جامعة الجزائر 3
- إبراهيم سلطان شيبوط -

كلية العلوم الاقتصادية والعلوم التجارية وعلوم التسيير
قسم العلوم الاقتصادية

مطبوعة في:

الإحصـــــــاء 2

موجهة لطلاب السنة الأولى جذع مشترك علوم اقتصادية، تجارية وعلوم التسيير

من إعداد:
الأستاذة سمان وسيلة

السنة الجامعية: 2021/2020

فهرس المحتويات

المقدمة:.....2

الفصل التمهيدي: مفاهيم عامة حول المجموعات

1- تعريف المجموعة:..... 4
2- أنواع المجموعات:..... 4
1.2- المجموعة الفارغة: 5
2.2- المجموعة الجزئية:..... 5
3.2- مجموعة أجزاء مجموعة:..... 5
4.2- المجموعة المكملة:..... 5
5.2- تقاطع مجموعتين:..... 6
6.2- اتحاد مجموعتين: 6
7.2- الفرق بين مجموعتين: 7
3- نظريات مهمة حول المجموعات: 7
سلسلة تمارين رقم 1 مع الحل..... 8

الفصل الأول: الأحداث العشوائية واحتمالاتها

1- الظاهرة العشوائية أو التجربة العشوائية:..... 12
2- الحدث العشوائي: 12
3- فضاء العينة (فراغ الحوادث أو المجموعة الأساسية):..... 12
1.4- الحدث البسيط:..... 12
2.4- الحدث المركب: 13
3.4- الحدث الأكيد:..... 13
4.4- الحدث المستحيل:..... 13
5.4- حدث محتوي في حدث آخر:..... 13
6.4- تقاطع حدثين أو جداء حدثين: 13
7.4- اتحاد حدثين أو مجموع حدثين: 13
8.4- الفرق بين حدثين: 14

9.4- الحدثان المتعاكسان أو المكملان: 14
10.4- الحوادث المتنافية: 14
11.4- الحوادث غير المتنافية: 15
12.4- الحوادث المستقلة: 15
13.4- الحوادث غير المستقلة: 15
14.4- الحوادث المتكافئة: 15
سلسلة تمارين رقم 2 مع الحلول 16

الفصل الثاني: التحليل التوافقي وحساب الاحتمالات

1- قواعد حساب عدد النتائج الممكنة للتجربة العشوائية Ω أو عدد عناصر النتائج الملائمة للحدث العشوائي: 20
1.1- قاعدة الضرب: 20
2.1- التراتيب (الترتيب مهم): 21
3.1- التباديل: 22
4.1- التوفيفات: 23
2- تطبيقات مهمة في التحليل التوافقي: 24
3- مفهوم الاحتمال: 25
1.3- بديهيات أساسية لنظرية الاحتمالات: 25
2.3- قواعد أساسية في الاحتمالات: 25
سلسلة تمارين رقم 3 مع الحلول 28

الفصل الثالث: الاحتمال الشرطي

1- تعريف وحساب الاحتمال الشرطي: 44
2- نظرية الضرب في الاحتمالات: 44
3- تعميم نظرية ضرب الاحتمالات: 45
4- تجزئة المجموعة الأساسية Ω: 46
5- نظرية الاحتمال الكلي: 46

6- نظرية بايز (Bayes): 47

الفصل الرابع: المتغيرات العشوائية

سلسلة تمارين رقم 4 مع الحلول 49
1- تعريف المتغير العشوائي: 60
2- أنواع المتغيرات العشوائية: 60
1.2- المتغير العشوائي المنفصل: 60
2.2- المتغير العشوائي المتصل: 60
سلسلة تمارين رقم 5 مع الحلول 71

الفصل الخامس: التوزيعات الاحتمالية المنقطعة والتوزيعات الاحتمالية المستمرة

1- التوزيعات الاحتمالية المنقطعة: 80
1.1- قانون بارنولي: 80
2.1- توزيع ذي خدين: 80
3.1- توزيع بواسون: 82
4.1- القانون فوق الهندسي: 83
5.1- القانون الهندسي أو قانون باسكال: 85
2- التوزيعات الاحتمالية المستمرة: 86
1.2- التوزيع المنتظم: 86
2.2- القانون الأسي: 86
3.2- التوزيع الطبيعي: 87
سلسلة تمارين رقم 6 مع الحلول 89
قائمة المراجع: 102

المقدمـــة

بينما تعتمد نظرية الاحتمالات في الأصل على تحليل ألعاب الحظ، فإنها أصبحت اليوم تحتل مكانة مركزية في معظم العلوم. فمن خلال تطبيقاتها العملية؛ كأساس للإحصاءات، فإنها تسمح كذلك بتحليل البيانات التي تم جمعها أثناء التجربة أو أثناء المسح. كما تسمح بنمذجة العديد من الظواهر، سواء في العلوم الطبيعية (الفيزياء والكيمياء والبيولوجيا) أو العلوم الإنسانية (الاقتصاد وعلم الاجتماع) وفي تخصصات أخرى (الطب وعلم المناخ وعلوم الكمبيوتر وشبكات الاتصالات). وقد أثبتت فائدتها في العديد من مجالات الرياضيات البحتة (الجبر، نظرية الأعداد التوفيقات.....الخ).

الغرض من هذه المطبوعة هو تقديم المبادئ الأساسية لنظرية الاحتمالات و التركيز على شرح وتوضيح المفاهيم العامة لها ، متبوعة بسلسلة من التمارين التي تم حلها بالتفصيل في نهاية كل فصل لمساعدة الطالب لاستيعاب محتوى هذه الدروس بشكل أفضل.

تحتوي هذه المطبوعة على فصل تمهيدي وخمسة فصول مرتبة على النحو التالي:

- الفصل التمهيدي (مفاهيم عامة حول المجموعات)
- الفصل الأول (الأحداث العشوائية واحتمالاتها)
- الفصل الثاني (التحليل التوافقي وحساب الاحتمالات)
- الفصل الثالث (الاحتمال الشرطي)
- الفصل الرابع (المتغيرات العشوائية)
- الفصل الخامس (التوزيعات الاحتمالية المنقطعة والتوزيعات الاحتمالية المستمرة)

تتمثل إحدى مزايا هذا المقرر الدراسي في أنه يسمح لجميع الطلاب فهم المبادئ الأساسية للعد والتحليل التوافقي والتي تعتبر ضرورية في حساب الاحتمالات والمتغيرات العشوائية.

هذه المطبوعة مخصصة لطلبة السنة الأولى جذع مشترك علوم اقتصادية و تجارية و علوم التسيير ويمكن أيضًا استخدامها من قبل طلبة السنة الثانية علوم اقتصادية، تجارية وعلوم التسيير، وأيضا طلبة المدارس التحضيرية.

يعتبر هذا العمل جزءا من معظم الكتب التي تتناول نظرية الاحتمالات الحديثة. ومثل كل عمل أكاديمي، فهو بالتأكيد يحتوي على أخطاء لذلك أشكر مسبقا جميع الزملاء والطلاب الذين سيشاركون معي تعليقاتهم وانتقاداتهم.

الفصل التمهيدي:

مفاهيم عامة حول المجموعات

1- تعريف المجموعة:

تعرف المجموعة رياضيا أو منطقيا بأنها أيّ تجمع أو تكتل من الأشياء الحسية أو المعنوية التي يمكن تميّزها عن غيرها بمعيار دقيق، وقاطع متفق عليه أو هي كل وحدة تظم عناصر أو أفراد.

نرمز إلى المجموعة بالحروف اللاتينية الكبيرة A، B و C،... وعنصر من المجموعة بالحروف الصغير a، b، c،...

مثال:

- مجموعة النتائج الممكنة عند إلقاء زهرة نرد متوازنة:

$$A=\{1,2,3,4,5,6\}$$

- مجموعة الأعداد الطبيعية الأقل من 52:

$$B=\{0,1,2,3,...,51\}$$

- مجموعة الأعداد الزوجية:

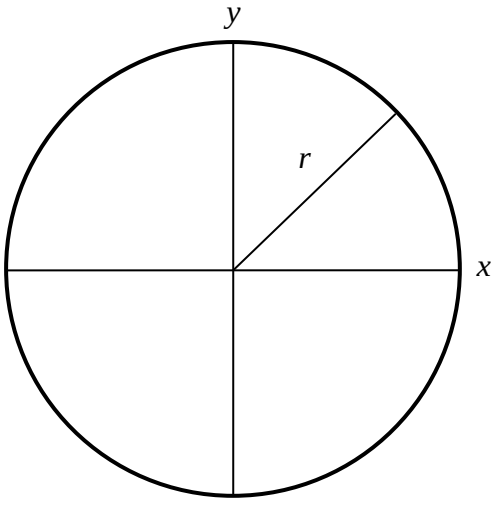
$$C=\{2,4,6,...,2n,...\}$$

- مجموعة الأعداد الحقيقية R:

$$R=]-\infty,+\infty[$$

- مجموعة الأعداد داخل دائرة نصف قطرها r تعطى بالعلاقة التالية:

$$C=\{x^2+y^2<r^2\}$$



2- أنواع المجموعات:

يمكن أن تكون المجموعة محدودة ، كما في المثالين السابقين 1 و 2. يمكن أن تكون غير محدودة ولكنها قابلة للعد كما في المثال 3 ويمكن أن تكون غير محدودة كما في المثال 4 و 5.

1.2- المجموعة الفارغة:

المجموعة التي لا تحتوي على أي عناصر تسمى مجموعة فارغة. ونكتب:

$$A=\Phi \quad \text{أو} \quad A=\{\ \}$$

2.2- المجموعة الجزئية:

تسمى المجموعة B مجموعة جزئية من A إذا كانت جميع عناصر B في A ونكتب:

$B\subset A$ ونقرأ B محتواة في A.

$B\subseteq A$ ونقرأ B محتواة أو تساوي A.

3.2- مجموعة أجزاء مجموعة:

هي المجموعات الجزئية التي يمكن تشكيلها من المجموعة العامة A بما في ذلك المجموعة الفارغة والمجموعة نفسها ونرمز لها بالرمز $P(A)$، كما نرمز لعدد عناصر المجموعة بالرمز $\text{Card}\,A$.

مثال:

$$A=\{1,2,3\}$$

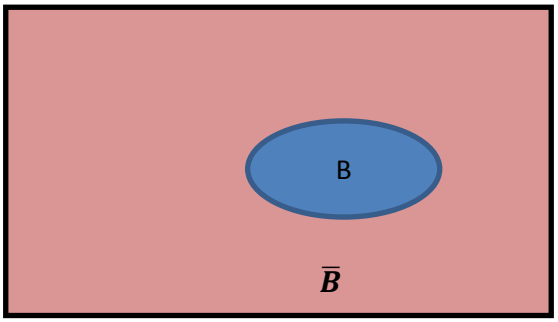
$$P(A)=\{\Phi,\{1\}\{2\}\{3\}\{1,2\}\{1,3\}\{2,3\}\{1,2,3\}\}$$

$$\text{Card}\,A=n \Rightarrow \text{Card}\,P(A)=2^n$$

4.2- المجموعة المكملة:

إذا كانت المجموعة B محتواة في المجموعة A، فإن مكمل المجموعة B بالنسبة إلى A هي مجموعة العناصر التي تنتمي إلى A ولا تنتمي إلى B ونرمز لها بالرمز $\overline{B}$ ونكتب:

$$\overline{B}=\{x: x\in A \text{ و } x\notin B\}$$



مثال:

$$A=\{1,2,4,6,7\} \qquad B=\{1,7\} \Rightarrow \overline{B}=\{2,4,6\}$$

5.2- تقاطع مجموعتين:

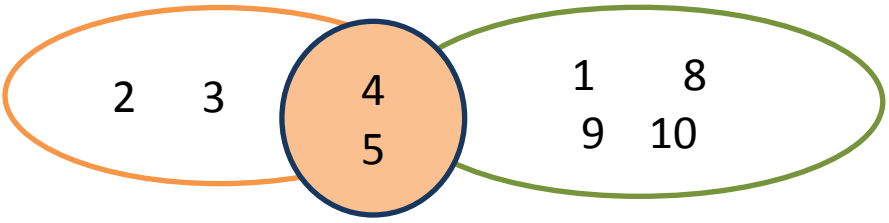
تقاطع المجموعتين A و B هو مجموعة العناصر التي تنتمي إلى A و B في نفس الوقت.

يُرمز إلى تقاطع A و B بالرمز $A\cap B$ ونكتب:

$$A\cap B=\{x: x\in A \text{ و } x\in B\}$$

مثال:

$$A=\{2,3,4,5\}$$
$$B=\{1,4,5,8,9,10\}$$
$$A\cap B=\{4,5\}$$



وعموما إذا كانت المجموعات $A_1, A_2, \ldots, A_n$ مجموعات جزئية من المجموعة الكلية A فان تقاطع هذه المجموعات تعطى بالعلاقة التالية:

$$\bigcap_{i=1}^{n} A_i = A_1\cap A_2\cap\ldots\cap A_n$$

6.2- اتحاد مجموعتين:

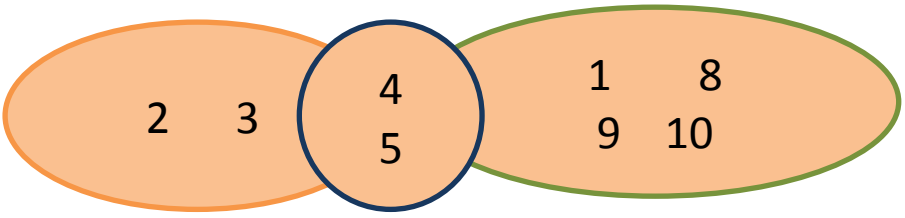
اتحاد مجموعتين A و B هو مجموعة العناصر التي تنتمي إلى A أو B.

نرمز إلى اتحاد مجموعتين بالرمز $A\cup B$ ونكتب:

$$A\cup B=\{x: x\in A \text{ و } x\in B\}$$

مثال:

$$A=\{2,3,4,5\}$$
$$B=\{1,4,5,8,9,10\}$$
$$A\cup B=\{1,2,3,4,5,8,9,10\}$$



وعمومًا، إذا كانت المجموعات $A_1, A_2, \ldots, A_n$ هي مجموعات جزئية من المجموعة الكلية A، فان اتحاد هذه المجموعات يكون على النحو التالي:

$$\bigcup_{i=1}^{n} A_1 \cup A_2, \ldots, \cup A_n$$

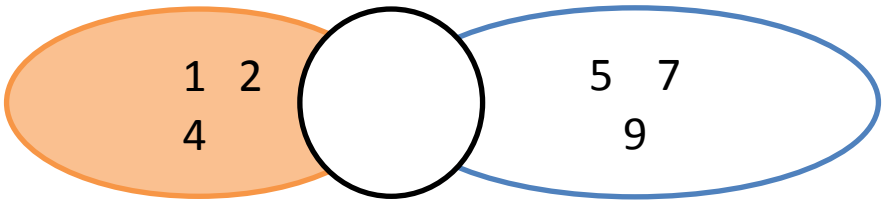
7.2- الفرق بين مجموعتين:

الفرق بين مجموعتين A و B هو مجموعة العناصر التي تنتمي إلى A ولا تنتمي إلى B ونرمز لها بالرمز $A-B$ ونكتب:

$$A-B=\{x: x\in A \text{ و } x\notin B\}$$

مثال:

$$A=\{1,2,3,4\}$$
$$B=\{3,5,7,9\}$$
$$A-B=\{1,2,4\}$$



3- نظريات مهمة حول المجموعات:

- الاتحاد تبديلي : $A\cup B=B\cup A$
- الاتحاد تجميعي: $A\cup(B\cup C)=(A\cup B)\cup C=A\cup B\cup C$
- التقاطع تبديلي: $A\cap B=B\cap C$
- التقاطع تجميعي: $A\cap(B\cap C)=(A\cap B)\cap C=A\cap B\cap C$
- القانون الأول للتوزيع: $A\cap(B\cup C)=(A\cap B)\cup(A\cap C)$
- القانون الثاني للتوزيع: $A\cup(B\cap C)=(A\cup B)\cap(A\cup C)$
- $A-B=A\cap\overline{B}$
- $A\subset B \Rightarrow \overline{B}\subset\overline{A}$
- $A\cup\Phi=A$ و $A\cap\Phi=\Phi$
- $A\cap S=A$ و $A\cup S=S$ فإن $A\subset S$
- القانون الأول لمورقان: $\overline{A\cup B}=\overline{A}\cap\overline{B}$: Première loi de Morgan
- القانون الثاني لمورقان: $\overline{A\cap B}=\overline{A}\cup\overline{B}$: Seconde loi de Morgan
- $A=(A\cap B)\cup(A\cap\overline{B})$

سلسلة تمارين رقم 1 مع الحل

التمرين 1:

لنفترض أن المجموعة A تتكون من 3 عناصر $A=\{2,4,6\}$.

1) أوجد مجموعة أجزاء المجموعة A.

2) إذا كان $\text{Card}\,A=52$، فابحث عن $\text{Card}\,P(A)$.

الحل:

1) $P(A)=\{\Phi,\{2\},\{4\},\{6\},\{2,4\},\{2,6\},\{4,6\},\{2,4,6\}\}$

2) $\text{Card}\,A=52 \Rightarrow \text{Card}\,P(A)=2^{52}$

التمرين 2:

لتكن A و B مجموعتين. بيّن أن:

$$A-B=A\cap\overline{B}$$

الحل:

$$\begin{aligned}A-B&=\{x: x\in A \text{ و } x\notin B\}\\&=\{x: x\in A \text{ و } x\notin \overline{B}\}\\&=A\cap\overline{B}\end{aligned}$$

التمرين 3:

نقوم برمي زهرة النرد مرة واحدة. لتكن المجموعة S مجموعة النتائج الممكنة:

$S=\{1,2,3,4,5,6\}$

لتكن الأحداث التالية:

A : الحصول على عدد اصغر من 3

B : الحصول على عدد زوجي

أوجد المجموعات التالية:

$$A\cap B\ ,\ A\cup B\ ,\ \overline{A}\ ,\ A-B\ ,\ B-A$$

الحل:

$S=\{1,2,3,4,5,6\}$

$A=\{1,2\}$

$B=\{2,4,6\}$

$A\cap B=\{x: x\in A \text{ و } x\in B\}=\{1,2,4,6\}$

$\overline{A}=\{x: x\in S \text{ و } x\notin A\}=\{3,4,5,6\}$

$\overline{B}=\{x: x\in S \text{ و } x\notin B\}=\{1,3,5\}$

$A-B=\{1\}$

$B-A=\{4,6\}$

التمرين 4:

ليكن A و B مجموعتين جزئيتين من المجموعة S. بيّن أن:

1) $\overline{A\cup B}=\overline{A}\cap\overline{B}$

2) $\overline{A\cap B}=\overline{A}\cup\overline{B}$

الحل:

1)
$$\overline{A\cup B}=\{x: x\in S \text{ و } x\in\overline{A\cup B}\}$$
$$=\{x: x\in S \text{ و } x\notin\overline{A\cup B}\}$$
$$=\{x: x\in S \text{ و } x\notin A \text{ و } x\notin B\}$$
$$=\{x: x\in S \text{ و } x\in\overline{A} \text{ و } x\in\overline{B}\}$$
$$=\{x: x\in S \text{ و } x\in\overline{A}\cap\overline{B}\}$$
$$\overline{A\cup B}=\overline{A}\cap\overline{B}$$

2)
$$\overline{A\cap B}=\{x: x\in S \text{ و } x\in\overline{A\cap B}\}$$
$$=\{x: x\in S \text{ و } x\notin\overline{A\cap B}\}$$
$$=\{x: x\in S \text{ و } x\notin A \text{ و } x\notin B\}$$
$$=\{x: x\in S \text{ و } x\in\overline{A} \text{ و } x\notin\overline{B}\}$$
$$=\{x: x\in S \text{ و } x\in\overline{A}\cup\overline{B}\}$$
$$\overline{A\cap B}=\overline{A}\cup\overline{B}$$

التمرين 5:

لتكن المجموعات A,B,C ، بيّن أن:

$$A\cap(B\cup C)=(A\cap B)\cup(A\cap C)$$

الحل:

$$\begin{aligned} A\cap(B\cup C) &= \{x : x\in A \text{ و } x\in(B\cup C)\} \\ &= \{x : x\in A \text{ و } (x\in B \text{ أو } x\in C)\} \\ &= \{x : (x\in A \text{ و } x\in B) \text{ أو } (x\in A \text{ و } x\in C)\} \\ &= \{x : x\in A\cap B \text{ أو } x\in A\cap C\} \\ &= \{x : x\in(A\cap B)\cup(A\cap C)\} \\ &= (A\cap B)\cup(A\cap C) \end{aligned}$$

التمرين 6:

ليكن A و B مجموعتين جزئيتين من المجموعة S. بيّن أن:

$$A=(A\cap B)\cup(A\cap\overline{B})$$

الحل:

لدينا:

$$A\cap(B\cup C)=(A\cap B)\cup(A\cap C)$$

نضع: $C=\overline{B}$

$$A\cap(B\cup\overline{B})=(A\cap B)\cup(A\cap\overline{B}).....(1)$$

نعرف أن:

$$B\cup\overline{B}=S$$

$$A\cap(B\cup\overline{B})=(A\cap S)=A.....(2)$$

نعوّض المعادلة (2) في المعادلة (1) نجد:

$$A=(A\cap B)\cup(A\cap\overline{B})$$

الفصل الأول:

الأحداث العشوائية واحتمالاتها

1- الظاهرة العشوائية أو التجربة العشوائية[1]:

نقول عن تجربة معينة أنها عشوائية إذا تحققت الشروط التالية:

- الحصول على العديد من النتائج المحتملة
- يمكننا وصف كل هذه النتائج
- لا يمكننا معرفة النتيجة التي سنحصل عليها مسبقًا

مثال:

- ❖ إلقاء قطعة نقود مرة واحدة : النتيجة غير معروفة مسبقًا والنتائج المحتملة هي "صورة" أو "وجه"
- ❖ وزن الجسم بميزان دقيق: تختلف النتيجة من وزن إلى آخر
- ❖ تجربة تتمثل في معرفة الوقت الذي تستغرقه الطائرة في رحلة منتظمة بين نقطتين. وقت الرحلة ليس ثابتًا من تجربة إلى أخرى ويختلف نوعًا ما

2- الحدث العشوائي:

في نظرية الاحتمالات، يُعرف الحدث العشوائي على أنه أي نتيجة يمكن تحقيقها في تجربة عشوائية.

مثال:

- الحدث A: الحصول على الوجه في تجربة إلقاء قطعة نقود
- الحدث B: إصابة هدف في سلسلة من الطلقات
- الحدث C: الحصول على عدد زوجي في تجربة إلقاء زهرة النرد مرة واحدة

3- فضاء العينة (فراغ الحوادث أو المجموعة الأساسية):

نسمي مجموعة النتائج الممكنة للتجربة العشوائية **فضاء العينة** ونرمز لها بالرمز Ω

مثال 1: إلقاء زهرة النرد مرة واحدة، فضاء العينة هو $\Omega = \{1,2,3,4,5,6\}$

مثال 2: إلقاء قطعة نقود مرتين، فضاء العينة هو: $\Omega = \{(PF),(FP),(PP),(FF)\}$

أما الحدث هو مجموعة جزئية من فضاء العينة يتكون فقط من إحدى النتائج الممكنة للتجربة ونرمز له بالحروف اللاتينية $A, B, C, \ldots$.

4- أنواع الأحداث وخصائصها:

1.4- الحدث البسيط :

هو الحدث غير القابل للتجزئة، مثلا نقول أن الحدث 6 هو حدث بسيط عند رمي حجرة النرد. لأن الرقم 6 لا يمكن تقسيمه إلى حوادث أخرى.

[1] http://groupes-premier-degre-36.tice.ac-orleans-tours.fr/eva/sites/clg-le-grand-clos-montargis/IMG/pdf/Probabilites.pdf.

2.4- الحدث المركب:

هو الحدث الذي يمكن تجزئته إلى حوادث بسيطة. مثلا نقول أن حدث ظهور رقم فردي عند رمي حجرة نرد هو حدث مركب لأنه يتكون من عدة حوادث بسيطة مثل $A=\{1,3,5\}$.

3.4- الحدث الأكيد:

الحدث الأكيد هو الحدث الذي يحدث في كل مرة نكرر فيها التجربة العشوائية. بمعنى آخر، إنه الحدث الذي يحتوي على جميع عناصر المجموعة الأساسية Ω.

مثال: نقوم بإلقاء زهرتي نرد، وليكن الحادث A معرف كما يلي:

A : مجموع النتيجتين أكبر من 1. يحدث هذا الحدث طوال الوقت وفي كل مرة نعيد فيها التجربة ، لذلك فهو حدث أكيد $A=\Omega$.

4.4- الحدث المستحيل:

الحدث المستحيل هو الحدث الذي لا يحدث أبدا أو المستحيل وقوعه مهما أعدنا التجربة أي أنه الحادث الذي لا يحتوي على أي نتيجة ممكنة.

مثال: نقوم بإلقاء زهرتي نرد مرة واحدة. وليكن الحادث A: مجموع العددين الظاهرين أكبر من 12.

يسمى الحادث A حدث مستحيل لأنه لن يتحقق أبدا مهما أعدنا التجربة $A=\Phi$.

5.4- حدث محتوي في حدث آخر:

إذا لاحظنا انه في كل مرة يحدث فيها الحدث A، يتبعه حدوث الحدث B، فإننا نقول أن A هي حالة خاصة من B أو A محتوي في B ونرمز إليها على النحو التالي:

$$A\subset B$$

إذا كان A محتوي في B و B محتوي في A في نفس الوقت، فإننا نقول أن الحدثين A و B متساويان أو متكافئان ونكتب: $A=B$.

6.4- تقاطع حدثين أو جداء حدثين:

الحدث الذي يتكون من وقوع الحدث A والحدث B في نفس الوقت يسمى تقاطع حدثين أو جداء حدثين.

نشير إلى التقاطع بالكتابة التالية:

$A\cap B$. AB أو

$$A\cap B=\{x/x\in A \quad x\in B\}$$

7.4- اتحاد حدثين أو مجموع حدثين:

الحدث الذي يتكون من تحقيق واحد على الأقل من الحدثين A أو B، أي تحقيق الحدث A أو الحدث B، يسمى اتحاد حدثين أو مجموع حدثين.

يُشار إلى الاتحاد بالكتابة التالية:

$$A \cup B \quad A + B \text{ أو}$$
$$A \cup B = \{x / x \in A \quad x \in B \text{ أو}\}$$

8.4- الفرق بين حدثين:

الحدث الذي يتكون من وقوع الحدث A وعدم تحقيق الحدث B، يسمى الفرق بين حدثين.

نشير إلى الفرق من خلال الكتابة التالية:

$$A - B = \{x / x \in A \quad x \notin B \text{ و}\}$$

9.4- الحدثان المتعاكسان أو المكملان:

الحدث المعاكس أو التكميلي للحدث A هو الذي يعبر عن عدم حدوث الحدث A. نرمز له بالرمز $\overline{A}$، A' أو A^c.

$$\overline{A} = \{x / x \in \Omega \text{ و } x \notin A\}$$

نقول عن الحدثين A و $\overline{A}$ أنهما مكملان إذا وفقط تحقق ما يلي:

$$A \cap \overline{A} = \Phi \text{ و } A \cup \overline{A} = \Omega$$

مثال:

نقوم برمي زهرة نرد مرة واحدة، فضاء العينة Ω هو:

$$\Omega = \{1,2,3,4,5,6\}$$

لتكن الأحداث التالية:

A: الحصول على عدد زوجي

$$A = \{2,4,6\}$$

الحدث المعاكس للحدث A هو:

$$\overline{A} = \{x / x \in \Omega \text{ و } x \notin A\}$$
$$\overline{A} = \{1,3,5\}$$

10.4- الحوادث المتنافية:

هي الحوادث التي يستحيل حدوثها في آن واحد، حيث أن وقوع أحدها ينفي وقوع الآخر أو إذا كان غير متقاطعين، أي: $A \cap B = \Phi$.

مثال: ظهور الرقم والصورة في تجربة إلقاء قطعة نقود مرة واحدة حدثان متنافيان لا يمكن أن يقعا في آن واحد.

11.4- الحوادث غير المتنافية:

هي الحوادث التي يمكن حدوثها في آن واحد حيث أن حدوث أحدها لا ينفي وقوع الآخر أو إذا كان متقاطعين أي $A \cap B \neq \Phi$.

مثال: عند رمي حجرة نرد مرة واحدة فإن عدد الحالات الممكنة أو فضاء العينة لهذه التجربة هي:

$$\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$$

نسمي الحدث A: ظهور رقم زوجي B: ظهور رقم فردي، أما C: ظهور رقم أولي.

$$A = \{2,4,6\}\ B = \{1,3,5\}\ C = \{2,3,5\}$$

نلاحظ أن الحدثين B و A هما حدثين متنافيين لأنه لا يمكن أن يكون العدد فردي وزوجي في نفس الوقت $A \cap B = \phi$.

أما الحدثين C و A فهما غير متنافيين لأنه يمكن أن يكون العدد زوجي وأولي في نفس الوقت $A \cap C = \{2\}$.

12.4- الحوادث المستقلة:

هي الحوادث التي عندما يقع أحدها لا يؤثر ولا يتأثر بوقوع الحوادث الأخر، فمثلا نتائج عدة رميات لقطعة نقود هي حوادث مستقلة، لأن نتائج الرمية الأولى مثلا لا تؤثر ولا تتأثر بنتائج الرمية الثانية أو الثالثة...

13.4- الحوادث غير المستقلة:

هي الحوادث التي عند وقوع أحدها يؤثر على احتمال وقوع الحوادث الأخرى أو وقوع أحدها يكون مشروط أو مرتبط بوقوع الحوادث الأخرى. فمثلا عند سحب كرة من صندوق بدون إعادتها هي حوادث غير مستقلة لأن السحبة الأولى أو الثانية تؤثر على احتمال السحبات الموالية.

14.4- الحوادث المتكافئة:

يقال عن الأحداث أنها متكافئة، في تجربة عشوائية، عندما تكون محتملة بنفس القدر أي إذا لم يكن أي من هذه الأحداث أكثر احتمالًا من الأحداث الأخرى. أي أن كل حدث لديه نفس فرصة الظهور في التجربة العشوائية.

مثال:

كل رقم من أرقام زهرة النرد له نفس احتمالية الحدوث $= \frac{1}{6}$.

سلسلة تمارين رقم 2 مع الحلول

التمرين 1:

نقوم بسحب بطاقة من بين 52 بطاقة لعب، تحتوي هذه البطاقات على 4 ألوان مختلفة، الأحمر والأسود والأخضر والأزرق. كل لون مرقم من 1 إلى 13.

ابحث عن المجموعة الأساسية أو فراغ الحوادث (فضاء العينة) Ω في الحالات التالية:

1- إذا أخذنا في الاعتبار الأرقام فقط.

2- إذا أخذنا في الاعتبار الألوان فقط.

3- إذا أخذنا في الاعتبار الأرقام والألوان في نفس الوقت.

الحل:

1- إذا أخذنا في الاعتبار الأرقام فقط، النتائج المحتملة هي 13 نتيجة، لأن لدينا 13 رقمًا مختلفًا:

$$\Omega = \{1,2,3,4,5,6,7,8,9,10,11,12,13\}$$

2- إذا أخذنا في الاعتبار اللون فقط. النتائج المحتملة هي 4 نتائج لأن لدينا 4 ألوان مختلفة:

$$\Omega = \{\text{rouge}, \text{noire}, \text{verte}, \text{bleue}\}$$

3- إذا أخذنا في الاعتبار الرقم واللون في نفس الوقت، فإن المجموعة الأساسية تتكون من 52 نتيجة محتملة لأن كل لون له رقم. لدينا 4 ألوان مضروبًا في عدد الأرقام 13، ما يعطينا 52.

$$\Omega = \left\{ \begin{array}{l} 1R,2R,3R,4R,5R,6R,7R,8R,9R,10R,11R,13R, \\ 1N,2N,3N,4N,5N,6N,7N,8N,9N,10N,11N,12N,13N, \\ 1V,2V,3V,4V,5V,6V,7V,8V,9V,10V,11V,12V,13V, \\ 1B,2B,3B,4B,5B,6B,7B,8B,9B,10B,11B,12B,13B \end{array} \right\}$$

التمرين 2:

نقوم بإلقاء زهرتي نرد مرة واحدة، ولتكن الأحداث التالية:

A : مجموع الرميتين هو عدد زوجي

B : مجموع الرميتين أكبر أو يساوي 7

1- أوجد فضاء العينة Ω

2- أوجد الأحداث التالية:

$$A \cup B \ , \ A \cap B \ , \ \overline{A} \ , \ A - B$$

الحل:

1- فضاء العيّنة هو:

$$\Omega=\left\{\begin{array}{l}(1,2);\ (1,3);\ (1,4);\ (1,5);\ (1,6);\\(2,1);(2,2);(2,3);(2,4);(2,5);(2,6);\\(3,1);(3,2);(3,3);(3,4);(3,5);(3,6);\\(4,1);(4,2);(4,3);(4,4);(4,5);(4,6);\\(5,1);(5,2);(5,3);(5,4);(5,5);(5,6)\\(6,1);(6,2);(6,3);(6,4);(6,5);(6,)\end{array}\right\}$$

2- $$A=\left\{\begin{array}{l}(1,1);\ (1,3);\ (1,5);\ (2,2);\ (2,6);\\(3,1);(3,3);(3,5);(4,2);(4,4);(4,6);\\(5,1);(5,3);(5,5);(6,2);(6,4);(6,6)\end{array}\right\}$$

$$B=\left\{\begin{array}{l}(1,6);\ (2,5);(2,6);\ (3,4);\ (3,5);(3,6);(4,3);\\(4,4);(4,5);(4,6);(5,2);(5,3);(5,4);(5,5);\\(5,6);(6,1);(6,2);(6,3);(6,4);(6,5);(6,6)\end{array}\right\}$$

$$A\cup B=\left\{x/\ x\in A\ \text{و}\ x\in B\right\}=\left\{\begin{array}{l}(1,1);\ (1,3);\ (1,5);\ (2,2);\ (2,4);(2,6);\\(3,1);(3,3);(3,5);(4,2);(4,4);(4,6);\\(5,1);(5,3);(5,5);(6,2);(6,4);(6,6);\\(1,6);(2,5);(3,4);(3,6);(4,3);(4,5);\\(5,2);(5,4);(5,6);(6,1);(6,3);(6,5)\end{array}\right\}$$

$$\overline{A}=\left\{x/\ x\in\Omega\ \text{و}\ x\notin A\right\}=\left\{\begin{array}{l}(1,2);(1,4);(1,6);(2,1);(2,3);(2,5);\\(3,2);(3,4);(3,6);(4,1);(4,3);(4,5);\\(5,2);(5,4);(5,6);(6,1);(6,3);(6,5)\end{array}\right\}$$

$$A-B=\left\{x/\ x\in A\ \text{و}\ x\notin B\right\}=\left\{(1,1);(1,3);(1,5);(2,2);(2,4);(3,1);(3,3);(4,2);(5,1)\right\}$$

التمرين 3:

نقوم بإلقاء قطعة نقود 3 مرات.

1- أوجد فضاء العينة.

لتكن الأحداث التالية:

A : الحصول على وجهين على الأقل

B : الحصول على الصورة مرة واحدة

2- أوجد الحادث $\overline{A}$

3- أوجد الحادث $\overline{B}$

4- اوجد الحادث $A\cap\overline{B}$

الحل:

1- فضاء العينة:

$$\Omega=\{(F,F,F),(F,F,P),(F,P,F),(F,P,P),(P,P,P),(P,P,F),(P,F,P),(P,F,F)\}$$

2-

$$A=\{(F,F,F),(F,F,P),(F,P,F),(P,F,F)\}$$
$$\overline{A}=\{(F,P,P),(P,P,P),(P,P,F),(P,F,P)\}$$

3-

$$B=\{(F,F,P),(F,P,F),(P,F,F)\}$$
$$\overline{B}=\{(F,F,F),(F,P,P),(P,P,P),(P,P,F),(P,F,P)\}$$

4-

$$A\cap\overline{B}=\{(F,F,F)\}$$

الفصل الثاني:

التحليل التوافقي وحساب الاحتمالات

1- قواعد حساب عدد النتائج الممكنة للتجربة العشوائية Ω أو عدد عناصر النتائج الملائمة للحدث العشوائي:

عندما نقوم برمي زهرة نرد أو قطعة نقود فمن السهل جدا معرفة عناصر المجموعة الأساسية (فضاء العينة) وعناصر الاحداث المرتبطة بالتجربة.

ولكن إذا كانت التجربة العشوائية معقدة، فمن الصعب معرفة جميع النتائج الممكنة للتجربة العشوائية وتحديد عناصرها، إلاّ أنه في الواقع، نحتاج فقط إلى معرفة عدد النتائج وليس بالضرورة النتائج نفسها.

يسمح لنا التحليل التوافقي بحساب عدد النتائج الممكنة للتجربة العشوائية وعدد النتائج الملائمة للحدث العشوائي. والتي تعتبر اهم العناصر في حساب احتمالية الحدث العشوائي.

1.1- قاعدة الضرب:

إذا افترضنا أن التجربة العشوائية تتكون من عدة تجارب حيث: n_1 يمثل عدد النتائج الممكنة للتجربة الأولى، n_2 يمثل عدد النتائج الممكنة للتجربة الثانية..... n_k عدد النتائج الممكنة للتجربة k وعليه فان عدد النتائج الممكنة للتجربة الإجمالية هو:

$$N = n_1 \times n_2 \times ... \times n_k$$

مخطط الشجرة هو تمثيل بياني مفيد لتمثيل تجربة متعددة الخطوات.

مثال 1:

إذا كانت لدينا تجربة متمثلة في رمي قطعة نقود وحجرة ندر في آن واحد ما هي عدد الحالات الممكنة؟

لدينا قطعة النقود يمكن أن تقع على أحد الوجهين (P, F)، بينما حجرة النرد يمكن أن تقع على أحد الوجوه الستة $(1,2,3,4,5,6)$.

ومنه فإن عدد الحالات الممكنة لهذه التجربة هي:

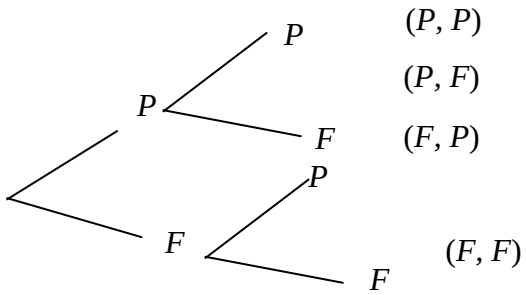
$$N = n_1 \times n_2 = 2 \times 6 = 12$$

مثال 2: تجربة إلقاء قطعتين من النقود.

عدد الحالات الممكنة لهذه التجربة هي:

$$N = n_1 \times n_2 = 2 \times 2 = 4 \qquad \Omega = \{(P,P);(P,F);(F,P);(F,F)\}$$

ويمكن حل المثال من خلال الشجرة البيانية التي تعتبر كطريقة تستخدم لحساب عدد الحالات الممكنة للتجارب عندما يكون عدد النتائج قليل.



2.1- التراتيب (الترتيب مهم):

في الكثير من الحالات في نظرية الاحتمالات خاصة في التحليل التوافقي نصادف تجارب تتمثل في اختيار مجموعة جزئية من p عنصر من بين مجموعة كلية من n عنصر $(p \le n)$ مع الاخذ بعين الاعتبار الترتيب ويكون الاختيار اما بإرجاع أو بدون إرجاع.

1.2.1- التراتيب بدون ارجاع[1]:

لتكن مجموعة مكونة من n عنصر والتي سنأخذ منها العنصر الأول، ثم العنصر الثاني، والثالث، وما إلى ذلك... حتى العنصر الأخير في المجموعة وهو العنصر p وبالتالي سنحصل على سلسلة من العناصر p مرتبة وفقًا لدرجة سحبها، يسمى هذا التسلسل ترتيبًا.

كم عدد الترتيبات المتكونة من p عنصر والتي يمكن سحبها من مجموعة تتكون من n عنصر؟

نظرًا لأن عمليات السحب المتتالية p تتم بدون إرجاع، لذلك توجد احتمالات n في السحب الأول، $n-1$ في السحب الثاني، $n-2$ في السحب الثالث، الخ... و $n-p+1$ في آخر سحب. في هذه الحالة، يكون عدد النتائج المحتملة عبارة عن ترتيب لعناصر p من بين عناصر n.

$$A_n^p = \frac{n!}{(n-p)!} = n(n-1).....(n-p+1)$$

مثال:

كم عدد مكون من 3 أرقام ، بدون تكرار ، يمكننا تشكيلها من الأرقام التالية: 1، 2، 3، 4، 5؟

- لاختيار الرقم الأول ، هناك 5 طرق مختلفة.
- لاختيار الرقم الثاني ، هناك 4 طرق مختلفة.
- لاختيار الرقم الثالث ، هناك 3 طرق مختلفة.

لذلك توجد $N = 5\times4\times3 = A_5^3 = \frac{5!}{(5-3)!} = \frac{5!}{2!} = 60$ طرق مختلفة لتكوين عدد مكون من 3 أرقام، بدون تكرار، يتم اختياره من الأرقام 1، 2، 3، 4، 5.

2.2.1- التراتيب بإرجاع[2]:

إذا كانت التجربة متمثلة في سحب كرات من إناء فيه n من الكرات مثلا، في هذه الحالة عند إجراء التجربة تعاد الكرة المسحوبة إلى الإناء بعد كل سحبة وبما انه توجد n طريقة مختلفة لاختيار كل كرة فبتطبيق المبدأ الأساسي للعد:

$$n\times n\times\ldots\times n = n^p$$

$$AR_n^p = n^p$$

[1] FRANCIS BISMANS : Probabilités et statistique inferentielle, Ellipses Edition marketing S A, 2016, p59

[2] Mohamed Ben Messoud et Brahim Oukacha ,statistique descriptive et calcul des probabilités, les pages bleues internationales, 2011, p176

مثال 1:

من بين الأرقام الفردية، كم عدد مكون من رقمين يمكن تكوينه؟

$AR_5^2 = 5^2 = 25$ ، يوجد 25 عدد مكون من رقمين ممكن تشكيله.

مثال 2:

يتكون رقم هاتف من 8 أرقام، هذا الرقم مشكل من أرقام مكررة $(0,1,2,3,4,5,6,7,8,9)$ وبالتالي فعدد أرقام الهواتف التي يمكن تشكيلها هو:

$$AR_{10}^8 = 10^8$$

3.1- التباديل:

1.3.1- التباديل بدون تكرار:

لنفرض أنه لدينا مجموعة مكونة من p عنصر، عدد التباديل الممكنة لهذه العناصر تعطى بالعلاقة التالية:

$$P! = P \times (P-1) \times (P-2) \times ... \times 2 \times 1$$

مثال 1:

كم عدد الطرق المختلفة التي يمكنك من خلالها ترتيب 9 كتب مختلفة على الرف؟

هناك $9! = 9 \times 8 \times 7 \times 6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 362880$ طريقة مختلفة.

2.3.1- التباديل مع التكرار:

نفرض أن مجموعة تتكون من p عنصر، وعليه فإن عدد التباديل الممكنة لهذه العناصر مع إمكانية تكرار بعض عناصره كتكرار الرقم في العدد أو تكرار الحرف في الكلمة، تعطى بالعلاقة التالية:

$$P_n^{n_1, n_2, ..., n_k} = \frac{n!}{n_1! n_2! ... n_k!}$$

مثال:

كم كلمة يمكن تشكيلها من كلمة (statistique)؟

- عدد احرف الكلمة هو 11 حرف
- الحرف t يتكرر 3 مرات في الكلمة
- الحرف s يتكرر مرتين
- الحرف i يتكرر مرتين
- الحرف a يتكرر مرة واحدة
- الحرف q يتكرر مرة واحدة
- الحرف u يتكرر مرة واحدة

- الحرف e يتكرر مرة واحدة

وبالتالي عدد الكلمات التي يمكن تشكيلها من كلمة statistique:

$$C_{11}^{3,2,2,1,1,1,1} = \frac{11!}{3!\times 2!\times 2!\times 1!\times 1!\times 1!\times 1!} = 1663200 \text{ mots}$$

4.1- التوفيقات:

تسمح لنا هذه الطريقة حساب النتائج الممكنة لتجربة عشوائية تتمثل في اختيار مجموعة جزئية متكونة من p عنصر من بين مجموعة كلية متكونة من n عنصر($p \le n$)، دون مراعاة الترتيب. ويكون السحب بإرجاع أو بدون إرجاع.

1.4.1- التوفيقات بدون إرجاع:

في هذه الحالة، يكون عدد النتائج المحتملة عبارة عن توفيقة من p عنصر تم تشكيلها من بين n عنصر.

$$C_n^p = \frac{n!}{p!(n-p)!} = \frac{A_n^p}{p!}$$

مثال:

ما عدد الطرق المختلفة التي يمكنك بها اختيار 3 موظفين من أصل 10 للذهاب في رحلة مدفوعة الأجر من قبل إدارة الشركة، لمشاهدة معالم المدينة؟

عدد الطرق المختلفة التي يمكنك من خلالها اختيار 3 من 10 موظفين يحسب بالعلاقة التالية:

$$C_{10}^3 = \frac{10!}{3!(10-3)!} = 120 \quad \text{طريقة مختلفة}$$

2.4.1- التوفيقات بإرجاع:

تكون عدد النتائج الممكنة لتجربة يتم فيها اختيار p عنصر من بين مجموعة كلية تتكون من n عنصر بإرجاع كالتالي:

$$C_{n+p-1}^p = \frac{(n+p-1)!}{p!(n-1)!}$$

مثال: بكم طريقة يمكن تشكيل مجموعة مكونة من 4 طلاب من بين مجموعة مكونة من 10 طلاب بإرجاع؟

$$C_{10+4-1}^4 = C_{13}^4 = \frac{13!}{4!9!} = 715 \quad \text{مجموعة}$$

2- تطبيقات مهمة في التحليل التوافقي:

a) $C_n^k = C_n^{n-k}$

البرهان: $C_n^{n-k} = \dfrac{n!}{(n-k)!(n-n+(c))!} = \dfrac{n!}{(n-k)!k!} = C_n^k$

مثال: $C_{10}^3 = C_{10}^7$

b) $C_n^k = C_{n-1}^k + C_{n-1}^{k-1}$

البرهان:

$$C_k^k = \frac{n!}{k!(n-k)!} = \frac{n(n-1)!}{k!(n-k)!}$$
$$= \frac{(n+k-k)(n-1)!}{k!(n-k)!} = \frac{(n-k)(n-1)!}{k!(n-k)!} + \frac{k(n-1)!}{k!(n-k)!}$$
$$= \frac{(n-1)!}{k!(n-k-1)!} + \frac{(n-1)!}{(k-1)!(n-k)!} = C_{n-1}^k + C_{n-1}^{k-1}$$

مثال: $C_{10}^4 = C_9^4 + C_9^3$

$C_{10}^4 = 210$, $C_9^4 = 126$, $C_9^3 = 84$

c) مفكوك نيوتن:

- $(a+b)^n = C_n^0 a^n nb^0 + C_n^1 a^{n-1}b^1 + C_n^2 a^{n-2}b^2 + ...C_n^n a^0 b^n$

$\Rightarrow (a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^{n-k} a^k b^{n-k}$

- $(a-b)^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k (-1)^{n-k} a^k b^{n-k}$

$a = 1$

$(1+b)^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k b^k$

مثال 1: أوجد معامل a^2b في $(a+b)^3$

$$(a+b)^3 = \sum_{k=0}^{3} C_3^{3-k} a^k b^{3-k}$$
$$= C_3^3 a^0 b^3 + C_3^2 a^1 b^2 + C_3^1 a^2 b^1 + C_3^0 a^3 b^0$$

$C_3^1 = \dfrac{3!}{2!1!} = 3$

مثال 2: أوجد مفكوك 2^n و 3^n

$$2^n = (1+1)^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k (1)^k$$
$$= C_n^0 + C_n^1 + C_n^2 + \dots C_n^n$$
$$3^n = (1+b)^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k 2^k$$
$$= C_n^0 2^0 + C_n^1 2^1 + C_n^2 2^2 + \dots$$

3- مفهوم الاحتمال:

يمكن تعريف الاحتمال بأنه الربط بين كل حدث بوزن $P(A)$ والذي يمثل فرصة حدوثه ويمكن أن نعبر عنه بالعلاقة التالية:

$$P(A) = \frac{n}{N} \quad \frac{\text{عدد الحالات الملائمة}}{\text{عدد الحالات الممكنة}} = \frac{\text{Card}\, A}{\text{Card}\, \Omega}$$

مثال: نقوم برمي زهرة نرد مرة واحدة. ما هو احتمال الحصول على عدد زوجي؟

$$P(A) = \frac{\text{Card}\, A}{\text{Card}\, \Omega} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$$

1.3- بديهيات أساسية لنظرية الاحتمالات:

- احتمال وقوع الحدث A لا يكون سالبا : $P(A) \geq 0$
- احتمال وقوع الحدث الاكيد يساوي 1 : $P(\Omega) = 1$
- احتمال وقوع الحدث المستحيل يساوي 0 : $P(\Phi) = 0$
- من البديهيات السابقة نستنتج أن $0 \leq P(A) \leq 1$
- احتمال وقوع الحدث المعاكس أو التكميلي لـــ A يساوي $P(\overline{A}) = 1 - P(A)$

- $P(A - B) = P(A) - P(A \cap B) = P(A \cap \overline{B})$
- $A \subset B \Rightarrow P(A) \leq P(B)$
  $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) \Rightarrow P(A \cap B) = P(A) + P(B) - P(A \cup B)$
- $P(\overline{A} \cap \overline{B}) = P(\overline{A \cup B}) = 1 - P(A \cup B)$
  $P(\overline{A} \cup \overline{B}) = P(\overline{A \cap B}) = 1 - P(A \cap B)$

2.3- قواعد أساسية في الاحتمالات:

1.2.3- قاعدة الجمع:

يستند هذا القانون إلى طبيعة الأحداث إذا كانت متنافية أو غير متنافية.

2.2.3- أحداث غير متنافية: إذا كان A و B حدثين غير متنافيين أي $A\cap B=\Phi$

$$P(A\cup B)=P(A)+P(B)$$
$$P(A\cap B)=\Phi$$

مثال:

يحتوي كيس على 5 كرات : 2 حمراء – 1 سوداء – 2 بيضاء. ما هو احتمال وجود كرة بيضاء أو سوداء؟

A: الحصول على كرة بيضاء

B: الحصول على كرة سوداء

$$P(A)=\frac{2}{5}$$
$$P(B)=\frac{1}{5}$$
$$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)$$
$$=\frac{2}{5}+\frac{1}{5}-0=\frac{3}{5}$$

من هناك يمكننا تعميم الاتحاد على النحو التالي:

$$P(A_1\cup A_2....\cup A_n)=\sum_{i=1}^{n}P(A_i)$$

3.2.3- الأحداث غير المتنافية:

إذا كان A ؛ B حدثين غير متنافيين فان:

$$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)$$

مثال:

نرمي زهرة النرد مرة واحدة فقط، ما هو احتمال الحصول على عدد زوجي أو عدد يقبل القسمة على 3؟

لدينا: $\Omega=\{1,2,3,4,5,6\}\ \text{card}\,\Omega=6$

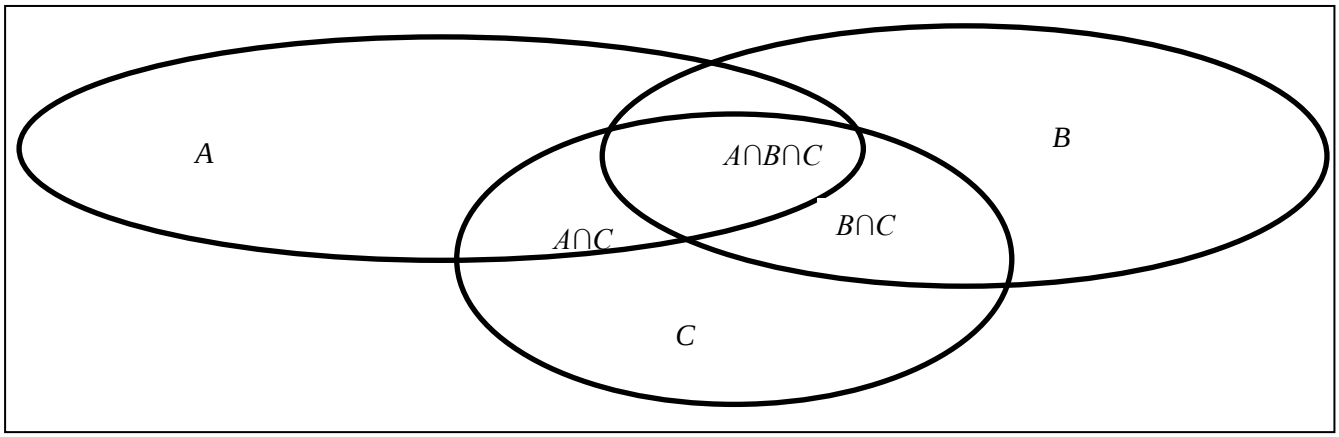
الحدث A: الحصول على عدد زوجي : $A=\{2,4,6\}\ \text{card}\,A=3$

الحدث B: الحصول على عدد يقبل القسمة على 3 : $B=\{3,6\}\ \text{card}\,B=2$

$$A\cap B=\{6\}\ \text{card}\,A\cap B=1$$
$$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)$$
$$=\frac{3}{6}+\frac{2}{6}-\frac{1}{6}=\frac{4}{6}=\frac{2}{3}$$

إذا كان لدينا 3 أحداث غير متنافية مثنى مثنى فإن:

$$P(A\cup B\cup C)=P(A)+P(B)+P(C)-P(A\cap B)-P(A\cap C)-P(B\cap C)+P(A\cap B\cap C)$$



$$P\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) = \sum_{i=1}^{n} P(Ai) - \sum^{n} p\left(A_j \cap A_k\right) +$$

$$\sum P\left(A_j \cap A_k \cap A_L\right) - \sum P\left(A_j \cap A_k \cap A_L \cap A_N\right) + ... + (-1)^{n-1} P\left(A_1 \cap A_2 ... \cap A_n\right)$$

ومن خلال قانون الجمع نستنتج أن:

$$P(A \cap B) = P(A) + P(B) - P(A \cup B)$$

وإذا كان لدينا n حدث عشوائي فإن:

$$P\left(\bigcap_{i=1}^{n} A_i\right) = \sum_{i=1}^{n} P(A_i) - \sum_{i<j}^{n} P\left(A_i \cup A_j\right) + \sum_{i<j<k} P\left(A_i \cup A_j \cup A_k\right) - ..... + (-1)^{n-1} P\left(\bigcup_{i}^{n} A_i\right)$$

سلسلة تمارين رقم 3 مع الحلول

التمرين 1:

في مجموعة أوراق اللعب المكونة من 52 بطاقة، يتم توزيع 5 أوراق على كل لاعب بشكل عشوائي. كم عدد الطرق المختلفة التي يمكن بها توزيع هذه البطاقات إذا كان هناك 4 لاعبين؟

الحل:

يمكن للاعب الأول استلام البطاقات الخمس بـ C_{52}^5 طريقة مختلفة. اللاعب الثاني لديه C_{47}^5 طريقة مختلفة لاستلام 5 بطاقات. أما اللاعب الثالث فلديه C_{42}^5 طريقة مختلفة واللاعب الرابع C_{37}^5 طريقة مختلفة. وفقًا لقاعدة الضرب، يكون العدد الإجمالي للطرق المختلفة لتوزيع البطاقات هو:

$$N = C_{52}^5 \times C_{47}^5 \times C_{42}^5 \times C_{37}^5$$

التمرين 2:

كم عدد مكون من 4 أرقام يمكن تشكيله من 10 أرقام التالية 0 ، 1 ، 2 ، 3 ، 4 ، 5 ، 6 ، 7 ، 8 ، 9.

1- إذا سمح بتكرار الأرقام.

2- إذا لم يسمح بتكرار الأرقام.

3- لا يسمح بالتكرار، وأول رقم على اليمين يكون دائماً صفر.

الحل:

كم عدد الأرقام المكونة من 4 أرقام التي يمكن تكوينها من 10 أرقام التالية 0 ، 1 ، 2 ، 3 ، 4 ، 5 ، 6 ، 7 ، 8 ، 9.

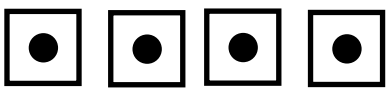
1- إذا سمح بتكرار الأرقام.

2- إذا لم يسمح بتكرار الأرقام.

3- لا يسمح بالتكرار، وأول رقم على اليمين يكون دائماً صفر.

الحل:

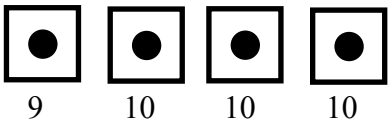
نحاول تخطيط العدد المكون من 4 أرقام على النحو التالي:



1- التكرار مسموح به:

- يمكن اختيار الرقم الأول من 9 أرقام باستثناء الصفر.
- يمكن اختيار الرقم الثاني من 10 أرقام.
- يمكن اختيار الرقم الثالث من 10 أرقام.
- يمكن اختيار الرقم الرابع من 10 أرقام.

لذا فإن عدد الطرق الممكنة يساوي:

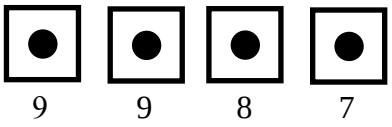


طريقة مختلفة $N = 9 \times 10 \times 10 \times 10 = 9000$

2- لا يجوز التكرار:

- يمكن اختيار الرقم الأول من 9 أرقام باستثناء الصفر.
- يمكن اختيار الرقم الثاني من 9 أرقام باستثناء الرقم الأول المختار.
- يمكن اختيار الرقم الثالث من 8 أرقام باستثناء الرقمين المختارين بالفعل.
- يمكن اختيار الرقم الرابع من 7 أرقام باستثناء الأرقام الثلاثة المختارة بالفعل.

لذا فإن عدد الطرق الممكنة هو:

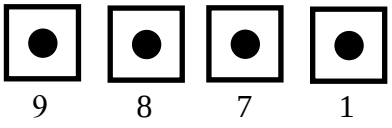


طريقة مختلفة $N = 9 \times 9 \times 8 \times 7 = 4536$

3- يحتل الصفر المربع الرابع وفي باقي المربعات لا يسمح بالتكرار:

- يمكن اختيار الرقم الأول من 9 أرقام.
- يمكن اختيار الرقم الثاني من 8 أرقام.
- يمكن اختيار الرقم الثالث من 7 أرقام.

لذا فإن عدد الطرق الممكنة المختلفة هو:



طريقة مختلفة $N = 9 \times 8 \times 7 \times 1 = 504$

التمرين 3:

نريد أن ننظم على الرف 4 كتب رياضيات مختلفة و 6 كتب فيزياء مختلفة وكتابان مختلفتان في الكيمياء.

كم عدد الطرق المختلفة الممكنة لترتيب هذه الكتب؟

1- حسب التخصص

2- فقط 4 كتب رياضيات مصنفة معًا.

الحل:

1- ترتيب الكتب حسب التخصص:

- لترتيب كتب الرياضيات معا، هناك 4! طريقة مختلفة ممكنة.
- لترتيب كتب الفيزياء معا، هناك 6! طريقة مختلفة ممكنة.
- لترتيب كتب الكيمياء معا ، هناك 2! طريقة مختلفة ممكنة.
- لترتيب التخصصات الثلاثة ، هناك 3! طرق مختلفة ممكنة.

لذا فإن العدد الإجمالي للطرق المختلفة الممكنة لتصنيف الكتب حسب التخصص هو:

$$N = 4! \times 6! \times 2! \times 3! = 207360$$

2- كتب الرياضيات فقط مصنفة معًا:

يمكن أن نعتبر أن كتب الرياضيات ككتاب واحد كبير. إذن لدينا 9 كتب:

- لترتيب 9 كتب، هناك 9! طرق مختلفة ممكنة.
- لتبادل كتب الرياضيات بينهما، هناك 4! طرق مختلفة ممكنة.

إذن، إجمالي عدد الطرق الممكنة المختلفة يساوي:

$$N = 9! \times 4! = 8709120$$

التمرين 4:

كم عدد الطرق المختلفة التي تمكننا من:

1- كتابة كلمة مكونة من 7 أحرف مع العلم أن 3 أحرف تتكرر في الكلمة

2- كتابة كلمة مكونة من 8 أحرف مع العلم أن 4 أحرف تتكرر في الكلمة مثنى مثنى

الحل:

نطبق قانون التباديل مع التكرار:

1- كلمة من 7 أحرف، 3 منها متشابهة:

$$C_7^{3,1,1,1,1} = \frac{7!}{3!\times 1!\times 1!\times 1!\times 1!} = 840$$

2- كلمة مكونة من 8 أحرف بما في ذلك 4 أحرف متكررة مثنى مثنى:

$$C_8^{2,2,1,1,1,1} = \frac{8!}{2!\times 2!\times 1!\times 1!\times 1!\times 1!} = 10080$$

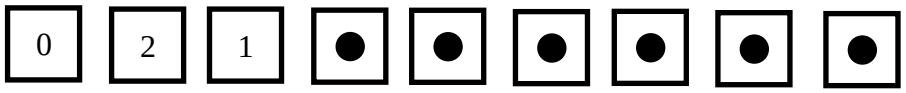
التمرين 5:

الأرقام الثلاثة الأولى للمركز الهاتفي لمدينة الجزائر هي: 021

- فما هو احتمال اختيار رقم هاتف في الجزائر العاصمة يتكون من 9 أرقام مختلفة؟

الحل:

رقم هاتف الجزائر العاصمة المكون من 9 أرقام مكتوب على النحو التالي:



كل المربعات الستة أعلاه يمكنها أن تأخذ الأرقام من 0 إلى 9. وبالتالي عدد النتائج الممكنة للتجربة هو:

$$N = 10\times 10\times 10\times 10\times 10\times 10 = 10^6$$

$$\text{Card}\,\Omega = 10^6$$

الحدث A الذي يهمنا هو الحدث الذي يتكون فيه رقم الهاتف من 9 أرقام مختلفة. إذن، يتبقى 7 أرقام (3، 4، 5، 6، 7، 8، 9) لتوزيعها على المربعات الفارغة الست المتبقية، نظرًا لأن الأرقام الثلاثة الأولى ثابتة 0، 1 و 2.

وبالتالي فإن عدد الحالات الملائمة للحدث A هو:

$$\text{Card}\,A = 7\times 6\times 5\times 4\times 3\times 2\times 1 = A_7^6$$

ومنه احتمال حدوث الحدث A هو:

$$P(A) = \frac{n}{N} \quad \frac{\text{عدد الحالات الملائمة}}{\text{عدد الحالات الممكنة}} = \frac{\text{Card}\,A}{\text{Card}\,\Omega} = \frac{A_7^9}{10^6} = 0,005$$

التمرين 6:

بين أن:

$$P(A\cup B\cup C) = P(A)+P(B)+P(C)-P(A\cap B)-P(A\cap C)-P(B\cap C)+P(A\cap B\cap C)$$

الحل:

نعلم أن:

$$P(X\cup Y)=P(X)+P(Y)-P(X\cap Y)$$

$$\begin{aligned}P(A\cup B\cup C)&=P\left[(A\cup B)\cup C\right]\\&=P(A\cup B)+P(C)-P\left[(A\cup B)\cap C\right]\\&=P(A)+P(B)-P(A\cap B)+P(C)-P\left[(A\cap C)\cup(B\cap C)\right]\\&=P(A)+P(B)+P(C)-P(A\cap B)-\left\{P(A\cap C)-P\left[(A\cap C)\cap(B\cap C)\right]\right\}\\&=P(A)+P(B)+P(C)-P(A\cap B)-P(A\cap C)-P(B\cap C)+P(A\cap B\cap C)\end{aligned}$$

وبالتالي:

$$P(A\cup B\cup C)=P(A)+P(B)+P(C)-P(A\cap B)-P(A\cap C)+P(A\cap B\cap C)$$

التمرين 7:

ترمي قطعة نقود 5 مرات متتالية. ما هو احتمال الحصول على ثلاثة أوجه متتالية على الأقل؟

الحل:

نسمي الحدث A : الحصول على ثلاثة أوجه متتالية على الأقل.

الحالات الملائمة للحدث A هي:

FFFFP PPFFF FFFFF

FFFPF PFFFF PFFFP

FFFPP FPFFF

- عدد الحالات الملائمة هو: $\text{Card}\,A=8$
- عدد الحالات الممكنة للتجربة و المتمثلة في القاء قطعة نقود 5 مرات متتالية هو:

$$\text{Card}\,\Omega=2\times2\times2\times2\times2=2^5$$

إذن، فإن احتمال الحدث A يساوي:

$$P(A)=\frac{\text{Card}\,A}{\text{Card}\,\Omega}=\frac{8}{2^5}=0,25$$

التمرين 8:

يحتوي كيس على 6 كرات حمراء و 4 كرات بيضاء و 5 كرات زرقاء.

نسحب كرة بشكل عشوائي. ما هو احتمال أن تكون الكرة المسحوبة:

1- حمراء.

2- بيضاء.

3- ليست حمراء.

4- حمراء أو بيضاء.

الحل:

نحدد الأحداث التالية:

A: الكرة المسحوبة حمراء

B: الكرة المسحوبة بيضاء

$\overline{A}$: الكرة المسحوبة ليست حمراء

$A \cup B$: الكرة المسحوبة حمراء أو بيضاء

- **حساب عدد الحالات الممكنة للتجربة:**

وهي عدد الحالات التي يتم فيها سحب كرة من بين 15 كرة، دون إعطاء أهمية للون:

$$\text{Card}\,\Omega = C_{15}^{1} = 15$$

1- حساب احتمال الحدث A:

- **عدد الحالات الملائمة:** هو عدد الحالات التي يتم فيها سحب كرة حمراء من بين 6 كرات حمراء. هناك 6 طرق مختلفة لسحب كرة حمراء $\text{Card}\,A = C_{6}^{1} = 6$.
- احتمال الحدث A هو:

$$P(A) = \frac{\text{Card}\,A}{\text{Card}\,\Omega} = \frac{6}{15}$$

2- حساب احتمال الحدث B:

- عدد الحالات الملائمة: $\text{Card}\,B = C_{4}^{1} = 4$
- احتمال الحدث B: $P(B) = \frac{\text{Card}\,B}{\text{Card}\,\Omega} = \frac{4}{15}$

3- حساب احتمال الحدث $\overline{A}$:

نستخدم إحدى البديهيات الأساسية لنظرية الاحتمالات ، وهي:

$$P(\overline{A}) = 1 - P(A)$$

$$P(\overline{A}) = 1 - \frac{6}{15} = \frac{9}{15}$$

4- حساب احتمال الحدث $A \cup B$:

نظرًا لأن الحدثين A و B متنافيان ، (من المستحيل تحقيقهما في وقت واحد) فإن احتمال الحدث $A \cup B$ وفقًا للبديهية 3 من الاحتمالات يساوي:

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) = \frac{6}{15} + \frac{4}{15} = \frac{10}{15}$$

التمرين 9:

يحتوي كيس على 40 كرة تحمل 4 ألوان مختلفة، الأسود والأبيض والأحمر والأخضر. كل 10 كرات من نفس اللون مرقمة من 1 إلى 10.

نسحب كرة بشكل عشوائي.

1- أوجد احتمال سحب كرة تحمل الرقم 1.

2- أوجد احتمال سحب كرة سوداء تحمل الرقم 7.

3- أوجد احتمال سحب كرة خضراء تحمل الرقم 9 أو كرة بيضاء تحمل الرقم 3.

4- أوجد احتمال سحب كرة غير حمراء.

5- أوجد احتمال سحب كرة لا تحمل الرقم 5 ولا اللون الأسود.

الحل:

1- احتمال سحب كرة تحمل الرقم 4:

نسمي الحدث A: الكرة المسحوبة تحمل الرقم 4

$$P(A)=\frac{\text{card } A}{\text{card } \Omega}=\frac{4}{40}=0,1$$

2- احتمال سحب كرة سوداء تحمل الرقم 7:

نسمي الحدث B: الكرة المسحوبة سوداء تحمل الرقم 7

$$P(B)=\frac{\text{card } B}{\text{card } \Omega}=\frac{1}{40}=0,025$$

3- احتمال سحب كرة خضراء تحمل الرقم 9 أو كرة بيضاء تحمل الرقم 3:

نسمي الحدث C الكرة المسحوبة خضراء تحمل الرقم 9 أو كرة بيضاء تحمل الرقم 3.

نستطيع التعبير عن الحدث C كما يلي:

$$C=(9V)\cup(3B)$$

$$P(C)=P(9V)+P(3B)=\frac{1}{40}+\frac{1}{40}=\frac{2}{40}=0,05$$

4- احتمال سحب كرة غير حمراء:

نسمي الحدث R: الكرة المسحوبة حمراء

نسمي الحدث $\overline{R}$: الكرة المسحوبة غير حمراء

$$P(R)=\frac{\text{Card } R}{\text{Card } \Omega}=\frac{C_{10}^{1}}{C_{40}^{1}}=\frac{10}{40}=0,25$$

$$p(\overline{R})=1-p(R)=1-0,25=0,75$$

5- احتمال سحب كرة لا تحمل الرقم 5 ولا اللون الأسود:

نسمي الحدث D: الكرة المسحوبة لا تحمل الرقم 5 ولا اللون الأسود

$$D=\bar{5}\cap\overline{N} \Rightarrow p(D)=p(\bar{5}\cap\overline{N})=p(\overline{5\cup N})=1-p(5\cup N)$$
$$=1-\{p(5)+p(N)-p(5\cap N)\}$$
$$=1-4/40-10/40+1/40=27/40=0,675$$

التمرين 10:

اذا افترضنا انه من بين 20 جهاز يوجد 7 أجهزة معطوبة، نسحب 4 أجهزة بشكل عشوائي.

ما هو الاحتمال؟

1- أن نكون جميع الأجهزة الأربعة معطوبة

2- جهازان معطوبان

3- وجود جهازين معطوبين على الأقل.

الحل:

1- احتمال أن نكون جميع الأجهزة الأربعة معطوبة:

نسمي الحدث A: الأجهزة الأربعة معطوبة

$$P(A)=\frac{\text{Card}\,A}{\text{Card}\,\Omega}=\frac{35}{4845}=0,007$$

2- احتمال أن يكون جهازان معطوبان:

نسمي الحدث B: الجهازان معطوبان

$$\Rightarrow P(B)=\frac{\text{Card}\,B}{\text{Card}\,\Omega}=\frac{1638}{4845}=0,33$$

3- احتمال الحصول على جهازين معطوبين على الأقل:

نسمي الحدث C: الحصول على جهازين معطوبين على الأقل

$\overline{C}$: الحصول على جهازين معطوبين على الأكثر

عدد الحالات الملائمة هو: $C_7^1\times C_{13}^3+C_7^0\times C_{13}^4=2717$

$$\Rightarrow P(\overline{C})=\frac{\text{Card}\,\overline{C}}{\text{Card}\,\Omega}=\frac{2717}{4845}=0,56$$

$$P(C)=1-P(\overline{C})=1-0,56=0,44$$

التمرين 11:

يتكون الرقم التسلسلي لنوع معين من التلفاز من 6 أرقام و 3 أحرف.

الأرقام هي: 7 ، 7 ، 4 ، 4 ، 4 ، 8 والأحرف: B، T، T، كم عدد الأرقام التسلسلية المختلفة التي يمكننا تكوينها؟

1- بدون تقييد؛

2- الرقم التسلسلي عبارة عن رقم مكون من 6 أرقام متبوعًا بثلاثة أحرف؛

3- أن يكون الرقم التسلسلي بهذا الشكل:

		T					4	4

الحل:

1- عدد الأرقام التسلسية بدون تقييد:

$$P_9^{2,3,1,1,2}=\frac{9!}{3!2!2!}=15120$$

التباديل بتكرار:

$P_9^{2,3,1,1,2}=15120$ هناك 15120 رقم تسلسلي بدون تقييد أي بدون شرط.

2- الرقم التسلسلي عبارة عن رقم مكون من 6 أرقام متبوعًا بثلاثة أحرف:

$$P_6^{2,3,1}\cdot P_3^{1,2}=\frac{6!}{3!2!}\cdot\frac{3!}{2!}=180$$

شكل الرقم التسلسلي:

		T					4	4

$$P_4^{2,1,1}\cdot P_2^{1,1}=\frac{4!}{2!}\cdot 2=24$$

التمرين 12:

يقوم ثلاثة لاعبين $A.B.C$ برمي زهرة نرد تتكون من ستة أوجه مرقمة من 1 إلى 6

1- كم عدد النتائج الممكنة للتجربة؟

2-كم عدد النتائج التي يتم الحصول فيها على أرقام مختلفة؟

الحل:

1- عدد النتائج الممكنة للتجربة:

$$A_n^P = n^p = 6^3 = 216$$

2- عدد النتائج التي يتم الحصول فيها على أرقام مختلفة:

$$N = A_n^P = \frac{n!}{(n-p)!} = \frac{6!}{3!} = A_6^3 = 120$$

التمرين 13:

تتكون لوحة ترقيم السيارات من حرفين مختلفين متبوعة ب ثلاث ارقام بحيث الرقم الأول يختلف عن الصفر.

- كم عدد اللوحات المختلفة التي يمكنني طباعتها؟

الحل:

عدد اللوحات المختلفة عبارة عن ترتيبة بالشكل التالي:

$$A_{26}^2 \cdot A_9^1 \cdot A_{10}^2 = 26 \times 25 \times 9 \times 10 \times 10 = 585000$$

التمرين 14:

كم عدد الكلمات المكونة من ثمانية أحرف يمكن تكوينها من كلمة Sciences:

1- بدون شرط؛

2- البدء والانتهاء بحرف ساكن؛

3- البدء بحرف ساكن وتنتهي بحرف متحرك.

الحل:

1- كلمة $P_8^{2,2,1,2,1} = 8!/2!2!2! = 5040$

2- كلمة $N = A_5^2 \cdot \frac{6!}{2!2!2!} = 1800$

3- $A_5^1 \times A_3^1 \times P_6^{2!2!2!} = C_5^1 \cdot C_3^1 \frac{6!}{2!2!2!} = 1350$

التمرين 15:

ما هو عدد الطرق المميزة التي يمكننا بها ترتيب ثلاث كرات سوداء وكرتان بيضاء وخمس كرات حمراء في صناديق مرقمة من 1 إلى 10، مع وضع كرة واحدة وواحدة فقط في كل صندوق؟

الحل:

نحن في حالة تباديل بتكرار.

طريقة ممكنة $P_{10}^{3,2,5} = C_{10}^{5} \cdot C_{5}^{3} \cdot C_{2}^{2} = 2520$

التمرين 16:

تحتوي كيس على 3 كرات حمراء، 2 كرات سوداء و 2 كرة بيضاء. نسحب 2 كرات دون إرجاع.

ما هي عدد النتائج الممكنة لهذا السحب؟

الحل:

لدينا: $\overset{3}{R}\overset{2}{N}\overset{2}{B}$

$C_3^1C_2^1C_2^0 = 6$ أو $C_3^1C_2^0C_2^1 = 6$ أو $C_3^0C_2^2C_2^0 = 1$ أو $C_3^2C_2^0C_2^0 = 3$ أو $C_3^0C_2^1C_2^1 = 4$ أو $C_3^0C_2^0C_2^2 = 1$

$6+6+1+3+4+1=21$ نتيجة ممكنة $= C_7^2 = \dfrac{7!}{2!5!}$

التمرين 17:

كم عدد النتائج الممكنة للحصول على مبلغ يساوي 12 من خلال رمي ثلاثة زهرات نرد مرة واحدة؟

الحل:

$A = \{(x,y,z) \in \Omega / x+y+z = 12\}$ و $A_x = \{(x,y,z) \in \Omega / y+z = -x+12\}$

$x=1 \Rightarrow A_1 = \{(1,5,6);(1,6,5)\} \Rightarrow \text{Card}\, A_1 = 2$

$x=2 \Rightarrow A_2 = \{(2,4,6);(2,5,5);(2,6,4)\} \Rightarrow \text{Card}\, A_2 = 3$

$x=3 \Rightarrow A_3 = \{(3,3,6);(3,4,5);(3,54);(3,6,5)\} \Rightarrow \text{Card}\, A_3 = 4$

$x=4 \Rightarrow A_4 = \{(4,2,6);(4,3,5);(4,4,4);(4,6,2);(4,5,3)\} \Rightarrow \text{Card}\, A_4 = 5$

$x=5 \Rightarrow A_5 = \{(5,1,6);(5,6,1);(5,3,4);(5,2,5);(5,5,2);(5,4,3)\} \Rightarrow \text{Card}\, A_5 = 6$

$x=6 \Rightarrow A_6 = \{(6,1,5);(6,5,1);(6,2,4);(6,4,2);(6,3,3)\} \Rightarrow \text{Card}\, A_6 = 5$

Card $A = 2+3+4+5+6+5 = 25$ نتيجة ممكنة

هناك 25 حالة من أصل 216 حالة حيث مجموع نقاط النرد الثلاثة يساوي 12.

التمرين 20:

لدينا مجموعة من القطع، ثلاثة منها سليمة وثلاثة معطوبة.

1- كم عدد العينات المختلفة التي يمكن تشكيلها من ثلاثة قطع؟

2- كم عدد العينات التي تحتوي على 3 قطع سليمة؟

3- كم عدد العينات التي تحتوي على الأقل على قطعة سليمة؟

الحل:

1- عدد العينات المختلفة التي يمكن تشكيلها من ثلاثة قطع:

$C_6^3 = \frac{6!}{3!3!} = \frac{6\times5\times4}{3\times2} = 20$. يوجد 20 عينة تتكون من 3 قطع ممكن سحبها من مجموعة كلية من 6 قطع

2- عدد العينات التي تحتوي على 3 قطع سليمة:

$C_3^3 \cdot C_3^0 = 1$ حالة واحدة

3- عدد العينات التي تحتوي على الأقل على قطعة سليمة:

$C_3^1 \cdot C_3^2 + C_3^2 \cdot C_3^1 + C_3^3 \cdot C_3^0 = 19$ (19 حالة)

التمرين 21:

كم عدد المجموعات الفرعية التي يمكن تشكيلها من مجموعة تحتوي على n عنصر؟

الحل:

$N = C_n^0 + C_n^1 + C_n^2 + ... + C_n^n = 2^n$ مجموعة جزئية.

باستعمال مفكوك نيوتن:

$$(a+b)^n = \sum_{k=0} C_n^k a^k b^{n-k}$$

$$(1+1)^n = \sum_{k=0} C_n^k (1)^k (1)^{n-k} = c_n^0 + c_n^1 + c_n^2 + \cdots + c_n^n$$

التمرين 22:

لنفترض أننا نريد إنشاء كلمة السر للكمبيوتر مكونة من خمسة أحرف.

1- كم عدد الكلمات المختلفة التي يمكن إنشاؤها إذا كان من الممكن استخدام نفس الحرف أكثر من مرة؟

2- في حالة عدم السماح بالتكرار، ما هو عدد الكلمات المختلفة التي يمكن إنشاؤها؟

الحل:

1- عدد الكلمات المختلفة التي يمكن إنشاؤها إذا كان من الممكن استخدام نفس الحرف أكثر من مرة هو:

$$N = 26^5$$

2- عدد الكلمات المختلفة التي يمكن إنشاؤها في حالة عدم السماح بالتكرار:

$$N = 26\times25\times24\times25\times22 = 7893600$$

التمرين 23:

باستخدام الأحرف a، a، b، b، b، c. ما عدد الرموز المختلفة التي يمكن تشكيلها؟

الحل:

$$N = P_6^{2,3,1}\frac{6!}{3!2!} = 60 \text{ رمز}$$

التمرين 24:

ما هو عدد الكلمات المكونة من أربعة أحرف مختلفة التي يمكن تشكيلها من كلمة «ESSAIS»؟

الحل:

$$N = 4!(\text{avec } 1s) + C_3^2\frac{4!}{2!}(\text{avec } 2s) + C_3^1\frac{4!}{3!}(\text{avec } 3s) = 24+36+12 = 72$$

يوجد 72 كلمة ممكنة.

التمرين 25:

من بين 20 قطعة غيار من النوع الأول يوجد خمس قطع معطوبة، ومن بين 30 قطعة من النوع الثاني يوجد 15 قطعة معطوبة.

نريد بناء جهاز يتكون من عشرة قطع من النوع الأول وخمس قطع من النوع الثاني.

1- كم عدد الأجهزة المختلفة التي يمكنك تشكيلها من هذه القطع؟

2- ما هو عدد الأجهزة المختلفة السليمة؟

الحل:

1- عدد الأجهزة المختلفة التي يمكنك تشكيلها من هذه القطع:

$$C_{20}^{10}C_{30}^{5}$$

2- عدد الأجهزة المختلفة السليمة:

$$C_5^0 \cdot C_{15}^{10} \cdot C_{15}^0 \cdot C_{15}^5$$

التمرين 27:

نقوم برمي زهرة نرد 4 مرات متتالية. نتيجة هذه التجربة هي قراءة 4 أرقام متتالية من 1 إلى 6.

1- أوجد عناصر المجموعة Ω ثم أوجد عناصر الأحداث التالية:

A : الحصول على الرقم 1 في الرمية الأولى والرابعة

B : الحصول على مجموع نقاط أقل من 6

2- أوجد عناصر المجموعات التالية: $A \cap B$ و $A - B$

الحل:

1- $\Omega=\{(i,j,k,l)/i=\overline{1,6}: j=\overline{1,6},k=\overline{1,6},l=\overline{1,6}\}$

$A=\{(1,j,k,1)/j=\overline{1,6},k=\overline{1,6}\}$ و $B=\{(i,j,k,1)/i+j+k+l<6\}$

2-

$$A\cap B=\{(1,j,k,1)/(j+k)<4\}=\{(1,1,1,1);(1,2,1,1);(1,1,2,1)\}$$

$$A-B=\{(1,j,k,1)/(j+k)\geq 4\}=\{(1,2,2,1);(1,3,2,1);(1,2,3,1);(1,3,3,1)(1,3,4,1);(1,4,3,1);(1,4,4,1);(1,5,4,1);(1,4,5,1);(1,5,5,1);(1,5,6,1);(1,6,5,1);(1,6,6,1)\}$$

التمرين 28:

نرمي زهرتي نرد بشكل عشوائي. ادرس الاستقلالية المتبادلة (مثنى مثنى) والاستقلالية التامة للأحداث التالية:

A: زهرة النرد الأولى تعطي عددا فرديا

B: زهرة النرد الثانية تعطي عددا فرديا

C: مجموع الرقمين الظاهرين عدد فردي

الحل:

$$P(A)=P(B)=P(C)=\frac{1}{2}$$

$P(A\cap B)=P(A)\cdot P(B)=\frac{1}{4}\Rightarrow A$ و B مستقلان

$P(A\cap C)=P(A)\cdot P(C)=\frac{1}{4}\Rightarrow A$ و C مستقلان

$P(B\cap C)=P(B)\cdot P(C)=\frac{1}{4}\Rightarrow B$ و C مستقلان $\Rightarrow A,B,C$ مستقلة مثنى مثنى

$A\cap B\cap C=\Phi\Rightarrow P(A\cap B\cap C)=0\neq P(A).P(B).P(C)=\frac{1}{8}\Rightarrow A,B,C$ ليست مستقلة تماما

التمرين 30:

نسحب عشوائيا رقمين من بين الأرقام من 1 إلى 9، إذا علمت أن المجموع الذي تم الحصول عليه هو زوجي.

احسب احتمال أن يكون الرقمان فرديان.

الحل:

نبحث أولا عن النتائج الممكنة للتجربة و المتمثلة في الحصول على عدد زوجي:

يكون المجموع زوجيًا إذا كان الرقمان زوجيين أو فرديين.

يوجد 4 أعداد زوجية (2، 4، 6، 8). لدينا $C_4^2=6$ إمكانيات للحصول على رقمين زوجين.

هناك خمسة أرقام فردية (1، 3، 5، 7، 9) وبالتالي يكون لدينا $C_5^2=10$ إمكانيات للحصول على أرقام فردية وعليه يوجد $6+10=16$ نتيجة يكون فيها المجموع زوجي.

نعرف الحدث A : الرقمان الظاهران فرديان

$$P(\mathrm{A})=\frac{10}{16}=\frac{5}{8}=\frac{C_5^2}{C_5^2+C_4^2}=0,625$$

التمرين 31:

يترك أربعة رجال قبعاتهم عند مدخل أحد المطاعم ويختارون عشوائياً عند خروجهم إحدى القبعات الأربع. احسب الاحتمالات التالية:

1- A: لا يأخذ أي من الرجال الأربعة قبعته.

2- B: اثنان من الرجال الأربعة يأخذون قبعاتهم.

الحل:

نرقم القبعات بـ 1، 2، 3، 4 هناك $4!=24$ اختيارات ممكنة.

1- احتمال أن لا يأخذ أي من الرجال الأربعة قبعته:

عدد النتائج الممكنة للتجربة هو 24:

$$\overbrace{[1243]}\overbrace{[1324]}\overbrace{[3214]}\overbrace{[4231]}\overbrace{[2134]}[1234][1423][1342][4231]$$
$$[\underline{2143}][2314][\underline{2413}][3124][\underline{3142}][3241][\underline{3421}][\underline{3412}][4132][\underline{4123}][4213][\underline{4321}]$$

$$\overbrace{[1432}][\underline{2341}][\underline{4312}]\Rightarrow \underline{\mathrm{abcd}}:\ 9\ \mathrm{cas};\ \ \mathrm{abcd}:\ 6\ \mathrm{cas}.$$

عدد النتائج الملائمة للحادث:

$$[2143][2413][2341][3421][3142][3412][4123][4312][4321]$$

$$P(A)=\frac{9}{24}=\frac{3}{8}$$

2- احتمال أن يأخذ اثنان من الرجال الأربعة قبعاتهم:

$$P(B)=\frac{6}{24}=\frac{1}{4}.[1243][1324][3214][4231][2134][1432]$$

الفصل الثالث:

الاحتمـــالات الشرطيـــة

1- تعريف وحساب الاحتمال الشرطي:

تطرقنا في الفصل السابق إلى حساب الاحتمال دون شرط، إلا أنه في بعض الحالات يجب حساب احتمال حدوث الحدث A بشرط أن يتحقق حدث آخر B.

نسمي على هذا النوع من الاحتمال بـ «الاحتمال الشرطي» والذي يكتب على الشكل:

$P(A/B)$، و نقرأه احتمال حدوث الحدث A علما B.

يحسب الاحتمال الشرطي للحدث A شريطة أن يكون الحدث B قد تحقق بالعلاقة التالية[1]:

$$P(A/B)=\frac{P(A\cap B)}{P(B)}$$

$$\text{avec } P(B)\neq 0$$

مثال:

نعتبر أن معدل النجاح في مادة الرياضيات في أحد الأقسام الدراسية بلغ نسبة 45%، ونسبة النجاح في مادة الإحصاء 30% أما نسبة النجاح في المادتين معا فهي 15%.

إذا اخترنا طالب بشكل عشوائي ما هو احتمال؟

1. نجاحه في الرياضيات علما أنه نجح في الإحصاء
2. نجاحه في الإحصاء علما أنه نجح في الرياضيات

الحل:

نعبر عن الأحداث السابقة بما يلي:

M: النجاح في الرياضيات

S: النجاح في الإحصاء

$M\cap S$: النجاح في الرياضيات والإحصاء معا.

1- حساب احتمال نجاح الطالب في الرياضيات شرط أنه قد نجح في الإحصاء:

$$P(M/S)=\frac{P(M\cap S)}{P(S)}=\frac{0,15}{0,30}=0,5$$

2- حساب احتمال نجاح الطالب في الإحصاء شرط أنه قد نجح في الرياضيات:

$$P(M/S)=\frac{P(M\cap S)}{P(M)}=\frac{0,15}{0,45}=0,33$$

2- نظرية الضرب في الاحتمالات:

تسمح لنا هذه النظرية حساب احتمال تحقق حدثين أو أكثر في نفس الوقت.

[1] KHANH DAO DUC, DAVID DELAUNAY, probabilités, cours et exercices corrigés, de Boeck, supérieur,1ère édition, 2015, p46.

يحسب الاحتمال الشرطي كما رأينا سابقا بالعلاقة التالية:

$$P(\mathrm{A/B})=\frac{P(A\cap B)}{P(B)}\Rightarrow P(A\cap B)=P(B)P(A/B)....(1)$$

أو

$$P(B/A)=\frac{P(A\cap B)}{P(A)}\Rightarrow P(A\cap B)=P(A)P(B/A)....(2)$$

من المعادلة (1) و (2) نستنتج المساواة التالية :

$$\mathrm{P(A\cap B)=P(A)P(B/A)=P(B)P(A/B).....(3)}$$

تسمى العلاقة (3) نظرية الضرب في الاحتمالات

أما إذا كان الحدثين A و B مستقلين فإن العلاقة (3) تصبح:

$$P(A\cap B)=P(A)P(B).....(4)$$

3- تعميم نظرية ضرب الاحتمالات:

عندما تكون لدينا مجموعة أحداث ولتكن $A_1,A_2,\ldots,A_n$ فإن العلاقة التي تعبر عن هذه النظرية تكتب على الشكل التالي:

$$P(A_1\cap A_2\cap A_n)=P(A_1)P(A_2/A_1)P(A_3/A_1\cap A_2)\times\ldots\times P\left(A_n/A_1\cap A_2\cap\ldots\cap A_{n-1}\right)$$

مثال:

في إطار تحسين جودة الإنتاج قامت مصلحة مراقبة جودة القطع المنتجة باختيار عينة مكونة من 5 قطع 3 منها ذات نوعية جيدة.

إذا سحنا 3 قطع الواحدة تلو الأخرى دون إرجاع، ما هو احتمال أن تكون القطع الثلاثة المسحوبة ذات نوعية جيدة؟

الحل:

نعتبر الأحداث التالية:

A_1: الحصول على قطعة جيدة في السحب الأول

A_2: الحصول قطعة جيدة في السحب الثاني

A_3: الحصول على قطعة جيدة في في السحب الثالث

ومنه يصبح الاحتمال:

$$P(A_1\cap A_2\cap A_3)=P(A_1)\times P(A_2/A_1)\times P(A_3/A_1\cap A_2)$$
$$=\frac{C_3^1}{C_5^1}\times\frac{C_2^1}{C_4^1}\times\frac{C_1^1}{C_3^1}=\frac{3}{5}\times\frac{2}{4}\times\frac{1}{3}=\frac{1}{10}$$

4- تجزئة المجموعة الأساسية Ω:

لتكن الأحداث التالية $A_1, A_2, A_3, \ldots, A_n$ أحداثا متنافية مثنى مثنى.

نسمي مجموعة الأحداث السابقة $\{A_i\}(i=1,\ldots,n)$ تجزئة للمجموعة الأساسية Ω إذا توفر الشرطين التاليين:

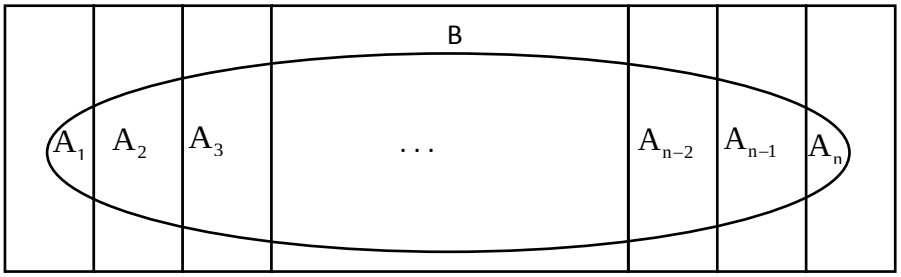
1) $\bigcup_{i=1}^{n} A_i = \Omega$

2) $A_i \cap A_j = \Phi \quad \forall i \neq j$

5- نظرية الاحتمال الكلي:

تمثل متتالية الأحداث التالية $A_1, A_2, \ldots, A_n$ تجزئة للمجموعة الأساسية Ω باحتمالات $P(A_i) \geq 0$

إذا اعتبرنا B حدث من Ω فان احتمال وقوع الحدث B باستعمال الاحتمالات $P(A_i)$ تكون كما يلي:



$$B = B \cap \Omega$$
$$B = B \cap (A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n)$$
$$B = (B \cap A_1) \cup (B \cap A_2) \cup \ldots \cup (B \cap A_n)$$
$$P(B) = P\left[(B \cap A_1) \cup (B \cap A_2) \cup \ldots \cup (B \cap A_n)\right]$$
$$P(B) = P(B \cap A_1) + P(B \cap A_2) + \ldots + P(B \cap A_n)$$

تمكننا نظرية ضرب الاحتمالات من كتابة العلاقة:

$$P(B \cap A_i) = P(A_i) P(B / A_i)$$

ومنه:

$$P(B) = P(A_i) P(B / A_1) + P(A_2) P(B / A_2) + \ldots + P(A_n) P(B / A_n)$$
$$\Rightarrow P(B) = \sum_{i=1}^{n} P(A_i) P(B / A_i) \ldots (5)$$

تسمى العلاقة 5 «**نظرية الاحتمالات الكلية**».

مثال:

لدينا 3 أكياس متشابهة. يحتوي الكيس الأول على 3 كرات بيضاء و 1 سوداء، يحتوي الكيس الثاني على 4 بيضاء و 2 سوداء، أما الكيس الثالث فيحتوي على 5 بيضاء و 7 سوداء.

إذا سحبنا عشوائيا كرة من كل كيس. ما هو احتمال أن تكون الكرة المسحوبة بيضاء؟

الحل:

لدينا الأحداث التالية:

A_1: الكرة المسحوبة من الكيس الأول

A_2: الكرة المسحوبة من الكيس الثاني

A_3: الكرة المسحوبة من الكيس الثالث

باعتبار أن الأكياس متشابهة فان احتمال الاختيار من أحد الأكياس هو:

$$P(A_1)=P(A_2)=P(A_3)=\frac{1}{3}$$

نبحث عن احتمال الحدث B وهو الحصول على كرة بيضاء:

يمكن سحبها من الكيس الأول أو سحبها من الكيس الثاني أو من الكيس الثالث.

لتكن الأحداث التالية:

$A_1 \cap B$: نختار الكيس الأول ونسحب كرة بيضاء

$A_2 \cap B$: نختار الكيس الثاني ونسحب كرة بيضاء

$A_3 \cap B$: نختار الكيس الثالث و نسحب كرة بيضاء

ومنه نعبر عن الحدث B كالتالي:

$$\mathrm{B}=(\mathrm{A}_1\cap\mathrm{B})\cup(\mathrm{A}_2\cap\mathrm{B})\cup(\mathrm{A}_3\cap\mathrm{B})$$

$$\mathrm{P}(\mathrm{B})=\mathrm{P}\left[(\mathrm{A}_1\cap\mathrm{B})\cup(\mathrm{A}_2\cap\mathrm{B})\cup(\mathrm{A}_3\cap\mathrm{B})\right]$$

تعتبر الأحداث $(A_i\cap B)$ متنافية و بتطبيق خاصية الاتحاد للأحداث المتنافية نحصل على:

$$P(B)=P(A_1\cap B)+P(A_2\cap B)+P(A_3\cap B)$$

أما خاصية ضرب الاحتمالات فتسمح بكتابة:

$$P(A_i\cap B)=P(A_i)P(B/A_i)$$

$$\Rightarrow P(B)=P(A_1)P(B/A_1)+P(A_2)P(B/A_2)+P(A_3)P(B/A_3)$$

$$P(B)=\frac{1}{3}\times\frac{C_3^1}{C_4^1}+\frac{1}{3}\times\frac{C_4^1}{C_6^1}+\frac{1}{3}\times\frac{C_5^1}{C_{12}^1}$$

$$P(B)=\frac{1}{3}\left(\frac{3}{4}+\frac{4}{6}+\frac{5}{12}\right)$$

$$P(B)=\frac{11}{18}$$

6- نظرية بايز (Bayes):

تمثل كل من $A_1,A_2,\ldots,A_n$ أحداث من Ω و يمثل B حدثا من Ω.

تسمح نظرية ضرب الاحتمالات من كتابة:

$$P(B\cap A_j)=P(B)P(A_j/B)=P(A_j)P(B/A_j)$$

$$P(B)P(A_j/B)=P(A_j)P(B/A_j)$$
$$\Rightarrow P(A_j/B)=\frac{P(A_j)P(B/A_j)}{P(B)}$$

إلاّ أنه حسب العلاقة (5) لدينا:

$$P(B)=\sum_{i=1}^{n}P(A_i)P(B/A_i)$$

إذن:

$$P(A_j/B)=\frac{P(A_j)P(B/A_j)}{\sum_{i=1}^{n}P(A_i)P(B/A_i)} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (6)$$

تسمى هذه العلاقة بـ «نظرية بايز» أو الاحتمال اللاحق، والذي يفيدنا في معرفة احتمال تحقق الحدث B نتيجة تأثير حدث A_j سابق.

مثال:

نعود للمثال السابق ونطرح السؤال التالي:

نسحب كرة ونجد أنها بيضاء، ما هو احتمال أن تكون من الصندوق الثاني؟

الحل: نطبق علاقة بايز:

$$P(A_2/B)=\frac{P(A_2)P(B/A_2)}{\sum_{i=1}^{n}P(A_i)P(B/A_i)}$$
$$=\frac{\frac{1}{3}\times\frac{C_4^1}{C_6^1}}{\frac{1}{3}\times\frac{C_3^1}{C_4^1}+\frac{1}{3}\times\frac{C_4^1}{C_6^1}+\frac{1}{3}\times\frac{C_5^1}{C_{12}^1}}=\frac{\frac{4}{6}}{\frac{3}{4}+\frac{4}{6}+\frac{5}{12}}=\frac{8}{22}=\frac{4}{11}$$

سلسلة تمارين رقم 4 مع الحلول

التمرين 1:

في إطار لعبة البطاقات نسحب عشوائيا بطاقتين من 52 بطاقة الواحدة تلو الأخرى.

ما هو احتمال أن تكون البطاقتين المسحوبتين تحمل صورة «قلب»؟

1- إذا تم السحب بإرجاع

2- إذا تم السحب بدون إرجاع

الحل:

نعلم أن لعبة البطاقات تحتوي على 4 صور مرقمة من 1 إلى 13.

نحدد الأحداث التالية:

A: الحصول على القلب في السحب الأول

B: الحصول على القلب في السحب الثاني

$A\cap B$: الحصول على القلب في السحب الأول و في السحب الثاني

نحسب احتمال $P(A\cap B)$ بتطبيق خاصية ضرب الاحتمالات:

1- السحب بإرجاع:

السحب الأول ليس له أي تأثير على السحب الثاني باعتبار أننا نعيد البطاقة المسحوبة، وبالتالي فإن الحدثين مستقلين وفي هذه الحالة لدينا:

$$P(B/A)=P(B)$$

$$P(A\cap B)=P(A)\times P(B)=\frac{C_{13}^{1}}{C_{52}^{1}}\times\frac{C_{13}^{1}}{C_{52}^{1}}=\frac{13\times 13}{52\times 52}$$

2- السحب بدون إرجاع:

في هذه الحالة من المنطقي أن يتأثر السحب الثاني بالسحب الأول، لأن البطاقة المسحوبة في السحب الأول لم يتم إرجاعها ومن ثم يصبح الاختيار بين 51 بطاقة وليس 52 بطاقة.

وباعتبار أن البطاقة الأولى هي قلب، فان البطاقة الثانية تكون قلب يتم اختياره من 12 بطاقة قلب.

في هذه الحالة يكون الحدثين A و B غير مستقلين والاحتمال هو:

$$\mathrm{P}(\mathrm{A}\cap\mathrm{B})=\mathrm{P}(\mathrm{A})\mathrm{P}(\mathrm{B}/\mathrm{A})=\frac{\mathrm{C}_{13}^{1}}{\mathrm{C}_{52}^{1}}\times\frac{\mathrm{C}_{12}^{1}}{\mathrm{C}_{51}^{1}}=\frac{13\times 12}{52\times 51}$$

التمرين 02:

يحتوي كيس على 10 كرات بيضاء، 6 سوداء و 4 كرات حمراء، فإذا سحبنا عشوائيا 3 كرات الواحدة تلو الأخرى بدون إرجاع.

ما هو احتمال أن تكون على الأقل كرتين من بين 3 كرات المسحوبة من نفس اللون؟

الحل:

نرمز إلى الأحداث كما يلي:

B: كرة بيضاء

N: كرة سوداء

R: كرة حمراء

A: على الأقل كرتين من نفس اللون

$\overline{A}$: الكرات مختلفة اللون

نحسب الاحتمال $P(A)$ انطلاقا من احتمال الحدث العكسي لـ A أي $p(\overline{A})$.

$$\overline{A}=\{(B\ et\ N\ et\ R)ou(B\ et\ A\ et\ N)ou(N\ et\ B\ et\ R)ou(N\ et\ R\ et\ B)ou(R\ et\ B\ et\ N)ou(R\ et\ N\ et\ B)\}$$

$$\overline{A}=\{(B\cap N\cap R)\cup(B\cap \mathrm{R}\cap \mathrm{N})\cup(\mathrm{N}\cap \mathrm{B}\cap R)\cup(\mathrm{N}\cap R\cap \mathrm{B})\cup(\mathrm{R}\cap \mathrm{B}\cap \mathrm{N})\cup(\mathrm{R}\cap N\cap \mathrm{B})\}$$

$$P(\overline{A})=\left\{\begin{matrix}P(B\cap N\cap R)+P(B\cap \mathrm{R}\cap \mathrm{N})+P(\mathrm{N}\cap \mathrm{B}\cap R)+P(\mathrm{N}\cap R\cap \mathrm{B})+\\ +P(\mathrm{R}\cap \mathrm{B}\cap \mathrm{N})+P(\mathrm{R}\cap N\cap \mathrm{B})\end{matrix}\right\}$$

$$P(\overline{A})=\left(\frac{C_{10}^1}{C_{20}^1}\times\frac{C_6^1}{C_{19}^1}\times\frac{C_4^1}{C_{18}^1}\right)+\left(\frac{C_{10}^1}{C_{20}^1}\times\frac{C_4^1}{C_{18}^1}\times\frac{C_6^1}{C_{19}^1}\right)+\left(\frac{C_6^1}{C_{19}^1}\times\frac{C_{10}^1}{C_{20}^1}\times\frac{C_4^1}{C_{18}^1}\right)+$$

$$\left(\frac{C_6^1}{C_{19}^1}\times\frac{C_4^1}{C_{18}^1}\times\frac{C_{10}^1}{C_{20}^1}\right)+\left(\frac{C_4^1}{C_{18}^1}\times\frac{C_{10}^1}{C_{20}^1}\times\frac{C_6^1}{C_{19}^1}\right)+\left(\frac{C_4^1}{C_{18}^1}\times\frac{C_6^1}{C_{19}^1}\times\frac{C_{10}^1}{C_{20}^1}\right)$$

$$P(\overline{A})=6\times\left(\frac{C_{10}^1}{C_{20}^1}\times\frac{C_6^1}{C_{19}^1}\times\frac{C_4^1}{C_{18}^1}\right)=6\times\left(\frac{10}{20}\times\frac{6}{19}\times\frac{4}{18}\right)=6\times\left(\frac{2}{19\times 3}\right)=\frac{4}{19}$$

نعلم أن :

$$P(A)=1-P(\overline{A})$$

و منه:

$$P(A)=1-\frac{4}{19}=\frac{15}{19}$$

التمرين 03:

لدينا كيس يحتوي على 6 كرات بيضاء و 4 سوداء، نسحب كرة عشوائيا ثم نعيدها في الكيس لنعيد سحب كرة ثانية.

1- ما هو احتمال أن تكون الكرة الأولى المسحوبة بيضاء والكرة الثانية تكون أيضا بيضاء؟

2- نفس السؤال ولكن هذه المرة السحب يكون بدون إرجاع

الحل:

نعرف الأحداث التالية:

A: كرة بيضاء في السحب الأول

B: كرة بيضاء في السحب الثاني

$A \cap B$: كرة بيضاء في السحب الأول و أيضا في السحب الثاني

1- السحب بإرجاع:

نعلم أنه عندما يكون السحب بإرجاع فان الحدثين A و B يعتبران مستقلان، وعليه نتيجة السحب الأول لا تؤثر على نتيجة السحب الثاني، لأن الكرة المسحوبة يتم إرجاعها في الكيس.

إذن احتمال الحدث $A \cap B$ هو:

$$P(A \cap B) = P(A) \times P(B) = \frac{C_6^1}{C_{10}^1} \times \frac{C_6^1}{C_{10}^1} = \frac{6^2}{10^2} = \frac{36}{100} = 0,36$$

2- السحب بدون إرجاع:

عندما يتم السحب بدون إرجاع فان السحب الأول يؤثر في نتيجة السحب الثاني ويكون الحدثين A و B غير مستقلين. وبالتالي احتمال الحدث $A \cap B$ هو:

$$P(A \cap B) = P(A) \times P(B/A) = \frac{C_6^1}{C_{10}^1} \times \frac{C_5^1}{C_9^1} == \frac{6 \times 5}{10 \times 9} = \frac{30}{90} = 0,33$$

<u>التمرين 04:</u>

لدينا 3 أكياس متشابهة، حيث أن الكيس الأول يحتوي على 6 كرات بيضاء و 4 كرات سوداء، الكيس الثاني يحتوي على 5 كرات بيضاء و 3 سوداء، أما الكيس الثالث فيحتوي على 3 كرات بيضاء 3 سوداء. نسحب عشوائيا كرة من كل كيس.

1- ما هو احتمال أن تكون الكرة المسحوبة بيضاء اللون؟

2- إذا اعتبرنا أن نتيجة السحب هي كرة بيضاء ما هو احتمال أن تكون من الكيس الأول؟

الحل: نعبر عن الأحداث كما يلي:

B: سحب كرة بيضاء

A_1: اختيار الكيس الأول

A_2: اختيار الكيس الثاني

A_3: اختيار الكيس الثالث

نلاحظ أن احتمالات حدوث الحوادث A_i متساوية:

$$\Rightarrow P(A_1)=P(A_2)=P(A_3)=\frac{1}{3}$$

نعلم أن الحدث B يتحقق إذا تحققت الحالات الممكنة التالية :

الكرة البيضاء تسحب من الكيس الأول أو تسحب من الكيس الثاني أو إما تسحب من الكيس الثالث.

$$B=(B\cap A_1)\cup(B\cap A_2)\cup(B\cap A_3)$$

وما دامت الأحداث $(B\cap A_1),(B\cap A_2)\cup,(B\cap A_3)$ متنافية مثنى مثنى فان :

$$P(B)=(B\cap A_1)+P(B\cap A_2)+P(B\cap A_3)$$

وباستعمال خاصية ضرب الاحتمالات نتحصل على :

$$P(B\cap A_1)=P(B)P(A_1/B)=P(A_1)P(B/A_1)$$

$$P(B\cap A_2)=P(B)P(A_2/B)=P(A_2)P(B/A_2)$$

$$P(B\cap A_3)=P(B)P(A_3/B)=P(A_3)P(B/A_3)$$

$$\Rightarrow P(B)=P(A_1)P(B/A_1)+P(A_2)P(B/A_2)+P(A_3)P(B/A_3)$$

$$P(B/A_1)=\frac{C_6^1}{C_{10}^1}=\frac{6}{10}$$

$$P(B/A_2)=\frac{C_5^1}{C_8^1}=\frac{5}{8}$$

$$P(B/A_3)=\frac{C_3^1}{C_6^1}=\frac{3}{6}=\frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow P(B)=\frac{1}{3}\times\frac{3}{5}+\frac{1}{3}\times\frac{5}{8}+\frac{1}{3}\times\frac{1}{2}$$

$$P(B)=\frac{1}{3}\left(\frac{3}{5}+\frac{5}{8}+\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{3}\left(\frac{24+25+20}{40}\right)$$

$$P(B)=\frac{1}{3}\times\frac{69}{40}=\frac{23}{40}=0,57$$

2- احتمال أن تكون الكرة البيضاء مسحوبة من الكيس الأول.

يجب أن نحسب $P(A_1/B)$

في هذه الحالة نستعمل قانون بايز:

$$P(A_1/B)1=\frac{P(A_1\cap B)}{P(B)}$$

$$P(A_1/B)=\frac{P(A_1)P(B/A_1)}{P(A_1)P(B/A_1)+P(A_2)P(B/A_2)+P(A_3)P(B/A_3)}$$

$$P(A_1/B)=\frac{\frac{1}{3}\times\frac{6}{10}}{0,57}=\frac{0,20}{0,57}=\frac{20}{57}=0,35$$

التمرين 05:

نسحب عشوائيا رقمين من سلسلة الأرقام التالية: 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9.
إذا علمنا أن مجموعهما يعطي عددا زوجيا، ما هو احتمال أن يكونا فرديان؟

الحل :

يكون مجموع الرقمين زوجي في حالة ما إذا كانا الرقمين فرديين أو زوجيين.

عدد فردي + عدد فردي = عدد زوجي

$$(2n+1)+(2m+1)=2(n+m+1)$$

عدد زوجي + عدد زوجي = عدد زوجي

$$2n+2m=2(n+m)$$

لتكن الأحداث التالية:

A: الرقمان المسحوبان فرديان

B: الرقمان المسحوبان زوجيان

S: مجموع الرقمين زوجي

ومنه يصبح حساب الاحتمال كالتالي:

$$P(A/S)=\frac{P(A\cap S)}{P(S)}$$

$$\text{or } S=A\cup B$$

$$\Rightarrow P(A/S)=\frac{P\left[A\cap(A\cup B)\right]}{P(A\cup B)}=\frac{P\left[(A\cap A)\cup(A\cap B)\right]}{P(A)+P(B)-P(A\cap B)}$$

و باعتبار أن الحدثين A و B متنافيين فإن:

$$A\cap B=\Phi \text{ et } P(A\cap B)=0$$

$$\Rightarrow P(A/S)=\frac{P(A)}{P(A)+P(B)}$$

- حساب احتمال الحدث A: $\boldsymbol{P(A)}$

هناك 5 أعداد فردية من مجموع الأرقام التسع من 0 إلى 9 $(1,3,5,7,9)$

- حساب احتمال الحدث B: $\boldsymbol{P(B)}$

هناك 4 أعداد زوجية من مجموع الأرقام التسع من 0 إلى 8 $(2,4,6,8)$

$$\Rightarrow P(A/S)=\frac{\frac{10}{36}}{\frac{10}{36}+\frac{6}{36}} \Rightarrow P(A/S)=\frac{10}{16}$$

التمرين 06:

تعتمد إحدى شركات التأمين في أداء نشاطها إلى تصنيف الأفراد المؤمن لهم إلى صنفين: صنف أول يكون أكثر عرضة للحوادث، وصنف ثاني أقل عرضة لها. وقد تبين من خلال الإحصائيات أن الفرد الذي ينتمي للصنف الأول لديه احتمال 0.4 في التعرض لحادث واحد خلال السنة ويكون الاحتمال 0.2 بالنسبة للأشخاص الأقل عرضة والذين تعرضوا إلى مخاطر مقبولة إلى حد ما.

نفرض أن 30% من المجتمع ينتمي للصنف الأول أي للفئة التي تتعرض لمخاطر كبيرة.

1- ما هو احتمال أن يكون مؤمن له جديد ضحية لحادث خلال السنة الموالية من إبرامه عقد التأمين؟

2- إذا علمت أن المؤمن الجديد تعرض لحادث خلال عام من توقيع عقده. ما مدى احتمال أن ينتمي إلى الصنف الأول أي إلى المعرضين لمخاطر كبيرة ؟

الحل:

نعبر عن الأحداث السابقة كما يلي:

E = «المؤمن له معرض للحوادث»

$\overline{E}$ = «المؤمن له غير معرض للحوادث»

A = حدث «مؤمن له يتعرض لحادث خلال السنة التي تتبع إمضاء العقد»

1- احتمال تعرض المؤمن له الجديد لحادث

$$P(A)=P(E).\mathrm{P}\left(A/E\right)+P\left(\overline{E}\right).P\left(A/\overline{E}\right)=0,4.0,3+0,2.0,7=0,26$$

2- احتمال أن يكون المؤمن له الجديد من فئة المعرضين لمخاطر الكبيرة

$$P(E/A)=\frac{P(E).P\left(A/_E\right)}{P(E).P\left(A/_E\right)+P\left(\overline{E}\right).P\left(A/\overline{E}\right)}$$

$$\frac{0,4.0,3}{0,4.0,3+0,2.0,7}=\frac{0,12}{0,26}=0,4615385$$

التمرين 07:

لدينا 3 علب تحتوي على مصابيح، في العلبة الأولى 10 مصابيح من بينها 4 تالفة، وفي العلبة الثانية 6 مصابيح واحدة منها تالفة، أما في العلبة الثالثة هناك 8 مصابيح من بينها 3 تالفة.

نختار علبة بشكل عشوائي و نسحب منها مصباح، ما هو احتمال أن يكون المصباح تالف؟

الحل:

نعتبر الحدث A_i: «المصباح المسحوب من العلبة i»

الحدث D: «المصباح تالف»

$$P(D)=P(D/A_1)\cdot P(A_1)+P(D/A_2)\cdot P(A_2)+P(D/A_3)\cdot P(A_3)$$

$$P(\mathrm{D})=\frac{1}{3}.\frac{2}{5}+\frac{1}{3}.\frac{1}{6}+\frac{1}{3}.\frac{3}{8}=\frac{113}{360}$$

التمرين 08:

في أحد المصانع تنتج 3 آلات A، B، C على التوالي 50%، 30% و 20% من مجموع القطع المنتجة، مع العلم أن نسبة التلف التي تتسبب فيه هذه الآلات هو 3%، 4%، 5% على التوالي.

1- إذا سحبنا قطعة عشوائيا، ما هو احتمال أن تكون تالفة؟

2- لنفترض أننا سحبنا عشوائيًا قطعة تالفة. احسب احتمال أن تكون من إنتاج الآلة A؟

الحل:

1- احتمال أن تكون القطعة المسحوبة تالفة:

$$P(D)=P(A).P\left(D/_A\right)+P(B)+P\left(D/_B\right)+P(C)+P\left(D/_C\right)$$

$$P(D)=0.5.0,03+0,3.0,04+0,2.0,05=0,037$$

2- احتمال أن تكون القطعة التالفة من إنتاج الآلة A:

$$P\left(A/_D\right)=\frac{P(A).P\left(D/_A\right)}{P(A).P\left(D/_A\right)+P(B).P\left(D/_B\right)+P(C).P\left(D/_C\right)}$$

$$=\frac{0,5.0,3}{0,5.0,03+0,3.0,04+0,2.0,05}=\frac{15}{37}=0,41$$

التمرين 09:

في أحد المصانع تنتج 3 آلات A، B، C على التوالي 60%، 30% و 10% من مجموع القطع المنتجة، مع العلم أن نسبة التلف التي تتسبب فيه هذه الآلات هو 2%، 30%، 4% على التوالي.

بعد سحبنا لقطعة عشوائيا لاحظنا أنها تالفة، أحسب احتمال أن تكون من إنتاج الآلة C.

الحل:

نعبر عن الأحداث كما يلي:

C: القطعة من إنتاج الآلة C

D: الآلة تالفة

$$P(C/D)=\frac{P(C).P\left(D/C\right)}{P(C).P\left(D/C\right)+P(A).P\left(D/A\right)+P(B).P\left(D/B\right)}$$

$$P(C/D)=\frac{0,1.0,04}{0,60.0,02+0,3.0,03+0,1.0,04}=\frac{0,004}{0,025}=0,16$$

التمرين 10:

سجلنا في إحدى مدارس ضواحي الجزائر العاصمة أن 4% من الذكور و 1% من الإناث طول قامتهم يفوق 1,60m مع العلم أن 60% من التلاميذ هن إناث.

إذا قمنا باختيار تلميذ عشوائيا ويكون طول قامته 1,60m ما هو احتمال أن يكون بنتا؟

الحل:

نرمز للأحداث كما يلي:

A: يفوق طول التلميذ 1,6 متر

F: التلميذ أنثى

G: التلميذ ذكر

$$P(F/A)=\frac{P(F).P\left(A/F\right)}{P(F).P(A/F)+P(G).P\left(A/G\right)}=\frac{0,6.0,01}{0,6.0,01+0,4.0,04}=\frac{3}{11}$$

التمرين 11:

يحتوي كيس على 3 قطع نقدية، واحدة منهم متزنة، القطعة الثانية تحمل وجهين $(2\ F)$، أما القطعة الثالثة فهي غير متزنة مع احتمال الحصول على الوجه يساوي $\frac{1}{3}$، نختار عشوائيا واحدة من القطع النقدية.

ما هو احتمال الحصول على الوجه؟

الحل:

نعبر عن الأحداث السابقة كما يلي:

A: اختيار قطعة النقود الأولى

B: اختيار قطعة النقود الثانية

C: اختيار قطعة النقود الثالثة

F: الحصول على الوجه

$$P(F) = P(A)P(F/A) + P(B)P(F/B) + P(C)P(F/C)$$

$$P(F) = \frac{1}{3}.\frac{1}{2} + \frac{1}{3}.1 + \frac{1}{3}.\frac{1}{3} = \frac{11}{18}$$

التمرين 12:

لدينا مجموعة من الكريات موضوعة في 3 أكياس، بحيث يحتوي الكيس A على 3 كريات حمـــراء و 5 سوداء، أما الكيس B فيحتوي على 2 كريات حمراء و 1 كرية سوداء، والكيس الثالث C يحتوي على 2 كريات حمراء و 3 كريات سوداء.

نختار كيس عشوائيا و نسحب منه كرية، فإذا كانت الكرية المسحوبة حمراء. ما هو احتمال أن تكون من الكيس A؟

الحل:

نعبّر عن الأحداث السابقة كما يلي:

A: الكرية من الكيس A

R: الكرية حمراء

$$P(A/R) = \frac{P(A).P\left(R/A\right)}{P(A).P\left(R/A\right) + P(B).P\left(R/B\right) + P(C).P\left(R/C\right)}$$

$$\Rightarrow P\left(A/R\right) = \frac{\frac{1}{3}.\frac{3}{8}}{\frac{1}{3}.\frac{3}{8} + \frac{1}{3}.\frac{2}{3} + \frac{1}{3}.\frac{2}{5}} = \frac{45}{173} = 0,26$$

التمرين 13:

لدينا كيسين يحتوي الكيس الأول على 4 كرات حمراء و 3 كرات خضراء، أما الكيس الثاني فيحتوي على 5 كرات حمراء و 3 خضراء.

نسحب عشوائيا كرة من الكيس الأول دون إرجاعها، ثم نعيد سحب كرة ثانية من نفس الكيس: فإذا كانت الكرة الأولى المسحوبة حمراء و في الكيس الثاني الكرة الأولى المسحوبة خضراء.

1- ما هو احتمال الحصول على 2 كرات خضراء؟

2- احسب احتمال الحصول على كرة خضراء و كرة حمراء؟

3- إذا علمنا أن الكرتين المسحوبتين من نفس اللون، ما هو احتمال أن تكونا حمراء اللون؟

الحل:

1- احتمال الحصول على 2 كرات خضراء والحصول على 2 كرات حمراء:

- الحدث A يمثل: « الحصول على 2 كرات خضراء » وهو في نفس الوقت الحدث $V_1 \cap V_2$
- الحدث B يمثل:« الحصول على 2 كرات حمراء » وهو في نفس الوقت الحدث $R_1 \cap R_2$

$$P(A) = P(V_1 \cap V_2) = P(V_1), P\left(V_2 / V_1\right) = \frac{3}{7}.\frac{3}{8} = \frac{9}{56} = 0,16$$

$$P(B) = P(R_1 \cap R_2) = P(R_1), P\left(R_2 / R_1\right) = \frac{4}{7}.\frac{3}{6} = \frac{2}{7} = 0,28$$

2- احتمال الحصول على كرتين واحدة حمراء و الأخرى خضراء:

$$V_1 \cap R_2 \; ou \; R_1 \cap V_2 \Rightarrow P(C) = P\left((V_1 \cap R_2) \cup (R_1 \cap V_2)\right) = P(V_1 \cap R_2) +$$

$$P(R_1 \cap V_2) = P(V_1).P\left(R_2 / V_1\right) + P(R_1).P\left(V_2 / R_1\right) = \frac{3}{7}.\frac{5}{8} + \frac{4}{7}.\frac{3}{6} = \frac{31}{56} = 0,55$$

3- حساب الاحتمال الشرطي

$$P\left(B / A \cup B\right) = \frac{P\left(B \cap (A \cup B)\right)}{P(A \cup B)} = \frac{P(B)}{P(A) + P(B)} = \frac{\frac{2}{7}}{\frac{9}{56} + \frac{2}{7}} = 0,64$$

الفصل الرابع:

المتغيـــرات العشوائيـــة

1- تعريف المتغير العشوائي[1]:

يعرف المتغير العشوائي على أنه مجموعة من القيم العددية لتجربة عشوائية، يكون تحقق هذه القيم مرتبط باحتمالات معينة، أو بعبارة أخرى هو وصف رقمي لنتيجة التجربة.

كما نسمي المتغير العشوائي كل تطبيق قياسي معرف من Ω إلى $X(\Omega)$ بالعلاقة التالية:

$$\forall x \in A \; X^{-1}(x) \in \varepsilon$$

2- أنواع المتغيرات العشوائية:

1.2- المتغير العشوائي المنفصل[2]:

نسمي المتغير العشوائي المنفصل كل تطبيق $X:\Omega \to \mathbb{R}$ معرف على الفضاء $(\Omega، A، p)$، بحيث تكون X متغيرًا عشوائيًا والصورة $X(\Omega)$ للمجموعة Ω تشكل مجموعة جزئية عددية من $\mathbb{R}$.

يمكن أن يأخذ المتغير العشوائي المنفصل إما عددًا محدودًا من القيم، أو مجموعة لا نهائية ولكنها قابلة للعد مثل 0، 1، 2،...

<u>مثال:</u>

قيم X	المتغير العشوائي	التجربة
0,1,2,3,4,5	عدد الزبائن الذين يقومون بطلب المنتوج	الاتصال بـ 5 زبائن
0,1,2,…..	عدد الزبائن	تسيير مطعم خلال يوم كامل
0 ,1,2,3	عدد الأوجه المتحصل عليها	إلقاء 3 قطع نقدية

1.1.2- قانون الاحتمال[3]:

نميز المتغير العشوائي المنفصل بقانون الاحتمالات (أو قانون التوزيع الاحتمالي) والذي يمثل التطبيق $pr(X = x_i)$ المعرف من أجل كل الوقائع $x_i \in X(\Omega)$. بما أن كل نتائج x_i تشكل الفضاء الكلي فإن:

$$\sum_{x_I \in X(\Omega)} pr(X = x_i) = 1$$

قانون الاحتمالات للمتغير المنفصل ليس سوى "قائمة" الاحتمالات $p(X = x_1)$ ، $p(X = x_2)$ ،... $p(X = x_n)$. المرتبطة بجميع أحداث فضاء الوقائع $X(\Omega)$.

[1] Christophe Hurlin,Valerie Mignon «statistique et probabilité en économie-gestion» Dunod, 2018, p134.
[2] Francis Besmans, probabilités et statistique inférentielle, ellipses, Edition Marketing, 2016, p94
[3] Christophe Hurlin,Valerie Mignon, cité, p137.

وعليه فإن مجموع هذه الاحتمالات لجميع الوقائع التي تنتمي إلى الفضاء $X(\Omega)$ محدودة وبالتالي:

$$\sum_{i=1}^{n} p(X = x_i) = 1$$

من ناحية أخرى إذا كان فضاء الوقائع غير محدود فان:

$$\lim \sum_{i=1}^{n} p(X = x_i) = 1$$

مثال 1:

في تجربة رمي 3 قطع معدنية.

نعرف المتغير العشوائي X بأنه عدد الأوجه المتحصل عليها أثناء التجربة، و $x_1, x_2, \ldots, x_n$ القيم التي تأخذها X و $P_1, P_2, \ldots, P_n$ الاحتمالات المتعلقة بكل قيم $x_1, x_2, \ldots, x_n$ نحصل على النتائج التالية:

النتائج الممكنة للتجربة	FFF	FFP	FPF	PFF	FPP	PFP	PPF	PPP
الاحتمالات	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$
عدد الأوجه	3	2	2	2	1	1	1	0

من هذا الجدول يمكننا الحصول على احتمالية عدد الأوجه كما يلي:

عدد الأوجه x_i	0	1	2	3
$f_x(X_i) = \Pr(X = x_i)$	$\frac{1}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{1}{8}$

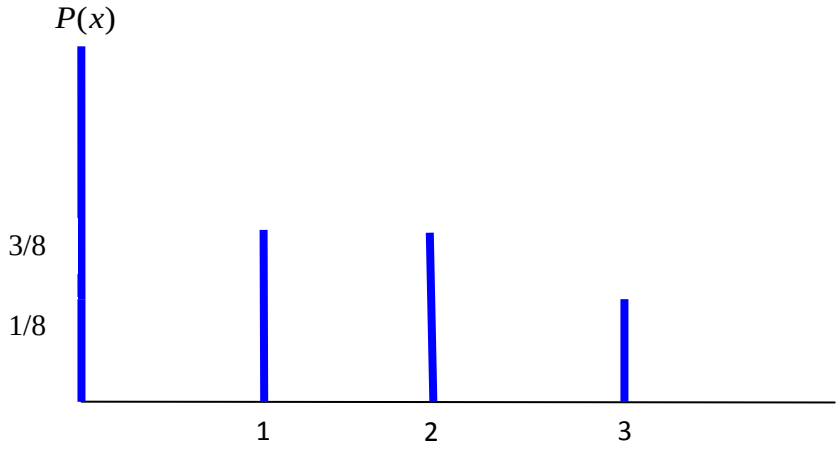
$$f(0) = 1 \cdot \frac{1}{8}$$

$$f(1) = 3 \cdot \frac{1}{8}$$

$$f(2) = 3 \cdot \frac{1}{8}$$

$$f(3) = 1 \cdot \frac{1}{8}$$

يمكننا أن نمثل بيانيا قانون التوزيع الاحتمالي للمتغير العشوائي X بالشكل التالي:



مثال 2: في تجربة إلقاء زهرة نرد مرة واحدة، نعرف المتغير العشوائي X على الرقم الذي يظهر.

الحل:

$\Omega = \{1,2,3,4,5,6\}$ (النتائج الممكنة للتجربة)

$P(X = x_i) = \frac{1}{6}$ من أجل $x_i = 1,2,3,4,5,6$

$$f(x_i) = \begin{cases} \frac{1}{6} & 6 \quad \text{ان} x1،2،3،4،5 \\ 0 & \text{ك} \quad \text{غ يرذل} \end{cases}$$

مثال 2: في تجربة إلقاء زهرة نرد مرة واحدة، نعرف المتغير العشوائي X على الرقم الذي يظهر.

الحل:

$\Omega = \{1,2,3,4,5,6\}$ (النتائج الممكنة للتجربة)

$P(X = x_i) = \frac{1}{6}$ من أجل $x_i = 1,2,3,4,5,6$

$$f(x_i) = \begin{cases} \frac{1}{6} & 6 \quad \text{ان} x1،2،3،4،5 \\ 0 & \text{ك} \quad \text{غ يرذل} \end{cases}$$

2.1.2- تابع التوزيع[1]:

نسمي تابع التوزيع للمتغير العشوائي X، الدالة F المعرفة كما يلي:

$$F(a) = P_x(X < a) = \quad \text{أو} \quad F(x) = P_x(X < x) = \sum (p_i / x_i < x)$$

أي أنه ذلك التابع الذي يشير إلى احتمال أن يأخذ المتغير العشوائي X قيمة أصغر تماما من a.

[1] Jean – Pierre Lecoutre «statistique et probabilités», Dunod, 6ème édition, 2015, p22.

خصائص تابع التوزيع:

- من أجل كل قيم X الأقل تماما من أصغر قيمة للمتغير X فإن: $F(x)=0$.
- من أجل كل قيم X الأكبر تماما من أكبر قيمة للمتغير X فإن: $F(x)=1$.
- احتمال الحدث المتغير X يأخذ قيم في مجال معين $[a,b]$ يعطى بالعلاقة التالية: $F(b)-F(a)$.

مثال:

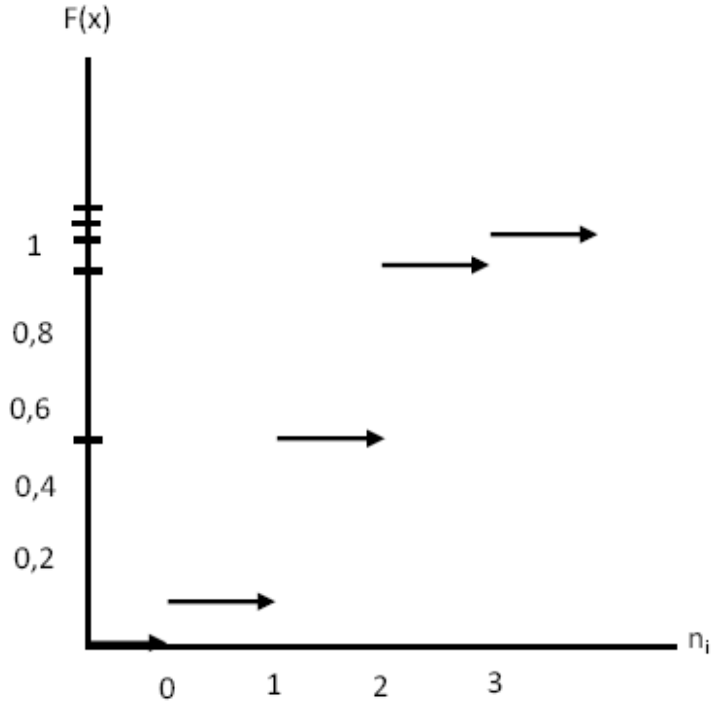
نعرّف التوزيع الاحتمالي للمتغير العشوائي X كما يلي:

x_i	0	1	2	3
p_i	0,167	0,500	0,300	0,033

تابع التوزيع للمتغير العشوائي X يعطى كما يلي:

$$F(x)=\begin{cases}0 \text{ si } x<0\\ 0,167 \text{ si } 0\le x<1=F(0)\\ 0,667 \text{ si } 1\le x<2=F(1)\\ 0,967 \text{ si } 2\le x<3=F(2)\\ 1 \text{ si } x\ge 3=F(3)\end{cases}$$

يمكننا تمثيل دالة تابع التوزيع كما يلي:



3.1.2- التوقع الرياضي[1]:

نسمي التوقع الرياضي للمتغير العشوائي X الكمية (إن وجدت) التالية:

$$E(x)=\sum_{i\in N} p_i x_i$$

خصائص التوقع الرياضي:

- $E(X+a)=E(x)+a \quad \forall a\in R$
- $E(aX+b)=aE(x)+b \quad \forall a\in R$ و $b\in R$
- $y=x_i+x_2+\cdots+x_n \Rightarrow E(y)=E(x_1)+E(x_2)+\cdots+E(x_n)$
- $a=0\Rightarrow E(ax+b)=b \ \forall a\in R$ و $b\in R$
- $E(aX+bY)=aE(X)+bE(Y) \quad \forall a\in R$ و $b\in R$

4.1.2- التباين والانحراف المعياري:

يسمح التباين بقياس تشتت قيم المتغير X بالنسبة لـ $E(X)$ (التوقع الرياضي)، ويعبّر عنه بالعلاقة التالية:

$$V(X)=\sum_{i\in N} p_i\left[x_i-E(X)\right]^2$$

كما يمكن كتابته بالعلاقة التالية:

$$V(X)=E\left[X-E(x)\right]^2=E(X^2)-E^2(X)$$

$$E^2(X)=\left(E(x)\right)^2 \quad \text{و} \quad E(X^2)=\sum x_i^2 p_i$$

نعبّر كذلك عن قيمة التباين كما يلي:

$$V(X)=\sigma_x^2$$

بحيث يمثل σ الانحراف المعياري.

خصائص التباين:

- $V(X+a)=V(X)$
- $V(ax+b)=a^2v(x)$
- $Y=x_1+x_2+x_3+\cdots+x_n$ و $x_1, x_2, x_3,\ldots,x_n$ متغيرات مستقلة $\Rightarrow$

$$V(Y)=V(x_1)+V(x_2)+...V(x_n)$$

<u>مثال:</u> نعرف التوزيع الاحتمالي كما يلي:

[1] Jean –Pierre Lecoutre, cité , p22.

X_i	0	1	2	المجموع
p_i	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{5}{12}$	1

❖ **التوقع الرياضي:**

$$E(x)=\sum_{i\in N} p_i x_i$$

$$E(x)=0\times\frac{1}{4}+1\times\frac{1}{3}+2\times\frac{5}{12}=\frac{7}{6}$$

❖ **التباين:**

$$V(x)=E(x^2)-E^2(x)$$

$$E(x^2)=\sum x_i^2 p_i=0\times\frac{1}{4}+1\times\frac{1}{3}+4\times\frac{5}{12}=2$$

$$V(x)=2-\left(\frac{7}{6}\right)^2=\frac{23}{36}$$

❖ **الانحراف المعياري:**

$$\delta(x)=\sqrt{V(x)}=\sqrt{\frac{23}{36}}$$

2.2- المتغير العشوائي المتصل[1]:

نعرّف المتغيرات العشوائية المتصلة على أنها كل المتغيرات التي يمكنها أخذ جميع القيم في مجال معين أو بعبارة أخرى هو المتغير الذي يأخذ عدد لانهائي من القيم داخل مجاله.

مثال:

القيم التي يمكن أن يأخذها المتغير العشوائي	المتغير العشوائي "X"	التجربة العشوائية
$x\geq 0$	الوقت المستغرق لوصول الزبائن بالدقائق	تسيير بنك
$0\leq x\leq 100$	نسبة تقدم المشروع بعد 6 أشهر	العمل في مشروع بناء
$150\leq x\leq 212$	الحرارة المرتقبة عندما يحدث التفاعل المطلوب	اختبار عملية كيميائية جديدة

[1] Christophe Hurlin,Valerie Mignon, cité, p152.

نسمي المتغير العشوائي المستمر X كل تطبيق عددي $X:\Omega \to X(\Omega)\subseteq \mathbb{R}$ بحيث من أجل كل مجال $I \subseteq X(\Omega)$ لدينا:

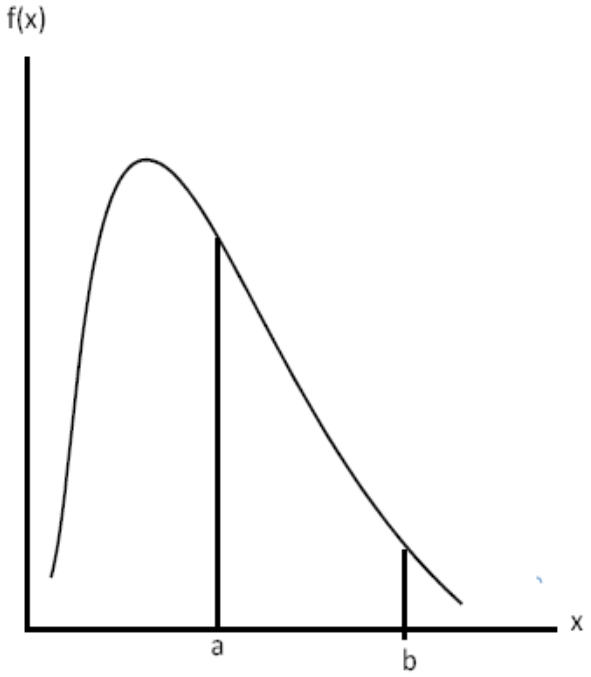
$$P(X \in I) = p\left((\omega \in \Omega);\ X(\omega) \in I\right)$$

1.2.2- دالة الكثافة $f(x)$:

ليكن X متغير عشوائي مستمر يتميز بدالة كثافة احتمالية ذات الخصائص التالية:

- $f(x) \geq 0$
- مستمرة على أجزاء f
- $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = 1$
- $P(a \leq x \leq b) = p(a\langle x\langle b) = \int_a^b f(x)dx$

نمثل بيانيا دالة الكثافة الاحتمالية بالشكل الموالي :



ونستطيع من خلال هذا التمثيل تصور الاحتمالات التالية:

- $P(x<a) = P(x \leq a) = \int_{-\infty}^{a} f(x)dx$
- $P(a \leq x \leq b) = P(0<x \leq b) = P(a \leq x<b) = P(a<x<b) = \int_a^b f(x)dx$
- $P(x \geq b) = P(x>b) = \int_b^{+\infty} f(x)dx = 1 - P(x<b)$

2.2.2- دالة التوزيع $F(x)$:

دالة التوزيع $F_x(x)$ للمتغير العشوائي الحقيقي X المعرف على $X(\Omega)\subseteq\mathbb{R}$ تتوافق مع احتمال أن يكون هذا المتغير أقل من أو يساوي قيمة معينة x بحيث $x\in\mathbb{R}$:

$$F(x)=P(X\le x)=\int_{-\infty}^{x} f(t)dt \quad \text{pour tout } x\in\mathbb{R}$$

$F(x)$: عبارة عن دالة مستمرة ومتزايدة معرفة من أجل $x\in\mathbb{R}$ ، تتراوح قيمه بين 0 و 1:

$$\lim_{x\to-\infty} F(x)=0 \text{ et } \lim_{x\to+\infty} F(x)=1$$

إذا كان لقيم X حد أدنى b_1 فإن $F(x)=0$ من أجل كل $x<b_1$ ، أما إذا كان لقيم X حد أعلى b_2 فإن:

$$F(x)=1 \text{ من أجل كل } x\ge b_2$$

$f(x)$ و $F(x)$ مرتبطان بالعلاقة التالية:

$$f(x)=\frac{d}{d(x)}F(x)$$

تسمح دالة التوزيع للمتغير العشوائي المستمر X بحساب أي احتمال على X:

$$P(x\le a)=P(x<a)=F(a)$$
$$P(x>b)=P(x\ge b)=1-F(b)$$
$$P(a<x<b)=P(a\le x\le b)=F(b)-F(a)$$

3.2.2- التوقع الرياضي:

نعرّف التوقع الرياضي للمتغير المستمر على النحو التالي:

$$E(x)=\int_{-\infty}^{+\infty} x\,f(x)dx$$

4.2.2- التباين والانحراف المعياري:

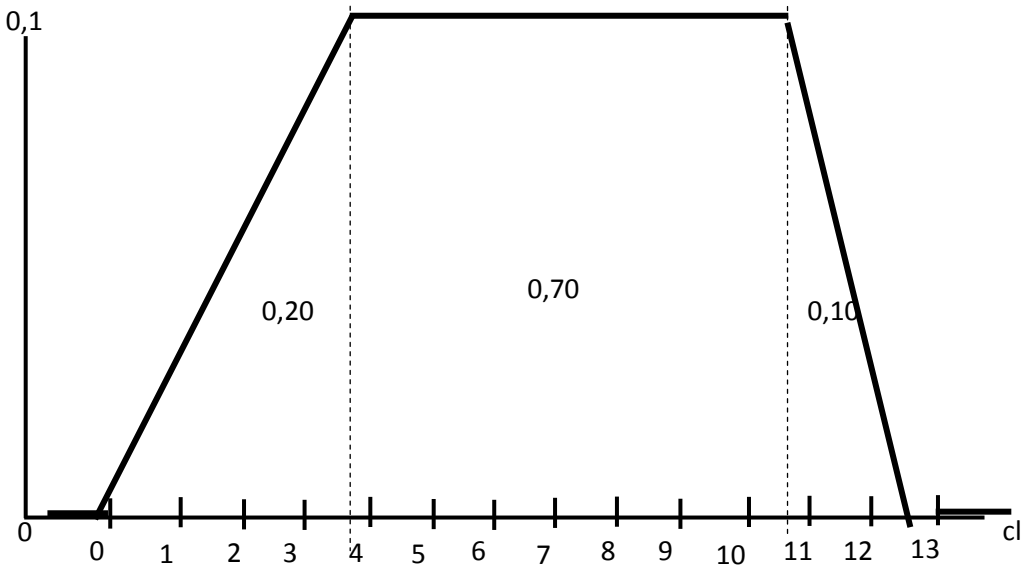
$$\mathrm{Var}(x)=\sigma^2=E(x^2)-E^2(x)$$

$$V(x)=\sigma_x^2,\sigma \text{ désignant l'écart type de la v.a } X$$

مثال: لتكن $f(x)$ الدالة المعرفة كما يلي:

$$f(x)\begin{cases}0,25x \text{ si } 0 \le x < 4\\ 0,10x \text{ si } 4 \le x < 11\\ 0,65-0,05x \text{ si } 11 \le x < 13\\ 0 \text{ si } x \subset [0;13]\end{cases}$$

التمثيل البياني للدالة:



من خلال المنحنى نستنتج أن $f(x)$ تمثل دالة كثافة احتمالية

$f(x) \ge 0$ et $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = \int_{0}^{13} f(x)dx = 1$

❖ دالة الكثافة الاحتمالية:

نقول عن $f(x)$ أنها دالة كثافة احتمالية إذا كان:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = 1 \Rightarrow \int_{0}^{13} f(x)dx = 1$$

$$\int_{0}^{13} f(x)dx = \int_{0}^{4} 0,25xdx + \int_{4}^{11} 0,10dx + \int_{11}^{13} (0,65-0,05x)dx$$

$$= \underbrace{\left[0,025\frac{x^2}{2}\right]}_{0,2}{}_{0}^{4} + \underbrace{[0,10x]}_{0,7}{}_{4}^{11} + \underbrace{\left[0,65x-0,05\frac{x^2}{2}\right]}_{0,10}{}_{11}^{13}$$

$$\Rightarrow \int_{0}^{13} f(x)dx = 0,20+0,70+0,10 = 1$$

❖ دالة التوزيع:

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)dt = P(X \le x)$$

- Si $x < 0 \Rightarrow F(x) = 0$

- Si $0 \le x \langle 4 \Rightarrow F(x) = \int_{-\infty}^{0} f(t)dt + \int_{0}^{x} f(t)dt$

$$= \int_0^x 0,025tdt = \left[0,025\frac{t^2}{2} \right]_0^x = 0,0125x^2$$

- Si $4 \le x < 11$ alors :

$$F(x) = \int_{-\infty}^{0} f(t)dt + \int_0^4 f(t)dt + \int_4^x f(t)dt$$

$$= 0 + \left[0,0125t^2 \right]_0^4 + \left[0,10t \right]_4^x$$

$$F(x) = 0,20 + 0,10(x-4)$$

- Si $11 \le x < 13$

$$F(x) = \int_{-\infty}^{0} f(t)dt + \int_0^4 f(t)dt + \int_4^{11} f(t)dt + \int_{11}^x f(t)dt$$

$$= 0 + 0,20 + ,010(11-4) + \int_{11}^x (0,65 - 0,05t)dt$$

لدينا:

$$\int_{11}^x (0,65 - 0,05t)dt = \left[0,65t - \frac{0,05t^2}{2} \right]_{11}^x$$

$$= \left(0,65x - \frac{0,05}{2}x^2 \right) - \left[0,65(11) - \frac{0,05}{2}(11)^2 \right]$$

$$= -0,025x^2 + 0,65x - 4,125$$

D'où $F(X) = -0,025x^2 + 0,65x + 3,225$

- Si $x \ge 3$ alors $F(x) = 1$

نكتب $F(X)$ على النحو التالي:

$$F(x) = \begin{cases} 0 \ si \ x < 0 \\ 0,0125x^2 \ si \ 0 \le x < 4 \\ 0,20 + 0,10(x-4) \ si \ 4 \le x < 11 \\ -0,025x^2 + 0,65x + 3,225 \ \text{si} \ 11 \le x < 13 \\ 1 \ \text{si} \ x \ge 13 \end{cases}$$

❖ حساب الاحتمالات:

1/ $P(x \le 3), P(x \rangle 10), P(3 \le x \le 10)$

$$P(x \le 3) = F(3) = 0,0125(9) = 0,1125$$

كذلك يمكن حسابها بالطريقة التالية:

$$P(x \le 3) = \int_0^3 f(x)dx = \int_0^3 0,025xdx = \left[0,025\frac{x^2}{2} \right]_0^3$$

$$= 0,025\frac{(9)}{2} = 0,1125$$

2/ $P(x>10)=1-P(x\le 10)=1-F(10)=1-\left(\underbrace{0,20+0,10(10-4)}_{0,80}\right)=0,20$

ط1:

$$P(x\le 10)=\int_0^{10} f(x)dx=\int_0^4 0,025xdx+\int_4^{10} 0,10dx$$

$$=\left[0,025\frac{x^2}{2}\right]_0^4+\left[0,10x\right]_4^{10}=0,025\frac{(16)}{2}+\left[\underbrace{0,10(10)-0,10(4)}_{0,6}\right]=0,80$$

D'où $P(x>10)=1-P(x\le 10)=1-0,80=0,20$

3/ $P(3\le x\le 10)=F(10)-F(3)=0,8-0,1125=0,6875$

ط2:

$$P(3\le x\le 10)=\int_3^{10} f(x)dx=\int_3^4 0,25xdx+\int_4^{10} 0,10dx$$

$$=\left[0,025\frac{x^2}{2}\right]_3^4+\left[0,10x\right]_4^{10}=0,6875$$

❖ **التوقع الرياضي:**

$$E(x)=\int_0^{13} xf(x)dx=\int_0^4 0,025x^2dx+\int_4^{11} 0,10xdx+\int_{11}^{13} 0,65x+0,05x^2dx$$

$$=\left[\underbrace{0,025\frac{x^3}{3}}_{0,5333}\right]_0^4+\left[\underbrace{0,10\frac{x^2}{2}}_{5,25}\right]_4^{11}+\left[\underbrace{0,65\frac{x^2}{2}-\frac{0,05}{3}x^3}_{1,1667}\right]_{11}^{13}$$

$E(x)=6,95$

❖ **التباين والانحراف المعياري:**

$E(x^2)=\int_0^{13} x^2 f(x)dx=57,4667$

$V(x)=E(x^2)-E^2(x)=57,4667-(6,95)^2$

$V(x)=9,1642$

$\delta(x)=\sqrt{V(x)}=\sqrt{9,1642}$

سلسلة تمارين رقم 5 مع الحلول

التمرين 1:

ليكن (Ω, A, p) فضاء احتمالي و A_1, A_2, A_3 مجموعات جزئية تشكل مجموعات أجزاء المجموعة (Ω) بحيث $P(A_1)=0,3, P(A_2)=0,5$ و $P(A_3)=\alpha$

نعرّف المتغير العشوائي X على النحو التالي:

$X(\omega)=5.1_A(\omega)+3.1_A(\omega)+1_A(\omega)$ بحيث تمثل $1_A(\omega), 1_A(\omega)_i, 1_A(\omega)$ متغيرات المؤشر.

1. أوجد قيمة
2. أعط القانون الاحتمالي لـــ (X) ودالة التوزيع الخاصة به $F(x)$ ؛
3. احسب الاحتمالات التالية:

$$P(x\geq 5); P(-9\leq x<9); P(x=6)$$

الحل:

1. $P(A_1)=0,3; P(A_2)=0,5$ et $P(A_3)=1-0,3-0,5=0,2$

2. القانون الاحتمالي لـ X:

$$x(\omega)=\begin{cases}1\ si\ \omega\in A_3\\ 3\ si\ \omega\in A_2\\ 5\ si\ \omega\in A_3\end{cases}$$

x	1	3	5	$\sum$
$P(x)$	0,2	0,5	0,3	1
$F(x)$	0,2	0,7	1	

3.

$P(x\geq 5)=1-P(x<5)=1-0,7=0,3$

$P(-9\leq x<9)=1\ et\ P(-8<x\leq 6)=1$

$P(x=6)=0\ et\ P(x=5)=0,3$

التمرين 2:

تتمثل تجربة في إلقاء زهرة نرد مرة واحدة، نعرّف المتغير العشوائي X على أنه المتغير الذي يأخذ القيم التالية:

$x=\{0\}$ إذا ظهر الرقم الزوجي

$x=\{1\}$ إذا ظهر الرقم الفردي

1- أوجد النتائج الممكنة للتجربة

2- اوجد مجموعة القيم الممكنة للمتغير العشوائي X

3- أعط القانون الاحتمالي لـ (X) ودالة التوزيع الخاصة به $F(x)$

الحل:

1/ $\Omega=\{1,2,3,4,5,6\}$

2/ $x=0\Rightarrow A=\{2,4,6\}$ et $x=1\Rightarrow B=\{1,3,5\}$

$x(\Omega)=\{1,0,1,0,1,0\}$

$$P(x=0)=P(w_2,w_4,w_6)=\frac{1}{6}+\frac{1}{6}+\frac{1}{6}=\frac{3}{6}=\frac{1}{2}$$

$$p(x=1)=P(w_1,w_3,w_5)=\frac{1}{6}+\frac{1}{6}+\frac{1}{6}=\frac{3}{6}=\frac{1}{2}$$

x	0	1	$\sum$
$P(X=x_i)$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	1
$F(x)$	1/2	1	

3/

$$F(x)=\begin{cases}0 \text{ si } x<0\\ \frac{1}{2} \text{ si } 0\le x<1\\ 1 \text{ si } x\ge 1\end{cases}$$

التمرين 3:

ليكن (Ω,A,p) فضاء احتمالات بحيث $\Omega=\{\omega_1,\omega_2,\omega_3,\omega_4,\omega_5,\omega_6\}$ و $A=P(\Omega)$ عبارة عن أحداث تمثل مجموعة أجزاء المجموعة Ω.

- قانون الاحتمالات معطى بالعلاقة التالية: $p(\omega_i)=i/21$ من أجل $i=1,2,3,4,5,6.$

- نعرف الأحداث التالية:

$$A=\{\omega_1,\omega_3\},B=\{\omega_2,\omega_4\},C=\{\omega_5,\omega_6\}$$

- نعرف التطبيق $X(\Omega)$ في R بالعلاقة التالية:

$$X(\omega)=3.1_A(\omega)-4.1_B(\omega)+1_C(\omega)$$

1- بين أن X متغير عشوائي

2- أوجد القانون الاحتمالي للمتغير X

3- اوجد دالة التوزيع $F(x)$

4- احسب التوقع الرياضي والتباين

5- احسب الاحتمالات التالية:

$$P(x>-4);P(-4\le x<3);P(x<-5);P(-4<x<3)$$

الحل:

1- X متغير عشوائي لأنه من أجل $x=-4,1,3$ نستطيع أن نحصل على $x(\Omega)$ والتي تمثل النتائج الممكنة للتجربة $\Omega=\{w,w_2,w_3,w_4,w_5,w_6\}$

2-

x	-4	1	3	$\sum$
$P(x)$	$\frac{6}{21}$	$\frac{11}{21}$	$\frac{4}{21}$	1
$F(x)$	$\frac{6}{21}$	$\frac{17}{21}$	**1**	
P_iX_i	-24/21	11/21	12/21	9/21
$P_ix_i^2$	96/21	11/21	36/21	143/21

3/

$$F(x)=\begin{cases}0 \text{ si } x<-4\\ \frac{6}{12} \text{ si } -4\le x<1\\ \frac{17}{21} \text{ si } 1\le x<3\\ 1 \text{ si } x\ge 3\end{cases}$$

4/

$$E(x)=\sum_{i\in N}p_ix_i=\frac{9}{21}$$

$$V(x)=E\left[X-E(X)\right]^2=E(X^2)-E^2(X)=\frac{143}{21}-\left(\frac{9}{21}\right)^2=6,62$$

5/

$$P(x>-4)=\frac{15}{21}$$

$$P(-4\le x\langle 3)=\frac{17}{21}$$

$$P(x<-5)=0$$

$$P(-4<x<3)=\frac{11}{21}$$

التمرين 4:

خلال عملية مسح تم استجواب 5 رجال و 3 نساء. نختار عشوائيا وبدون إرجاع الأشخاص حتى نتحصل على الرجل.

نعرّف المتغير العشوائي X على أنه عدد السحبات المطلوبة حتى يتم الحصول على الرجل.

1- أوجد قيم X الممكنة $X(\Omega)$

2- أوجد قانون الاحتمال للمتغير العشوائي X

3- أوجد دالة التوزيع $F(x)$

الحل:

1/ $X(\Omega)=1,2,3,4$ où $\Omega=\{H,FH,FFH,FFFH\}$

2- قانون التوزيع الاحتمالي:

x	1	2	3	4	$\sum$
$P(x)$	$\frac{5}{8}$	$\frac{3}{8}\cdot\frac{5}{7}$	$\frac{3}{8}\cdot\frac{2}{7}\cdot\frac{5}{6}$	$\frac{3}{8}\cdot\frac{2}{7}\cdot\frac{1}{6}\cdot\frac{5}{5}$	$1=\frac{336}{336}$
$F(x)$	$\frac{5}{8}$	$\frac{50}{56}$	$\frac{330}{336}$	1	

3/

$$F(x)=\begin{cases}\frac{5}{8} \text{ si } 1\le x<2\\ \frac{5}{8}+\frac{3}{8}\cdot\frac{5}{7} \text{ si } 2\le x<3\\ \frac{5}{8}+\frac{3}{8}\cdot\frac{5}{7}+\frac{3}{8}\cdot\frac{2}{7}\cdot\frac{5}{6} \text{ si } 3\le x<4\\ 1 \text{ si } x\ge 4\end{cases}$$

التمرين 5:

في تجربة إلقاء قطعة نقود 4 مرات متتالية. أوجد قانون الاحتمالات ودالة التوزيع للأحداث التالية:

A: عدد الأوجه قبل الرقم الأول

B:عدد الأوجه بعد الرقم الأول

C: عدد الأوجه ناقص عدد الأرقام

D: عدد الأرقام مضروب في عدد الأوجه

الحل:

A :

x_i	0	1	2	3	4
P_i	½	¼	1/8	1/16	1/16
$F_X(x_i)$	½	¾	7/8	15/16	1

B :

x_i	0	1	2	3
P_i	5/16	6/16	4/16	1/16
$F_X(x_i)$	5/16	11/16	15/16	1

C :

x_i	-4	-2	0	2	4
P_i	1/16	4/16	6/16	4/16	1/16
$F_X(x_i)$	1/16	5/16	11/16	15/16	1

D :

x_i	0	3	4
P_i	2/16	8/16	6/16
$F_X(x_i)$	2/16	10/16	1

<u>التمرين 6:</u>

نعرّف دالة الكثافة الاحتمالية للمتغير العشوائي X كما يلي:

$f(x)=Cx^2$ من أجل $0\le x\le 3$

1- أوجد قيمة الثابت C

2- أوجد دالة التوزيع $F(x)$

3- احسب $P(1\le x<2)$

الحل:

1. f دالة كثافة احتمالية يعني أن :

$f(x)\ge 0\forall x\in]0,3[$

- $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx=1\Rightarrow \int_0^3 Cx^2dx=\left[\frac{cx^3}{3}\right]_0^3=9c=1\Rightarrow C=\frac{1}{9}$

• تكتب دالة الكثافة كما يلي:

$$f(x)=\begin{cases}\frac{1}{9}x^2 & 0<x<3\\ 0 \quad \text{ك} \quad \text{غ يرذلا} & \end{cases}$$

2. $F(X)=\int_{-\infty}^{x} f(t)dt=\int_0^x \frac{1}{9}t^2dt=\frac{x^3}{27}$

نكتب إذا دالة التوزيع الاحتمالي بالشكل التالي:

$$F(x)=\begin{cases}0 & X<0\\ \dfrac{x^3}{27} & 0\le X<3\\ 1 & X\ge 3\end{cases}$$

3. $P(1<X<2)=\int_1^2 \frac{1}{9}x^2dx=\left[\frac{x^3}{27}\right]_1^2=0,25$

التمرين 7:

f(x) دالة معرفة كما يلي:

$$f(X)=\begin{cases}2x & 0\le X\le 1\\ 0 & ailleurs\end{cases}$$

1- تأكد من أن $f(x)$ دالة كثافة احتمالية للمتغير العشوائي X

2- أوجد دالة التوزيع للمتغير العشوائي X

3- أوجد التوقع الرياضي

4- أحسب التباين و الانحراف المعياري

5- احسب الاحتمال التالي: $P(0\le X\le 1/2)$

الحل:

1- حتى تكون f(x) دالة كثافة احتماليه يجب تحقيق الشروط التالية:

$$f(x)\ge 0 \quad \forall x\in[0,1]$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx=1$$

نلاحظ أن الشرط الأول محقق، يبقى التحقق من الشرط الثاني: $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx=1\Rightarrow\int_0^1 2xdx=\left[\frac{2x^2}{2}\right]_0^1=1$

ومنه نستنتج **أن** $f(x)$ دالة كثافة احتمالية.

2- دالة التوزيع:

$$F(X)=\int_{-\infty}^{x} f(t)dt=\int_0^x 2tdt=x^2$$

$$F(X)=\begin{cases}0 & X<0\\ x^2 & 0\le X<1\\ 1 & X\ge 1\end{cases}$$

3- التوقع الرياضي:

$$E(X)=\int_{-\infty}^{+\infty} xf(x)dx$$

$$E(\mathrm{X})=\int_{0}^{1} 2x^2dx=\left[\frac{2}{3}x^3\right]_0^1=\frac{2}{3}=0,66$$

4- التباين والانحراف المعياري:

$$V(X)=\int_{-\infty}^{+\infty} x^2 f(x)dx-\left[E(x)\right]^2$$

$$V(X)=\int_{0}^{1} 2x^3dx-\left[\frac{2}{3}\right]^2=\left[\frac{2x^4}{4}\right]_0^1-\left[\frac{2}{3}\right]^2=0,5-0,44=0,06$$

$$\sigma(X)=\sqrt{V(X)}=\sqrt{0,06}=0,24$$

5- حساب $P(0\le X\le 1/2)$:

$$P(0<X<1/2)=\int_{0}^{0,5} 2xdx=\left[\frac{2x^2}{2}\right]_0^{0,5}=0,25$$

<u>التمرين 8:</u>

نعرّف دالة الكثافة الاحتمالية للمتغير العشوائي X على النحو التالي:

$$f(x)=\begin{cases}K(4x-2x^2) & 0<X<2\\ 0 \quad \text{ailleurs}\end{cases}$$

1. أوجد قيمة الثابتK
2. أحسب P(X>1)
3. أوجد دالة التوزيع F(X)

الحل:

1.

$$f(x)dx = 1 \Rightarrow \int_0^2 K(4x - 2x^2)dx = 1$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} = K\int_0^2 (4x - 2x^2)dx = 1$$

$$= K\left[2x^2 - \frac{2x^3}{3}\right]_0^2 = K\frac{8}{3} = 1$$

$$K = \frac{3}{8}$$

2.

$$P(X > 1) = \int_1^2 \frac{3}{8}(4x - 2x^2)dx$$

$$= \frac{3}{8}\left[2x^2 - \frac{2x^3}{3}\right]_1^2 = \frac{1}{2}$$

3.

$$F(X) = \int_{-\infty}^{x} f(t)dt = \int_0^x \frac{3}{8}(4t - 2t^2)dt = \frac{3}{8}(2x^2 - \frac{2x^3}{3})$$

تكتب دالة التوزيع على الشكل التالي:

$$F(X) = \begin{cases} 0 & X < 0 \\ \frac{3}{8}(2x^2 - \frac{2x^3}{3}) & 0 \le X < 2 \\ 1 & X \ge 2 \end{cases}$$

الفصل الخامس:

التوزيعات الاحتمالية المنقطعة والتوزيعات الاحتمالية المستمرة

1- التوزيعات الاحتمالية المنقطعة:

1.1- قانون بارنولي:

نفترض اننا نقوم بتجربة تتكون من نتيجتين محتملتين فقط مثل الفاء قطعة نقود مرة واحدة (الحصول على الوجه F أو الرقم P)، في هذا الفضاء الاحتمالي المتكون من نتيجتين فقط يمكننا ان نعرف المتغير العشوائي على انه المتغير الذي يأخذ القيمة 1 اذا ظهر الوجه F (والذي نعتبره نجاح التجربة) و القيمة 0 اذا ظهر الرقم P (والذي نعتبره خسارة) هذا النوع من التجارب يمكن حسابه عن طريق قانون برنولي المعرف كما يلي:

تعريف[1]: نسمي قانون برنولي بمعامل P والذي نرمز له بالرمز $B(P)$، قانون الاحتمال المعرف على $\{0,1\}$ والمعطى بالعلاقة التالية:

$$P_x(x)=\begin{cases} p & \text{si } x=1 \\ q=1-P & \text{si } x=0 \end{cases}$$

التوقع الرياضي والتباين:

$$E(X)=P \quad \text{و} \quad V(X)=PQ$$

مثال 1: نقوم بإلغاء قطعة نقود مرة واحدة ونعرف المتغير العشوائي كما يلي: (الوجه = FACE)، (الرقم = PILE).

$$X=\begin{cases} 1 \text{ si on tire pile} \\ 0 \text{ si on tire face} \end{cases}$$

X يتبع قانون برنولي بمعلم $P=1/2$ مع $E(X)=1/2$ و $V(X)=1/4$.

مثال 2: لنفترض أنه لدينا كيس بها M كرة سوداء و N كرة بيضاء. نسحب عشوائيا كرة من ونعرّف المتغير العشوائي X كما يلي:

$$X=\begin{cases} 1 \text{ si on tire une boule noire} \\ 0 \text{ si on tire une boule blanche} \end{cases}$$

X يتبع توزيع برنولي بمعلمة $P=M/M+N$

2.1- توزيع ذي خدين:

نفترض أننا نكرر N مرة اختبار برنولي بمعلمة P أو أننا نجري N اختبارات متتالية ومستقلة أين نلاحظ في كل مرة تحقق أو عدم تحقق الحدث A.

نعرّف المتغير العشوائي X على أنه المتغير الذي يعطي عدد مرات ظهور الحدث A وبالتالي يمكن أن نقول أن المتغير العشوائي X يتبع توزيع ذو حدين بمعلمات N و P حيث يمثل N عدد تكرارات تجربة برنولي و P احتمال النجاح في التجربة، ونكتب:

[1] KHANH DAO DUC, DAVID DELAUNAY, probabilités, cours et exercices corrigés, cité, p82.

$$X \sim B(n, p)$$

حيث يمثل X عدد النجاحات المحققة خلال التجارب المتكررة والمتتالية والمستقلة لبرنولي، ومن الأمثلة عن توزيع ذو الحدين نذكر:

- القاء قطعة نقود 5 مرات متتالية (في كل مرة نتحصل على الوجه (F) أو الرقم (P))
- نتيجة الطالب في الامتحان (نجاح، رسوب)
- صنع قطع غيار(سليمة، معطوبة)

مما سبق نستنتج أن تطبيق قانون ذي حدين يتطلب تحقق الشروط التالية:

- ✓ تكرار تجربة برنولي N مرة
- ✓ الحصول في كل مرة على نتيجتان متنافيتان (نجاح، فشل)
- ✓ المحاولات تكون مستقلة عن بعضها البعض
- ✓ نرمز لاحتمال النجاح بالرمز P ولاحتمال الفشل بالرمز $(Q=1-P)$

تعريف[1]:

لنكن X متغيرًا عشوائيًا يتبع قانون ذي الحدين مع المعلمة N و P يرمز إليها بالرمز $B(N,P)$، تتميز بـ $X(\Omega)=\{0,1,2,\ldots,N\}$ ومن أجل $(K \in X(\Omega))$ لدينا:

$$P_x(X=k)=C_n^k p^k (1-p)^{n-k}$$

التوقع الرياضي والتباين:

$$E(X)=NP \ , \ V(X)=NPQ$$

مثال:

إذا كان X متغير عشوائي يمثل عدد الكرات الحمراء التي تم الحصول عليها بعد خمسة سحبات بإرجاع من كيس يحتوي على كرتين حمراء وست كرات بيضاء.

- حدد قانون الاحتمال للمتغير العشوائي X ثم احسب $E(X)$ و $V(X)$.

الحل:

يعتبر السحب بإرجاع من التجارب المستقلة، لكل سحب نتيجتين محتملتين (لديك كرة حمراء أو كرة بيضاء)، نسمي النجاح (الحصول على كرة حمراء) والفشل (الحصول على كرة بيضاء)، لذلك نستطيع القول أن X يتبع التوزيع ذي الحدين بمعلمات $N=5$ و $P=2/8$.

$$E(X)=NP=5/4 \text{ و } V(X)=NPQ$$

[1] Jean -Pierre Lecoutre, cité, p24.

3.1- توزيع بواسون:

يُعرف هذا القانون أيضًا باسم "قانون الأعداد الصغيرة". في الواقع ينطبق هذا القانون على الأحداث التي غالبا ما تحدث وبالتالي يكون احتمال حدوثها ضعيف جدا. كمثال، يمكننا الاستشهاد بما يلي:

- احتمال العثور على K أخطاء إملائية، في صفحة من كتاب رياضيات؛
- عدد حوادث السكك الحديدية خلال فترة زمنية محددة.
- احتمالية حضور K زبون الى البنك خلال فترة زمنية قصيرة

تعريف[1]:

نقول أن المتغير العشوائي X يتبع توزيع بواسون بمعامل Λ حيث $(\Lambda>0)$ حيث نكتب $X \sim p(\lambda)$ إذا تحقق الشروط التالية:

1- قيم X الممكنة هي {0 ، 1، 2....}

2- دالة الكتلة الاحتمالية لكل قيمة X تعطى بالعلاقة التالية:

$$P(X=x)=\frac{\lambda^x e^{-\lambda}}{x!}$$

التوقع الرياضي والتباين:

$$E(X)=V(X)=\lambda$$

مثال 1: إذا علمت ان 2% من الملفات الائتمانية تصل إلى قسم التقاضي وتصبح قضايا نزاع بعد سنة واحدة من توقيعها. اذا افترضنا وجود 100 ملف. ما هو احتمال ألا يصبح أي ملف محل نزاع في غضون عام، ثم أجد التوقع الرياضي والتباين.

الحل:

الطريقة الأولى للحساب باستخدام الصيغة:

$$P(X=0)=\frac{e^{-2}2^0}{0!}=0,1353$$

الطريقة الثانية، من الجدول وهذا مقتطف منه:

[1] Francis Bismans, probabilités et statistique inferentielle, prélude à l'économétrie, Ellipses edition marketing, 2016, p100,102.

	λ=1	λ=2	λ=3	λ=4
x=0	0,3679	0,1353	0,0498	0,0183
x=1	0,3679	0,2707	0,1494	0,0733
x=2	0,1839	0,2707	0,2240	0,1465
x=3	0,0613	0,1805	0,2240	0,1954
x=4	0,0153	0,0902	0,1680	0,1954
x=5	0,0031	0,0361	0,1008	0,1563
x=6	0,0005	0,0120	0,0504	0,1042
x=7	0,0001	0,0034	0,0216	0,0595
x=8	0,0000	0,0009	0,0081	0,0298
x=9	-	0,0002	0,0027	0,0132
x=10	-	0,0000	0,0008	0,0053
x=11	-	-	0,0002	0,0019
x=12	-	-	0,0001	0,0006
x=13	-	-	0,0000	0,0002
x=14	-	-	-	0,0001
x=15	-	-	-	0,0000
x=16	-	-	-	-
x=17	-	-	-	-

التوقع الرياضي والتباين:

$$E(X)=V(X)=\Lambda=2$$

مثال 2:

تحصي الشركة في المتوسط ثلاث حوادث عمل في السنة. اذا افترضنا أن عدد الحوادث يتبع توزيع بواسوني. ما هو احتمال وقوع أكثر من أربعة حوادث في السنة؟

الحل:

نعلم أن $\Lambda=3$ (متوسط عدد الحوادث في السنة)

$$p(x>4)=1-p(x\le 3)=0,1847$$
$$p(x\le 3)=p(x=0)+p(x=1)+p(x=2)+p(x=3)$$
$$P(x=0)=e^{-3}\frac{3^0}{0!}$$
$$P(x=1)=e^{-3}\frac{3^1}{1!}$$
$$P(x=2)=e^{-3}\frac{3^2}{2!}$$
$$P(x=3)=e^{-3}\frac{3^3}{3!}$$

4.1- القانون فوق الهندسي[1]:

يمكن أن نعبر عن التجربة فوق الهندسية كما يلي:

يحتوي كيس على N عنصر به N_A عنصر من A. نقوم بالسحب وبدون إرجاع N مرة.

نعرّف المتغير العشوائي X على أنه عدد عناصر A المسحوبة. من أجل كل K بحيث:

[1] Jean-pierre lecoutre , cité, p24.

$: 0 \le K \le N$

$$P_x(X=K)=\frac{\binom{N_A}{K}\binom{N-N_A}{N-K}}{\binom{N}{N}}$$

ونكتب:

$$X \sim hyp(N,n,N_A)$$

التوقع الرياضي والتباين:

يتميز القانون فوق الهندسي بتوقع رياضي و تباين معطى بالعلاقة التالية:

$$E(X)=NP \quad \text{و} \quad V(X)=npq\frac{N-n}{N-1}$$

مع العلم أن:

$$Q=1-P=1-N_A/N \quad \text{و} \quad P=P(A)=N_A/N$$

مثال:

يمثل المتغير العشوائي X عدد الكرات البيضاء التي تم الحصول عليها بعد القيام بالسحب وبدون إرجاع ثلاث مرات متتالية من كيس يحتوي على 8 كرات بيضاء و 2 كرات سوداء.

1. حدد قانون الاحتمال للمتغير العشوائي X
2. احسب الاحتمالات التالية:

- $P(X=0) \quad P(X=1) \quad P(X=2) \quad P(X=3)$

3. احسب التوقع الرياضي $E(X)$ والتباين $V(X)$

الحل:

N: تمثل العدد الإجمالي للكرات

N: يمثل عدد مرات السحب

N_A: عدد الكرات البيضاء

$$N_A=8 \quad \text{و} \quad N=10 \cdot N=3$$

1. قانون التوزيع الاحتمالي عبارة عن القانون فوق الهندسي:

$$P_x(X=K)=\frac{\binom{N_A}{K}\binom{N-N_A}{N-K}}{\binom{N}{N}}$$

$$P(X=0)=0,\ P(X=1)=1/15,\ P(X=2)=P(X=3)=7/15 \quad .2$$

3. $E(X)=NP=3\times(8/10)=12/5$

$$V(X)=npq\frac{N-n}{N-1}=3\times(8/10)\times(2/10)\times(7/9)=28/75$$

5.1- القانون الهندسي أو قانون باسكال:

يتم إجراء اختبارات مستقلة متتالية حتى يتم تحقيق حدث معين A ويتم ملاحظة عدد الاختبارات التي تم إجراؤها حتى الحصول على الحدث. يمثل المتغير العشوائي X عدد الاختبارات التي تم إجراؤها . من أجل $K\in\mathbb{N}$ لدينا:

$$P_X(X=K)=(1-P)^{K-1P}$$

$$P=P(A)$$

التوقع الرياضي والتباين:

$$E(X)=\frac{1}{p} \text{ و } V(X)=\frac{q}{p^2} \text{ مع } Q=1-P$$

<u>مثال:</u>

تحتوي حديقة للنباتات على نبتة تزهر مرة واحدة فقط في حياتها قبل أن تموت. متوسط العمر المتوقع للنبتة هو 10 سنوات لكنها تستطيع العيش لفترة أطول طالما أنها لا تزهر. يبحث عالم النباتات عن علامات التحذير من هذا الإزهار لأنه يبدو أنه يحدث بشكل عشوائي تمامًا. أمامه أربع سنوات.

ما هو احتمالية أن يتمكن من مراقبة النبات يزهر في السنة الرابعة؟

الحل:

يمكننا نمذجة هذه الحالة بقانون هندسي. احتمال النجاح هو $P=0,1$ (واحد في عشر سنوات).

$$P_X(X=K)=(1-P)^{K-1P}$$

$$P(X=4)=0,9^3\times0,1=0,0729$$

مثال 2: نقوم بإلقاء قطعة نرد متزنة. ما هو احتمال ظهور الرقم 6 بعد 7 محاولات؟

الحل:

الاحتمال الناجح (ظهور الرقم 6) هو $p=\frac{1}{6}$

الاحتمالات الخاطئة(عدم ظهور الرقم 6) هو $q=1-p=\frac{5}{6}$

ظهور الحدث المطلوب يكون بعد 7 محاولات أي في المحاولة الثامنة و بالتالي:X=8

$$p(x=8)=\frac{1}{6}\left(\frac{5}{6}\right)^7=0,046$$

2- التوزيعات الاحتمالية المستمرة:

1.2- التوزيع المنتظم:

نقول عن المتغير العشوائي X أنه يتبع توزيع منتظم اذا كانت دالة كثافته الاحتمالية ثابتة في المجال $[a,b]$:

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{b-a} & \text{si } x\in[a,b]\\ 0 & \text{sinon}\end{cases}$$

ونكتب:

$$X\sim\mu([a,b])$$

يتميز التوزيع المنتظم بدالة التوزيع التالية:

$$f(x)=\begin{cases}0 & \text{si } x<a\\ \dfrac{x-a}{b-a} & \text{si } a\le x\le b\\ 1 & \text{si } b\le x\end{cases}$$

التوقع الرياضي والتباين:

$$E(X)=\frac{b+a}{2} \quad \text{و} \quad V(X)=\frac{(b-a)^2}{12}$$

مثال: نفرض أن فترة حجز صالة مؤتمرات مقدرا بالساعات يخضع لتوزيع منتظم على المجال $[0,4]$

1- أوجد تابع الكثافة الاحتمالية

2- ما هو احتمال أن يدوم مؤتمر ما 3 ساعات على الأقل؟

الحل:

1- تابع الكثافة الاحتمالية هو:

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{4} & 0\le x\le 4\\ 0 & \text{ailleurs}\end{cases}$$

2-

$$p(x\ge 3)=\int_3^4\frac{1}{4}dx=\frac{1}{4}$$

2.2- القانون الأسي:

يتميز القانون الأسي بمعلمة $\theta>0$ للمتغير العشوائي الموجب بدالة الكثافة الاحتمالية التالية:

$$f(x)=\begin{cases}\theta e^{-\theta x} & \text{si } 0\le x\\ 0 & \text{si } x<0\end{cases}$$

ونكتب $X\sim\varepsilon(\theta)$.

دالة التوزيع تعطى بالعلاقة التالية:

$$F(x)=\theta\int_0^x e^{-\theta t}\,dt=\left[-e^{-\theta t}\right]_0^x=1-e^{-\theta x}$$

التوقع الرياضي والتباين:

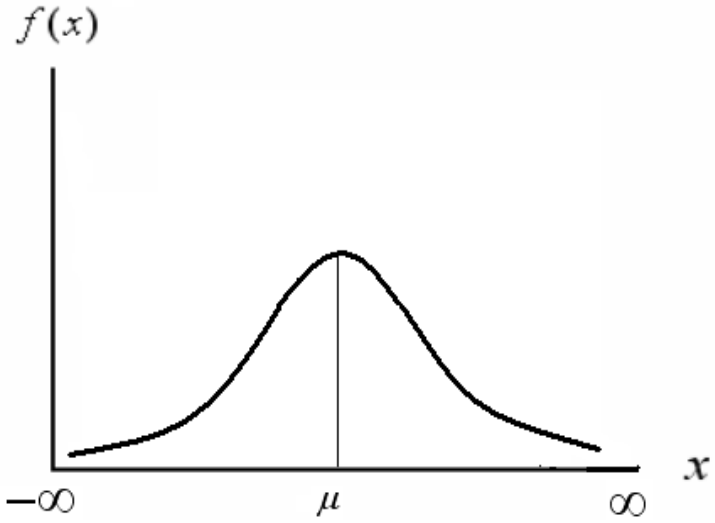
$$V(X)=\frac{1}{\theta^2}\quad \text{و}\quad E(X)=\frac{1}{\theta}$$

3.2- التوزيع الطبيعي:

نقول عن متغير عشوائي مستمر X انه يتبع توزيع طبيعي بمتوسط μ وتباين σ،
$-\infty<\mu\le+\infty,\sigma>0$ ونكتب باختصار $X\sim N(\mu,\sigma^2)$ إذا كانت دالة كثافته الاحتمالية على النحو التالي:

$$f(x)=\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}e^{\frac{-(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$$

التمثيل البياني للتوزيع الطبيعي :



إذا أردنا معرفة دالة التوزيع لـــ X، فعلينا حساب التكامل التالي:

$$p(X\le x)=\int_{-\infty}^{x}\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}e^{\frac{-(z-\mu)^2}{2\sigma^2}}\,dz$$

نظريا لا يمكن حساب هذا التكامل بشكل سهل، لذلك يمكن استعمال طريقة تحويل المتغير بالشكل التالي: $Z=\frac{X-\mu}{\sigma}$

$$\int_{-\infty}^{x}\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}e^{\frac{-(z-\mu)^2}{2\sigma^2}}dx=\int_{-\infty}^{\frac{x-\mu}{\sigma}}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{\frac{-z^2}{2}}dz$$

يكفي معرفة قيم $\int_{-\infty}^{x}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{\frac{-z^2}{2}}dz$ من أجل $x\geq 0$ وإذا استخدمنا تناظر هذا التكامل نجد:

$$\int_{-\infty}^{x}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{\frac{-z^2}{2}}dz=1-\int_{x}^{+\infty}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{\frac{-z^2}{2}}dz=1-\int_{-\infty}^{-x}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{\frac{-z^2}{2}}dz$$

أو أن: $F_z(x)=1-F_z(-x)$.

نسمي المتغير $Z\sim N(0,1)$ المتغير الطبيعي المعدل، ونظرًا لأهمية هذا المتغير، فقد اعتمدنا رمزًا معينًا لدالة التوزيع الخاصة به:

$$\Phi(x)\text{désigne } F_z(x)=\int_{-\infty}^{-x}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{\frac{-z^2}{2}}dz$$

هناك جداول تعطي القيم المحسوبة بالتكامل العددي.

يتوافق تحويل المتغير المذكور أعلاه مع التحويل التالي:

$$\text{si } X\sim N(\mu,\sigma^2), P(X\leq x)=P\left(Z\leq\frac{x-\mu}{\sigma}\right)\text{ pour } Z\sim N(0,1)$$

مثال:

1- $\text{si } Z\sim N(0,1), P(1\leq Z\leq 2)=\Phi(2)-\Phi(1) \text{ et } P(Z\geq 3)=1-\Phi(3)$

2- احسب $P(4\leq X\leq 5)$ إذا علمت أن $X\sim N(2,3)^2$.

$$Z=\frac{X-2}{3}\sim N(0,1)$$

$$P(4\leq X\leq 5)=P\left(\frac{4-2}{3}\leq\frac{X-2}{3}\leq\frac{5-2}{3}\right)$$

$$P(4\leq X\leq 5)=P\left(\frac{4-2}{3}\leq Z\leq\frac{5-2}{3}\right)$$

$$P(4\leq X\leq 5)=P\left(\frac{2}{3}\leq\frac{X-2}{3}\leq 1\right)$$

$$P(4\leq X\leq 5)=\Phi(1)-\Phi(2/3)$$

سلسلة تمارين رقم 6 مع الحلول

التمرين 1:

عندما تعمل الآلة بشكل مثالي، فإن 3% فقط من القطع المنتجة تكون معطوبة. نختار بشكل عشوائي قطعتين من بين القطع المنتجة، ونهتم بعدد القطع المعطوبة.

1- هل يمكن أن نعتبر هذه التجربة، تجربة ذات حدين

2- ما هي عدد النتائج المحتملة لقطعة معطوبة واحدة؟

3- احسب الاحتمالات التالية:

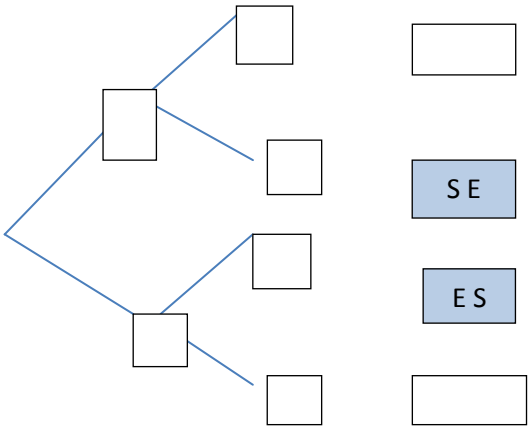
- عدم الحصول أي قطعة معطوبة
- الحصول على قطعة معطوبة واحدة
- الحصول على قطعتين معطوبتين

الحل:

1- يمكن اعتبار هذه التجربة ذو حدين للأسباب التالية:

- التجربة عبارة عن سحبتين متساويتين، سحب لكل قطعة نقود
- الحصول على نتيجتين محتملتين لكل سحب: القطعة معطوبة (S: نجاح) أو سليمة (E: خسارة)
- احتمال أن تكون القطعة سليمة أو معطوبة هي نفسها في كل سحب
- نتيجة السحب مستقلة عن نتائج السحب الأخرى

2- على حسب شجرة الاحتمالات فإن عدد النتائج المحتملة لقطعة معطوبة واحدة هو 2



3-

$$f(x) = P(X = x) = c_x^n p^x (1-p)^{n-x} = c_x^2 0,03^x 0,97^{2-x}$$
$$f(0) = c_0^2 0,03^0 0,97^2 = 0,9409$$
$$f(1) = c_1^2 0,03^1 0,97^1 = 0,0582$$
$$f(2) = c_2^2 0,03^2 0,97^0 = 0,0009$$

التمرين 2:

يمر 80 شخصًا عبر البوابة الأمنية. نفترض أن احتمال أن يرن جرس الباب لكل شخص يساوي 0.02191. نعرف المتغير العشوائي X على أنه عدد الأشخاص الذين يرن عندهم الجرس من بين 80 شخص الذين يمرون عبر البوابة.

1- بين أن المتغير العشوائي X يتبع توزيع ذي حدين

2- احسب التوقع الرياضي للمتغير العشوائي وفسر النتيجة

3- احسب احتمال قيام شخص واحد على الأقل في المجموعة بقرع جرس البوابة الأمنية

4- احسب احتمال أن يقوم 5 أشخاص على الأكثر بقرع جرس البوابة الأمنية

5- بدون تبرير، أوجد قيمة أصغر عدد طبيعي n بحيث $P(X \leq n) \geq 0,9$

الحل:

نكرر نفس التجربة العشوائية 80 مرة. جميع التجارب متطابقة ومستقلة. كل تجربة لها نتيجتان بالضبط: $S, \overline{S}$ بحيث: $P(S) = 0,02192$، وعليه فان:

1- المتغير العشوائي X يتبع توزيع ذي حدين بمعلمات n و P حيث:

$$n = 80 \text{ et } p = 0,02192$$
$$P_x(X = k) = C_n^k p^k (1-p)^{n-k}$$

2- التوقع الرياضي:

$$E(X) = np = 1,7536$$

متوسط عدد الأشخاص الذين يسببون في قرع جرس البوابة الأمنية هو 1,75.

3- احتمال قيام شخص واحد على الأقل في المجموعة بقرع جرس البوابة الأمنية:

$$P(X \geq 1) = 1 - P(X = 0) \approx 0,830$$

4- احتمال أن يقوم 5 أشخاص على الأكثر بقرع جرس البوابة الأمنية:

$$P(X \leq 5) = p(x=0) + p(x=1) + p(x=2) + p(x=3) + p(x=4) + p(x=5) \approx 0,992$$

5- لدينا $P(X \leq 2) \approx 0,744$ و $P(X \leq 3) \approx 0,901$ إذن العدد 3 هو أصغر عدد طبيعي يحقق الشرط $P(X \leq n) \geq 0,9$.

التمرين 3:

من أجل البحث عن وظيفة، يرسل الشخص طلباته إلى 25 شركة.

فإذا علمت أن احتمال أن ترد الشركة هو 0,2 وبافتراض أن هذه الردود مستقلة.

ماهو احتمال أن يتلقى الشخص 5 ردود على الأقل؟

الحل:

يمكن وصف التجربة كما يلي:

- يوجد 25 سحب عشوائي متشابه ومستقل (25 إرسال إلى الشركات)
- في كل سحب لدين نتيجتين أو حدثين:

الحدث E: المؤسسة تجيب $p(E) = 0,2$.

الحدث $\overline{E}$ المؤسسة لا تجيب.

وبالتالي المتغير العشوائي X الذي يمثل عدد الإجابات التي يتلقاها الموظف تتبع توزيع ذو حدين بمعلمات: $n = 25$; $p = 0.2$.

وعليه فان احتمال أن يتلقى الشخص 5 ردود على الأقل هو:

$$p(X \geq 5) = 1 - p(X \leq 4) \approx 0,58$$

التمرين 4:

تم تسجيل عدد الحوادث البسيطة التي تعرض لها العاملون في يوم عمل على مدى 200 يوم في مصنع واحد. حدثت هذه الحوادث بشكل مستقل عن بعضها البعض. النتائج موضحة في الجدول التالي:

عدد الحوادث	0	1	2	3	4	5
عدد الأيام	86	82	22	7	2	1

1- ما هو متوسط عدد الحوادث في اليوم؟ أعطي تفسيرا ملموسا للنتيجة التي تم العثورعليها.

2- نقوم بتعديل هذا التوزيع بقانون بواسون.

برر هذا القرار ووضح هذا القانون.

3- ما هو العدد النظري للأيام التي يقع فيها أقل من 3 حوادث؟ قارن مع الواقع.

الحل:

1- لنسمي X المتغير العشوائي الذي يساوي عدد الحوادث المسجلة في اليوم ؛ القيم المحتملة لـ X هي أعداد طبيعية تتراوح من 0 إلى 5. كل قيمة من X_i، نربط احتمالية حدوثها X_i والذي يساوي عدد أيام الظهور مقسومًا على 200.

X_i	0	1	2	3	4	5
P_i	0,43	0,41	0,11	0,035	0,01	0,005

متوسط عدد الحوادث في اليوم هو التوقع الرياضي لـ X:

$$E(X) = \sum x_i p_i = (0\times 86 + 1\times 82 + 2\times 22 + 3\times 7 + 4\times 2 + 5\times 1)/200 = 0,8 = 4/5$$

يمكننا أن نقول أنه يوجد في المتوسط 0,8 حادث في اليوم، أو بشكل أكثر تحديدًا، 4 حوادث في المتوسط كل 5 أيام.

2- قانون بواسون هو قانون الاحتمالات الضعيفة. يمكن تطبيقه هنا مباشرة ، لعدم وجود معلومات أخرى عن وقوع الحوادث.

من أجل الاقتناع بشكل أفضل ، من خلال ملاحظة أن الحوادث تعتبر أحداثًا مستقلة ، يمكننا تفسير X على أنه متغير ذي حدين مع المعلمة $n = 200$ (عدد الاختبارات) بمتوسط $np = 0.8$.

$p = 0,004$ ، نحن داخل مجال التقريب تمامًا لقانون بواسون:

$$np = 0,8 \le 10 \quad \text{و} \quad n > 50,\ p \le 0,1$$

- معلمات التوزيع البواسوني هي: $\lambda = np = 0,8$

$$\text{Prob}(X = k) = e^{-0,8}(0,8)^k / k!$$

جدول ملخص: يشير السطر الأخير إلى الاحتمالات التي تم الحصول عليها بواسطة القانون ذي الحدين، وهو أمر غير عملي للغاية هنا نظرًا للعدد الكبير من الملاحظات (التلاعب في التوليفات والقوى)

$$P(B = k) = C_n^k p^k q^{n-k}$$

كمثال:

$$P(B = 2) = C_{200}^2 \times (0,004)^2 (0,996)^{198} = 200\times 199/2 \times 0,000016 \times 0,452219\ldots \cong 0,144$$

عدد الحوادث X_i	0	1	2	3	4	5
عدد الأيام	86	82	22	7	2	1
p_i	0,43	0,41	0,11	0,035	0,01	0,005
حسب القانون البواسوني p_i	0,449	0,359	0,144	0,038	0,008	0,001
حسب قانون ثنائي الحدين p_i	0,448	0,360	0,144	0,038	0,0075	0,001

3- احتمال رؤية أقل من 3 حوادث نظرياً هو $0.448+0.359+0.144=0.952$.

وبالتالي، فإن العدد النظري للأيام التي يقع فيها أقل من 3 حوادث هو $200\times0.952=190.4$، الرقم مقربًا إلى 190.

الرقم الذي يقدمه الواقع (الإحصائي) هو: $86+82+22=190$. نلاحظ تعديلاً جيدًا بواسطة قانون بواسون. الحالة $k=5$ أقل إقناعًا لكنها هامشية.

التمرين 5:

صُممت أنظمة رادار تكشف عن الصواريخ العسكرية لتنبيه بلد ما بهجمات العدو. نريد معرفة ما إذا كان نظام الكشف قادرًا على تحديد هجوم وإصدار تحذير. لنفترض أن هناك نظام كشف معين لديه احتمال 0.9 لاكتشاف هجوم نووي.

1- ما هو احتمال أن يقوم نظام كشف برصد هجوم معين؟

2- إذا تم تركيب نظامي كشف في نفس المنطقة ويعملان بشكل مستقل ، ما هو احتمال أن يقوم أحد الأنظمة على الأقل باكتشاف الهجوم؟

3- في حالة تركيب 3 أنظمة ، ما هو احتمال أن يكتشف أحد الأنظمة على الأقل الهجوم؟

الحل:

يمكن اعتبار التجربة ذات الحدين لأن:

- التجربة تتكرر n مرة
- في كل تجربة نتحصل على نتيجتين محتملتين: النظام يكتشف الهجوم (نجاح) ، والنظام لا يكتشف الهجوم (فشل)
- احتمالية النجاح (0.9) أو الفشل (0.10) متطابقة لكل نظام
- الأنظمة مستقلة

1- احتمال أن يقوم نظام كشف برصد هجوم معين:

$$f(x) = P(X = x) = c_x^n p^x (1-p)^{n-x} = c_1^1 0,90^x 0,10^{1-x}$$
$$f(1) = c_1^1 0,90^1 0,10^0 = 0,90$$

2- احتمال أن يقوم أحد الأنظمة على الأقل باكتشاف الهجوم؟

$$n = 2$$
$$p(X \geq 1) = p(X = 1) + P(X = 2) = 1 - p(X < 1) = 1 - p(X = 0)$$
$$f(1) = P(X = 1) = c_1^2 0,90^1 (0,10)^{2-1} = 0,18$$
$$f(2) = c_2^2 0,90^2 0,10^0 = 0,81$$
$$P(\mathrm{x} \geq 1) = 0,18 + 0,81 = 0,99$$

3- احتمال أن يكتشف أحد الأنظمة على الأقل الهجوم:

$$n = 3$$
$$p(X \geq 1) = p(X = 1) + P(X = 2) + \mathrm{P(X = 3)} = 1 - p(X < 1) = 1 - p(X = 0)$$
$$f(0) = P(X = 0) = c_0^3 0,90^0 (0,10)^3 = 0,003$$
$$P(x \geq 1) = 1 - 0,003 = 0,997$$

التمرين 6:

إذا علمت أن 29% من المحامين والقضاة عبارة عن النساء. في محكمة تضم 30 محامياً وقاضياً، ما هو العدد المتوقع من النساء؟ احسب التباين والانحراف المعياري.

الحل:

يمكن اعتبار التجربة ذات الحدين لأننا:

- نكرر السحب 30 مرة (سحب لكل قاضي أو محامي)
- في كل سحب نتحصل على نتيجتان محتملتان: القاضي أو المحامي امرأة (نجاح) ، القاضي أو المحامي رجل (فشل)
- احتمالية النجاح $p = 0.29$ والفشل $(q = 1 - p = 0.71)$ متطابقة لكل سحب
- نتيجة السحب مستقلة عن نتائج السحب الأخرى

$$E(X) = np = 30 \cdot 0,29 = 8,7 \sim 9 \,\text{femmes}$$
$$V(X) = npq = 30 \cdot 0,29 \cdot 0,71 = 6,177 \sim 6$$
$$\sigma(\mathrm{X}) = \sqrt{V(X)} = 2,48 \sim 2$$

التمرين 7:

نعتبر التوزيع الاحتمالي لبواسون بمعلمة $\lambda = 3$.

1- اكتب دالة الاحتمال المناسبة

2- احسب $P(2)$، $P(1)$، P (0)، $P(X \geq 2)$.

الحل:

$$1- \quad f(x) = P(X = x) = \frac{\lambda^x e^{-\lambda}}{x!} = \frac{3^x e^{-3}}{x!}$$

2-

- $f(2) = P(X = 2) = \frac{3^2 e^{-3}}{2!} = 0,224$
- $f(1) = P(X = 1) = \frac{3^1 e^{-3}}{1!} = 0,149$
- $f(0) = P(X = 0) = \frac{3^0 e^{-3}}{0!} = 0,049$
- $P(X \geq 2) = 1 - P(X < 2) = 1 - [f(0) + f(1)] = 0,802$

التمرين 8:

نعتبر توزيع احتمالي لبواسون بمتوسط $\lambda = 2$ والتي تمثل عدد تكرارات الحادث خلال فترة زمنية واحدة.

1- اكتب دالة الاحتمال المناسبة

2- ما هو متوسط عدد التكرارات في 3 فترات زمنية؟ اكتب دالة الاحتمال المناسبة.

3- أوجد احتمال حدوث تكرارين في فترة زمنية واحدة؟

4- أوجد احتمال حدوث 6 تكرارات في 3 فترات زمنية؟

5- أوجد احتمال حدوث 5 تكرارات في فترتين زمنيتين؟

الحل:

$$1- \quad f(x) = P(X = x) = \frac{\lambda^x e^{-\lambda}}{x!} = \frac{2^X e^{-2}}{x!}$$

$$2- \quad \lambda = 2 \cdot 3 = 6 \Rightarrow f(x) = P(X = x) = \frac{6^X e^{-6}}{x!}$$

$$3- \quad f(2) = P(X = 2) = \frac{2^2 e^{-2}}{2!} = 0,2706$$

4- $f(6) = P(X = 6) = \frac{6^6 e^{-6}}{6!} = 0,1606$

5- $f(5) = P(X = 5) = \frac{4^5 e^{-4}}{5!} = 0,1563$

التمرين 9:

تصل المكالمات الهاتفية إلى مكتب الحجز بمعدل 48 مكالمة في الساعة.

1- أوجد احتمال استقبال 3 مكالمات خلال 5 دقائق

2- أوجد احتمال استقبال 10 مكالمات خلال 15 دقيقة

3- لنفترض أنه لا توجد مكالمة قيد الانتظار في الوقت الحالي، إذا استغرق مستقبل المكاملات 5 دقائق للرد على المكالمة الحالية، فكم عدد الأشخاص الذين ينتظرون خلال هذا الوقت برأيك، وما هو احتمال عدم انتظار أحد؟

4- في حالة عدم وجود مكالمة جارية، ما هو احتمال أن يأخذ مستقبل المكاملات 3 دقائق من الراحة دون إزعاج؟

الحل:

1- $\lambda = 48$ مكالمة خلال ساعة واحدة وعليه فانه خلال 5 دقائق فإن $\lambda = \frac{48 \times 5}{60} = 4$ أي 4 مكالمات في المتوسط خلال 5 دقائق.

$$f(3) = P(X = 3) = \frac{\lambda^x e^{-\lambda}}{x!} = \frac{4^3 e^{-4}}{3!} = 0,195$$

2- خلال 15 دقيقة $\lambda = 12$.

$$f(10) = P(X = 10) = \frac{12^{10} e^{-12}}{10!} = 0,1048$$

3- هناك 4 أشخاص ينتظرون بفاصل 5 دقائق مكالمات $\lambda = \frac{48 \times 5}{60} = 4$، أي يوجد 4 أشخاص في الانتظار.

$$f(0) = P(X = 0) = \frac{4^0 e^{-4}}{0!} = 0,0183$$

4- خلال 3 دقائق $\lambda = \frac{48 \times 3}{60} = 2,4$.

$$f(0) = P(X = 0) = \frac{2,4^0 e^{-2,4}}{0!} = 0,090$$

التمرين 10:

متوسط عدد المرات التي يسافر فيها الشخص بالطائرة لأسباب شخصية هي 4 مرات في السنة.

1- ما هو احتمال أن يسافر الشخص بالطائرة لأسباب شخصية مرتين في السنة؟

2- ما هو متوسط عدد المرات التي يسافر فيها الشخص بالطائرة لأسباب شخصية خلال 3 أشهر؟

3- ما هي احتمالية أن يسافر الشخص بالطائرة لأسباب شخصية أكثر من مرة خلال 6 أشهر؟

الحل:

1- $f(2)=P(X=2)=\dfrac{\lambda^x e^{-\lambda}}{x!}=\dfrac{4^2 e^{-4}}{2!}$

2- $\lambda=4$ سفرات في السنة وبالتالي خلال 3 أشهر فإن:

$$\lambda=\frac{3\times 4}{12}=1$$

3- $P(X>1)=1-P(X\le 1)=1-\left[f(0)+f(1)\right]$

$$\lambda=\frac{6\times 4}{12}=2$$

$$f(0)=P(X=0)=\frac{\lambda^x e^{-\lambda}}{x!}=\frac{2^0 e^{-2}}{0!}$$

$$f(1)=P(X=1)=\frac{2^1 e^{-2}}{1!}$$

التمرين 11:

وفقًا لدراسة، احتلت شركة Coca و Pepsi المرتبة الأولى والثانية على التوالي من حيث المبيعات. نفترض أنه من بين 10 أشخاص، 6 يفضلون كوكاكولا و 4 بيبسي. تم اختيار عينة من هؤلاء مكونة من 3 أشخاص.

1- ما هو احتمال أن يفضل شخصان الكوكاكولا؟

2- ما هو احتمال أن الغالبية (2 أو 3 أفراد) تفضل بيبسي؟

الحل:

يمكننا اعتبار التجربة أنها تجربة فوق الهندسية مع $N=10,\ n=3$.

$$P_x(X=k)=\frac{\binom{N_A}{k}\binom{N-N_A}{n-k}}{\binom{N}{n}}$$

1- $P(X=2)=\dfrac{\binom{6}{2}\binom{10-6}{3-2}}{\binom{10}{3}}=\dfrac{\frac{6!}{2!4!}\frac{4!}{1!3!}}{\frac{10!}{3!7!}}=0,5$

2- $p(X\ge 2)=P(X=2)+P(X=3)$

$$P(X=2)=\frac{\binom{4}{2}\binom{10-4}{3-2}}{\binom{10}{3}}=\frac{\frac{4!}{2!2!}\frac{6!}{1!5!}}{\frac{10!}{3!7!}}=0,3$$

$$P(X=3)=\frac{\binom{4}{3}\binom{10-4}{3-3}}{\binom{10}{3}}=\frac{\frac{4!}{3!1!}\frac{6!}{0!6!}}{\frac{10!}{3!7!}}=0,033$$

$$p(X\geq 2)=P(X=2)+P(X=3)=0,333$$

التمرين 12:

تنتج شركة "كمبيوتر أجهزتها في مصنعين، أحدهما في تكساس والآخر في هاواي. يوظف مصنع تكساس 40 شخصًا، ويوظف مصنع هاواي 20 شخصًا. نطُلب من عينة عشوائية من 10 موظفين ملأ استبيان.

1- ما مدى احتمالية عدم وجود أي من الموظفين المختارين من مصنع هاواي؟

2- ما هو احتمال أن يكون موظف واحد فقط مختار لا يعمل بمصنع هاواي؟

3- ما هو احتمال الحصول على الأقل على موظفين من مصنع هاواي؟

4- ما هو احتمال أن يكون 9 موظفين مختارين لا يعملون بمصنع تكساس؟

الحل:

يمكننا اعتبار التجربة أنها تجربة فوق الهندسية مع: $N=60,\ n=10$.

$$P_x(X=k)=\frac{\binom{N_A}{k}\binom{N-N_A}{n-k}}{\binom{N}{n}}$$

1- $$f(0)=P(X=0)=\frac{\binom{20}{0}\binom{60-20}{10-0}}{\binom{60}{10}}=0,011$$

2- $$f(1)=P(X=1)=\frac{\binom{20}{1}\binom{60-20}{10-1}}{\binom{60}{10}}=0,072$$

3- $$P(X\geq 2)=1-P(X<2)=1-\left[f(0)+f(1)\right]=0,917$$

4- $f(9)=P(X=9)=\dfrac{\binom{40}{9}\binom{60-40}{10-9}}{\binom{60}{10}}=0,072$

التمرين 13:

نعرّف المتغير العشوائي الطبيعي المستمر Z كما يلي:

$$Z_I=\frac{X_I-E(X)}{\sigma}$$

- أحسب الاحتمالات التالية:

$P(-1\le Z\le 0);\ P(-2,5\le Z\le 0);P(-1\le Z\le 0);P(-1,57\le Z\le 0);P(Z\le -0,23);P(Z\le -0,71)$

- أوجد قيمة Z في الحالات التالية:
  - المساحة بين 0 و Z تساوي 0.4750
  - المساحة بين 0 و Z تساوي 0.2291
  - المساحة على يمين Z تساوي 0.1314
  - المساحة على يسار Z تساوي 0.67
  - المساحة الواقعة بين $-Z$ و Z تساوي 0.9030

الحل:

1- حسب التعريف فإن منحنى التوزيع الطبيعي متناظرا وعليه فإن:

- $P(-1\le Z\le 0)=P(0\le Z\le 1)=\Phi(1)-\Phi(0)=0,8413-0,5000=0,3413$
- $P(-2,5\le Z\le 0)=P(0\le Z\le 2,5)=\Phi(2,5)-\Phi(0)=0,9938-0,5000=0,4938$
- $P(-1,57\le Z\le 0)=P(0\le Z\le 1,57)=\Phi(1,57)-\Phi(0)=0,9418-0,5000=0,4418$
- $P(Z\le -0,23)=P(Z\le 0,23)=0,5910$
- $P(Z\le -0,71)=P(Z\le 0,71)=1-P(Z\le 0,71)=1-\Phi(0,71)=1-0,7611=0,2389$

2- باستخدام جدول قانون التوزيع الطبيعي المركزي المعدل الذي يعطي الاحتمالات $F(Z)$ بقيمة أقل من Z (الجدول وارد في الملحق) نجد:

- المنطقة بين 0 و Z تساوي 0.4750 (نبحث عن قيمة Z التي تتوافق مع القيمة الاحتمالية التالية:

$0,5+0,4750=0,9750$ $Z=1,96$

- المنطقة بين 0 و Z تساوي 0.2291 (نبحث عن قيمة Z التي تقابل قيمة الاحتمال التالية:

$0,5+0,2291=0,7291$ $Z=0,61$

- المنطقة على يمين Z تساوي 0.1314 (نبحث عن قيمة Z التي تتوافق مع قيمة الاحتمال التالية:

$0,5+0,3686=0,8686$ $Z=1,12$

• المنطقة على يسار Z هي 0.67 (نبحث عن قيمة Z التي تتوافق مع القيمة الاحتمالية 0.67)

$Z = 0,44$

• المنطقة الواقعة بين $-Z$ و Z تساوي 0.9030 (نبحث عن قيمة Z التي تتوافق مع قيمة الاحتمال التالية:

$Z = 1,66$ $(0,5 + 0,4515 = 0,9515$

التمرين 14:

متوسط عمر الشخص الذي يتزوج للمرة الأولى هو 26 سنة، إذا افترضنا أن سن الزواج الأول يتوزع توزيعا طبيعيا بانحراف معياري يساوي 4 سنوات $(\sigma = 4)$.

1- ما هو احتمال أن يكون عمر الشخص الذي يتزوج لأول مرة أقل من 23 سنة؟

2- ما هو احتمال أن يكون عمر الشخص الذي يتزوج لأول مرة يتراوح بين 20 و 30 عامًا؟

3- قبل أي عمر يتزوج 90% من الأشخاص لأول مرة؟

الحل:

$$1- \quad P(X \le 23) = P\left(Z \le \frac{23-26}{4}\right) = P(Z \le -0,75) = P(Z \ge 0,75) = 1 - P(Z \le 0,75) =$$
$$= 1 - 0,7734 = 0,2266$$

$$2- \quad P(20 \le X \le 30) = P\left(\frac{20-26}{4} \le Z \le \frac{30-26}{4}\right) = P(-1,5 \le Z \le 1) =$$
$$= P(Z \le 1) - P(Z \le -1,5)$$
$$= P(Z \le 1) - [1 - P(Z \le 1,5)]$$
$$= 0,8413 - 1 + 0,9332 = 0;7745$$

3- المساحة على يسار Z تساوي 0.90 (نبحث عن قيمة Z التي تقابل قيمة الاحتمال 0.90) حسب الجدول $Z = 1.28$.

$$Z = \frac{X - \mu}{\sigma} \Rightarrow X = Z\sigma + \mu = 1,28(4) + 26 \cong 31 \text{ans}$$

التمرين 15:

ارتفع حجم الأسهم المتداولة في بورصة نيويورك في السنوات الأخيرة. إذا علمت أنه في الأسبوعين الأولين من شهر جانفي 1998، ارتفع متوسط الحجم اليومي للأسهم المتداولة إلى 646 مليون سهم.

إذا علمت أن حجم الأسهم المتداولة يوميا تتبع توزيعا طبيعيا بانحراف معياري مقدر بـ 100 مليون سهم $\sigma = 100$.

1- ما احتمال أن يقل حجم الأسهم المتداولة عن 400 مليون سهم؟

2- ما هي نسبة المرات التي يتجاوز فيها حجم الأسهم المتداولة عن 800 مليون سهم؟

الحل:

$$\mu = 646 \ , \ \sigma = 100$$

$$1- \ P(X \le 400) = P\left(Z \le \frac{400-646}{100} \right) = P(Z \le -2,46) = 1 - P(Z \le 2,46) = 1 - 0,9931$$

$$P(X \le 400) = 0,0069$$

$$2- \ P(X \ge 800) = P\left(Z \ge \frac{800-646}{100} \right) = P(Z \ge 1,54) = 1 - P(Z \le 1,54) = 1 - 0,9382$$

$$P(X \ge 800) = 0,0618 = 6,18\%$$

قائمة المراجع

1. Christophe Hurlin,Valerie Mignon « statistique et probabilité en économie-gestion »Duno, 2018.
2. Dimitri P. Bertsekas and John N. Tsitsiklis, Introduction to Probability: Problem Solutions, 2nd Edition, Massachusetts Institute of Technology, 2015.
3. Dirk P. Kroese, A Short Introduction to Probability, The University of Queensland, 2009.
4. Francis Bismans,probabilités et statistique inferentielle, ellipses, Edition Marketing,2016 .
5. Heather Haney and Ernest Johnson, Probability and Statistics, 4ed Edition CK-12 Foundation, 2011.
6. Jean –Pierre Lecoutre « statistique et probabilités,Dunod 6ème edition,2015
7. Khanh Dao Duc ,David Delaunay ,probabilités, cours et exercices corrigés, de boeck,superieur,1ère edition, 2015
8. Miroslav Lovri, Students' Solutions Manual Probability and Statistics, McMaster University, 2011.
9. Mohamed ben Messoud et Brahim Oukacha, statistique descriptive et calcul des probabilités, les pages bleues internationales,2011.
10. Rick Durrett, Probability: Theory and Examples, Edition 4, Cambridge University Press, 2013.
11. Sheldon Ross, A first course in probability, 8th ed. Pearson Prentice Hal, 2010.
12. Sheldon Ross, Introduction to Probability Models, Tenth Edition, Academic Press is an Imprint of Elsevier, 2010.