x)$$

$$\cos x=1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}+\dots+(-1)^P\frac{x^{2p}}{(2p)!}+x^P\varepsilon x$$

$$\sin x=x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}+\dots+(-1)^P\frac{x^{2P+1}}{(2P+1)!}+x^{2P+1}\varepsilon(x)$$

$$\sinh x = x + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \ldots + \frac{x^{2P+1}}{(2n+1)!} + x^{2P+1}\varepsilon(x)$$

$$\cosh x = 1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \ldots + \frac{x^{2P}}{(2n)!} + x^{2P}\varepsilon(x)$$

$$\frac{1}{x+1} = 1 - x + x^2 + \ldots + (-1)^n n^n + x^n\varepsilon(x)$$

$$(1+x)^\alpha = 1 + \frac{\alpha}{1!}x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2 + \ldots + \frac{\alpha(\alpha-1)\ldots(\alpha-n+1)}{n!}x^n + x^n\varepsilon(x)$$

455 نتائج وطرق حسابية

- نقول أن f يقبل نشرا من الرتبة n بجوار 0 : $f(x) = p(x) + o(x^n)$، فإنه من أجل كل k من $\{1, 2, \ldots, n\}$، f يقبل نشرا محدودا من الرتبة k بجوار 0، هذا النشر هو كثير الحدود الذي لا يشمل إلا وحيدات الحد من درجة أقل من أو تساوي k في كثير الحدود $p(x)$.
- عمليات :

إذا كان : $f(x) = P(x) + x^n\varepsilon(x)$ و $g(x) = Q(x) + x^n\varepsilon(x)$:

فإنه يكون : $f(x) \pm g(x) = P(x) \pm Q(x) + x^n\varepsilon(x)$

$f(x) \times g(x) = P(x) \times Q(x) + x^n\varepsilon(x)$ مع حذف الحدود ذات الدرجة الأكبر من n في الجداء $P(x) \times Q(x)$.

$f(\lambda x^P) = P(\lambda x^P) + x^n\varepsilon(x)$ (بحذف الحدود ذات الدرجة الأكبر من n)؛

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{P(x)}{Q(x)} + x^n\varepsilon(x)$$

$$f'(x) = P'(x) + x^{n-1}\varepsilon(x)$$

$$\int f(x)\,dx = \int P(x)\,dx + x^{n+1}\varepsilon(x)$$

مثلا

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + \ldots + x^n + o(x^n)$$

$$\left(\frac{1}{1-x}\right)' = \frac{1}{(1-x)^2} = 1 + 2x + 3x^2 + \ldots + nx^{n-1} + o(x^{n+1})$$

- إذا كان $n \in \mathbb{N}$، و f دالة تقبل نشرا محدودا من الرتبة n بجوار 0 : $f(x) = p(x) + o(x^n)$ و g دالة قبل نشرا محدودا من الرتبة n بجوار 0 : $g(x) = q(x) + o(x^n)$، وإذا كان $f(0) = 0$

فإن الدالة $f \circ g$ تقبل نشرا محدودا درجته n مأخوذا في كثير الحدود $p(q(x))$ والذي لا يشمل إلا وحيدات الحد ذات الدرجة الأقل من n أو تساويها .

5.5دراسة أشكال عدم التعين

* في حساب النهاية $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\sin x}{x}$

يكفي أن نكتب حسب نشر الدالة الجيبية

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = \lim_{x \to 0} \frac{x + o(x)}{x} = 1 + \lim_{x \to 0} \frac{o(x)}{x} = 1$$

* في النهاية $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\sin^2 x - x^2 \cos x}{x^2(1 - \cos x)}$.

نكتب (باستخدام النشر) :

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin^2 x - x^2 \cos x}{x^2(1 - \cos x)} = \lim_{x \to 0} \frac{\left(x - \frac{x^3}{3!}\right)^2 - x^2\left(1 - \frac{1}{2}x^2\right)}{x^2\left(\frac{1}{2}x^2\right)}$$

$$= \lim_{x \to 0} \frac{\frac{x^4}{6}}{x^2\left(\frac{1}{2}x^2\right)} = \frac{1}{3}$$

* في حساب النهاية $\lim\limits_{x \to 0} \frac{x \cos x - \sin x}{x^3}$

لدينا $\cos x = 1 - \frac{x^2}{2} + x^2 \varepsilon_1\left(x^2\right)$ مع $\lim\limits_{x \to 0} \varepsilon_1(x) = \varepsilon(0) = 0$

$\sin x = x - \frac{x^3}{6} + x^3 \varepsilon_2\left(x^3\right)$ مع $\lim\limits_{x \to 0} \varepsilon_2(x) = \varepsilon(0) = 0$

ومنه

$$\frac{x \cos x - \sin x}{x^3} = \frac{x\left(1 - \frac{x^2}{2} + x^2 \varepsilon_1\left(x^2\right)\right) - \left(x - \frac{x^3}{6} + x^3 \varepsilon_2\left(x^3\right)\right)}{x^3}$$

$$= \frac{-\frac{x^3}{3} + x^3\left(\varepsilon_1\left(x^2\right) - \varepsilon_2\left(x^3\right)\right)}{x^3} = -\frac{1}{3} + \varepsilon(x)$$

وبالمرور على النهاية نجد المطلوب.

6. تمارين محلولة

• نفرض أن f و g تقبلان النشرين المحدودين من الرتبة 4، عند الصفر، كما كتبا في الحدود الآتيين:

$$f : x - \frac{x^3}{3} \qquad g : \frac{1}{2}\pi - x - \frac{x^3}{6}$$

عين النشر المحدود من الرتبة الرابعة لـ $g \circ f$. واستنتج النهاية، عندما يؤول x إلى 0 للعبارة:

$$\frac{g \circ f(x) - \frac{1}{2}\pi + x - \frac{x^3}{6}}{x^4}$$

عين النشر المحدود من الرتبة الرابعة في جوار الصفر للدوال الآتية:

$$g(x)\cdot f(x) \;,\; 2x \cdot g(x) - f^2(x) \;,\; f^2(x) \;,\; f(x^2)$$

الحل

نشر $g \circ f$ من الرتبة الرابعة عند الصفر:

نلاحظ بأن $f(0)=0$ و f مستمرة عند 0. ولدينا:

$$(g \circ f)(x) = g(f(x)) = g\left(x - x^3/3\right) = \frac{1}{2}\pi - \left(x - x^3/3\right) - \frac{\left(x - x^3/3\right)^3}{6}$$

$$= \frac{1}{2}\pi - x + \frac{1}{6}x^3 + x^4\varepsilon(x)$$

مع $\lim\limits_{x \to 0} \varepsilon(x) = \varepsilon(0) = 0$. والنشر المطلوب: $\frac{1}{2}\pi - x + \frac{1}{6}x^3$

حساب النهاية

$$\lim_{x \to 0} \frac{(g \circ f)(x) - \left(\frac{1}{2}\pi - x + \frac{1}{6}x^3\right)}{x^4} =$$

$$\lim_{x \to 0} \frac{\left(\frac{1}{2}\pi - x + \frac{1}{6}x^3 + x^4\varepsilon(x)\right) - \left(\frac{1}{2}\pi - x + \frac{1}{6}x^3\right)}{x^4} = \lim_{x \to 0} \varepsilon(x) = 0$$

حساب النشور:

$$f(x^2) = x^2 - \frac{1}{6}(x^2)^3 = x^2 + o(x^4)$$

$$f^2(x) = \left(x - \frac{1}{6}x^3\right) - \frac{1}{3}\left(x - \frac{1}{6}x^3\right)^3 = x - \frac{2}{3}x^3 + o(x^4)$$

$$2x\,g(x) = 2x\left(\frac{1}{2}\pi - x - \frac{1}{6}x^3\right) = \pi x - 2x^2 + o(x^4)$$

$$2x\,g(x) - f^2(x) = (\pi - 1)x - 2x^2 - \frac{2}{3}x^3 + o(x^4)$$

$$f(x)g(x) = \left(x - \frac{1}{3}x^3\right).\left(\frac{1}{2}\pi - x - \frac{1}{6}x^2\right) = \frac{1}{2}\pi x - x^2 + \frac{1}{6}\pi x^3 + o(x^4)$$

• عين النشر المحدود من الرتبة الخامسة عند الصفر للدالة $\tan x$

الحل

النشران المحدودان من الرتبة الخامسة عند الصفر لـ sin و cos هما على الترتيب :

$x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120}$ و $1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24}$.

نجري القسمة (وفق القوى المتزايدة لـ x) لنشر sin على نشر cos حتى الرتبة 5 :

$$\begin{array}{l|l}
x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} & 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} \\
\cline{2-2}
x - \frac{x^3}{2} + \frac{x^5}{24} & x + \frac{x^3}{3} + \frac{2}{15}x^5 \\
\cline{1-1}
\frac{x^3}{3} - \frac{x^5}{30} + \ldots & \\
\frac{x^3}{3} - \frac{x^5}{6} + \ldots & \\
\cline{1-1}
\frac{2}{15}x^5 + \ldots &
\end{array}$$

والنشر المطلوب هو $\tan x : x + \frac{x^3}{3} + \frac{2}{15}x^5$

• عين النشر المحدود بجوار الصفر من الرتبة 3 للدوال التالية :

e^x ، $\sqrt{1+x}$ ، $\ln(1+x)$

واستنتج النشر المحدود بجوار الصفر من الرتبة 3 للدوال التالية:

$\ln\left(1+\sqrt{1+x}\right)$ ، $\sqrt{1+\ln(1+x)}$ ، $e^{\sqrt{1+\ln(1+x)}}$

الحل

اعتمادا على النشر المحدود بجوار الصفر من الرتبة 3:

يمكن استخدام العلاقة التالية حيث $n=3$ و $\alpha=\dfrac{1}{2}$:

$$(1+x)^{\alpha}=1+\alpha x+\frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^{2}+\ldots+\frac{\alpha(\alpha-1)\ldots(\alpha-n+1)}{n!}x^{n}+o(x^{n}).$$

أو حساب مشتقات f عند 0 حتى الرتبة 3 والتعويض في عبارة النشر فنحصل على:

$$\sqrt{1+x}=1+\frac{x}{2}-\frac{x^{2}}{8}+\frac{x^{3}}{16}+o(x^{3}).$$

$$e^{x}\ :\ 1+x+\tfrac{1}{2}x^{2}+\tfrac{1}{6}x^{3}$$

$$\ln(1+x)\ :\ x-\tfrac{1}{2}x^{2}+\tfrac{1}{3}x^{3}$$

نقوم بنشر $\ln\left(1+\sqrt{1+x}\right)$ بجوار الصفر من الرتبة 3:

$$1+\sqrt{1+x}\ :\ 2\left(1+\tfrac{1}{4}x-\tfrac{1}{16}x^{2}+\tfrac{1}{32}x^{3}\right)$$

$$\left(\tfrac{1}{4}x-\tfrac{1}{16}x^{2}+\tfrac{1}{32}x^{3}\right)^{2}\ \rightarrow\ \tfrac{1}{16}x^{2}-\tfrac{1}{32}x^{3}$$

$$\left(\tfrac{1}{4}x-\tfrac{1}{16}x^{2}+\tfrac{1}{32}x^{3}\right)^{3}\ \rightarrow \tfrac{1}{64}x^{3}$$

$$\ln\left(1+\sqrt{1+x}\right):\ \ \ln 2+\left(\tfrac{1}{4}x-\tfrac{1}{16}x^{2}+\tfrac{1}{32}x^{3}\right)-\tfrac{1}{2}\left(\tfrac{1}{16}x^{2}-\tfrac{1}{32}x^{3}\right)+\tfrac{1}{3}\left(\tfrac{1}{64}x^{3}\right)$$

$$:\ \ \ln 2+\tfrac{1}{4}x-\tfrac{3}{32}x^{2}+\tfrac{5}{96}x^{3}$$

و كذلك في نشر $\sqrt{1+\ln(1+x)}$

$$1+\ln(1+x)\ :\ \ 1+x-\tfrac{1}{2}x^{2}+\tfrac{1}{3}x^{3}$$

$$\left(x-\tfrac{1}{2}x^{2}+\tfrac{1}{3}x^{3}\right)^{2}\rightarrow x^{2}-x^{3}$$

$$\left(x-\tfrac{1}{2}x^{2}+\tfrac{1}{3}x^{3}\right)^{3}\rightarrow x^{3}$$

$$\sqrt{1+\ln(1+x)}\ :\ \ 1+\tfrac{1}{2}\left(x-\tfrac{1}{2}x^{2}+\tfrac{1}{3}x^{3}\right)-\tfrac{1}{8}\left(x^{2}-x^{3}\right)+\tfrac{1}{16}x^{3}$$

$$:\ 1+\tfrac{1}{2}x-\tfrac{3}{8}x^{2}+\tfrac{17}{48}x^{3}$$

نشر $e^{\sqrt{1+\ln(1+x)}}$

$$e^{\sqrt{1+\ln(1+x)}}\ :\ \ e^{1+\frac{1}{2}x-\frac{3}{8}x^{2}+\frac{17}{48}x^{3}}$$

$$e^{\sqrt{1+\ln(1+x)}} : e^{1+\frac{1}{2}x-\frac{3}{8}x^2+\frac{17}{48}x^3} :$$

$$e\left(1+\tfrac{1}{2}x-\tfrac{3}{8}\left(\tfrac{1}{2}x\right)^2+\tfrac{1}{6}\left(\tfrac{1}{2}x\right)^3\right)\cdot\left(1+\tfrac{1}{2}\left(-\tfrac{3}{8}x^2\right)\right)\cdot\left(1+\tfrac{1}{6}\left(\tfrac{17}{48}x^3\right)\right):$$

$$e\left(1+\tfrac{1}{2}x-\tfrac{1}{4}x^2+\tfrac{3}{16}x^3\right)$$

- عين النشر المحدود بجوار الصفر من الرتبة 3 للدوال التالية:

$$\cos(x+\sin x) \quad ، \quad \sqrt{1+\sin x}$$

$$\sqrt{1+\sin x} \sim \sqrt{1+\left(x-\frac{1}{6}x^3\right)} \sim 1+\frac{1}{2}\left(x-\frac{1}{6}x^3\right)-\frac{1}{8}\left(x-\frac{1}{6}x^3\right)^2+\frac{1}{16}\left(x-\frac{1}{6}x^3\right)^3$$

$$\left(x-\frac{1}{6}x^3\right)^2 \to x^2 \ , \ \left(x-\frac{1}{6}x^3\right)^3 \to x^3$$

ومنه

$$\sqrt{1+\sin x} \sim_0 1+\frac{1}{2}\left(x-\frac{1}{6}x^3\right)-\frac{1}{8}x^2+\frac{1}{16}x^3$$

$$\sqrt{1+\sin x} : 1+\frac{1}{2}x-\frac{1}{8}x^2-\frac{1}{48}x^3$$

$$\cos(x+\sin x) \sim_0 \cos\left(2x-\frac{1}{6}x^3\right) \sim_0 1-\frac{1}{2}\left(2x-\frac{1}{6}x^3\right)$$

$$\left(2x-\frac{1}{6}x^3\right) \to 4x^2$$

$$\cos(x+\sin x) \sim_0 1-\frac{1}{2}\left(4x^2\right)$$

$$\therefore \cos(x+\sin x) : 1-\frac{1}{2}x^2$$

- انشر حتى الرتبة 6 الدالة $f(x)=\dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}}$ بجوار الصفر.

يمكن استخدام العلاقة التالية مباشرة باعتبار $n=6$ و $\alpha=-\dfrac{1}{2}$ واستبدال x بـ x^2 :

$$(1+x)^\alpha=1+\alpha x+\frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2+\ldots+\frac{\alpha(\alpha-1)\ldots(\alpha-n+1)}{n!}x^n+o(x^n).$$

أو حساب مشتقات f عند 0 حتى الرتبة 6 والتعويض في عبارة النشر فنحصل في كلتي الحالتين على:

$$\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}=1-\frac{x^2}{2}+\frac{3x^4}{8}-\frac{5x^6}{16}+o(x^6)$$

ملاحظة

يمكن في النشر السابق تعويض $o(x^6)$ بـ $o(x^7)$ لأن الدالة زوجية ولذا فالحد الموالي -لو واصلنا النشر- سيكون أس المتغير فيه 8.

• النشر المحدود بجوار الصفر من الرتبة 3 للدوال التالية :

$$\frac{1}{1+e^x} \quad ، \quad e^x \cdot \ln(1-x) \quad ، \quad \frac{\ln(1-x)}{1-x}$$

• $\dfrac{\ln(1-x)}{1-x}$

$$\begin{array}{r|l}
-x-\frac{1}{2}x^2-\frac{1}{3}x^3 & 1-x \\ \cline{2-2}
\underline{\pm x \mp x^2} \qquad\quad & -x-\frac{3}{2}x^2-\frac{11}{6} \\
-\frac{3}{2}x^2-\frac{1}{3}x^3 & \\
\underline{\pm\frac{3}{2}x^2\mp\frac{3}{2}x^3} & \\
-\frac{11}{6}x^3 &
\end{array}$$

$$\frac{\ln(1-x)}{1-x}=-x-\frac{3}{2}x^2-\frac{11}{6}x^3+o(x^3)$$

• $e^x \cdot \ln(1-x) : \left(1+x+\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{6}x^3\right)\left(-x-\frac{1}{2}x^2-\frac{1}{3}x^3\right) : -x-\frac{3}{2}x^2-\frac{4}{3}x^3+o(x^3)$

$\dfrac{1}{1+e^x}$

$$1+e^x : 2\left(1+\underbrace{\frac{1}{2}x+\frac{1}{4}x^2+\frac{1}{12}x^3}_{x}\right)$$

$$\frac{1}{1+e^x} : \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{1+\left(\frac{1}{2}x+\frac{1}{4}x^2+\frac{1}{12}x^3\right)}$$

$$\left(\frac{1}{2}x+\frac{1}{4}x^2+\frac{1}{12}x^3\right)^2 \to \frac{1}{4}x^2+\frac{1}{4}x^3$$

$$\left(\frac{1}{2}x+\frac{1}{4}x^2+\frac{1}{12}x^3\right)^3 \to \frac{1}{8}x^3$$

$$\frac{1}{1+e^x} : \frac{1}{2}\left[1-\left(\frac{1}{2}x+\frac{1}{4}x^2+\frac{1}{12}x^3\right)+\left(\frac{1}{4}x^2+\frac{1}{4}x^3-\frac{1}{8}x^3\right)\right]$$

$$\frac{1}{1+e^x}=\frac{1}{2}-\frac{1}{4}x+\frac{1}{48}x^3+o(x^3)$$

7. وضعية منحنى دالة بالنسبة لخطوط

1.7 الوضعية بالنسبة للمماس عند نقطة x_0

نعلم بأن معادلة المماس عند x_0 تكتب بالشكل $y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$

لنفرض أن لدينا النشر

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \cdots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n + o(x - x_0)^n.$$

نميز حالتين: n زوجي :

- إذا كان $f^{(n)}(x_0) > 0$ ، فإن المنحنى سيقع فوق المماس.
- إذا كان $f^{(n)}(x_0) < 0$ ، فإن المنحنى سيقع تحت المماس.

n فردي : عندئذ يقطع المماس المنحنى وتكون وضعيته على النحو الآتي :

الحالة	$x > x_0$	$x < x_0$
$f^{(n)}(x_0) > 0$	المنحنى فوق المماس	المنحنى تحت المماس
$f^{(n)}(x_0) < 0$	المنحنى تحت المماس	المنحنى فوق المماس

2.7 تمرين محلول

نعتبر الدالة العددية: $f(x) = e^{-\frac{1}{2}x} + \frac{1}{3}xe^{x} - \frac{2}{9}e^{x}$

1. أحسب الدالة المشتقة $f'(x)$ ، ثم جد النشر المحدود لها من الرتبة الأولى بجوار الصفر، واستنتج النشر المحدود للدالة $f(x)$ من الرتبة الثانية بجوار الصفر.

2. بين أن $f(x)$ مستمرة وتقبل الاشتقاق عند $x_0 = 0$.

3. استنتج معادلة المماس للمنحنى الممثل للمعادلة $y = f(x)$ المار من نقطة المبدأ في معلم كيفي.

الحل

1. الدالة $f(x) = e^{-\frac{1}{2}x} + \frac{1}{3}xe^{x} - \frac{2}{9}e^{x}$ مستمرة وتقبل الاشتقاق بجوار الصفر. ولدينا:

$$f'(x) = \frac{1}{9}e^{x} + \frac{1}{3}xe^{x} - \frac{1}{2}e^{x}e^{-\frac{3}{2}x}$$

2. النشر المحدود من الرتبة الثانية بجوار الصفر للدالة $f'(x)$:

$$f'(x) = f'(0) + f''(0)\cdot x + o(x)$$

$$f'(x) = -\frac{7}{18} + \frac{25}{36}\cdot x + o(x) .$$

والنشر المحدود من الرتبة الثانية بجوار الصفر للدالة $f(x)$:

$$f(x) = \frac{7}{9} - \frac{7}{18}\cdot x + \frac{25}{72}\cdot x^2 + o(x^2)$$

3. تكون معادلة المماس المطلوبة، هي: $y = \frac{7}{9}(1 - \frac{1}{2}x)$.

لدينا n زوجي و $f''(0) > 0$ ، وبالتالي منحنى الدالة f سيقع فوق هذا المماس.

3.7 وضعية المنحنى بالنسبة لخط مقارب أفقي

يفرض أن $f(x)$ يقبل النشر : $f(x) = a + \frac{a_n}{x_n} + o\left(\frac{1}{x^n}\right)$ (a و a_n معاملان) :

نميز أيضا حالتين: n زوجي :

- إذا كان $a_n > 0$ ، فإن المنحنى سيقع فوق خط المقارب $y = a$.
- إذا كان $a_n < 0$ ، فإن المنحنى سيقع تحت خط المقارب $y = a$.

n فردي : عندئذ تكون الوضعية كالتالي :

الحالة	$x \to +\infty$	$x \to -\infty$
$a_n > 0$	المنحنى فوق الخط المقارب $y = a$	المنحنى تحت الخط المقارب $y = a$
$a_n < 0$	المنحنى تحت الخط المقارب $y = a$	المنحنى فوق الخط المقارب $y = a$

4.7 وضعية المنحنى بالنسبة لخط مقارب مائل

نفرض أن لدينا النشر التالي $f(x) = ax + b + \frac{a_n}{x_n} + o\left(\frac{1}{x^n}\right)$ (a و a_n معاملان) :

هناك حالتان : n زوجي :

- إذا كان $a_n > 0$ ، فإن المنحنى سيقع فوق خط المقارب $y = ax + b$.
- إذا كان $a_n < 0$ ، فإن المنحنى سيقع تحت خط المقارب $y = ax + b$.

n فردي : الوضعية تكون كالآتي :

الحالة	$x \to +\infty$	$x \to -\infty$
$a_k > 0$	المنحنى فوق الخط المقارب $y = ax + b$	المنحنى تحت الخط المقارب $y = ax + b$
$a_k < 0$	المنحنى تحت الخط المقارب $y = ax + b$	المنحنى فوق الخط المقارب $y = ax + b$

8 النشر المحدود بجوار اللانهاية

1.8 النشر المحدود من الرتبة n بجوار اللانهاية

نعتبر الدالة $f(x)$. بحساب النشر المحدود للدالة $g(u)$ بجوار $u = 0$، حيث $g(u) = f(1/x)$ نحصل أيضا على النشر المحدود للدالة $f(x)$ بجوار اللانهاية. (بتبديل المتغير $x = \frac{1}{u}$).

2.8 تمارين محلولة

• الدالة $f(x) = x\,e^{\frac{1}{x}}$، وبوضع $x = \frac{1}{u}$، نحصل على $g(u) = \frac{1}{u}e^{u}$:

النشر المحدود من المرتبة 2 بجوار الصفر للدالة e^{u}:

$$e^{u} = 1 + u + \frac{u^{2}}{2} + u^{2}\varepsilon(u)$$

ومنه $g(u) = \frac{1}{u} + 1 + \frac{u}{2} + u\varepsilon(u)$

وأخيرا
$$f(x) = x + 1 + \frac{1}{2x} + \frac{1}{x}\varepsilon\left(\frac{1}{x}\right)$$

$$f(x) = x + 1 + \varphi(x) \qquad \text{مع} \qquad \varphi(x) = \frac{1}{2x} + \frac{1}{x}\varepsilon\left(\frac{1}{x}\right)$$

$y = x + 1$: نشر محدود من الرتبة الأولى لـ $f(x)$، وهو أيضا معادلة الخط المقارب لمنحنى f.

• لتكن الدالة $f(x) = -\sqrt{x^{2}+1} - x$ المعرفة على $]-\infty, 0]$.

أدرس الفروع اللانهائية.

الحل

لدينا
$$\frac{f(x)}{x} = \frac{1}{x}\left(\sqrt{x^{2}+1} - x\right) = -\left(\sqrt{1 + \frac{1}{x^{2}}} + 1\right)$$

باستخدام التحويل $x \mapsto \frac{1}{x}$، يكون النشر المحدود لـ $\frac{f(x)}{x}$ من الرتبة 2 هو $-\left(1 + \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{x^{2}} + 1\right)$

ومنه $\frac{f(x)}{x}=2-\frac{1}{x^2}+\frac{1}{x^2}\varepsilon\left(\frac{1}{x}\right)$ مع $\lim\limits_{x\to\infty}\varepsilon\left(\frac{1}{x}\right)=\varepsilon(0)=0$

وبالتالي لدينا $f(x)=2x-\frac{1}{2x}+\frac{1}{x}\varepsilon\left(\frac{1}{x}\right)$، ومعادلة الخط المقارب هي: $y=2x$.

وبمادام $0<\frac{1}{2x}$ فإن منحنى f يكون فوق هذا الخط.

• نعتبر $f(x)=(x+1)e^{\frac{1}{x}}$

باستخدام النشر المحدود من الرتبة الأولى للدالة الأسية، عين معادلة الخط المقارب المائل لمنحنى f.

نعلم بأن $e^{u}=1+u+u.\varepsilon(u)$ مع $\lim\limits_{x\to0}\varepsilon(u)=0$

وبالتالي $e^{\frac{1}{x}}=1+\frac{1}{x}+\frac{1}{x}\cdot\varepsilon\left(\frac{1}{x}\right)$ مع $\lim\limits_{x\to\infty}\varepsilon\left(\frac{1}{x}\right)=0$

إذن $f(x)=(x+1)\cdot e^{\frac{1}{x}}=(x+1).\left(1+\frac{1}{x}+\frac{1}{x}\varepsilon\left(\frac{1}{x}\right)\right)=x+2+\varphi(x)$ مع $\lim\limits_{x\to+\infty}\varphi(x)=0$

ومنحنى f يقبل خطا مقاربا مائلا معادلته $y=x+2$.

• نضع من أجل كل عدد صحيح $n>0$ $u_n=n^2\left(\arctan\frac{1}{n}-\frac{1}{n}\right)$

جد نهاية u_n عندما يؤول n إلى $+\infty$.

الحل:

النشر المحدود من الرتبة 2 عند الصفر للدالة $\arctan x$ هو x.

وبالتالي من أجل كل x من $\mathbb{R}$ $\arctan x=x+x^2\varepsilon(x)$ مع $\lim\limits_{x\to0}\varepsilon(x)=\varepsilon(0)=0$

بإعطاء x القيمة $\frac{1}{n}$، يكون: $\arctan\frac{1}{n}=\frac{1}{n^2}\varepsilon\left(\frac{1}{n}\right)$.

ومنه $n^2\left(\arctan\frac{1}{n}-\frac{1}{n}\right)=n^2\left(\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}\varepsilon\left(\frac{1}{n}\right)-\frac{1}{n}\right)=\varepsilon\left(\frac{1}{n}\right)$

عندما يؤول n إلى $+\infty$ فإن $\frac{1}{n}$ تنتهي إلى الصفر. وبما أن ε مستمرة عند الصفر يكون لدينا:

$\lim\limits_{x\to+\infty}\varepsilon\left(\frac{1}{n}\right)=0$ أي $\lim\limits_{x\to+\infty}n^2\left(\arctan\frac{1}{n}-\frac{1}{n}\right)=0$

9 تمارين

تمرين 1 أكتب النشر المحدود للدالتين f و g من الرتبة الرابعة بجوار الصفر حيث:

$$g(x)=\frac{x}{1-x} \quad ، \quad f(x)=\sin x$$

ثم استنتج النشر المحدود من الرتبة الرابعة بجوار الصفر للدالة : $h(x)=f(g(x))-g(f(x))$

تمرين 2 جد بتطبيق هذا الدستور النشر المحدود بجوار الصفر من الرتبة الخامسة للدوال الآتية:

$$\sin x\ ,\ \arg\sin h(\cos x)\ ,\ \cos x\ ,\ e^{x}\ ,\ \tan x$$

تمرين 3 أكتب النشر المحدود بجوار الصفر للمرتبة 3 للدوال الآتية: $e^{\sin x}, e^{\cos x}, \log\frac{\sin x}{x}$

تمرين 4 انشر حسب دستور ماك لوران الدوال الآتية: $\sin^2 x, \frac{x}{(1+x^2)^2}, e^{x}.\sin x, \frac{\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}}$

تمرين 5 أكتب النشر المحدود بجوار الصفر للمرتبة 5 للدالتين: $\frac{1}{1-x}$ و $\frac{1}{1+x}$.

ثم استنتج النشر المحدود من الرتبة 5 للدالة: $\frac{1}{1+x^2}$.

تمرين 6 عين النشر المحدود من الرتبة السابعة للدوال الآتية :

$$\frac{e^{x}-e^{\sin x}}{x-\sin x}\ ,\ \sqrt{1+e^{x}}\ ,\ \frac{1}{1-\frac{x^2}{6}}\ ,\ (1+x)^{x}\ ,\ (1+x)^{\frac{1}{x}}$$

$$e^{x}\ln(1+x)\ ,\ \frac{e^{x}-1}{(1+x)^2-1}\ ,\ \sqrt{\frac{\ln(1+x)}{x}}\ ,\ \frac{\ln(1+x)}{x}$$

تمرين 7 جد نشر ماك لوران للدالة f من المرتبة n في الحالتين الآتيتين :

$$f(x)=\log(1+\sin x)\ n=3, f(x)=e^{x}+\cos n=3$$

$$f(x)=\sin(\log(1+\sin x))\ n=3, f(x)=(\sin x).(tgx)\ n=2$$

تمرين 8 أكتب النشر المحدود بجوار الصفر للمرتبة n لكل من الدالتين الآتيتين:

$$f(x)=\begin{cases} e^{-\frac{1}{x^2}} & x\neq 0 \\ 0 & x=0 \end{cases} \quad f(x)=\begin{cases} e^{-\frac{1}{x}} & x>0 \\ 0 & x\leq 0 \end{cases}$$

تمرين 9 باستخدام دستور ماك لوران، أثبت صحة المتراجحات الآتية:

$$(0<x)\quad x-\frac{x^3}{6}<\sin x<x$$

$$(0<x)\quad x-\frac{x^2}{2}<\log(1+x)<x$$

تمرين 10 عين النشر المحدود من الرتبة الخامسة لـ sin عند $x_0=\frac{\pi}{4}$.

بوضع $f(x)=\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)$، أنشر f عند الصفر.

تمرين 11 عين النشر المحدود من الرتبة الرابعة عند الصفر للدالة $\cos(\sin x)$. واستنتج حساب

$$\lim_{x\to0}\frac{2\cos(\sin x)-2+x^2}{x^4}$$

تمرين 12 عين النشر المحدود من الرتبة الخامسة في جوار الصفر للدالة $f(x)=\cos x^{\sin x}-\cos x^{x}$

تمرين 13 أحسب $\lim_{x\to0}\frac{\cos x-1}{x\cdot\sin x}$ ، $\lim_{x\to0}\frac{\cos x-1}{e^x-1-\sin x}$ ، $\lim_{x\to0}\frac{\arcsin x-x}{x^3}$

تمرين 14 أحسب $\lim_{x\to+\infty}u_n$: $u_n=\dfrac{n\cdot\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)-1}{\sin\frac{1}{n}}$

تمرين 15 أحسب النهايتين $\lim_{x\to0}\dfrac{x^3}{e^x-1-x-\frac{x^2}{2}}$ ، $\lim_{x\to0}\left(\frac{1}{\sin^2 x}-\frac{1}{x^2}\right)$

تمرين 16 باستخدام النشر بجوار $+\infty$، عين الخط المقارب المائل لمنحنى الدالة f :

$$f(x)=e^{1/x}\sqrt{x(x+2)}$$

تمرين 17 نعتبر الدالة $f(x)=\arctan(\sin x)$.

أكتب النشر المحدود لـ f من الرتبة الرابعة في جوار الصفر.

عين معادلة المماس عند $x_0=0$، وحدد وضعيته بالنسبة لمنحنى f.

تمرين 18 نعتبر الدالة $f(x)=\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

من أجل أي القيم للمتغير x، تكون هذه الدالة قابلة للاشتقاق؟

احسب $f'(x)$ و $f''(x)$ و $f'''(x)$ و $f^{(4)}(x)$,

تمرين 19 احسب $f^{(n)}(x)$ للدالة f في الحالتين الآتيين:

$$x \mapsto f(x)=\frac{2x}{1-x^2}\ ,\ \ x \mapsto f(x)=\frac{x}{(x+1)^2}$$

تمرين 20 احسب المشتقة من الرتبة n لكل من الدوال: $\cos x$ ، $\sin x$ ، e^x.

تمرين 21 نعتبر الدالة العددية $f(x)$ حيث: $f(x)=x-1-\ln x$

- جد النشر المحدود من الرتبة الثانية بجوار الصفر للدالة g حيث $g(x)=f(x+1)$.
- بيـين أن g مستمرة وتقبل الاشتقاق عند $x_0=0$. أحسب $g'(0)$.

الفصل السادس

المعادلات التفاضلية

- معادلات تفاضلية من الرتب الأولى والثانية
- دراسة المعادلات التفاضلية من الرتبة الأولى والثانية
- حل بعض المعادلات التفاضلية
- معادلات تفاضلية خطية من الرتبة الأولى
- معادلات تفاضلية خطية من الرتبة الثانية
- تمارين

1. معادلات من الرتب الأولى والثانية

1.1 مفهوم المعادلة التفاضلية

مثال تمهيدي

الدالة $f_0 : x \mapsto e^{\alpha x}$؛ $\left(\alpha \in \mathbb{R}^*\right)$ المعرفة على $\mathbb{R}$ قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$.

ولدينا $f_0'(x) = \alpha \cdot e^{\alpha x} = \alpha \cdot f$

إذن الدالة f_0 تحقق المساواة $f_0' - \alpha \cdot f_0 = 0$

تسمى المعادلة $\quad (1) \quad f' - \alpha f = 0$

حيث المجهول f دالة قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$: معادلة تفاضلية، ويسمى f_0 حلا لهذه المعادلة.

- تكتب المعادلة (1) بالشكل: $\quad (2) \quad y' - \alpha y = 0$

حيث المجهول y، دالة قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$.

وبالعكس، يمكن طرح مسألة تعيين كل الدوال y للمتغير x والقابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$، والتي تحقق المعادلة (2).

2.1 تعريف:

تسمى المعادلة معادلة تفاضلية من الرتبة الأولى كل معادلة من الشكل: $f' - \alpha f = 0 \quad (E)$

تكتب المعادلة (1) بالشكل: $y' - \alpha y = 0 \quad (2)$

وبصورة عامة، تسمى معادلة تفاضلية من الرتبة n كل معادلة من الشكل:

$$(E) \quad g\left(x, y, y', \ldots, y^{(n)}\right) = 0$$

حيث g دالة للمتغيرات $x, y, y', \ldots, y^{(n)}$ والمجهول y: دالة للمتغير x قابلة للاشتقاق n مرة على الأقل على مجال I.

تُنسب المعادلة التفاضلية (E) إلى المشتق الأعلى مرتبة الذي تحويه.

أمثلة

$y' + 3y - 5x = 0$: معادلة تفاضلية من الرتبة الأولى،

$y'' = \sin(3x - 1)$: معادلة تفاضلية من الرتبة الثانية.

- يسمى حل للمعادلة التفاضلية (E) كل دالة عددية y (للمتغير x) تقبل الاشتقاق n مرة على مجال I من $\mathbb{R}$، وتحقق (E).

مثلا: المعادلة التفاضلية $y'-2y''=x^2-3x+2$ ، $D=\mathbb{R}$

تقبل الدالة y المعرفة على $\mathbb{R}$ كحل لها، حيث: $y=\frac{1}{3}x^3-\frac{1}{2}x^2+x-7$.

تمرين:

شكّل معادلة تفاضلية، تقبل الدالة y المعرفة على $]-1,+1[$ حلا لها حيث

$$y=-\frac{1}{2}\ln(x^2-1)+3$$

2 دراسة المعادلات التفاضلية من الرتب الأولى والثانية

نعتبر المعادلة التفاضلية $g(x,y,y')=0$ أو $g(x,y,y',y'')=0$ (*)

- نسمي حل المعادلة التفاضلية (*) تحقق كل الدوال y حيث:
  - الدالة y معرفة على D من $\mathbb{R}$، وتأخذ قيمتها في $\mathbb{R}$.
  - الدالة y تقبل الاشتقاق مرة أو مرتين D (حسب رتبة (*)).
  - الدالة y تحقق المعادلة (*).
- إذا بدلنا y,y',y'' في (*) بعباراتهم بالنسبة إلى x، فإن الدالة y ذات المتغير x تصبح مساوية للصفر على مجال D من $\mathbb{R}$ تكون فيه y ومشتقتيها y,y' معرفتان.

مثلا: في المعادلة $y'=3$ ، $D=\mathbb{R}$، تكون مجموعة حلولها y، هي الدوال الأصلية للدالة الثابتة على $\mathbb{R}$:

$x\mapsto 3$ أي $y=3x+c$ حيث c من $\mathbb{R}$.

قيمة خاصة للثابت الاختياري c :

- من أجل $c=1$، $y=3x+1$: معادلة (منحنى) مستقيم.

$y=3x+c$: معادلة كل المنحنيات البيانية الممثلة للدالة y. $(\mathbb{R}\ni x)$

إذا اشتمل أحد هذه المنحنيات على النقطة $M_0(x_0,y_0)$، فإن $y_0=3x_0+c$

ومنه $c=y_0-3x_0$

والمعادلة المرفقة هي: $y=3x+(y_0-3x_0)$

- $y''=\frac{1}{x^2}$ ، $D=\mathbb{R}_+^*$

الحلول y، هي الدوال الأصلية للدالة $x\mapsto-\frac{1}{x}+c$.

أي $y=-\ln x+c\cdot x+d$، حيث c و d من $\mathbb{R}$.

تمرين

حل المعادلة التفاضلية: $y' = x + \tan x$ ، $D = \left]-\frac{\pi}{2}, +\frac{\pi}{2}\right[$

1.2 الحل الخاص والحل العام

نقبل أن حل المعادلة التفاضلية (*) يحوي ثابتا أو ثابتين حقيقيين (مستقلين) حسب مرتبة المعادلة. يسمى مثل هذا الحل: الحل العام، كما يسمى كل حل ينتج من الحل العام بإعطاء قيم لهذين الثابتين بالحل الخاص.

إن عدد الحلول الخاصة غير منته.

2.2 تعين ثابت التكامل

إن ثابت التكامل c يكون ثابتا عندما يُطلب الحل من أجل $x = x_0$ معطى. يكون هذا الحل هو

$$y(x) = y(x_0) = y_0$$

تصل إلى نفس النتائج باستخدام نتائج التكاملات المحدودة

$$f(y) \cdot y' = g(x) \ \wedge \ y(x_0) = y_0 \quad \Leftrightarrow \quad \int_{y_0}^{y} f(\eta) d\eta = \int_{x_0}^{x} g(\xi) d\xi$$

ونحصل مباشرة على الدالة y بحيث $y(x_0) = y_0$ دون المرور على تحديد ثابت التكامل.

3.2 أمثلة

- لنحسب التكامل $z(x) = \int \frac{1}{2}(x^2+1) \cdot e^{-x} dx$. ثم نشكل المعادلة التفاضلية التي تقبل الدالة $z(x) = -\frac{1}{2}\left(2x + x^2 - 2c\right) \cdot e^{-x}$ حلا لها. (c ثابت اختياري حقيقي).

الحل

□ باشتقاق الدالة: $z(x) = -\frac{1}{2}(x^2+2x-2c) \cdot e^{-x}$ نجد: $z'(x) = \frac{1}{2}(x^2+2c-2) \cdot e^{-x}$

وبحذف الثابت الاختياري c نجد المعادلة التفاضلية المطلوبة بالشكل: $z + z' = -(x+1) \cdot e^{-x}$

- الدوال: $y = \lambda \cdot e^{x}$ (λ عدد حقيقي).

هي حل عام للمعادلة التفاضلية $y' - y = 0$.

بالفعل، الدالة y معرفة وقابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$ حيث $y' = \lambda \cdot e^{x}$.

بوضع $\lambda = \frac{y'}{e^{x}}$ $(e^{x} \neq 0)$ وتبديله بقيمته في عبارة y، نجد المعادلة التفاضلية المطلوبة.

- الدوال: $y = \alpha \cos 2x + \beta \sin 2x$ ، (α و β عددين حقيقيين)

هي حل عام للمعادلة التفاضلية $y''+4y=0$.

لحذف الثابتين α و β اللذين تحويهما الدالة y، تحتاج بالإضافة إلى الدالة y نفسها، إلى دالتين تحصل عليهما باشتقاقين متتاليين للدالة y، نجدهما :

$$y'=-2\alpha\cos 2x+2\beta\sin 2x$$
$$y''=-4\alpha\cos 2x-4\beta\sin 2x=-4(\alpha\cos 2x+\beta\sin 2x)$$

ونجد العلاقة بين y'' و y المستقلة عن هذين الثابتين: $y''+4y=0$، وهي المعادلة التفاضلية المطلوبة.

3- حل بعض المعادلات التفاضلية

1.3 المعادلات من الشكل: $y'=f(x)$ (1)

حيث f دالة مستمرة على مجال I من $\mathbb{R}$.

إذا كانت h دالة أصلية لـــ f على I، فإن الحل العام للمعادلة (1) في المجال I فإن الحل العام للمعادلة (1) في المجال I، هي الدوال y، حيث:

$$(\mathbb{R}\ni c)\quad y=\int f(x)\,dx=h(x)+c$$

2.3 المعادلات من الشكل: $y''=f(x)$ (2)

حيث f دالة مستمرة على مجال I من $\mathbb{R}$.

إذا كانت h دالة أصلية لـــ f على I، وكانت h هي الأخرى مستمرة على I وتقبل k كدالة أصلية لها على I، فإن :

$$(\mathbb{R}\ni c)\,y'=h(x)+c\qquad\Leftrightarrow y''=f(x)$$
$$(c,d\in\mathbb{R})\,y=k(x)+cx+d\Leftrightarrow$$

إذن الحل العام للمعادلة (2) في المجال I هي الدوال y؛

حيث: $$(c,d\in\mathbb{R})\quad y=\int\left(h(x)+c\right)dx=k(x)+cx+d$$

3.3 أمثلة

• $y'=\dfrac{1}{x^2}e^{\frac{1}{x}}\qquad D=]0,+\infty[$

الدالة $f\mapsto\dfrac{1}{x^2}e^{\frac{1}{x}}$ مستمرة على D ومنه الحل العام هو الدوال y :

$$y=\int-\frac{1}{x^2}e^{\frac{1}{x}}\,dx=e^{\frac{1}{x}}+c\qquad \text{حيث } c \text{ من } \mathbb{R}$$

الحل الخاص : $y(1)=e$: لدينا $c=e \Leftrightarrow e^1+c=e \Leftrightarrow y(1)=e$

ومنه الحل الخاص على $]0,+\infty[$ هو $y_0=e^{\frac{1}{x}}$.

* $y''=\frac{1}{x}$ $\quad D=\mathbb{R}^*$

الدالة $f \mapsto \frac{1}{x}$ مستمرة $\mathbb{R}^*$، بالمكاملة نحصل على الدالة المشتقة الأولى كالآتي :

$$y'=\int \frac{1}{x}\,dx=\ln|x|+c \qquad \text{حيث } c \text{ من } \mathbb{R}$$

وبمكاملة ثانية نجد الحل العام : $y=\int(\ln|x|+c)\,dx=x\ln|x|-(1-c)x+d$ $(c,d\in\mathbb{R})$

الحل الخاص : $y(1)=0$ و $y(-1)=1$

لدينا

$$\begin{cases}y(1)=0\\ y(-1)=1\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}-1+c+d=0\\ -1-c+d=1\end{cases} \Leftrightarrow c=d=\frac{1}{2}$$

ومنه الحل الخاص على $D=\mathbb{R}^*$ هو $y_0=x\ln|x|-\frac{1}{2}x+\frac{1}{2}$

تمرين

عين الحل العام للمعادلة التفاضلية : $y''=\frac{\ln x}{x^2}$ على $\mathbb{R}_+^*$

واستنتج الحل الخاص الذي يحقق $\begin{cases}y(1)=0\\ y'(1)=1\end{cases}$

نفس السؤال من أجل $y'=x\sqrt{x}+1$ $\quad D=\mathbb{R}^*$

4.3 معادلات من الشكل $y'=\alpha y$ (3) حيث α من $\mathbb{R}^*$.

نعين الدوال y القابلة للاشتقاق على $D\subset\mathbb{R}$ التي تحقق(3). نلاحظ بأن $y=0$ حل ظاهري لـ(3)

– نبحث عن الحلول التي لا تنعدم على D : ليكن y حل المعادلة (3)، بحيث y لا ينعدم على D.

لدينا $(3) \Leftrightarrow \alpha=\frac{y'}{y}$ $(3')$

بمكاملة طرفي $(3')$ نجد $\ln|y|=cx+d$، $(c,d)\in\mathbb{R}^*\times\mathbb{R}$

أي: $|y|=e^{cx+d}=e^d\cdot e^{cx}$، $(c,d)\in\mathbb{R}^*\times\mathbb{R}$

وبما أن y مستمرة على D ولا تنعدم (على D) فإن إشارتها تبقى ثابتة على هذا المجال.

ومنه: إما $y=e^d\cdot e^{cx}$، وإما $y=-e^d\cdot e^{cx}$.

في كلتا الحالتين، نكتب $y=\lambda\cdot e^{cx}$، $(\lambda\in\mathbb{R}^*)$

وبالتالي تكون حلول المعادلة (3)، هي الدوال $x\mapsto\lambda\cdot e^{cx}$ المعرفة على $\mathbb{R}$ حيث $\lambda\in\mathbb{R}^*$.

أ) تعيين الحل العام

ليكن y حل كيفي للمعادلة (3).

نعلم بأن الدالة $x \mapsto e^{cx}$ المعرفة على D، هي حل للمعادلة (3).

بوضع $z = \frac{y}{e^{cx}}$ $(e^{cx} \neq 0)$ يكون لدينا $y = z \cdot e^{cx}$.

y تقبل الاشتقاق على D: $y' = z' e^{cx} + c z e^{cx}$

ومنه $y' - c y = z' e^{cx} + c z \cdot e^{cx} - c z \cdot e^{cx} = z' \cdot e^{cx}$

بما أن y هي حل للمعادلة (3) فإن $z' = 0$، أي أن z هي الدالة الثابتة على D.

إذن الدوال $y = \lambda \cdot e^{cx}$ $(\lambda \in \mathbb{R}^*)$ المعرفة في $\mathbb{R}$، وكذلك، من أجل $\lambda = 0$ (الحل الخاص: $y = 0$) هي حلول للمعادلة التفاضلية (3).

ملاحظة

إذا كان $(x_0 ; y_0)$ من $(D, \mathbb{R})$، يكون $y_0 = \lambda \cdot e^{cx_0}$، ومنه $\lambda = y_0 \cdot e^{-cx_0}$ والحل الخاص الوحيد $y = y_0 \cdot e^{c(x - x_0)}$.

مثلا: المعادلة التفاضلية $y' - 3y = 0$ من الشكل: $y' = y$، وحلها العام هو $y = \lambda \cdot e^{x}$ $(\lambda \in \mathbb{R})$

الحل الخاص الذي يحقق $y(-1) = 1$، هو $y_0 = \lambda \cdot e^{cx_0}$.

3.3 تمرين محلول

أ) لتكن f دالة عددية معرفة كما يلي: $f(x) = -\frac{3}{2} + \lambda \cdot e^{2x}$، λ عدد حقيقي معطى

- بين أن f تطبيق من $\mathbb{R}$ في $\mathbb{R}$.
- بين أن f يقبل الاشتقاق على $\mathbb{R}$.
- تأكد من أن f تحقق المعادلة: $f'(x) - 2f(x) = 3$ ماذا تستنتج؟

ب) نعتبر المعادلة التفاضلية:

$$y' - 2y = 3 \qquad (1)$$

- تحقق من أن المعادلة (1) تقبل الدالة $y = -\frac{3}{2}$ كحل لها على $\mathbb{R}$.
- لتكن y إحدى حلول المعادلة (1)، برهن أن الدالة $y + \frac{3}{2}$ تحقق معادلة من الشكل:

$$z' - 2z = 0 \qquad (2)$$

- حل المعادلة (2)، واستنتج حلول المعادلة (1).
- عين من بين حلول المعادلة (1) الدالة y التي تحقق: $y(0) = 0$.

الحل:

أ) - الدالة f معرفة على $\mathbb{R}$. فهي تطبيق من $\mathbb{R}$ في $\mathbb{R}$.

- f مجموع دالتين قابليتين للاشتقاق على $\mathbb{R}$. ولدينا $f'(x)=0+2\lambda\cdot e^{2x}$ ، $\lambda\in\mathbb{R}$

- f تحقق المعادلة المعطاة: $f'(x)-2f(x)=2\lambda e^{2x}-2\left(\frac{3}{2}+\lambda e^{2x}\right)=3$ أي

$$f'(x)-2f(x)=3$$

والدالة f هي حل للمعادلة التفاضلية ذات الرتبة الأولى $y'-2y=3$.

ب) - لدينا $y=-\frac{3}{2}$ حل خاص للمعادلة (1) لأن $y'=0$ و $y'-2y=0-2\left(-\frac{3}{2}\right)=3$

- نضع $z=y+\frac{3}{2}$ حيث y حل لـ (1)، وبالتعويض عن y و y' بدلالة المجهول z في (1):

$z'-2\left(z-\frac{3}{2}\right)=3$ أي $z'-2z=0$ وبالتالي $y+\frac{3}{2}$ تحقق المعادلة (2).

- معادلة التفاضلية (2) من الشكل: $z'=2z$ ، فحلها العام هو كل الدوال $z=\lambda e^{2x}$ ، $\lambda\in\mathbb{R}$ ،

المعرفة على D من $\mathbb{R}$.

ينتج عن كل حل لـ (1) حلا للمعادلة (2) من الشكل: $z=y+\frac{3}{2}$

ومنه $y=z-\frac{3}{2}$ وبالتالي $y=-\frac{3}{2}+\lambda e^{2x}$ ، $\lambda\in\mathbb{R}$ ، المعرفة على D من $\mathbb{R}$.

- حل الخاص الذي يحقق $y(0)=0$ ، يحقق $0=-\frac{3}{2}+\lambda e^{3\times 0}$ وذلك من أجل $\lambda=-\frac{3}{2}$

والحل الخاص المطلوب هو $y_0=\frac{3}{2}\left(1-e^{2x}\right)$.

6.3 معادلات تفاضلية من الرتبة الأولى من الشكل $\frac{dy}{dx}=f\left(\frac{y}{x}\right)$

هذه المعادلة تُحل باستخدام التحويل $z=\frac{y}{x}$ ومنه $y=x\cdot z$ ويكون $\frac{dy}{dx}=z+x\,z'$

والمعادلة * تأخذ الشكل $x\frac{dz}{dx}=-z+f(z)$ أو $\frac{dx}{x}=\frac{dz}{f(z)-z}$

مثال المعادلة التفاضلية: $x\cos\left(\frac{y}{x}\right)\frac{dy}{dx}=y\cos\left(\frac{y}{x}\right)-x$

نضع $z=\frac{y}{x}$ ومنه $y=x\cdot z$ ويكون $\frac{dy}{dx}=z+xz'$ ،

فتأخذ المعادلة الشكل $x\cos z\cdot(z+x\,z')=x\,z\cos z-x$ أو

$$\cos z\cdot(z+x\,z')=z\cos z-1$$

$$x\,z'\cos z=-1 \Leftrightarrow x\frac{dz}{dx}\cos z=-1 \Leftrightarrow \cos z\,dz=-\frac{dx}{x}$$

بالمكاملة $\int\cos z\,dz=-\int\frac{dx}{x}$ نجد: $\sin z=-\ln x+\ln c$ حيث c من $\mathbb{R}$

$\sin z=-\ln x+\ln c=\ln\frac{c}{x}$ وأخيرا $e^{\sin(y/x)}=\frac{c}{x}$

7.3 معادلات تفاضلية من الرتبة الأولى ذات متغيرات منفصلة

نقول عن معادلة تفاضلية من الرتبة الأولى أنها بمتغيرات منفصلة إذا أمكن كتابتها بأحد الشكلين :

$$g(x)dy=h(y)dx \quad \text{أو} \quad g(x)dx=h(y)dy$$

في الشكل الأول إذا كانت $G(x)$ و $H(x)$ دالتان أصليتان لـ $g(x)$ و $h(x)$ يكون لدينا

$$G(x)=H(x)+c$$

مثال

حل المعادلة التفاضلية $y'=e^{x+y}$ لدينا $\frac{dy}{dx}=e^{x}\cdot e^{y} \Leftrightarrow e^{-y}dy=e^{x}dx$

وبالمكاملة $e^{-y}+c=e^{x}$ أي $c=e^{x}-e^{-y}$ حيث c من $\mathbb{R}$

تمرين

- حل على $D=]1,+\infty[$ حل المعادلة التفاضلية $x\,y'\ln x=(3\ln x+1)y$
- حل المعادلة التفاضلية $xe^{x+2y}+y'=0$

4. معادلات تفاضلية خطية من الرتبة الأولى

ليكن a و b ثابتين حقيقيين مع $a\neq 0$، ولتكن g دالة عددية معرفة ومستمرة على مجال مفتوح I من $\mathbb{R}$.

• لنعتبر المعادلة التفاضلية $\quad (1)\quad af'+bf=g$

نكتب (1) بالشكل $\quad af'(x)+bf(x)=g(x)\quad \forall x\in I$

عندما g هي الدالة المعدومة، هذه المعادلة تأخذ الشكل $af'+bf=0$، وتسمى معادلة متجانسة أو معادلة بدون طرف ثاني.

المعادلة المتجانسة تكافئ المعادلة $\frac{f'}{f}=-\frac{b}{a}$ التي حلها هو : $f(x)=c\cdot e^{-\frac{b}{a}x}$ حيث c من $\mathbb{R}$.

تكون مجموعة حلول المعادلة (1)، هي مجموعة الدوال التي هي على شكل مجموع حل خاص للمعادلة (1) وحل عام للمعادلة المتجانسة المرفقة.

• إذا كانت $g(x)$ مستوة على مجال I من $\mathbb{R}$، وكان المعاملان a و b دالتين لـ x مستوتين على I بحيث $a(x)\neq 0$.

$$(1)\quad a(x)y'(x)+b(x)y(x)=g(x)$$

فإن المعادلة المتجانسة:

$$(2)\quad a(x)y'(x)+b(x)y(x)=0$$

ستأخذ الشكل $\frac{y'}{y}=-\frac{b(x)}{a(x)}$ وهي تكافئ عندما تكون $H(x)$ دالة أصلية للطرف الأيمن المعادلة

$$\ln y(x)=H(x)$$

ومنه $\boxed{y(x)=y_1(x)=c\cdot e^{H(x)}}$ حيث c من $\mathbb{R}$.

إن مجموعة حلول المعادلة المتجانسة هو فضاء جزئي من $C^1(I)$. نحصل على مجموعة حلول المعادلة (1)، بإضافة حل خاص للمعادلة (1) إلى كل حلول المعادلة المتجانسة المرفقة.

1.4 البحث عن حل خاص للمعادلة (1) بطريقة تغيير الثابت

هذا الحل الخاص يوضع بالشكل $y(x)=c(x)\cdot e^{H(x)}$ حيث تتحدد الدالة $c(x)$ "بتغيير الثابت".

بالاشتقاق $\quad y'(x)=c'(x)\cdot e^{H(x)}+H'(x)c(x)\cdot e^{H(x)}$

وبالتعويض في (1) نجد

$$a(x)\left[c'(x)\cdot e^{H(x)}+H'(x)\cdot c(x)\cdot e^{H(x)}\right]+b(x)c(x)\cdot e^{H(x)}=g(x)$$

$$a(x)c'(x)\cdot e^{H(x)}+\cancel{a(x)H'(x)\cdot c(x)\cdot e^{H(x)}}+\cancel{b(x)c(x)e^{H(x)}}=g(x)$$

$$a(x)c'(x)\cdot e^{H(x)}=g(x)$$

$$c'(x)=\frac{g(x)}{a(x)}e^{-H(x)}$$

بتكاملة هذه الأخيرة (مركبة من دوال مستمرة على I) والتعويض في عبارة هذا الحل الخاص ، نجد :

$$\boxed{y(x)=y_0(x)=e^{H(x)}\int\frac{g(x)}{a(x)}e^{-H(x)}dx}$$

فيكون $y(x)$ الحل العام للمعادلة (1) مؤلفا من مجموع الحلين : $y_1(x)$ حل عام للمعادلة المتجانسة و $y_0(x)$ حل خاص للمعادلة (1). أي $y(x)=y_0(x)+y_1(x)$

$$\boxed{y(x)=e^{H(x)}\int\frac{g(x)}{a(x)}e^{-H(x)}dx+c\cdot e^{H(x)}}$$

حيث $H(x)=\int-\frac{b(x)}{a(x)}dx$ و حيث c ثابت اختياري من $\mathbb{R}$.

2.6. تمارين محلولة

- حل المعادلة التفاضلية: $y'(x)+y(x)=x\cdot e^{-x}$ .... (1)

واستنتج الحل الخاص لها الذي يحقق الشرط الابتدائي: $y_0(0)=1$

- أحسب التكامل $z(x)=\int\frac{1}{2}(x^2+1)\cdot e^{-x}dx$. ثم شكل المعادلة التفاضلية التي تقبل الدالة $z(x)=-\frac{1}{2}(2x+x^2-2c)\cdot e^{-x}$ حلا لها. (c ثابت اختياري حقيقي)

الحل

- حل المعادلة التفاضلية: $y'(x)+y(x)=x\cdot e^{-x}$ ..... (1)

- نوجد أولا الحل العام y_1 للمعادلة التفاضلية المتجانسة: $y'(x)+y(x)=0$ بالشكل: $y_1=c\cdot e^{-x}$
- ثم نوجد حلا خاصا y_0 للمعادلة التفاضلية (1) يكون بالشكل: $y_0=c(x)\cdot e^{-x}$.

باشتقاق العلاقة الأخيرة نجد: $y_0'=c'(x)\cdot e^{-x}-c(x)\cdot e^{-x}$ أي: $y_0'=c'(x)\cdot e^{-x}-y_0$ ، وبالتعويض في المعادلة (1) نحصل على: $c'(x)\cdot e^{-x}-y_0+y_0=x\cdot e^{-x}$

التي تكافئ: $c'(x)=x \Leftrightarrow \frac{dc}{dx}=x \Leftrightarrow dc=x\cdot dx$

وبالمكاملة نحصل على إحدى الدوال الأصلية بالشكل: $c(x)=\int dc=\int x\cdot dx=\frac{1}{2}x^2$

فيأخذ الحل الخاص للمعادلة المتجانسة الشكل: $y_0=c(x)\cdot e^{-x}=\frac{1}{2}x^2\cdot e^{-x}$

▫ الحل العام y للمعادلة (1): $y=y_1+y_0$ أي : $y=c\,e^{-x}+\frac{1}{2}x^2\cdot e^{-x}$

والحل الخاص y_0 للمعادلة (1) الذي يحق لشرط الابتدائي: $y_0(0)=1$ أي : $c\cdot e^{-0}+\frac{1}{2}0^2\cdot e^{-0}=c=1$

هو : $y(0)=f(x)=\frac{1}{2}(x^2+1)\cdot e^{-x}$

– إحدى الدوال الأصلية للدالة: $f(x)$ نجدها بالمكاملة بالتجزئة كالآتي:

$$z(x)=\int\frac{1}{2}(x^2+1)\cdot e^{-x}dx=-\frac{1}{2}\left(x^2+2x+3\right)\cdot e^{-x}$$

▫ باشتقاق الدالة: $z(x)=-\frac{1}{2}(x^2+2x-2c)\cdot e^{-x}$ نجد : $z'(x)=\frac{1}{2}(x^2+2c-2)\cdot e^{-x}$

وبحذف الثابت الاختياري c نجد المعادلة التفاضلية المطلوبة بالشكل: $z+z'=-(x+1)\cdot e^{-x}$

ملاحظة

إذا كان y_1 و y_2 هما حلين خاصين للمعادلة (1)، فإن y_2-y_1 سيكون حلا للمعادلة المتجانسة المرفقة، والحل العام للمعادلة (1) هو $y(x)$ حيث $y=y_1+c(y_2-y_1)$ حيث c اختياري من $\mathbb{R}$.

• حل المعادلة التفاضلية: $x\ y'(x)+y(x)=\frac{1}{x}\ln x$ .... (1)

واستنتج الحل الخاص لها الذي يحقق الشرط الابتدائي: $y_0(1)=1$

• أحسب التكامل $z(x)=-\frac{1}{2}\int\frac{2-2\ln x+\ln^2 x}{x^2}dx$. ثم شكل المعادلة التفاضلية التي تقبل الدالة $z(x)=\frac{c}{x}+\frac{1}{2x}\ln^2 x$ حلا لها ، (c ثابت اختياري حقيقي)

الحل

حل المعادلة التفاضلية: $x\ y'(x)+y(x)=\frac{1}{x}\ln x$ ..... (1)

حل المعادلة المتجانسة: $x\ y'(x)+y(x)=0$ هو $y_1=\frac{c}{x}$ حيث c من $\mathbb{R}$

نوجد حل خاص y_2 لـــ (1) من الشكل: $y_2=\frac{c(x)}{x}$

فنجد: $c(x)=\frac{1}{2}\ln^2 x$ ومنه $y_2=\frac{1}{2x}\ln^2 x$

إذن الحل العام $y=y_1+y_2=\frac{c}{x}+\frac{1}{2x}\ln^2 x$ حيث c من $\mathbb{R}$

الحل الخاص لـــ (1) الذي يحقق: $y_0(1)=1$ يعطى $c=1$

ومنه
$$y_0(x)=\frac{1}{x}+\frac{1}{2x}\ln^2 x$$

– باستخدام التكامل بالتجزئة

$$z(x)=-\frac{1}{2}\int\frac{2-2\ln x+\ln^2 x}{x^2}dx=\frac{1}{x}+\frac{1}{2x}\ln^2 x$$

$z(x)=\frac{c}{x}+\frac{1}{2x}\ln^2 x$ هي حل للمعادلة التفاضلية $xz'(x)+z(x)=\frac{1}{x}\ln x$

• حل المعادلة التفاضلية: $e^x\cdot y'(x)-y(x)=1$ .... (1)

واستنتج الحل الخاص لها الذي يحقق الشرط الابتدائي: $y(0)=0$.

الحل

1. حل المعادلة التفاضلية: $e^x\cdot y'(x)-y(x)=1$ .... (1)

□ نوجد الحل العام y_1 للمعادلة التفاضلية المتجانسة: $e^x\,y'(x)-y(x)=0$ ... (2)، الذي هو:

$$e^x\cdot y'(x)-y(x)=0 \iff \frac{y'}{y}=e^{-x}$$

$$\iff \ln|y|=c_1-e^{-x} \iff y=\pm c_1 e^{-e^{-x}}$$

ومنه الحل العام لـ (2) : $y_1(x)=c\cdot e^{-e^{-x}}$ حيث $c\in\mathbb{R}$

□ ثم نوجد حلا خاصا y_0 للمعادلة (1) يكون من الشكل: $y_0=c(x)\cdot e^{-e^{-x}}$.

باشتقاق العلاقة الأخيرة نجد: $y_0'(x)=c'(x)\cdot e^{-e^{-x}}+c(x)\cdot e^{-x}e^{-e^{-x}}$

وبالتعويض في (1) نحصل على:

$$e^x y_0'-y_0=$$
$$=e^x c'(x)\cdot e^{-e^{-x}}+\cancel{e^x c(x)\cdot e^{-x}e^{-e^{-x}}}-\cancel{e^x c(x)\cdot e^{-x}e^{-e^{-x}}}$$
$$=e^x c'(x)\cdot e^{-e^{-x}}=1$$

أي

$$c'(x)=e^{-x}\cdot e^{-e^{-x}}$$

وبالمكاملة نحصل على إحدى الدوال الأصلية لـ $c(x)$ بالشكل: $c(x)=\int e^{-x}\cdot e^{-e^{-x}}dx=-e^{-e^{-x}}$

فيكون الحل الخاص للمعادلة (1): $y_0(x)=-e^{-e^{-x}}\cdot e^{-e^{-x}}=-1$

- الحل العام y للمعادلة (1): $y=y_1+y_0$ هو : $y(x)=c\cdot e^{-e^{-x}}-1$ حيث $c\in\mathbb{R}$

الحل الخاص y_2 للمعادلة (1) التي يحقق الشرط الابتدائي: $y(0)=0$:

$$c\cdot e^{-1}=1 \Leftrightarrow c\cdot e^{-e^{-0}}-1=0$$

ومنه : $c=\frac{1}{e}$ ويكون الحل الخاص المطلوب هو : $y_2(x)=\frac{1}{e}\cdot e^{-e^{-x}}-1$

3-معادلات تفاضلية خطية من الرتبة الثانية

3.1-معادلة تفاضلية من الشكل:

$$(1)\quad ay''+by'+cy=g(x)$$

حيث a و b و c ثوابت حقيقية مع $a\neq0$. و $g(x)$ دالة مستمرة على مجال مفتوح I من $\mathbb{R}$.

معادلة المتجانسة المرفقة بـ (1)

$$(2)\quad ay''+by'+cy=0$$

حسب النتائج العامة تكون تحصل على مجموعة حلول المعادلة (1)، بإضافة حل خاص للمعادلة (1) إلى كل حلول المعادلة المتجانسة المرفقة.

- من أجل $x_0\in I$ و α و β، من $\mathbb{R}$، المعادلة (1) تقبل حلا وحيدا y يحقق

$$y(x_0)=\alpha\ ,\ y'(x_0)=\beta$$

- إن مجموعة حلول المعادلة المتجانسة على I لها بنية فضاء شعاعي على $\mathbb{R}$، بعده 2، وبالتالي إذا كان y_1 و y_2 حلين مستقلين للمعادلة المتجانسة، فإنهما يشكلان أساسا لهذا الفضاء.
- حتى يكون y_1 و y_2 حلين مستقلين للمعادلة المتجانسة يجب يكون المحدد المجموعة : $\{(y_1(x),y_1'(x)),(y_2(x),y_2'(x))\}$ غير معدوم.

ولدينا

$$w(x)=\begin{vmatrix} y_1(x) & y_2(x)\\ y_1'(x) & y_2'(x)\end{vmatrix}=y_1(x)\cdot y_2'(x)-y_1'(x)\cdot y_2(x)$$

إذا كان $w(x_0)\neq0$ من أجل $x_0\in I$، فإن $w(x)\neq0$ من أجل كل $x\in I$

2.5 حل المعادلة المتجانسة المرفقة

نبحث عن الحلول من الشكل $y=e^{rx}$ حيث r من $\mathbb{R}$، لدينا $y'=ry$ و $y''=r^2y$، والمعادلة (1) تأخذ الشكل $y(ar^2+br+c)=0$

تسمى المعادلة $ar^2+br+c=0$ (3) بالمعادلة المميزة للمعادلة (1)،

ووفق إشارة مميز المعادلة المميزة $\Delta=b^2-4ac$ يكون لدينا:

- إذا كان $\Delta>0$ فإن المعادلة المميزة تقبل جذرين مختلفين $r_1\neq r_2$، ويكون حل المعادلة المتجانسة هو:
  $y=ce^{r_1x}+de^{r_2x}$ حيث c و d من $\mathbb{R}$
- إذا كان $\Delta=0$ فإن المعادلة المميزة تقبل جذرا مضاعفا $r\in\mathbb{R}$، ويكون حل المعادلة المتجانسة هو:
  $y=ce^{rx}+dxe^{rx}$ حيث c و d من $\mathbb{R}$
- إذا كان $\Delta<0$ فإن المعادلة المميزة تقبل جذرين مركبين (مترافقين): $r_1=\alpha+i\beta$ و $r_2=\alpha-i\beta$ (α و $\beta\in\mathbb{R}$ مع $\beta\neq 0$) ويكون حل المعادلة المتجانسة هو: $y=ce^{\alpha x}\cos\beta x+dxe^{\alpha x}\sin\beta x$
  حيث c و d من $\mathbb{R}$.

3.5 حل خاص للمعادلة (1)

نميز أيضا حالتين وطريقة عامة:

$g(x)=e^{\alpha x}P(x)$ حيث α من $\mathbb{C}$ و $P(x)$ من $\mathbb{C}[x]$ كثير حدود

نبحث عن الحلول من الشكل $y(x)=e^{\alpha x}Q(x)$ حيث $Q(x)$ كثير حدود، يمكن تحديد درجته:

- إذا لم يكن α جذرا للمعادلة المميزة، فإن $\deg Q=\deg P$
- إذا كان α أحد الجذرين للمعادلة المميزة، فإن $\deg Q=\deg P+1$
- إذا كان α جذرا مُضاعفا للمعادلة المميزة فإن $\deg Q=\deg P+2$

4.5 ملاحظة

هذه الطريقة تُطبق أيضا عندما يكون $\alpha=0$ أي في الحالة $g(x)=P(x)$

يمكن أيضا البحث عن حل من الشكل $y(x)=z(x)e^{\alpha x}$ حيث z دالة معلومة، والتعويض في المعادلة (1)، فنحصل على معادلة تفاضلية من أجل z.

إذا كان $g(x)=A\cos\mu x+B\sin\mu x$ حيث A و B و μ من $\mathbb{R}$.

نميز حالتين:

- إذا لم يكن α جذرا للمعادلة المميزة في هذه الحالة الدالتان $\cos(\mu x)$ و $\sin(\mu x)$ ليستا حل للمعادلة المتجانسة ، حل خاص للمعادلة (1) يأخذ الشكل

$y = c\cos\mu x + d\sin\mu x$ حيث c و d من $\mathbb{R}$ (يتحددان بالمطابقة).

- إذا كان α جذرا للمعادلة المميزة في هذه الحالة الدالتان $\cos(\mu x)$ و $\sin(\mu x)$ هما حلين للمعادلة المتجانسة ، حل خاص للمعادلة (1) سيأخذ الشكل

$y = x(c\cos\mu x + d\sin\mu x)$ حيث c و d من $\mathbb{R}$ (يتحددان بالمطابقة).

ملاحظة هامة

إذا كان $g(x)$ بالشكل $g(x) = g_1(x) + g_2(x)$ فإن أي حل خاص مُعطى بالشكل $y = y_1 + y_2$ حيث y_j هو حل للمعادلة $a y''_j + b y'_j + c y_j = g_j(x)$ $(j = 1,2)$

مثال 5.5

حل المعادلة $y'' + y = x + e^x$ على $\mathbb{R} = I$

- المعادلة المتجانسة : المعادلة المميزة هي $r^2 + 1 = 0$ والحل هو : $y = c\cos x + d\sin x$
- حل خاص لـ $y'' + y = x$: $y = x$
- حل خاص لـ $y'' + y = e^x$ ، نجد $y = \frac{1}{2}e^x$
- خلاصة الحل العام هو : $y = x + \frac{1}{2}e^x + c\cos x + d\sin x$

6.5 طريقة تغير الثابتين

ليكن y_1 و y_2 حلين مستقلين للمعادلة المتجانسة. نبحث عن حل خاص لـ (1) بالشكل $y = c y_1 + d y_2$ حيث, حيث c و d دالتان تحققان: $c' y_1 + d' y_2 = 0$. وكذلك $y' = c y'_1 + d y'_2$ ، فتصبح المعادلة (1) كما يلي $a\left(c' y'_1 + d' y'_2\right) = g(x)$

(لأن $a y''_j + b y'_j + c y_j = 0$ من أجل $j = 1,2$)

إذن c' و d' هما حلين للجملة الآتية :

$$\begin{cases} c' y_1 + d' y_2 = 0 \\ c' y'_1 + d' y'_2 = \frac{1}{a} g(x) \end{cases}$$

- تحل هذه الجملة بالتجريب لتعطي c' و d' ثم بالمكاملة للحصول على c و d.

مثال 7.5

حل المعادلة $\quad y''+y=e^{x} \quad (*)$

المعادلة المتجانسة: المعادلة المميزة هي $r^{2}+1=0$ والحل هو : $y_h = c\cos x + d\sin x$

حيث c و d من $\mathbb{R}$

الدالة $y_1=\sin x$ و $y_2=\cos x$ مستقلين

نبحث عن حل من الشكل $y = c\cos x + d\sin x$ مع $c'y_1 + d'y_2 = 0$،

c' و d' هما حلين للجملة:

$$\begin{cases} c'\sin x + d'\cos x = 0 \\ c'\cos x + d'\sin x = e^{x} \end{cases}$$

إذن $\quad c' = \dfrac{1}{w(x)}\begin{vmatrix} 0 & \cos x \\ e^{x} & -\sin x \end{vmatrix} = e^{x}\cos x \quad$ و $\quad d' = \dfrac{1}{w(x)}\begin{vmatrix} \sin x & 0 \\ \cos x & e^{x} \end{vmatrix} = -e^{x}\sin x$

وبالمكاملة نحصل على الدالتين : $\quad c = \frac{1}{2}(\sin x + \cos x)e^{x}$ ، $d = \frac{1}{2}(\cos x - \sin x)e^{x}$

ومنه الحل الخاص $\quad y_P = \frac{1}{2}(\sin x + \cos x)e^{x} + \frac{1}{2}(\cos x - \sin x)e^{x} = \frac{1}{2}e^{x}$

والحل العام لـ $(*)$ يأخذ الشكل $\quad y = y_P + y_h = y_P = \frac{1}{2}e^{x} + c\cos x + d\sin x$.

6. تمارين

تمرين 1 شكل المعادلات التفاضلية المرفقة بالدوال الآتية:

$$y = Ae^{2x} + Be^{x} + C \quad , \quad y = Ax^{2} + Bx + C$$
$$y = e^{x+A} \quad , \quad \ln y = Ax^{2} + B$$

تمرين 2 حل المعادلات التفاضلية الآتية:

$$(x^{2} - yx^{2})y' + y^{2} + xy^{2} = 0 \quad , \quad y\,dx - x\,dy = x\,y\,dx$$
$$x\,e^{x+2y} = 0 \quad , \quad (y^{3} + y - 2)dx + x\,y\,dy - 5y\,dy$$

تمرين 3 حل المعادلات التفاضلية الآتية:

$$(2x + 3y)dx + (y - x)dy = 0 \qquad x\cos\frac{y}{x}\cdot\frac{dy}{dx} = y\cos\frac{y}{x} - x$$

تمرين 4 جد الحل العام للمعادلات التفاضلية، بالاستعانة بالتحويلات:

$$tg^{2}(x + y)dx - dy = 0 \qquad (y - 4x)^{2}dx = dy$$

تمرين 5 حل المعادلات التفاضلية الآتية:

$$x\frac{dy}{dx} = y + x^3 + 3x^2 - 2x\frac{dy}{dx} + 2xy = 4$$

$$\frac{dy}{dx} - y = xy^3 \qquad \frac{dy}{dx} + 2xy + xy^4 = 0$$

تمرين 6 حل المعادلات التفاضلية الآتية:

$$(6x - 2y - 3)dx - (2x + 2y - 1) \qquad \frac{1}{x}dy + \frac{y}{x^2}dx - 2xdx = 0$$

$$\cos y dx + (2y - x\sin y)dy = 0$$

تمرين 7 جد الحل العام للمعادلات التفاضلية الآتية:

$$y = 3y'x + 6y^2(y')^2 \qquad (y - y'x)^2 = 1 + (y')^2$$

تمرين 8 كامل المعادلة: $xy' + 2y = \dfrac{x}{1+x^2}$ $\quad (E)$

أثبت أن (E) تقبل حلا f يكون معرفا على $\mathbb{R}$. ثم أحسب $I = \int_0^x f(t)dt$.

تمرين 9 حل المعادلات التفاضلية الآتية:

$$y' + \frac{y}{x} = -x y^2 \;,\; xy' - y = y^2\ln x \;,\; y' - (x+y)^2 = 0 \;,\; y' - 2x + 5y - 1 = 0$$

$$y' - 2y e^x - 4e^x = 0 \;,\; y' - e^{-x} - y = 0 \;,\; y' - \frac{2y}{x+1} - (x+1)^2 = 0$$

$$y' = \frac{1}{2}(y^2 - 1) \;,\; y' = (x+y)^2 \;,\; y' = (4x+y)^2 \;,\; y' + 2e^x y = 4e^x$$

$$y' - e^{2x} = e^x \sin x - 3y \;,\; y' - 2e^{2x} - e^x \sin x + 3y = 0 \;,\; y' - \frac{1+y}{1-x} = 0$$

تمرين 10 حل المعادلات التفاضلية الآتية :

$$y'' + y' + y = (-x+1)e^{-x} \;،\; y'' - 4y' = 6\sin 2x \;،\; y'' + 2y' - 3y = x^2 + 3$$

$$y'' - y' + y = x e^x \;،\; y'' - 2y' = 3\cos x \;،\; y'' - 2y' - 3y = x^3 - x^2 - x + 1$$

تمرين 11 جد الحلول الخاصة من الشكل $\dfrac{\lambda}{x}$ للمعادلات التفاضلية: $y' + y^2 = \dfrac{2}{x^2}$ $\quad (E)$

بوضع $y = \dfrac{1}{t} - \dfrac{1}{x}$، برهن أن (E) تتحول إلى $t' + \dfrac{2}{x}t = 1$ $\quad (E')$

جد العام لـ (E') واستنتج الحل العام لـ (E).

واستنتج أيضا الحل الخاص لـ (E) الذي يحقق : $y(1) = 2$.

تمرين 12: لتكن المعادلة التفاضلية $y'+y^2-\frac{y}{x}+\frac{1}{x}=0 \quad (E)$

بإجراء التحويل $y=z+\frac{1}{x}$ ثم إجراء التحويل $z=\frac{1}{s}$ في المعادلة التفاضلية (E) استنتج حلول (E)

تمرين 13: • حل المعادلة التفاضلية : $\frac{1}{x}y'(x)+y(x)=x^2 \quad \ldots\ldots\ldots (1)$

واستنتج الحل الخاص لها الذي يحقق الشرط الابتدائي: $y_0(0)=-1$

• أحسب التكامل $\int x^3 e^{\frac{1}{2}x^2}dx$. ثم شكل المعادلة التفاضلية التي تقبل الدالة :

$z(x)=x^2+c\,e^{-\frac{1}{2}x^2}-2$ حلا لها، (c ثابت اختياري حقيقي)

تمرين 14: حل المعادلة التفاضلية: $y''-y=0 \quad \ldots\ldots\ldots (1)$

واستنتج الحل الخاص لها الذي يحقق الشرط الابتدائي: $y_0(0)=0 \wedge y_0'(0)=1$

– نفس السؤال من أجل المعادلة التفاضلية : $y''-2y'+y=x \quad \ldots\ldots\ldots (2)$

والشرط الابتدائي: $y_0'(0)=0 \wedge y_0''(0)=0$

المراجع

- K. Abdelkarim, *Exercices résolus d'analyse (avec rappel de cours)*, Alger, OPU, 1993.
- K. Allab, *Eléments d'analyse*, Alger, OPU, 2002.
- L. Amyotte, *Introduction à l'algèbre linéaire et à ses applications*, 2ème éd., kanada: édition du renouveau pédagogiqueINC, 2003.
- E. Azoulay, *Mathématiques: cours et exercices*, tome 1, Paris, Mc Graw-Hill, 1983.
- S. Benachour, *Exercices d'analyse avec solution*, tome 1, Alger, Khawarysm, 1991.
- J. Cellier, *Algèbre linéaire: des bases aux appliations*, Rennes: presses universitaires de Rennes, 2008.
- J.-J. Colin, *Fonctions usuelles: exercices corrigés avec rappels de cours*, Paris, Cépaduès, 2007.
- Y. Dodge, *Mathématiques de base pour économistes*, Paris, Springer, 2002.
- B. Guerrien, *Algèbre linéaire pour économistes*, 4ème éd., Paris, Economica, 1997.
- G. Lefort, *Mathématiques pour les sciences biologiques et agronomiques*, Paris, Armand Colin, 1967.
- G. Patrik, *Mathématiques pour l'économie: méthodes et exercices corrigés*, Belgique : de boeck, 2005.
- F. Pham, *Fonctions d'une ou deux variables*: des fonctions variables, Paris, Dunod, 2003.
- P. Tauvel, *Exercices d'algèbre générale et arithmétique*: 470 *énoncés avec solutions détaillées*, Paris, Dunod, 2004.