الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية

**People's Democratic Republic of Algeria**


**M**inistry of Higher Education and Scientific Research
**U**niversity of Algiers 3
**F**aculty of Economics, Commercials And Management Sciences
**D**epartement of Economics Sciences

وزارة التعليم العالي والبحث العلمي
جامعة الجزائر3
كلية العلوم الاقتصادية والعلوم التجارية وعلوم التسيير
قسم العلوم الاقتصادية


# دروس في مقياس رياضيات 1 للسنة الأولى جذع مشترك


**من إعداد الأستاذة: صايفي ويزة**


**السنة الجامعية:**

**2021/2020**

## مقدمة:

بسم الله الرحمان الرحيم والصلاة والسلام على رسوله الكريم وعلى آله وصحبه الطيبين الطاهرين. أما بعد

هذه المطبوعة هي عبارة عن محاضرات في مقياس الرياضيات1 والتي تتضمن دروسًا في التحليل الرياضي حسب البرنامج الوزاري الجديد في مقياس الرياضيات1 والموجه لطلبة السنة الأولى كلية العلوم الاقتصادية، العلوم التجارية وعلوم التسيير وقد كتبت هذه المحاضرات بصورة بسيطة وبطريقة تلائم مستوى طلبة هذه الكلية حيث ركزنا على تبسيط المفاهيم بأمثلة متعددة وتمارين محلولة وأخرى مقترحة للحل كما دعمنا هذه المطبوعة بمواضيع امتحانات بعضها محلولة وأخرى مقترحة حتى يتمكن الطالب من التمرن عليها وإنماء قدراته.

كما ننبه طلبتنا الأعزاء أن مفاهيم مقياس الرياضيات1 هي إحدى الوسائل الهامة في الاقتصاد ولها العديد من التطبيقات في عدة تخصصات التابعة للعلوم الاقتصادية، العلوم التجارية وعلوم التسيير و التي سيتطرق اليها الطالب في السداسيات المقبلة. فالرياضيات هي الإدارة الأولى والأخيرة في حل جميع المشكلات الاقتصادية المعقدة فلا بد على طلبتنا في كلية العلوم الاقتصادية، العلوم التجارية وعلوم التسيير أن يكونوا ملمين ببعض من علوم الرياضيات كالتحليل الرياضي والجبر الخطي إذ نجد غالبا أن الطلبة المتفوقين في الاقتصاد هم الطلبة المتمكنين من علوم الرياضيات.

ونظرا للحجم الساعي المخصص لمقياس الرياضيات1 فلقد ركزنا على تقديم مفاهيم هذا المقياس وتصميم محاضراته دون التطرق والخوض في البراهين لتتناسب مع التوزيع الوزاري الجديد الذي جعل هذا المقياس يقدم خلال سداسي واحد أي ما يعادل 14 محاضرة.

كما أنوه لطلبتنا الأعزاء أنه تم أيضا التطرق إلى بعض المحاور والجوانب التي لها صلة بمحاور المقرر أو توسعة فيه، ففي الأخير فهذه المطبوعة التي تُعد ثمرة تجربتنا في تدريس مقياس الرياضيات1 لعدة سنوات بكلية العلوم الاقتصادية والعلوم التجارية وعلوم التسيير بجامعة الجزائر3 ليست من إبداعنا وإنما هي دروس مستوحاة من مراجع جمعنها وعرضنها بأسلوب رأينه الأنسب لمستوى طلبتنا في الكلية.

في الأخير, نرجو أن يستفيد طلابنا من هذه الدروس وأن يجدوا فيها ما ينفعهم, كما نعدهم أن نسعى إلى تحديث محتويات هذه المطبوعة كلما توفر الجهد و الوقت لذلك.

# الفصل الأول: مبادئ نظرية المجموعات

## 1- المجموعات

**تعريف:** نسمي مجموعة $E$، كل تجمع لأشياء التي تسمى عناصر المجموعة أو نقاط المجموعة. إذا كان عدد عناصر $E$ منته نسميه أصلي $E$ ونرمز له بـ $cardE$، إذا كانت $E$ تحتوي عدد غير منته من العناصر فنقول أن $E$ ذات أصلي غير منته ونكتب $cordE = \infty$.

**أمثلة:**

1) مجموعة الطلبة السنة الأولى $LMD$ علوم اقتصادية وعلوم التسيير.
2) مجموعة الأعداد الطبيعية $\mathbb{N} = \{0,1,2.....\}$
3) مجموعة الأعداد الصحيحة $\mathbb{Z} = \{.....-3,-2,-1,0,1,2,....\}$
4) مجموعة الأعداد الناطقة $\mathbb{Q}$
5) مجموعة الأعداد الحقيقية $\mathbb{R}$
6) مجموعة الحروف الأبجدية اللاتينية $\{a,b,c,d,....\}$

**الانتماء:** لتكن $E$ مجموعة. الكتابة "$x \in E$" تعني أن $x$ هو عنصر من $E$ ونقرأ $x$ ينتمي إلى $E$، إذا كان $x$ لا ينتمي إلى $E$ فنكتب $x \notin E$.

**المجموعة الخالية:**

المجموعة الخالية هي المجموعة التي لا تحتوي على أي عنصر ونرمز لها بـ $\phi$.

**مثال:** $\{x \in \mathbb{R} / x^2 = -1\} = \phi$

**المكممات:** نستعمل في ما يلي الرموز التالية:

- ✓ الكتابة " $\exists x$ " تقرأ "يوجد على الأقل $x$" ويسمى المكمم الوجودي.
- ✓ الكتابة " $\forall x$ " تقرأ "مهما يكن $x$" ويسمى المكمم الكلي.
- ✓ الكتابة " $\exists! x$ " تُقرأ "يوجد $x$ وحيد"

**أجزاء مجموعة**

**تعريــف:** نقول عن مجموعة $A$ أنها محتواة في مجموعة $B$ أو $A$ جزء من المجموعة $B$ إذا كان كل عنصر من $A$ فهو عنصر من $B$ ونكتب $A \subset B$.

$$A \subset B \Leftrightarrow (\forall x, x \in A \Rightarrow x \in B)$$

إذا كان $A$ غير محتواة في $B$ فنكتب $A \not\subset B$ ولدينا

$$A \not\subset B \Leftrightarrow \{\exists x, x \in A \wedge x \notin B\}$$

مجموعة كل أجزاء المجموعة $A$ نرمز لها بـ $P(A)$.

**مثال:** لتكن $A=\{\alpha,\beta,\gamma\}$. عندئذ $P(A)=\{\phi,\{\alpha\},\{\beta\},\{\gamma\},\{\alpha,\beta\},\{\alpha,\gamma\},\{\beta,\gamma\},A\}$

**ملاحظة:** إذا كانت $A$ مجموعة فإن $A \in P(A)$ و $\phi \in P(A)$

**تعريف:** لتكن $A$ و $B$ مجموعتين، نقول عن $A$ و $B$ أنهما متساويتين إذا كان لهما نفس العناصر ونكتب $A=B$.

$$\boxed{\begin{array}{l} A=B \Leftrightarrow (\forall x, x \in A \Leftrightarrow x \in B) \\ A=B \Leftrightarrow (A \subset B) \wedge (B \subset A) \end{array}}$$

**المتممة:** إذا كانت $A$ و $B$ مجموعتين بحيث $A \subset B$. متممة $A$ بالنسبة لـ $B$ هي مجموعة العناصر التي تنتمي إلى $B$ ولا تنتمي إلى $A$ ونرمز لها بـ $C_B A$.

$$\boxed{C_B A=\{x \in B, x \notin A\}}$$

## عمليات على المجموعات:

**التقاطع:** نسمي تقاطع مجموعتين $A$ و $B$، مجموعة العناصر التي تنتمي إلى $A$ وتنتمي إلى $B$ ونرمز لها بـ $A \cap B$.

$$\boxed{A \cap B=\{x, x \in A \wedge x \in B\}} \qquad (\wedge = \text{و})$$

**الاتحاد:** نسمي اتحاد مجموعتين $A$ و $B$، مجموعة العناصر التي تنتمي إلى $A$ أو تنتمي إلى $B$ ونرمز لها بـ $A \cup B$.

$$\boxed{A \cup B=\{x, x \in A \vee x \in B\}} \qquad (\vee = \text{أو})$$

**مثال:** لتكن $A=\{a,b,c,d\}$ ; $B=\{\alpha,\beta,a,c\}$ عندئذ

$$A \cup B=\{a,b,c,d,\alpha,\beta\} \; ; \qquad A \cap B=\{a,c\}$$

**قضية:** إذا كان $A$ و $B$ مجموعتين فإن:

$$(A \cap B \subset B), \qquad (A \cap B \subset A),$$
$$(B \subset A \cup B), \qquad (A \subset A \cup B),$$

**تعريف:** ليكن $A$ و $B$ مجموعتين جزئيين من المجموعة $E$. إذا كان $A \cap B=\phi$ فنقول أن $A$ و $B$ مجموعتين منفصلتين، بالإضافة إذا كان $A \cap B=E$ فنقول أن $E$ هي متممة $B$ في $E$ وأن $B$ هي متممة $A$ في $E$ ونكتب $A=C_E B$ و $B=C_E A$

**ملاحظة:** $C_E \phi=E$ و $C_E^E=\phi$

**مثال:** لتكن $E=\{a,b,c,\alpha,\beta,\gamma\}$ و $A=\{a,b,\gamma\}$ عندئذ $C_E^A=\{b,c,\alpha\}$

**قضية:** لتكن $E$ مجموعة و $A$ و $B$ مجموعتين جزئيين من $E$. عندئذ:

1- $A\subset B\Rightarrow C_E B\subset C_E A$

2- $C_E\left(C_E A\right)=A$

3- $C_E\left(A\cup B\right)=\left(C_E A\right)\cap\left(C_E B\right)$

4- $C_E\left(A\cap B\right)=\left(C_E A\right)\cup\left(C_E A\right)$

**تعريف:** لتكن $\mathbb{F}$ عائلة من $P(E)$, $(\mathbb{F}\subset P(E))$. نقول عن العائلة $\mathbb{F}$ أنها تجزئة لـــ $E$ إذا كان:

**1−** كل عناصر $\mathbb{F}$ منفصلة مثنى مثنى أي $(\forall A\in\mathbb{F},\forall B\in\mathbb{F},A\cap B=\phi)$

**2−** العائلة $F$ تشكل تغطية لـــ $E$ أي $\bigcup\limits_{A\in\mathbb{F}}A=E$

**أمثلة:**

1− نعتبر في مجموعة الأعداد الطبيعية، المجموعات التالية:

$A$ هي مجموعة الأعداد الطبيعية الفردية

$B$ هي مجموعة الأعداد الطبيعية الزوجية

عندئذ العائلة $\mathbb{F}=\{A,B\}$ تشكل تجزئة لـــ $\mathbb{N}$ لأن: $A\cap B=\phi$ و $A\cup B=\mathbb{N}$

2− لتكن $E=\{\alpha,\beta,\gamma,a,b,c\}$. العائلة $F=\{\{\alpha\},\{\beta,\gamma\},\{a\},\{b,c\}\}$ تشكل تجزئة لـــ $E$

**قضية:**

لتكن $E$ مجموعة و $A$ مجموعة جزئية من $E$ عندئذ العائلة $\mathbb{F}=\{A,C_E A\}$ تشكل تجزئة لـــ $E$.

## الفرق بين مجموعتين

إذا كان $A$, $B$ مجموعتين فإن مجموعة جميع العناصر التي تنتمي إلى المجموعة $A$ ولا تنتمي إلـــى المجموعة $B$ تسمى بالفرق بين المجموعتين $A$ و $B$ونرمز لها بـــ $A-B$ أي

$$A-B=\{x,x\in A\wedge x\notin B\}$$

**ملاحظة:** $A-B\neq B-A$

**مثال:** نعتبر المجموعتين $A=\{1,2,3,a,b,c\}$ , $B=\{2,3,c,\alpha,\beta\}$ عندئذ

$$B-A=\{\alpha,\beta\}\quad;\quad A-B=\{1,a,b\}$$

**خواص:** لتكن $A$, $B$, $C$ مجموعات جزئية من $E$، عندئذ لدينا

| | |
|---|---|
| $1/\ A-\phi=A$ | $6/\left(A\cup B\right)\cap C=\left(A\cap C\right)\cup\left(B\cap C\right)$ |
| $2/\ A\cup B=B\cup A$ | $7/\ A\cap\left(B\cup C\right)=\left(A\cap B\right)\cup\left(A\cap C\right)$ |
| $3/\ A\cap B=B\cap A$ | $8/\ A\cup\left(B\cap C\right)=\left(A\cup B\right)\cap\left(A\cup C\right)$ |
| $4/\left(A\cup B\right)\cup C=A\cup\left(B\cup C\right)$ | $9/\left(A\cap B\right)\cup C=\left(A\cup C\right)\cap\left(B\cup C\right)$ |
| $5/\left(A\cap B\right)\cap C=A\cap\left(B\cap C\right)$ | $10/\left(A\cap B\right)\cup C=\left(A\cup C\right)\cap\left(B\cup C\right)$ |

## مجموعة الأعداد الحقيقية

**تعاريف:** لتكن $A$ مجموعة جزئية من $\mathbb{R}$ $(A \subset \mathbb{R})$

- نقول عن $A$ أنها محدودة من الأعلى إذا وجد عدد حقيقي $M$ يحقق: $\forall x \in A, \quad x \leq M$
- نقول عن $A$ أنها محدودة من الأسفل إذا وجد عدد حقيقي $M'$ يحقق: $\forall x \in A, \quad x \geq M'$
- نقول عن $A$ أنها محدودة إذا كانت محدودة من الأعلى ومن الأسفل $\forall x \in A, \quad M' \leq x \leq M$

**أمثلة:**

1. مجموعة الأعداد الطبيعية $\mathbb{N} = \{0,1,2,...\}$ هي مجموعة محدودة من الأسفل وغير محدودة من الأعلى.
2. المجموعة $]-\infty, 4[$ هي مجموعة محدودة من الأعلى وغير محدودة من الأسفل.
3. المجموعة $A = \left\{ \frac{1}{n}, \quad n \in \mathbb{N}^* \right\}$ هي مجموعة محدودة من الأعلى ومحدودة من الأسفل إذن محدودة لأن $\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad 0 \leq \frac{1}{n} \leq 1$
4. المجموعة $]-3,7]$ محدودة من الأعلى ومن الأسفل فهي إذن محدودة.

**تعاريف أخرى:**

- **الحاد الأعلى:** نقول عن $a$ أنه حاد أعلى للمجموعة $A$ إذا كان $\forall x \in A : x \leq a$
- **الحد الأعلى :** الحد الأعلى لـ $A$ هو أصغر الحواد العليا لـ $A$ ونرمز له بـ $\sup A$.
- **الحاد الأدنى:** نقول عن $b$ أنه حاد أدنى لـ $A$ إذا كان $\forall x \in A : x \geq b$
- **الحد الأدنى:** الحد الأدنى لـ $A$ هو أكبر الحواد الدنيا ونرمز له بـ $\inf A$

**مثال 1:** لتكن $A = ]-\infty, 2[$ عندئذ لدينا:

3 هو حاد أعلى لـ $A$، 5 هو حاد أعلى لـ $A$، 100 هو حاد أعلى لـ $A$. بصفة عامة ، كل عدد ينتمي إلى المجال $[2,+\infty[$ هو حاد أعلى لـ $A$ وبما أن أصغر هذه الحواد هو 2 إذن الحد الأعلى لـ $A$ هو 2 أي $supA = 2$

**مثال 2:** لتكن $A = \mathbb{N} = \{0,1,2,.....\}$ عندئذ لدينا كل من 0، $-1$ ، $-3$ ، $-100$ هي حواد دنى لـ $A$، بصفة عامة كل عدد من المجال $]-\infty, 0]$ هو حاد أدنى لـ $\mathbb{N}$ وبما أن أكبر هذه الحواد هو "0" إذن الحد الأدنى لـ $\mathbb{N}$ هو 0 أي $\inf \mathbb{N} = 0$

**نظرية** - كل جزء من $\mathbb{R}$ غير خال ومحدود من الأعلى يتمتع بحد أعلى ($supA$ موجود)

- كل جزء من $\mathbb{R}$ غير خال ومحدود من الأسفل يتمتع بحد أدنى ( $\inf A$ موجود)

**ملاحظة:** يمكن للحد الأعلى لـ $A$ $(supA)$ والحد الأدنى لـ $A$ $(\inf A)$ أن ينتميا إلى $A$ كما يمكنهما أن لا ينتميا.

**العنصر الأكبر والعنصر الأصغر**

- إذا كان الحد الأعلى لـ $A$ ينتمي إلى $A$ $(supA \in A)$ نسميه في هذه الحالة بالعنصر الأكبر ونرمز له بـ $maxA$ ولدينا $maxA = supA$
- إذا كان الحد الأدنى لـ $A$ ينتمي إلى $A$ $(\inf A \in A)$ نسميه في هذه الحالة بالعنصر الأصغر ونرمز له بـ $minA$ ولدينا $minA = infA$

## 2-المجموعات والتطبيقات

**تعريف الدالة:** الدالة لمجموعة $E$ في مجموعة $F$ هي علاقة من $E$ نحو $F$ ترفق بكل عنصر من $E$ عنصرا على الأكثر في $F$.

**ترميز:** نرمز للدالة بصفة عامة بـ $f, g, h, ...$

ونكتب:

$$f : E \to F$$
$$x \mapsto y = f(x)$$

$y = f(x)$ تسمى صورة $x$ بالدالة $f$ و $x$ يسمى بسابقة $y$ بالدالة $f$.

**عمليا:** لتحقيق مفهوم الدالة يجب أن يكون لكل عنصر من المجموعة $E$ صورة على الأكثر في المجموعة $F$. (صورة على الأكثر تدل على وجود صورة أو عدم وجودها).

**مجموعة تعريف دالة:** لتكن $f : E \to F$ دالة. مجموعة تعريف الدالة $f$ هي مجموعة العناصر من $E$ التي لكل منها صورة في $F$ بالدالة $f$ ونرمز لها بـ $D_f$ أو $D$.

**مثال:** لتكن $f, g, h$ ثلاث دوال لـ $\mathbb{R}$ في $\mathbb{R}$ بحيث:

$$h(x) = \sqrt{x+2} \quad ; \quad g(x) = \frac{7x}{x^2-1} \quad ; \quad f(x) = x^2 - 3x + 5$$

عين مجموعة تعريف كل من $f, g, h$.

**الحل:**

- $f(x)$ قابلة للحساب مهما يكن العنصر $x$ إذن $f$ معرفة على $\mathbb{R}$ أي $D_f = \mathbb{R}$
- $g(x)$ قابلة للحساب إذا وفقط إذا كان $x^2 - 1 \neq 0$

$$x^2 - 1 = 0 \Leftrightarrow (x-1)(x+1) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ \vee \\ x = -1 \end{cases}$$

إذن $D_g = \mathbb{R} - \{1, -1\}$

- $h(x)$ قابلة للحساب إذا وفقط إذا كان $x+2$ موجبا أي $x \geq -2$ إذن $D_h = ]-2; +\infty]$

**تعريف التطبيـــق:** التطبيق للمجموعة $E$ في المجموعة $F$ هو علاقة من $E$ نحو $F$ ترفق بكل عنصر من $E$ عنصرا وحيدا في $F$.

**عمليا:** لتحقيق مفهوم التطبيق يجب أن يكون لكل عنصر من المجموعة $E$ صورة واحدة في المجموعة $F$.

**ملاحظات:**

i. كل تطبيق عبارة عن دالة والعكس غير صحيح

ii. كل علاقة ليست بدالة فهي ليست تطبيق

**أمثلة:** نعتبر في $\mathbb{R}$ نحو $\mathbb{R}$ العلاقات التالية:

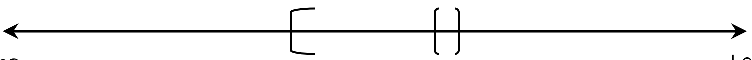
$$f(x)=\begin{cases} x^2+1, x>2 \\ -x+3, x<0 \end{cases} \quad , \quad g(x)=\begin{cases} x-e^x, & x\geq -1 \\ 3x-2 & x\leq 3 \end{cases}$$

$$h(x)=\begin{cases} e^x-2, & x\geq 0 \\ x^2-3x, & x\leq 0 \end{cases} \quad , \quad \ell(x)=\begin{cases} e^x-x, & x\geq 0 \\ -x+1, & x<0 \end{cases}$$

من بين هذه العلاقات، حدد التي هي دالة والتي هي تطبيق؟

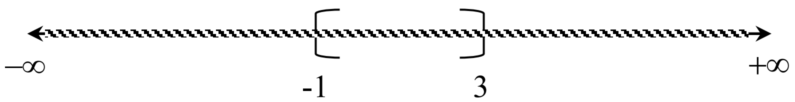
**الحل:**

**1)** العلاقة $f$:



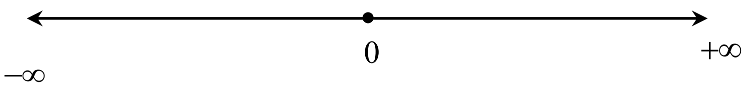

كل عنصر $x$ من المجال $]-\infty,0[$ له صورة وحيدة وهي $-x+3$ وإن كل عنصـــر $x$ مـــن المجـــال $]2,+\infty[$ له صورة وحيدة وهي $x^2+1$ لكن العناصر الموجودة في المجال $[0,2]$ ليس لها صـــورة إذن العلاقة $f$ دالة وليست تطبيق.

**2)** العلاقة $g$:




لاحظ أن كل عنصر $x$ من المجال $[-1,3]$ يتمتع بصورتين مختلفتين هما $x-e^x$ و $3x-2$ إذن العلاقة $g$ ليست دالة وبالتالي ليست تطبيق.

**3)** العلاقة $h$




لاحظ أن العنصر "0" له صورتين مختلفتين هما $-$ و $0$ بالعلاقة $h$ إذن $h$ ليست دالة وليس تطبيق.

**ملاحظة:** لو كانتا صورتي "0" متساويتين بالعلاقة $h$ عندئذ $h$ عبارة عن دالة وتطبيق في نفس الوقت.

**4) العلاقة $\ell$:**

كل عنصر $x$ من $\mathbb{R}$ له صورة وحيدة بالعلاقة $\ell$ إذن $\ell$ دالة وتطبيق.

**ملاحظة:** كل دالة مقتصرة على مجموعة تعريفها عبارة عن تطبيق.

**مثال:** نعتبر العلاقة التالية:

$$\begin{aligned} f :\ & \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \\ & x \longmapsto f(x) = \frac{x+1}{x-1} \end{aligned}$$

1. العلاقة $f$ دالة لأن كل عنصر $x$ من $\mathbb{R}$ له صورة على الأكثر
2. العلاقة $f$ ليست تطبيق لأن العنصر "1" ليس له صورة.
3. مجموعة تعريف الدالة $f$ هي $D_f = \mathbb{R} - \{1\}$

إذن حسب الملاحظة السابقة فإن $\begin{aligned} f :\ & \mathbb{R}-\{1\} \longrightarrow \mathbb{R} \\ & x \longmapsto \frac{x+1}{x-1} \end{aligned}$ عبارة عن تطبيق، أي إذا استبدلنا مجموعة البدء $\mathbb{R}$ بمجموعة التعريف $D_f$ فإن الدالة $f$ تصبح تطبيقا.

## أنواع التطبيقات:

### 1/ التطبيق الغامر:

نقول عن التطبيق $f : E \to F$ أنه غامرا إذا كان كل عنصر من $F$ له سابقة على الأقل في $E$ بالتطبيق $f$ أي: $f$ غامر $\Leftrightarrow \forall y \in F, \exists x \in E : y = f(x)$.

بمعنى آخر $f$ غامر $\Leftrightarrow$ من أجل كل $y \in F$، المعادلة $y = f(x)$ تقبل حلا على الأقل في $E$

**مثال 1:** برهن أن التطبيق $\begin{aligned} f :\ & \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^+ \\ & x \longmapsto x^2 \end{aligned}$ غامرا

**الحل:** ليكن $y \in \mathbb{R}^+$، لنبين أن المعادلة $y = f(x)$ تقبل حلا على الأقل.

$$y = f(x) \Rightarrow y = x^2 \Rightarrow x = \sqrt{y} \vee x = -\sqrt{y}$$

إذن كل عنصر $y \in \mathbb{R}^+$ له سابقتان هما $\sqrt{y}$ و $-\sqrt{y}$ ومنه $f$ غامرا.

**مثال 2:** بين أن التطبيق $\begin{aligned} f :\ & \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ & x \to x^2 \end{aligned}$ ليس غامرا.

**الحل:** المعادلة $y = x^2$ لا تقبل حلول لما $y$ سالبا تماما أي أن الأعداد السالبة ليس لها سابقة بالتطبيق $f$ وبالتالي $f$ ليس غامرا.

### 2/ التطبيق المتباين:

نقول عن التطبيق $f : E \to F$ أنه متباينا إذا كان كل عنصر من $F$ له سابقة على الأكثر في $E$ بالتطبيق $f$ أي

$f$ متباين $\Leftrightarrow$ من أجل كل $y$ من $F$، المعادلة $y = f(x)$ تقبل حلا على الأكثر في $E$

بمعنى آخر:

$$\left(\forall x, x' \in E, f(x) = f(x') \Rightarrow x = x'\right) \Leftrightarrow \text{متباين } f$$

أو

$$\left(\forall x, x' \in E, x \neq x' \Rightarrow f(x) \neq f(x')\right) \Leftrightarrow \text{متباين } f$$

**مثال1:** أثبت أن التطبيق $\begin{array}{l} f:\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longmapsto f(x) = x^3 + 1 \end{array}$ متباينا.

**الحل:** ليكن $x, x'$ من $\mathbb{R}$. هل المعادلة $f(x) = f(x')$ تؤدي فقط إلى أن $x = x'$؟

$$f(x) = f(x') \Rightarrow x^3 + 1 = x'^3 + 1 \Rightarrow x^3 = x'^3 \Rightarrow x = x'$$

ومنه $f$ متباين.

**مثال 2:** أثبت أن التطبيق $\begin{array}{l} f:\mathbb{R} \to \mathbb{R}^+ \\ x \to x^2 \end{array}$ ليس متباين.

**الحل**

**الطريقة 1:** لاحظ أن: لما $y \geq 0$ فإن المعادلة $y = x^2$ تقبل حلين هما $y = \pm\sqrt{x}$ وبالتالي $f$ ليس متباين.

**الطريقة 2:** ليكن $x$ و $x'$ من $\mathbb{R}$ عندئذ:

$$f(x) = f(x') \Rightarrow x^2 = x'^2 \Rightarrow \begin{cases} x = x' \\ \vee \\ x = -x' \end{cases}$$

أي أن المعادلة $f(x) = f(x')$ لا تؤدي فقط إلى $x = x'$ ومنه $f$ ليس متباين.

## 3/ التطبيق التقابلي:

نقول عن التطبيق $f: E \to F$ أنه تقابلي إذا كان غامرا ومتباينا أي كل عنصر من $F$ له سابقة وحيدة في $E$ بالتطبيق $f$ أي:

$$\boxed{\forall y \in F, \exists! x \in E: y = f(x) \Leftrightarrow} \boxed{\text{تقابلي } f}$$

بمعنى آخر:

$f$ تقابلي $\Leftrightarrow$ من أجل كل $y$ من $F$، المعادلة $y = f(x)$ تقبل حلا وحيدا في E

**مثال 1:** اثبت أن التطبيق $\begin{array}{l} f:\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longmapsto x^3 \end{array}$ تقابلي

**الحل:** ليكن $y \in \mathbb{R}$, هل المعادلة $y = f(x)$ تقبل حلا وحيدا؟

لدينا: $y = f(x) \Leftrightarrow y = x^3 \Leftrightarrow x = \sqrt[3]{y}$

إذن المعادلة $y = x^3$ تقبل حلا وحيد، وهو $\sqrt[3]{y}$ ومنه $f$ تقابلي.

**مثال 2:** أثبت أن التطبيق $\begin{aligned} f : \mathbb{R} &\to \mathbb{R}^+ \\ x &\mapsto x^2 \end{aligned}$ ليس تقابلي.

**الحل:** رأينا في الأمثلة السابقة أن التطبيق $f$ غامرا و ليس متباينا إذن فهو ليس تقابلي

**تطبيقات أساسية:**

**التطبيق الحيادي:** التطبيق الحيادي للمجموعة $E$ (أو التطبيق المطابق) هو التطبيق الذي نرمز له بـــ $Id_E$ والمعرف كما يلي:

$$\begin{aligned} Id_E : E &\to E \\ x &\mapsto Id_E(x) = x \end{aligned}$$

**التطبيق الثابت:** التطبيق الثابت من المجموعة $E$ نحو المجموعة $F$ هو التطبيق المعرف بـــ:

$$\begin{aligned} f : E &\to F \\ x &\mapsto f(x) = a \end{aligned}$$

حيث $a$ عنصرا ثابتا من $F$

**تساوي تطبيقين**

**تعريف:** نقول عن تطبيقين $f$ و $g$ أنهما متساويين إذا كان:

1. لهما نفس مجموعة البدء $E$ ونفس مجموعة الوصول $F$
2. $\forall x \in E : f(x) = g(x)$

**مثال:** نعتبر التطبيقات التالية:

$\begin{aligned} f : \mathbb{R} &\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto x^2 \end{aligned}$ ، $\begin{aligned} g : \mathbb{R} &\to \mathbb{R}^+ \\ x &\mapsto x^2 \end{aligned}$ ، $\begin{aligned} h : \mathbb{R}^+ &\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto x^2 \end{aligned}$ ، $\begin{aligned} k : \mathbb{R}^+ &\to \mathbb{R}^+ \\ x &\mapsto x^2 \end{aligned}$

عندئذ لدينا:

$f \neq g$ لأن ليس لهما نفس مجموعة الوصول

$f \neq h$ لأن ليس لهما نفس مجموعة البدأ

$f \neq k$ لأن ليس لهما نفس مجموعة البدأ ونفس مجموعة الوصول

**تركيب تطبيقين:**

ليكن $f : E \to F$ و $g : F \to G$ تطبيقين. مركب $f$ و $g$ بهذا الترتيب هو التطبيق الذي نرمز له بـــــ $g \circ f$ والمعرف كما يلي:

$$\begin{aligned} g \circ f : E &\to G \\ x &\mapsto g \circ f(x) = g(f(x)) \end{aligned}$$

**مثال:** نعتبر التطبيقين

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R}^+ &\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto \sqrt{x} \end{aligned} \qquad \begin{aligned} g : \mathbb{R} &\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto g(x) = e^x + x \end{aligned}$$

عندئذ
$$g\circ f:\mathbb{R}^{+}\to\mathbb{R}$$
$$x\mapsto g\circ f(x)$$

حيث
$$g\circ f(x)=g(f(x))=e^{\sqrt{x}}+\sqrt{x}$$

**التطبيق العكسي:**

ليكن $f:E\to F$, $x\mapsto f(x)$ تطبيقا تقابليا. التطبيق العكسي للتطبيق $f$ هو التطبيق الذي نرمز له بـــ $f^{-1}$ والمعرف كما يلي:
$$f^{-1}:F\to E$$
$$y\mapsto x=f^{-1}(y)$$

**ملاحظة:** لإيجاد عبارة $f^{-1}$ نحل المعادلة $y=f(x)$ ونبحث عن $x$ بدلالة $y$.

**مثال:** نعتبر التطبيق
$$f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$$
$$x\mapsto f(x)=x^{3}+1$$

أثبت أن $f$ تقابلي ثم أوجد تطبيقه العكسي $f^{-1}$.

**الحل:** ليكن $y\in\mathbb{R}$ لنحل المعادلة $y=f(x)$
$$y=f(x)\Leftrightarrow y=x^{3}+1\Leftrightarrow x^{3}=y-1\Leftrightarrow x=\sqrt[3]{y-1}$$

لاحظ من أجل كل $y\in\mathbb{R}$ المعادلة $y=f(x)$ تقبل حلا وحيدا وهو $\sqrt[3]{y-1}$ إذن $f$ تقـــابلي وتطبيقــه العكسي هو:
$$f^{-1}:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$$
$$y\mapsto f^{-1}(y)=\sqrt[3]{y-1}$$

ويمكن كتابة أيضا
$$f^{-1}:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$$
$$x\mapsto f^{-1}(x)=\sqrt[3]{x-1}$$

**الصورة والصورة العكسية:**

**تعريف:** ليكن $f:E\to F$ تطبيق و $A\subset E$ و $M\subset F$ مجموعتين جزئيتين من E و F على الترتيب.

- نسمي صورة المجموعة $A$ بالتطبيق $f$، مجموعة صور عناصر $A$ ونرمز لها بـــ $f(A)$ أي
$$\boxed{f(A)=\{f(x),\ x\in A\}}$$
- نسمي الصورة العكسية للمجموعة $M$ بالتطبيق $f$ مجموعة سوابق عناصـــر $M$ بـــالتطبيق $f$ ونرمز لها بـــ $f^{-1}(M)$ أي
$$\boxed{f^{-1}(M)=\{x\in E\ ,f(x)\in M\}}$$

ولدينا
$$\boxed{y\in f(A)\Leftrightarrow\exists x\in A:y=f(x)}$$
$$\boxed{x\in f^{-1}(M)\Leftrightarrow f(x)\in M}$$

**ملاحظة:** ليكن $f:E\to D$ و $g:F\to G$ تطبيقين، عندئذ يمكن إيجاد $g\circ f$ إذا كان $f(E)\subset F$
$$g\circ f:E\to G$$
$$x\mapsto g(f(x))$$

**مثال:** نعتبر التطبيق $\begin{array}{l} f:\mathbb{R}\to\mathbb{R} \\ x\mapsto x^2-1 \end{array}$ و المجموعتين $A=\{0,1,2\}$ ، $M=\{-1,0,3\}$

أوجد $f(A)$ و $f^{-1}(M)$.

**الحل:** لدينا

$$f(A)=\{f(x),\quad x\in A\}=\{f(0),f(1),f(2)\}=\{-1,0,3\}$$

$$f^{-1}(M)=\{x\in\mathbb{R},\ f(x)\in M\}$$

$$f(x)=-1\Leftrightarrow x^2-1=-1\Rightarrow x^2=0\Rightarrow x=0$$

$$f(x)=0\Leftrightarrow x^2-1=0\Rightarrow x^2=1\Rightarrow x=1\vee x=-1$$

$$f(x)=3\Leftrightarrow x^2-1=3\Rightarrow x^2=4\Rightarrow x=2\vee x=-2$$

إذن $f^{-1}(M)=\{0,1,-1,2,-2\}$

**قضية:** لتكن $f:E\to F$ و $A,B\subset E$ و $N,M\subset F$ عندئذ:

1- $f(A\cup B)=f(A)\cup f(B)$

2- $f(A\cap B)\subset f(A)\cap f(B)$

3- $f^{-1}(M\cup B)=f^{-1}(M)\cup f^{-1}(N)$

4- $f^{-1}(M\cap B)=f^{-1}(M)\cap f^{-1}(N)$

5- $f^{-1}(C_F M)=C_E f^{-1}(M)$

6- $f$ متباين $\Rightarrow f(A\cap B)=f(A)\cap f(B)$

**ملاحظة:** المجموعتين $f(C_E A)$ و $C_F f(A)$ غير قابلتين للمقارنة دوما.

# الفصل الثاني: المتتاليات العددية والسلاسل العددية

## 1- المتتاليات العددية

**تعريف:** نسمي متتالية عددية كل تطبيق $u$ من $\mathbb{N}$ نحو $\mathbb{R}$ يرفق بكل عدد طبيعي $n$ العدد الحقيقي $u(n)$ ونرمز له بـ $u_n$ ويُسمى $u_n$ بالحد العام للمتتالية.

$$u:\mathbb{N}\to\mathbb{R}$$
$$n\mapsto u(n)=u_n$$

نرمز للمتتالية بـ $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ أو $(u_n)_{n\geq 0}$ أو باختصار $(u_n)_n$.

**ملاحظة:** يمكن للمتتالية أن تكون معرفة ابتداءً من رتبة معينة $n_0$ ونكتب في هذه الحالة $(u_n)_{n\geq n_0}$.

**أمثلة:**

1. المتتالية ذات الحد العام $u_n=\sqrt{n-3}$ معرفة من أجل $n\geq 3$ ونكتب هنا $(u_n)_{n\geq 3}$.
2. المتتالية ذات الحد العام $v_n=\dfrac{1}{\ln(n-2)}$ معرفة من أجل $n\geq 4$ ونكتبْ $(v_n)_{n\geq 4}$.

**الطرق المختلفة لإعطاء متتالية:** يمكن أن نُعطي المتتالية على أحد الأشكال التالية:

**1/ الشكل الأول:** بإعطاء عبارة الحد العام

**أمثلة:** $u_n=7n^2-7, n\in\mathbb{N}$ ، $v_n=\dfrac{2n+3}{n+1}, n\in\mathbb{N}$ ، $w_n=\ln(n^2+5), n\in\mathbb{N}$

**2/ الشكل الثاني:** بواسطة دالة $f$ أي من الشكل $u_n=f(n)$. حيث $f$ دالة معرفة على المجال $[0,+\infty[$

**أمثلة:**

لتكن $f$ دالة معرفة بـ $f(x)=\dfrac{e^x+1}{x+3}$ ولتكن $(u_n)$ متتالية معرفة بـ $u_n=f(n)$، عندئذ:

$$u_n=\frac{e^n+1}{n+3},\quad n\in\mathbb{N}$$

لتكن $f$ دالة معرفة بـ $f(x)=\ln(e^x+1)$ ولتكن $(v_n)$ متتالية معرفة بـ $v_n=f(n)$، عندئذ:

$$v_n=\ln(e^n+1),\quad n\in\mathbb{N}$$

**3/ الشكل الثالث:** بواسطة علاقة تراجعية كأن يُعطى الحد الأول $u_0$ وعلاقة مثلا بين $u_n$ و $u_{n+1}$ أي من الشكل:

$$\begin{cases} u_0=a \\ u_{n+1}=f(u_n) \end{cases}$$

مع $f$ دالة معرفة على مجال $I$ حيث من أجل كل $x$ من $I$ فإن $f(x)\in I$ أي $(f(I)\subset I)$ و $a$ عدد حقيقي.

**أمثلة:**

لتكن $(u_n)$ متتالية تراجعية معرفة بالعلاقة: $\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_{n+1} = \sqrt{u_n + 3} = f(u_n) \end{cases}$

الدالة $f$ هنا معرفة بـــ $f(x) = \sqrt{x+3}$

لتكن $(v_n)$ متتالية تراجعية معرفة بالعلاقة $\begin{cases} v_0 = 0 \\ v_{n+1} = \dfrac{2v_n + 1}{v_n + 1} = f(v_n) \end{cases}$

الدالة $f$ في هذه الحالة معرفة بـــ $f(x) = \dfrac{2x+1}{x+1}$

**ملاحظة 1:** إعطاء الحد الأول $u_0$ وعلاقة تراجعية $u_{n+1} = f(u_n)$ لا تسمح دوما بإعطاء المتتالية $(u_n)_n$ أي أن الشرط $f(I) \subset I$ مهم جدا كما يوضحه المثال التالي:

**مثال:** نعتبر التابع $f$ المعرف بـــ $f(x) = \dfrac{2}{2-x}$، إذا كان $u_0 = 1$ فإن $u_1 = f(u_0) = 2$

لكن التابع $f$ غير معرف عند "2" وبالتالي الحد $u_2 = f(u_1)$ غير معرف وبالتالي المتتالية غير معرفة.

**ملاحظة 2:** في المتتالية التراجعية لا يمكن حساب الحد $n$ إلا إذا تم حساب الحدود $(n-1)$ السابقة.

**ملاحظة 3:** حذار من الالتباس بين المتتاليتين المعرفتين بـــ: $u_n = f(n)$ و $u_{n+1} = f(u_n)$

**مبدأ التراجع** نعتبر خاصية متعلقة بعدد طبيعي $n$ والتي نرمز لها بـــ $P(n)$، عندئذ الخاصية $P(n)$ إما تكون صحيحة أو خاطئة.

**نظرية:** لتكن $P(n)$ خاصية متعلقة بعدد طبيعي $n$ إذا كان الشرطين التاليين محققين

1. $P(0)$ صحيحة
2. مهما يكن $n \geq 0$، إذا كانت $P(n)$ صحيحة فإن $P(n+1)$ صحيحة .

عندئذ الخاصية $P(n)$ صحيحة مهما يكن العدد الطبيعي $n\,(n \geq 0)$

**المتتاليات الرتيبة (المتتاليات المتزايدة والمتناقصة)**

**تعريف:** لتكن $(u_n)_{n\geq 0}$ متتالية عددية.

- نقول عن المتتالية $(u_n)_n$ أنها متزايدة إذا كان $\forall n \in \mathbb{N}: \quad u_{n+1} \geq u_n$
- نقول عن $(u_n)$ أنها متناقصة إذا كان $\forall n \in \mathbb{N}: \quad u_{n+1} \leq u_n$
- نقول عن $(u_n)$ أنها متزايدة تماما إذا كان $\forall n \in \mathbb{N}: \quad u_{n+1} > u_n$
- نقول عن $(u_n)$ أنها متناقصة تماما إذا كان $\forall n \in \mathbb{N}: \quad u_{n+1} < u_n$
- نقول عن $(u_n)$ أنها ثابتة إذا كان $\forall n \in \mathbb{N}: \quad u_{n+1} = u_n$
- نقول عن $(u_n)$ أنها رتيبة تماما إذا كانت متزايدة تماما أو متناقصة تماما.

**كيفية إثبات رتابة متتالية:** هناك عدة طرق لإثبات رتابة متتالية نذكر من بينها:

**a/ الطريقة الأولى:** بدراسة إشارة الفرق $u_{n+1}-u_n$

**أمثلة:** أدرس رتابة كل من المتتاليات التالية المعرفة بـــ:

$$u_n=n^2-n-2 \ ، \ v_n=\frac{2n+3}{n+2} \ ، \ t_n=e^{3n-2} \ ، \ \begin{cases} w_0=1 \\ w_{n+1}=\ln\left(e^{w_n}+2\right) \end{cases}$$

**الحل:**

**1/** دراسة رتابة $(u_n)$: لدينا

$$u_{n+1}-u_n=\left[(n+1)^2-(n+1)-2\right]-\left[n^2-n-2\right]=2n\geq 0$$

إذن $(u_n)$ متزايدة.

**2/** دراسة رتابة $(v_n)$ : لدينا

$$v_{n+1}-v_n=\frac{2(n+1)+3}{(n+1)+2}-\frac{2n+3}{n+2}=\frac{2n+5}{n+3}-\frac{2n+3}{n+2}=\frac{1}{(n+3)(n+2)}>0$$

إذن $(v_n)$ متزايدة (تماما).

**3/** دراسة رتابة $(t_n)$ لدينا: $t_{n+1}-t_n=e^{3(n+1)-2}-e^{3n-2}=e^{(3n-2)+3}-e^{3n-2}=e^{3n-2}\left[e^3-1\right]\geq 0$

لأن $e^{3n-2}>0$ و $e^3-1>0$ ومنه $(t_n)$ متزايدة.

**4/** دراسة رتابة $(w_n)$: لدينا: $e^{w_{n+1}}=e^{\ln\left(e^{w_n}+2\right)}=e^{w_n}+2$

$$e^{w_{n+1}}=e^{w_n}+2\Rightarrow e^{w_{n+1}}\geq e^{w_n}\Rightarrow \ln\left(e^{w_{n+1}}\right)\geq \ln\left(e^{w_n}\right)\Rightarrow w_{n+1}\geq w_n$$

ومنه $(w_n)$ متزايدة.

**5/** دراسة رتابة $(r_n)$ : $r_n=\frac{1}{\sqrt{n}}$ مع $n\geq 1$

$$r_{n+1}-r_n=\frac{1}{\sqrt{n+1}}-\frac{1}{\sqrt{n}}=\frac{\sqrt{n}-\sqrt{n+1}}{\sqrt{n(n+1)}}=\frac{\left(\sqrt{n}-\sqrt{n+1}\right)\left(\sqrt{n}+\sqrt{n+1}\right)}{\sqrt{n(n+1)}\left(\sqrt{n}+\sqrt{n+1}\right)}$$

ومنه:

$$r_{n+1}-r_n=\frac{n-(n+1)}{\sqrt{n(n+1)}\left(\sqrt{n}+\sqrt{n+1}\right)}=\frac{-1}{\sqrt{n(n+1)}\left(\sqrt{n}+\sqrt{n+1}\right)}\leq 0,\quad \forall n\geq 1$$

ومنه: $(r_n)_{n\geq 1}$ متناقصة.

**b/ الطريقة الثانية:** بمقارنة النسبة $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ بالعدد 1

هذه الطريقة تُطبق إذا كان كل حدود المتتالية موجبة تماما $(\forall n\in\mathbb{N}:u_n>0)$ أو كل حدود المتتالية سالبة تماما $(\forall n\in\mathbb{N}:u_n<0)$ ونلخص ذلك في الجدول التالي:

| | |
|---|---|
| إذاكان $\forall n\in\mathbb{N}: u_n>0$ : | إذا كان $\frac{u_{n+1}}{u_n}\geq 1$ فإن المتتالية $(u_n)$ متزايدة. |
| | إذا كان $\frac{u_{n+1}}{u_n}\leq 1$ فإن المتتالية $(u_n)$ متناقصة. |
| إذاكان: $\forall n\in\mathbb{N}: u_n<0$ | إذا كان $\frac{u_{n+1}}{u_n}\geq 1$ فإن المتتالية $(u_n)$ متناقصة. |
| | إذا كان $\frac{u_{n+1}}{u_n}\leq 1$ فإن المتتالية $(u_n)$ متزايدة. |

**أمثلة:** أدرس رتابة المتتاليات التالية المعرفة بـــ:

$$u_{n+1}=\frac{2^n}{n}, n\geq 1; \quad ، \quad v_n=\frac{3^n}{5^n},\quad n\in\mathbb{N} \quad ، w_n=\frac{-2}{n^2},\quad n\geq 1 \quad ، \quad \begin{cases} t_0=1 \\ t_{n+1}=\frac{7t_n+3}{2}\end{cases}$$

**الحل:**

**1/** دراسة رتابة $(u_n)$: لدينا:

$$\frac{u_{n+1}}{u_n}=\frac{\frac{2^{n+1}}{n+1}}{\frac{2^n}{n}}=\frac{2^{n+1}}{n+1}\times\frac{n}{2^n}=\frac{2.2^{n+1}}{n+1}\times\frac{n}{2^n}=\frac{2n}{n+1}$$

وبما أن $n\geq 1$ إذن $n+n\geq n+1$ أي $2n\geq n+1$ وبالتالي $\frac{2n}{n+1}\geq 1$ أي $\frac{u_{n+1}}{u_n}\geq 1$ ومنه المتتالية $(u_n)$ متزايدة (مع العلم أن $u_n>0, \forall n\geq 1$ ).

**2/** دراسة رتابة $(v_n)$ : لدينا: $\frac{v_{n+1}}{v_n}=\frac{3^{n+1}}{5^{n+1}}\times\frac{5^n}{3^n}=\frac{3\times 3^n}{5\times 5^n}\times\frac{5^n}{3^n}=\frac{3}{5}<1$

وبما أن $\forall n\in\mathbb{N}\quad v_n>0,$ إذن $(v_n)$ متزايدة.

**3/** دراسة رتابة $(t_n)$ : لاحظ أولا أن كل حدود المتتالية موجبة تماما و أن

$$\frac{t_{n+1}}{t_n}=\frac{7t_n+3}{2t_n}=\frac{7t_n}{2t_n}+\frac{3}{2t_n}=\frac{7}{2}+\frac{3}{2t_n}\geq\frac{7}{2}>1$$

ومنه المتتالية $(t_n)$ متزايدة (تماما).

**4/** دراسة رتابة $(w_n)$ : لاحظ أولا أن كل حدود المتتالية سالبة تماما وأن

$$\frac{w_{n+1}}{w_n}=\frac{\frac{-2}{(n+1)^2}}{\frac{-2}{n^{2}}}=\frac{-2}{(n+1)^2}\times\frac{n^2}{-2}=\frac{n^2}{(n+1)^2}<1 \qquad (\text{لأن } n<n+1)$$

إذن المتتالية $(w_n)$ متزايدة.

**c/ الطريقة الثالثة:** بدراسة رتابة دالة:

**نظرية:** إذا كانت $(u_n)$ متتالية عددية معرفة بـــ $u_n = f(n), \forall n \in \mathbb{N}$ عندئذ:
- إذا كانت $f$ متزايدة فإن المتتالية $(u_n)$ متزايدة.
- إذا كانت $f$ متناقصة فإن المتتالية $(u_n)$ متناقصة.

**أمثلة:** أدرس رتابة المتتاليات التالية المعطاة بـــ:

$$u_n = \frac{3n+2}{2n+3}, n \in \mathbb{N} \text{ ، } v_n = e^{3\sqrt{n+1}} \text{ ، } w_n = \frac{n+3}{\ln(n+3)} \text{ ، } t_n = \sqrt{n+3} - n$$

**الحل:**

**1/** دراسة رتابة $(u_n)$: نضع $u_n = \frac{3n+2}{2n+3} = f(n)$ ، حيث $f(x) = \frac{3x+2}{2x+3}$

لندرس رتابة $f$: لدينا: $f'(x) = \frac{3(2x+3)-2(3x+2)}{(2x+3)^2} = \frac{5}{(2x+3)^2} > 0$

إذن الدالة $f$ متزايدة وبالتالي المتتالية $(u_n)$ متزايدة.

**2/** دراسة رتابة $(v_n)$ : نضع $v_n = e^{3\sqrt{n+1}} = f(n)$ حيث $f(x) = e^{3\sqrt{x+1}}$

لندرس رتابة $f$: لدينا: $f'(x) = \frac{3}{2\sqrt{x+1}} e^{3\sqrt{x+1}} \geq 0 \quad \forall x \in \ ]0+\infty[$

ومنه $f$ متزايدة وبالتالي المتتالية $(v_n)$ متزايدة.

**3/** دراسة رتابة $(w_n)$ : نضع $f(n) = \frac{n+3}{\ln(n+3)} = w_n$ . الدالة $f$ هنا معطاة بـــ $f(x) = \frac{x+3}{\ln(x+3)}$

لدينا: $$f'(x) = \frac{\ln(x+3) - \frac{x+3}{x+3}}{[\ln(x+3)]^2} = \frac{\ln(x+3)-1}{[\ln(x+3)]^2} \geq \frac{\ln(3)-1}{[\ln(x+3)]^2} \geq 0$$

ومنه $f$ متزايدة على $[0,+\infty[$ وبالتالي $(u_n)$ متزايدة.

**4/** دراسة رتابة $(t_n)$: نضع: $t_n = \sqrt{n+3} - n = f(n)$ مع $f(x) = \sqrt{x+3} - x$

لندرس رتابة $f$ : لدينا: $f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x+3}} - 1 \leq 0, \forall x \in [0,+\infty[$

ومنه الدالة $f$ متناقصة وبالتالي المتتالية $(u_n)$ متناقصة.

**d/ الطريقة الرابعة:** باستعمال البرهان بالتراجع

**أمثلة:** أدرس رتابة المتتالية $(u_n)_n$ المعرفة بالعلاقة التراجعية:

$$\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_{n+1} = \sqrt{u_n + 2} \end{cases}$$

**الحل:** نعتبر الخاصية $P(n)$ المعطاة بـــ: $P(n): u_{n+1} \geq u_n, n \in \mathbb{N}$

لنتأكد من صحة القضية $P(n)$

- لاحظ أولا أن $P(0)$ صحيحة لأن $u_1=\sqrt{u_0+2}=\sqrt{3}\geq u_0$ ، $[u_1\geq u_0]$

-نفرض الآن أن $P(n)$ صحيحة اي $[u_{n+1}\geq u_n]$ ونبرهن صحة $P(n+1)$ اي $(u_{n+2}\geq u_{n+1})$

لدينا: $u_{n+2}=\sqrt{u_{n+1}+2}\geq\sqrt{u_n+2}=u_{n+1}$ ومنه: $P(n+1)$ صحيحة.

حسب مبدأ البرهان بالتراجع القضية $P(n)$ دوما صحيحة مهما يكن $n\in\mathbb{N}$ وبالتالي:

$u_{n+1}\geq u_n,\forall n\in\mathbb{N}$ إذن المتتالية $(u_n)$ متزايدة.

**e/ الطريقة الخامسة (بمقارنة $u_1$ و $u_0$)**

تُطبق هذه الطريقة فقط في حالة إذا كانت $(u_n)$ معرفة بالعلاقة التراجعية من الشكل: $\begin{cases}u_0=a\\ u_{n+1}=f(u_n)\end{cases}$

وفي هذه الحالة نطبق النظرية التالية:

**نظرية:** لتكن $(u_n)_n$ متتالية تراجعية معرفة بـــ: $\begin{cases}u_0=a\\ u_{n+1}=f(u_n)\end{cases}$ حيث $f$ دالة متزايدة، عندئذ لدينا:

- إذا كان $u_1>u_0$ فإن $(u_n)$ متزايدة.
- إذا كان $u_1<u_0$ فإن $(u_n)_n$ متناقصة.

**مثال:** أدرس رتابة المتتاليتين التاليتين

$$\begin{cases}u_0=3\\ u_{n+1}=\sqrt{u_n+1}\end{cases} \quad ، \quad \begin{cases}v_0=3\\ v_{n+1}=\sqrt{v_n+1}\end{cases}$$

**الحل:**

**1/** دراسة رتابة $(u_n)$: نضع $u_{n+1}=\sqrt{u_n+1}=f(u_n)$ مع $f(x)=\sqrt{x+1}$. لندرس الآن رتابة $f$

لدينا: $\forall x\geq 0,\quad f'(x)=\frac{1}{2\sqrt{x+1}}>0$. إذن الدالة $f$ متزايدة.

وبمأن $u_1=\sqrt{u_0+1}=\sqrt{3+1}=2<u_0$ إذن حسب النظرية السابقة المتتالية $(u_n)$ **متناقصة).**

**2/** دراسة رتابة $(v_n)$ : نضع $v_{n+1}=\sqrt{v_n+1}=f(v_n)$ مع $f(x)=\sqrt{x+1}$

حسب ما سبق الدالة $f$ متزايدة. وبمأن $v_1=\sqrt{v_0+1}=\sqrt{1}=1>v_0$. إذن حسب النظرية $(v_n)$ متزايدة.

**ملاحظة:** رغم إن الدالة $f$ هي نفسها في المتتاليتين إلا أن المتتالية الأولى متناقصة والأخرى متزايدة (تأثير $u_1$ و $u_0$).

## المتتاليات المحدودة

**تعريف1:**

نقول عن المتتالية $(u_n)_n$ أنها محدودة من الأعلى إذا وجد عدد حقيقي $M$ يحقق $\forall n\in\mathbb{N}:\ u_n\leq M$

**أمثلة:** نعتبر المتتاليات التالية المعرفة بـــ:

$$w_n = 5\cos(n^2+3) \text{ ، } v_n = e^{-n}+3; \quad n\in\mathbb{N} \text{ ، } u_n = \frac{1}{n+1}, \quad n\in\mathbb{N}$$

عندئذ:

- المتتالية $(u_n)_n$ محدودة من الأعلى لأن: $u_n = \frac{1}{n+1} \le 1, \quad \forall n\in\mathbb{N}$
- المتتالية $(v_n)$ محدودة من الأعلى لأن: $v_n = e^{-n}+3 \le 1+3 = 4, \quad \forall n\in\mathbb{N}$
- المتتالية $(w_n)$ محدودة من الأعلى لأن: $w_n = 5\cos(n^2+3) \le 5, \quad \forall n\in\mathbb{N}$

**تعريف 2:**

نقول عن المتتالية $(u_n)_n$ أنها محدودة من الأسفل إذا وجد عدد حقيقي $M'$ يحقق $\forall n\in\mathbb{N}: u_n \ge M'$

**أمثلة:** نعتبر المتتاليات المعرفة بـــ:

$$w_n = \sin(-4n+3) \text{ ، } v_n = \sqrt{n+5} \text{ ، } u_n = n^2+3$$

عندئذ:

- المتتالية $(u_n)$ محدودة من الأسفل لأن: $u_n = n^2+3 \ge 3, \quad \forall n\in\mathbb{N}$
- المتتالية $(v_n)$ محدودة من الأسفل لأن: $v_n = \sqrt{n+5} \ge 5, \quad \forall n\in\mathbb{N}$
- المتتالية $(w_n)$ محدودة من الأسفل لأن: $w_n = \sin(-4n+3) \ge -1, \quad \forall n\in\mathbb{N}$

**تعريف 3:** نقول عن المتتالية $(u_n)_n$ أنها محدودة إذا كانت محدودة من الأعلى ومن الأسفل أي:

$$\forall n\in\mathbb{N}: \quad M' \le u_n \le M$$

**أمثلة:** نعتبر المتتاليات التالية:

$$w_n = e^{-\sqrt{n+5}}+3 \text{ ، } v_n = \frac{2}{1+n^2} \text{ ، } u_n = (-1)^n$$

عندئذ:

- المتتالية $(u_n)_n$ محدودة لأن $-1 \le (-1)^n \le 1, \quad \forall n\in\mathbb{N}$
- المتتالية $(v_n)$ محدودة لأن $0 \le \frac{2}{1+n^2} \le 1$ ومنه: $0 \le v_n \le 2, \quad \forall n\in\mathbb{N}$
- المتتالية $(w_n)$ محدودة لأن $3 \le e^{-\sqrt{n+5}}+3 \le 4$ ومنه: $3 \le w_n \le 5, \quad \forall n\in\mathbb{N}$

**ملاحظة:**

- كل متتالية متزايدة فهي محدودة من الأسفل بحدها الأول: $\forall n\in\mathbb{N}: u_n \ge u_0$
- كل متتالية متناقصة فهي محدودة من الأعلى بحدها الأول: $\forall n\in\mathbb{N}: u_n \le u_0$

## طبيعة المتتالية (المتتاليات المتقاربة والمتتاليات المتباعدة)

**تعريف:** نقول عن المتتالية $(u_n)$ أنها متقاربة إذا وجد عدد حقيقي $\ell$ يحقق $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \ell$ .

ونقول عن المتتالية $(u_n)$ أنها متباعدة إذا كانت غير متقاربة أي إذا كانت $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n=\pm\infty$ أو $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$ غير موجودة.

**أمثلة:** ما هي طبيعة المتتاليات التالية المعرفة بـــ:

$$u_n=\frac{2n^3+4n-1}{5n^3-n^2+8} \ ، \quad v_n=\sqrt{n}-\sqrt{n+1} \ ، \quad w_n=2e^{\sqrt{n+1}}-5 \ ، \quad t_n=(-1)^n$$

**الحل:**

**1.** بما أن: $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n=\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{2n^3+4n-1}{5n^3-n^2+8}=\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{2n^3}{5n^3}=\frac{2}{5}$ إذن $(u_n)$ متقاربة.

**2.** بما أن $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n=\lim\limits_{n\to+\infty}\sqrt{n}-\sqrt{n+1}=\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{\left(\sqrt{n}-\sqrt{n+1}\right)\left(\sqrt{n}+\sqrt{n+1}\right)}{\left(\sqrt{n}+\sqrt{n+1}\right)}=\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{n-(n+1)}{\sqrt{n}+\sqrt{n+1}}$

$=\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{-1}{\left(\sqrt{n}+\sqrt{n+1}\right)}=0$ اذن $(v_n)$ متقاربة.

**3.** بما أن $\lim\limits_{n\to+\infty} 2e^{\sqrt{n+1}}-5=+\infty$ إذن $(w_n)_n$ متباعدة.

**4.** بما أن $(-1)^n=\begin{cases}1 & n \ \text{ـي} \\ \text{و} & \\ -1 & n \ \text{دي}\end{cases}$ إذن النهاية $\lim\limits_{n\to+\infty}(-1)^n$ غير موجودة ومنه المتتالية $(t_n)$ متباعدة.

**عمليات على النهايات:** لتكن $(u_n)_n$ و $(v_n)_n$ متتاليتين عدديين، عندئذ:

**1/ مجموع متتاليتين:**

| | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$ | $\ell$ | $\ell$ | $\ell$ | $+\infty$ | $-\infty$ | $+\infty$ |
| $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n$ | $\ell'$ | $+\infty$ | $-\infty$ | $+\infty$ | $-\infty$ | $-\infty$ |
| $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n+v_n$ | $\ell+\ell'$ | $+\infty$ | $-\infty$ | $+\infty$ | $-\infty$ | ? |

**2/ جداء متتاليتين:**

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$ | $\ell$ | $\ell\neq 0$ | $\pm\infty$ | 0 |
| $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n$ | $\ell'$ | $\pm\infty$ | $\pm\infty$ | $\pm\infty$ |
| $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n.v_n$ | $\ell.\ell'$ | $\pm\infty$ | $\pm\infty$ | ? |

**3/ مقلوب متتالية**

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$ | $\ell\neq 0$ | $\pm\infty$ | 0 | $0^+$ | $0^-$ |
| $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{1}{u_n}$ | $\frac{1}{\ell}$ | 0 | ? | $\pm\infty$ | $\pm\infty$ |

**ملاحظة:** إذا كان $\lim_{n\to+\infty} u_n = \ell$ فإن $\lim_{n\to+\infty} |u_n| = |\ell|$ والعكس غير صحيح كما يوضحه المثال التالي:

نعتبر المتتالية ذات الحد العام $u_n = (-1)^n$. المتتالية $(u_n)_n$ متباعدة (ليس لها نهاية) لكن المتتالية ذات الحد العام $|u_n| = 1$ هي متتالية متقاربة و $\lim_{n\to+\infty} |u_n| = 1$

**خواص:** القضايا التالية تساعدنا في تحديد طبيعة المتتالية (التقارب أو التباعد)

**1-** كل متتالية متزايدة ومحدودة من الأعلى فهي متقاربة.

**2-** كل متتالية متزايدة وغير محدودة عن الأعلى فهي متباعدة و $\lim_{n\to+\infty} u_n = +\infty$.

**3-** كل متتالية متناقصة ومحدودة من الأسفل فهي متقاربة.

**4-** كل متتالية متناقصة وغير محدودة من الأسفل فهي متباعدة و $\lim_{n\to+\infty} u_n = -\infty$.

## كيفية تحديد نهاية متتالية عددية:

هناك عدة طرق لتحديد أو حساب نهاية متتالية نذكر من بينها:

### 1/ الطريقة المباشرة: (حساب نهاية الحد العام مباشرة).

**أمثلة:** أحسب نهايات المتتاليات التالية المعرفة بـــ:

$$u_n = \frac{3n+5}{n\ln(n+1)-3} \quad ، \quad v_n = \sqrt{n+3} - \sqrt{n} \quad ، \quad w_n = \frac{2n^3+1}{3n+4}$$

**الحل:**

**.1** حساب $\lim_{n\to+\infty} u_n$ : لدينا

$$\lim_{n\to+\infty} u_n = \lim_{n\to+\infty} \frac{3n+5}{n\ln(n+1)-3} = \lim_{n\to+\infty} \frac{n\left[3+\frac{5}{n}\right]}{n\left[\ln(n+1)-\frac{3}{n}\right]} = \lim_{n\to+\infty} \frac{3+\frac{5}{n}}{\ln(n+1)-\frac{3}{n}} = 0$$

**.2** حساب $\lim_{n\to+\infty} v_n$ :

$$\lim_{n\to+\infty} v_n = \lim_{n\to+\infty} \sqrt{n+3} - \sqrt{n} = \lim_{n\to+\infty} \frac{\left(\sqrt{n+3}-\sqrt{n}\right)\left(\sqrt{n+3}+\sqrt{n}\right)}{\sqrt{n+3}+\sqrt{n}} = \lim_{n\to+\infty} \frac{(n+3)-n}{\sqrt{n+3}+\sqrt{n}} = \lim_{n\to+\infty} \frac{3}{\sqrt{n+3}+\sqrt{n}} = 0$$

**.3** حساب $\lim_{n\to+\infty} w_n$ : لدينا

$$\lim_{n\to+\infty} w_n = \lim_{n\to+\infty} \frac{2n^3+1}{3n+4} = \lim_{n\to+\infty} \frac{2n^3}{3n} = \lim_{n\to+\infty} \frac{2}{3} n^2 = +\infty$$

### 2/ طريقة المقارنة:

إذا كانت $(u_n)$ و $(v_n)$ متتاليتين تحققان $u_n \le v_n, \quad \forall n \in \mathbb{N}$ عندئذ:

- إذا كانت $\lim_{n\to+\infty} u_n = +\infty$ فإن $\lim_{n\to+\infty} v_n = +\infty$
- إذا كانت $\lim_{n\to+\infty} v_n = -\infty$ فإن $\lim_{n\to+\infty} u_n = -\infty$

**أمثلة:** أحسب نهاية المتتاليات التالية: $u_n = \dfrac{5n^3 + e^{\sqrt{n}}}{3n+2}$ ، $v_n = \dfrac{-2n^2 + (-1)^n}{\ell n(n+1)}$

**الحل:**

1. حساب $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$ ، لدينا: $u_n = \dfrac{5n^3 + e^{\sqrt{n}}}{3n+2} \geq \dfrac{5n^2}{3n+2}$

وبالتالي: $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n \geq \lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{5n^3}{3n+2} = \lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{5n^3}{3n} = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{5n^2}{3} = +\infty$

2. حساب $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n$ ، لدينا: $-1 \leq (-1)^n \leq 1$ ومنه: $v_n = \dfrac{-2n^2 + (-1)^n}{\ln(n+1)} \leq \dfrac{-2n^2+1}{\ln(n+1)}$

ومنه: $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n \leq \lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{-2n^2+1}{\ln(n+1)} = -\infty$ لأن $n^2$ أقوى من $ln(n+1)$ وبالتالي: $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = -\infty$

## 3/ طريقة الحصر:

**نظرية:** لتكن $(u_n)$ و $(v_n)$ و $(w_n)$ ثلاث متتاليات تحقق: $v_n \leq u_n \leq w_n, \quad \forall n \in \mathbb{N}$

عندئذ إذا كانت $\lim\limits_{n\to\infty} v_n = \lim\limits_{n\to\infty} w_n = \ell$ فإن: $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \ell$

**أمثلة:** أحسب نهايات المتتاليات التالية:

$$u_n = \frac{(-1)^n + 3}{2n+5} \text{ ، } v_n = \frac{\sin(5n^2-3)}{3n+2} \text{ ، } w_n = \frac{e^{-n} + n + 1}{2n+3}$$

**الحل:**

**1.** حساب $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$ : بما أن $-1 \leq (-1)^n \leq 1$ إذن $2 \leq (-1)^n + 3 \leq 4$ و $\dfrac{2}{2n+5} \leq u_n \leq \dfrac{4}{2n+5}$

وبما أن $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{2}{2n+5} = \lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{2}{2n+5} = 0$ إذن حسب نظرية الحصر $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$.

**2.** حساب $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n$ : بما أن $-1 \leq sin(5n^2-3) \leq 1$ إذن $\dfrac{-1}{3n+2} \leq \dfrac{\sin(5n^2-3)}{3n+2} \leq \dfrac{1}{3n+2}$ أي

$\dfrac{-1}{3n+2} \leq v_n \leq \dfrac{1}{3n+2}$ وبما أن $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{-1}{3n+2} = \lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{3n+2} = 0$ إذن $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = 0$

**3.** حساب $\lim\limits_{n\to+\infty} w_n$ : لدينا : $0 \leq e^{-n} \leq 1$ إذا $n+1 \leq e^{-n} + n + 1 \leq n+2$ ومنه $\dfrac{n+1}{2n+3} \leq w_n \leq \dfrac{n+2}{2n+3}$

ولدينا: $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n+2}{2n+3} = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n+1}{2n+3} = \dfrac{1}{2}$ إذن حسب نظرية الحصر $\lim\limits_{n\to+\infty} w_n = \dfrac{1}{2}$

## 4/ طريقة النقطة الصامدة:

هنا نطبق نظرية النقطة الصامدة التالية (خاصة بالمتتاليات التراجعية فقط)

**نظرية:** لتكن $(u_n)_n$ متتالية تراجعية معرفة بـــ: $\begin{cases} u_0 = a \\ u_{n+1} = f(u_n) \end{cases}$

حيث $f$ دالة مستمرة. إذا كانت $(u_n)_n$ متقاربة نحو نهاية $\ell$ فإن $\ell$ تحقق المعادلة: $f(\ell) = \ell$

**تمرين:** لتكن $(u_n)_n$ متتالية معرفة بــ $\begin{cases} u_0 = 3 \\ u_{n+1} = \dfrac{2u_n^2}{u_n + 4} = f(u_n) \end{cases}$

1. أثبت أن الدالة $f$ متزايدة على $[0,+\infty[$ .
2. استنتج رتابة المتتالية $(u_n)$.
3. أثبت أن $0 \le u_n \le 3 \quad \forall n \in \mathbb{N}:$
4. استنتج أن $(u_n)$ متقاربة نحو نهاية $l$ يطلب تعيينها.

**الحل:**

**1.** لاحظ أن الدالة $f$ هنا معرفة بـــ $f(x) = \dfrac{2x^2}{x+4}$ .

حساب $f'(x)$: $\forall x \in [0,+\infty[$ $\quad f'(x) = \dfrac{4x(x+4) - 2x^2}{(x+4)^2} = \dfrac{2x^2 + 16x}{(x+4)^2} \ge 0;$

ومنه الدالة $f$ متزايدة على $[0,+\infty[$

**2.** استنتاج رتابة $(u_n)$: نطبق الطريقة الخامسة (مقارنة $u_1$ و $u_0$ )

لدينا: $u_1 = \dfrac{2u_0^2}{u_0 + 4} = \dfrac{2 \times 3^2}{3+4} = \dfrac{18}{7} < \dfrac{18}{6} = 3 = u_0$

إذن بما أن $f$ متزايدة و $u_1 < u_0$ إذن المتتالية $(u_n)$ متناقصة.

**3.** إثبات أن $0 \le u_n \le 3$ : نستعمل البرهان بالتراجع

نضع $P(n): 0 \le u_n \le 3$ ولنتأكد من صحة $P(n)$

- بما أن $u_0 = 3$ إذن: $0 \le u_0 \le 3$ ومنه $P(0)$ صحيحة.
- نفرض صحة $P(n)$ ونبرهن صحة $P(n+1)$

بما أن $P(n)$ صحيحة إذن $0 \le u_n \le 3$ وبما أن $f$ متزايدة إذن $f(0) \le f(u_n) \le f(3)$ لكن

$f(0) = 0$ و $f(3) = \dfrac{2.3^2}{3+4} = \dfrac{18}{7}$ و $f(u_n) = u_{n+1}$ إذن: $0 \le u_{n+1} \le \dfrac{18}{7} < \dfrac{18}{6} = 3$ أي $0 \le u_{n+1} \le 3$

وبالتالي $P(n+1)$ صحيحة، وحسب مبدأ البرهان بالتراجع $P(n)$ دوما صحيحة أي

$$0 \le u_n \le 3, \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

**4.** استنتاج أن $(u_n)$ متقاربة: بما أن $(u_n)$ متزايدة ومحدودة من الأعلى $(u_n \le 3)$ إذن حسب الخواص التي رأيناها سابقا (الخاصية 1) إذن المتتالية $(u_n)$ متقاربة نحو نهاية $\ell$ .

تعيين النهاية $\ell$: حسب نظرية النقطة الصامدة فإن $\ell$ تحقق $f(\ell)=\ell$ أي $\dfrac{2\ell^2}{\ell+4}=\ell$

$$\frac{2\ell^2}{\ell+4}=\ell \Leftrightarrow 2\ell^2=\ell(\ell+4) \Leftrightarrow 2\ell^2=\ell^2+4\ell \Leftrightarrow \ell^2-4\ell=0 \Leftrightarrow \ell(\ell-4)=0 \Leftrightarrow \begin{cases} \ell=0 \\ \\ \ell=4 \end{cases}$$

$\ell=4$ مرفوض لأن المتتالية $0 \le u_n \le 3$ إذن $\ell=0$ أي $\lim\limits_{n\to+\infty} u=0$ .

## المتتاليتان المتجاورتان

**تعريف:** نقول عن المتتاليتين $(u_n)$ و $(v_n)$ أنهما متجاورتان إذا كان:

1. $\forall n \in \mathbb{N}: \quad u_n \le v_n$
2. المتتالية $(u_n)$ متزايدة و $(v_n)$ متناقصة.
3. $\lim\limits_{n\to+\infty} (u_n - v_n)=0$

| |
|---|
| **نظرية:** المتتاليتان المتجاورتان لهما نفس النهاية |

**مثال:** نعتبر المتتاليتان $(u_n)$ و $(v_n)$ المعرفتين بـــ: $u_n=\dfrac{-1}{n+3}$ و $v_n=\dfrac{1}{n+1}$ .

أثبت أن $(u_n)$ و $(v_n)$ متجاورتان.

**الحل:**

**1.** واضح أن $\forall n \in \mathbb{N}, \quad \dfrac{-1}{n+3} \le \dfrac{1}{n+1}$ إذن: $\forall n \in \mathbb{N} \quad u_n \le v_n$

**2.** لدينا $(u_n)$ متزايدة لأن: $u_{n+1}-u_n=\dfrac{-1}{(n+1)+3}+\dfrac{1}{n+3}==\dfrac{1}{(n+4)(n+3)}>0$

ولدينا $(v_n)$ متناقصة لأن: $v_{n+1}-v_n=\dfrac{1}{n+2}-\dfrac{1}{n+1}=\dfrac{-1}{(n+2)(n+1)}<0$

**3.** لنحسب $\lim\limits_{n\to+\infty} (u_n - v_n)$ :

$$\lim_{n\to+\infty} u_n - v_n = \lim \frac{-1}{n+3}-\frac{1}{n+1}=\lim -\frac{2n+4}{n^2+4n+3}=\lim -\frac{2n}{n^2}=\lim\frac{-2}{n}=0$$

إذن كل الشروط محققة ومنه $(u_n)$ و $(v_n)$ متجاورتان.

## أنماط المتتاليات:

## المتتالية الحسابية والمتتالية الهندسية:

### I/ المتتالية الحسابية:

**تعريف:** المتتالية الحسابية هي المتتالية المعرفة بالعلاقة التراجعية $\begin{cases} u_0 = a \\ u_{n+1} = u_n + r \end{cases}$ حيث $r$ عدد حقيقي ويسمى بأساس المتتالية.

**ملاحظات:**

- لإثبات أن متتالية $(u_n)_n$ أنها حسابية يكفي إثبات أن الفرق $u_{n+1} - u_n$ ثابتا (لا يتعلق بـــ $n$)
- كل متتالية $(u_n)$ معرفة بـــ $u_n = an + b$ هي متتالية حسابية أساسها $a$ وحدها الأول $u_0 = b$.

**نظرية:** إذا كانت $(u_n)$ متتالية حسابية أساسها $r$ وحدها الأول $u_0$ فإن:

$$u_n = u_0 + nr, \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

**توضيح:** لدينا

$$\begin{cases} u_1 = u_0 + r \\ u_2 = u_1 + r \\ \vdots \\ u_{n-1} = u_{n-2} + r \\ u_n = u_{n-1} + r \end{cases}$$ بجمع طرف لطرف نجد $u_n = u_0 + nr$

**رتابة وطبيعة متتالية حسابية:** إذا كانت $(u_n)_n$ متتالية حسابية أساسها $r$ فإن:

- إذا كان $r > 0$ فإن المتتالية $(u_n)_n$ متزايدة تماما ومتباعدة مع $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$.
- إذا كان $r < 0$ فإن المتتالية $(u_n)_n$ متناقصة تماما ومتباعدة مع $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = -\infty$.
- إذا كان $r = 0$ فإن المتتالية $(u_n)_n$ ثابتة ومتقاربة مع $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = u_0$.

**مجموع حدود متتالية حسابية:** مجموع حدود متتالية حسابية معطى بـــ:

$$S = \frac{\text{عدد الحدود}}{2} \times (\text{الحد الأول} + \text{الحد الأخير})$$

$$S_n = u_0 + u_1 + \ldots + u_n = \frac{n+1}{2}(u_0 + u_n)$$

$$S_n = u_0 + u_1 + \ldots + u_n = \frac{n}{2}(u_1 + u_n)$$

$$S_n = u_5 + u_6 + \ldots + u_{16} = \frac{(16-5)+1}{2}(u_5 + u_{16}) = 6(u_5 + u_{16})$$

## II- المتتالية الهندسية:

**تعريف:** المتتالية الهندسية هي المتتالية المعرفة بالعلاقة التراجعية $\begin{cases} u_0 = a \\ u_{n+1} = qu_n \end{cases}$ حيث q عدد حقيقي غير معدوم يسمى أساس المتتالية.

**ملاحظات:**

- لإثبات أن متتالية غير معدومة $(u_n)_n$ أنها هندسية يكفي إثبات أن النسبة $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ ثابتة (لا تتعلق $n$)
- كل متتالية $(u_n)_n$ معرفة بـــ $u_n = aq^n$ (حيث $q,a$ أعداد غير معدومة) هي متتالية هندسية أساسها $q$ وحدها الأول $u_0 = a$

**نظرية:** إذا كانت $(u_n)$ متتالية هندسية أساسها q وحدها الأول $u_0$ فإن: $u_n = u_0.q^n, \quad \forall n \in \mathbb{N}$

**توضيح:** لدينا

$$\begin{cases} u_1 = qu_0. \\ u_2 = qu_1. \\ u_3 = qu_2. \\ \vdots \\ u_{n-1} = qu_{n-2}. \\ u_n = qu_{n-1}. \end{cases}$$

بضرب طرف لطرف نجد: $u_n = u_0.q^n$

**رتابة وطبيعة متتالية هندسية:** لتكن $(u_n)_n$ متتالية هندسية أساسها $q$ ( $q$ موجب تماما) وحدها الأول $u_0$ عندئذ:

- إذا كان $0 < q < 1$ و $u_0 < 0$ فإن المتتالية $(u_n)_n$ متزايدة تماما ومتقاربة مع $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$.
- إذا كان $0 < q < 1$ و $u_0 > 0$ فإن المتتالية $(u_n)_n$ متناقصة تماما ومتقاربة مع $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$.
- إذا كان $q > 1$ و $u_0 < 0$ فإن المتتالية $(u_n)_n$ متناقصة تماما ومتباعدة مع $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = -\infty$.
- إذا كان $q > 1$ و $u_0 > 0$ فإن المتتالية $(u_n)_n$ متزايدة تماما ومتباعدة مع $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$.
- إذا كان $q = 1$ و فإن $(u_n)$ ثابتة ومتقاربة مع $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = u_0$.

**مجموع حدود متتالية هندسية:** مجموع حدود متتالية هندسية معطى بـــ

$S =$ الحد الأول $\times \frac{1-q^k}{1-q}$ حيث k هو عدد الحدود

$$S_n = u_0 + u_1 + \ldots + u_n = u_0 \times \left(\frac{1-q^{n+1}}{1-q}\right)$$

$$S = u_3 + u_4 + \ldots + u_{25} = u_3 \times \frac{1-q^{(25-3)+1}}{1-q} = u_3 \frac{1-q^{23}}{1-q}$$

## 2- السلاسل العددية:

**تعريف:** لتكن $(u_n)$ متتالية عددية، السلسلة العددية ذات الحد العام $u_n$ هي المجموع اللانهائي لحدود المتتالية $(u_n)$ ونرمز لها بـ $\sum_{n=0}^{\infty} u_n$ أي: $\sum_{n=0}^{\infty} u_n = u_0 + u_1 + u_2 + \ldots + u_n + \ldots$

**أمثلة**

1/ السلسلة ذات الحد العام $u_n = \frac{1}{n}$ هي:

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \ldots + \frac{1}{n} + \ldots$$ (تسمى سلسلة توافقية)

2/ السلسلة ذات الحد العام $u_n = q^n$ هي:

$$\sum_{n=0}^{\infty} q^n = 1 + q + q^2 + q^3 + \ldots q^n + \ldots$$ (تسمى سلسلة هندسية)

**طبيعة السلسلة العددية:** (السلسلة المتقاربة والسلسلة المتباعدة)

تتوقف طبيعة السلسلة العددية $\sum_{n=0}^{\infty} u_n$ على طبيعة المتتالية $(S_n)$

المعرفة بـ $S_n = \sum_{k=0}^{n} u_k = u_0 + u_1 + \ldots + u_n$ (تسمى $S_n$ بالمجموع الجزئي للسلسلة). بعبارة أخرى:

- إذا كانت $(S_n)_n$ متقاربة أي $\lim_{n\to+\infty} S_n = \ell$ فإن السلسلة $\sum_{n=0}^{\infty} u_n$ متقاربة.
- إذا كانت $(S_n)$ متباعدة أي ($\lim S_n = \pm\infty$ أو $\lim_{n\to+\infty} S_n$ غير موجود) فإن السلسلة $\sum_{n=0}^{\infty} u_n$ متباعدة.

**أمثلة:** أدرس طبيعة السلاسل التالية:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \ln\left(\frac{n+1}{n+2}\right) \text{ ، } \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{5}{3}\right)^n \text{ ، } \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^n}$$

**الحل:**

**1.** طبيعة السلسلة $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^n}$ ، لنحسب أولا $S_n$ .

لدينا: $$S_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \ldots + \frac{1}{2^n} = 1.\frac{1-\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}}{1-\frac{1}{2}} = 2\left[1-\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}\right]$$ (لأنها هندسية)

وبما أن $\lim_{n\to+\infty} S_n = 2$ إذن المتتالية $(S_n)$ متقاربة وبالتالي السلسلة $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^n}$ متقاربة.

**2.** طبيعة السلسلة $\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{5}{3}\right)^n$ ، لنحسب أولا $S_n$ .

$$S_n = 1+\frac{5}{3}+\left(\frac{5}{3}\right)^2+\ldots+\left(\frac{5}{3}\right)^n = 1.\frac{1-\left(\frac{5}{3}\right)^{n+1}}{1-\frac{5}{3}} = \frac{3}{2}\left[\left(\frac{5}{3}\right)^{n+1}-1\right]$$ (مجموع حدود متتالية هندسية)

بما أن $\lim\limits_{n\to+\infty} S_n = +\infty$ إذن $(S_n)$ متباعدة وبالتالي السلسلة $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\left(\frac{5}{3}\right)^n$ متباعدة.

**3.** طبيعة السلسلة $\sum\limits_{n=0}^{\infty} ln\left(\frac{n+1}{n+2}\right)$، لنحسب أولا $S_n$ .

$$\begin{aligned}S_n &= u_0+u_1+\ldots+u_n = \ln\left(\frac{1}{2}\right)+\ln\left(\frac{2}{3}\right)+\ln\left(\frac{3}{4}\right)+\ldots+\ln\left(\frac{n+1}{n+2}\right)\\ &= [\ln(1)-\ln(2)]+[\ln(2)-\ln(3)]+\ldots.+[\ln(n+1)-\ln(n+2)]\\ &= \ln(1)-\ln(n+2) = -\ln(n+2)\end{aligned}$$

وبما أن $\lim\limits_{n\to+\infty} S_n = \lim\limits_{n\to+\infty} -\ln(n+2) = -\infty$ إذن المتتالية $(S_n)$ متباعدة وبالتالي السلسلة $\sum\limits_{n=0}^{\infty} ln\left(\frac{n+1}{n+2}\right)$ متباعدة.

**نظرية:** إذا كانت السلسلة $\sum\limits_{n=0}^{\infty} u_n$ متقاربة فإن $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$

**ملاحظة:** نستنتج من النظرية السابقة أن إذا كانت $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n \neq 0$ فإن السلسلة $\sum\limits_{n=0}^{\infty} u_n$ متباعدة.

**أمثلة:**

1/ السلسلة $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{n}{n+1}$ متباعدة لأن $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{n}{n+1} = 1 \neq 0$ .

2/ السلسلة $\sum\limits_{n=0}^{\infty} 2^n$ متباعدة لأن $\lim\limits_{n\to+\infty} 2^n = +\infty \neq 0$ .

3/ السلسلة $\sum\limits_{n=0}^{\infty} e^{\sqrt{n}}$ متباعدة لأن $\lim\limits_{n\to+\infty} e^{\sqrt{n}} = +\infty \neq 0$ .

**ملاحظة:** إذا كانت $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$ فإن السلسلة $\sum\limits_{n=0}^{\infty} u_n$ يمكن أن تكون متقاربة كما يمكن أن تكون متباعدة كما يوضحه المثال التالي.

**مثال:**

**1/** في مثال سابق رأينا أن السلسلة $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{1}{2^n}$ متقاربة. (لاحظ هنا أن $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \lim\limits_{n\to+\infty}\frac{1}{2^n} = 0$).

**2/** كما رأينا أيضا أن السلسلة $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\ln\left(\frac{n+1}{n+2}\right)$ سلسلة متباعدة رغم أن

$$\lim_{n\to+\infty} u_n = \lim_{n\to+\infty} ln\left(\frac{n+1}{n+2}\right) = \ln(1) = 0$$

**خلاصة:** لدراسة طبيعة السلسلة $\sum\limits_{n=0}^{\infty} u_n$ نتبع الخطوات التالية: نحسب أولا $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$ ثم

a) إذا كانت $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n \neq 0$ فإن السلسلة $\sum\limits_{n=0}^{\infty} u_n$ متباعدة.

b) إذا كانت $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$ ففي هذه الحالة ندرس طبيعة $S_n$ أي:

- إذا كانت $(S_n)_n$ متقاربة فإن السلسلة $\sum\limits_{n=0}^{\infty} u_n$ متقاربة.
- إذا كانت $(S_n)_n$ متباعدة فإن السلسلة $\sum\limits_{n=0}^{\infty} u_n$ متباعدة.

## سلسلة التمارين حول المتتاليات و السلاسل

### التمرين 1

لتكن $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ المتتالية العددية المعرفة بالعلاقة التراجعية التالية: $u_0 = 1$ ، $u_{n+1} = \sqrt{u_n + 6}$

1- أثبت أن $\forall n \in \mathbb{N}, \quad 0 < u_n \leq 3$

2- أدرس رتابة المتتالية.

3- أدرس تقارب المتتالية مع استنتاج نهايتها.

### التمرين 2

أحسب نهايات المتتالية $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ثم حدد طبيعتها في كل حالة:

$$(1)\ u_n = 3 + \frac{1}{n}, \quad (2) u_n = \sqrt{n+1} - \sqrt{n}, \quad (3) u_n = \frac{1+3+5+\dots+(2n+1)}{1+2+3+\dots+n}$$

$$(4) u_n = (-1)^n + \frac{1}{n}, \quad (5) u_n = \frac{1}{1\times 2} + \frac{1}{2\times 3} + \dots + \frac{1}{n\times(n+1)}, \quad (6) u_n = \frac{5^{n+1}+3^{n+1}}{5^n+3^n}$$

$$(7) u_n = (-1)^n + \frac{1}{n}, \quad (8) u_n = \frac{1+a+a^2+\dots+a^n}{1+b+b^2+\dots+b^n} \left(|a| \langle 1, |b| \langle 1\right)$$

### التمرين 3

لتكن $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ متتالية معرفة بـــ: $u_0 = 2, u_{n+1} = \frac{2u_n - 1}{u_n}$ والمتتالية $(v_n)$ المعرفة بـــ:

$$v_n = \frac{1}{u_n - 1}.$$

بين أن المتتالية $(v_n)$ متتالية حسابية ثم عبر عن $u_n$ و $v_n$ بدلالة $n$.

### التمرين 4

لتكن المتتاليتين المعرفتين كما يلي:

$$u_{n+1} = \frac{u_n + 2v_n}{3}, \quad u_0 = 12,$$

$$v_{n+1} = \frac{u_n + 3v_n}{4}, \quad v_0 = 1$$

نضع من أجل كل عدد طبيعي $n$ : $w_n = u_n - v_n$ ; $T_n = 3u_n + 8v_n$

**1-** أثبت أن المتتالية $(w_n)$ هندسية يطلب تعيين أساسها وحدها الأول مع تعيين عبارة الحد العام وحساب نهايته وماذا تستنتج حول طبيعتها.

**2-** أثبت أن المتتالية $(T_n)$ متتالية ثابتة ما هي نهايتها.

## التمرين 5

**1/** يودع رجل في مصرف بداية كل شهر مبلغا من المالي كما يلي: 100,160,220,280دج فكم يكون رصيده في نهاية العام إذا كان لا يتقاضى على ودائعه أي فائدة.

**2/** أوجد فائدة مبلغ 1000 دينار جزائري وضع في مصرف مدة 6 سنوات بفائدة بسيطة معدلها 5 بالمئة سنويا وأوجد جملة ذلك المبلغ.

(الفائدة البسيطة: نكتفي باحتساب فوائد على أصل المبالغ المودعة أو المقترضة).

## التمرين 6

**1-** أحسب المجاميع التالية ثم استنتج طبيعة كل سلسلة: $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n+1}{n}\right)$, $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n(n-2)}$,

**2-** أدرس تقارب السلاسل التالية:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n}{3n+1}\right)^{n} \quad , \quad \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{5^{n}+2n} \quad , \quad \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(2n+1)}$$

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{2^{n+1}}{3^{n}} \quad , \quad \sum_{n=1}^{\infty}\frac{n!}{6^{n}} \quad , \quad \sum_{n=1}^{\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n^2}$$

## التمرين7

لتكن المتتالية الحقيقية $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ المعرفة كما يأتي:

$$\begin{cases} u_{n+1}=2-\frac{1}{u^{n}} \\ u_0=2 \end{cases}$$

1. أحسب $u_3, u_2, u_1$
2. برهن بالتراجع أن: $\forall n\in\mathbb{N},\quad u_n\geq 1$
3. أثبت أن المتتالية $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ متناقصة.
4. أثبت أن المتتالية $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ متقاربة.

## التمرين 8

لتكن المتتالية $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ المعرفة كما يأتي:

$$\begin{cases} v_0=0 \ ; \ v_1=1 \\ v_{n+1}=\frac{1}{2}(v_n+v_{n-1}) \end{cases}$$

نضع $k_n=v_{n+1}-v_n$

1. بين أن $(k_n)_{n\in\mathbb{N}}$ متتالية هندسية يطلب تعيين أساسها r.

2. أحسب $k_0$ ثم أكتب عبارة الحد العام $k_n$ بدلالة $n$ .

3. أثبت أن المتتالية $(k_n)_{n\in\mathbb{N}}$ متقاربة.

4. نضع $S_n = k_0 + k_1 + k_2 + .. + k_n$ أحسب $S = \lim\limits_{x\to+\infty} S_n$

5. أحسب $\lim\limits_{x\to+\infty} v_n$ وماذا تستنتج بالنسبة إلى تقارب المتتالية؟

## التمرين 9

**1**- وضع في مصرف مبلغ 3000 دج بفائدة مركبة معدلها 5%.

أوجد المبلغ بعد 5 سنوات، وكم تكون جملة الفائدة المركبة؟

**2**- أودع مبلغ 7000 دج في مصرف بفائدة مركبة فأصبح 8000 دج بعد 4 سنوات.

أوجد معدل الفائدة المركبة؟

(الفائدة المركبة: إذا تجاوزت مدة الإيداع أو القرض السنة فإن الفوائد بدورها تحقق فوائد).

## التمرين 10

لتكن المتتالية المعرفة بـــ:

$$\begin{cases} u_0 = 0 \\ u_{+1} = \dfrac{3u_n + 1}{2u_n + 2} \end{cases}$$

**1**- بين أن: $\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \frac{1}{2} \le u_n \le 1$

**2**- أدرس تغيرات المتتالية $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ واستنتج أنها متقاربة، أحسب $\lim\limits_{x\to+\infty} u_n$ .

## التمرين 11

$(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ متتالية معرفة بـــ $u_0 = \frac{11}{4}$ ومن أجل كل عدد طبيعي $n$ ، $u_{n+1} = 3u_n - 4$ .

1. أحسب كلا من الحدين $u_1$ و $u_2$.
2. برهن بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي $n$ ، $u_n \rangle 2$ .
3. أثبت أن المتتالية $(u_n)$ متزايدة تماما.
4. لتكن المتتالية $(v_n)$ المعرفة على $\mathbb{N}$ بـــ $v_n = 4(u_n - 2)$ .
5. أثبت أن المتتالية $(v_n)$ هندسية وعين أساسها وحدها الأول.
6. عبر عن كل من $v_n$ و $u_n$ بدلالة $n$.
7. هل المتتالية $(u_n)$ محدودة من الأعلى؟
8. لتكن المتتالية $(w_n)$ المعرفة من أجل كل عدد طبيعي $n$ ، بـــ

$$w_n = u_0 + \frac{u_1}{4} + \frac{u_2}{4^2} + \frac{u_3}{4^3} + \ldots + \frac{u_n}{4^n}$$

برهن أن المتتالية $(w_n)$ متقاربة.

# الفصل الثالث: الدوال العددية لمتغير حقيقي

## 1-عموميات

**تعريف الدالة:** لتكن $E$ و $F$ مجموعتين غير خالتين، الدالة للمجموعة $E$ في المجموعة $F$ هي علاقة من $E$ نحو $F$ ترفق بكل عنصر من $E$ عنصرا على الأكثر في $F$. إذا كان $F=\mathbb{R}$ نسميها دالة عددية وإذا كان $E=F=\mathbb{R}$ تُسمى دالة عددية لمتغير حقيقي ونرمز للدالة بصفة عامة بــ: $f,g,h....$

ونكتب:

$$f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$$ تُسمى $x$ بالسابقة

$$x\mapsto f(x)$$ و $f(x)$ بالصورة

**أمثلة:** هل العلاقات التالية دوال.

$$f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\quad x\mapsto f(x)=\frac{x+3}{x-1} \quad ، \quad g:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\quad x\mapsto g(x)=\begin{cases}x+1, & x\ge 0\\ e^x+3, & x\le 0\end{cases} \quad ، \quad h:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\quad x\mapsto h(x)=\sqrt{x-2}$$

**الحل:**

1. العلاقة $f$ دالة لأن كل عنصر من $\mathbb{R}$ له صورة على الأكثر (كل العناصر لها صورة وحيدة ما عدا $x=1$ ليس له صورة).
2. العلاقة $g$ ليست دالة لأن العدد $x=0$ له صورتين هما $0+1=1$ و $e^0+3=4$
3. العلاقة $h$ دالة لأن كل عنصر من $\mathbb{R}$ له صورة على الأكثر (العناصر $]-\infty,2[$ ليس لها صورة والعناصر $[2,+\infty[$ لها صورة وحيدة).

**مجموعة تعريف الدالة:** لتكن $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ دالة عددية لمتغير حقيقي. مجموعة تعريف الدالة $f$ هي مجموعة العناصر من $\mathbb{R}$ التي لها صورة بالدالة $f$ ونرمز لها بــ $D_f$ أو باختصار $D$.

**أمثلة:** أوجد مجموعة التعريف للدوال التالية:

$$f(x)=\frac{4x+1}{\sqrt{3-x}} \;،\; g(x)=\sqrt{x^2-4} \;،\; h(x)=\frac{x\sqrt{x+3}}{\ln(x+1)} \;،\; t(x)=\frac{e^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x-1}}$$

**الحل:**

1. $D_f=\{x\in\mathbb{R}/3-x>0\}=\{x\in\mathbb{R}/3>x\}=\{x\in\mathbb{R}/x<3\}=]-\infty,3[$
2. $D_g=\{x\in\mathbb{R}/x^2-4\ge 0\}=\{x\in\mathbb{R}/(x-2)(x+2)\ge 0\}$

| | $-\infty$ | $-2$ | $2$ $+\infty$ |
|---|---|---|---|
| $x-2$ | $-$ | $-$ | $+$ |
| $x+2$ | $-$ | $+$ | $-$ |
| $(x-2)(x+2)$ | $+$ | $-$ | $+$ |

$$D_g = ]-\infty,-2[\cup[2,+\infty[$$

.3

$$D_h = \{x\in\mathbb{R} / x+3\geq 0 \;\wedge\; x+1>0 \;\wedge\; x+1\neq 1\} = \{x\in\mathbb{R} / x\geq -3 \;\wedge\; x>-1 \wedge\; x\neq 0\}$$
$$= [-1,0[\cup]0,+\infty[$$

.4 $D_t = \{x\in\mathbb{R} / x\geq 0 \quad x-1>0\} = \{x\in\mathbb{R} / x\geq 0 \;\wedge\; x>1\} = ]1,+\infty[$

**أمثلة أخرى:**

| مجموعة تعريفها | الدالة |
|---|---|
| $D=\mathbb{R}$ | $x^n \quad (n\in\mathbb{N})$ |
| $D=\mathbb{R}^* = \mathbb{R}-\{0\}$ | $\frac{1}{x^n} \quad (n\in\mathbb{N})$ |
| $D=[0,+\infty[$ | $\sqrt{x} = x^{\frac{1}{2}}$ |
| $D=]0,+\infty[$ | $x^\alpha = e^{\alpha\ln x} \quad (\alpha\notin\mathbb{Z})$ |
| $D=\mathbb{R}$ | $\sqrt[n]{x} = x^{\frac{1}{n}}$ (n فردي) |
| $D=[0,+\infty[$ | $\sqrt[n]{x} = x^{\frac{1}{n}}$ (n زوجي) |
| $D=\mathbb{R}$ | $P(x) = a_0 + a_1 n + \ldots + a_n x^n$ (P كثير حدود) |
| $D=\{x\in\mathbb{R} / q(x)\neq 0\}$ | $\frac{P(x)}{q(x)}$ ($q,p$ كثيري حدود) |
| $D=]0,+\infty[$ | $\ln x$ |
| $D=\mathbb{R}$ | $e^x$ |
| $D=\mathbb{R}$ | $\sin x$ |
| $D=\mathbb{R}$ | $\cos x$ |
| $D=\bigcup_{k\in\mathbb{Z}} \left]-\frac{\pi}{2}+k\pi, \frac{\pi}{2}+k\pi\right[ = \ldots\ldots\ldots\cup\left]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[\cup\ldots.$ | $tgx$ |

**بيان دالة:** يعد التمثيل البياني دليل فعال في دراسة سلوك الدوال وننصح باللجوء إليه كلما أمكن، وذلك لتكوين فكرة حدسية عن الدالة المراد دراستها. إذا اعتبرنا دالة حقيقية $f:D\to\mathbb{R}$ فإن بيان الدالة $f$ هو مجموعة جزئية من $\mathbb{R}^2$ المعرفة بـ $G_f=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 / x\in D: y=f(x)\}$

## عمليات على الدوال

**تعاريف:** ليكن $f$ و $g$ دالتين معرفتين على $D_f$ و $D_g$ على الترتيب، $k$ عدد حقيقي ونضع $D=D_f\cap D_g$

1. **تساوي دالتين:** نقول عن $f$ و $g$ أنهما متساوتين إذا كان $\left.\begin{array}{l} D_f=D_g \\ \forall x\in D_f: f(x)=g(x)\end{array}\right\}$
2. **مجموع دالتين:** نعرف على المجموعة D، مجموع التابعيين $f$ و $g$ بـ:
$$\forall x\in D:(f+g)(x)=f(x)+g(x)$$
3. **ضرب دالة بسلمي:** نعرف على $D_f$ الجداء $k.f$ بـ: $\forall x\in D_f:(k.f)(x)=k.f(x)$
4. **جداء دالتين** : نعرف على $D$ الجداء $f.g$ بـ: $\forall x\in D:(f.g)(x)=f(x).g(x)$
5. **قسمة دالتين:** نعرف على $D$ القسمة $\frac{f}{g}$ (مع $g(x)\neq 0$) بـ:
$$\forall x\in D:\left(\frac{f}{g}\right)(x)=\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)$$

**مثال:** نعرف على $\mathbb{R}$ التابعين $f$ و $g$ بـ $f(x)=\frac{1}{x+1}$ ، $g(x)=\frac{1}{x-1}$

لدينا $D_f=\mathbb{R}-\{-1\}$ ، $D_g=\mathbb{R}-\{1\}$ إذن $D=D_f\cap D_g=\mathbb{R}-\{1,-1\}$ و
$$\forall x\in D:(f+g)(x)=f(x)+g(x)=\frac{1}{x+1}+\frac{1}{x-1}=\frac{2x}{x^2-1}$$
$$\forall x\in D:(f.g)(x)=f(x).g(x)=\frac{1}{x+1}.\frac{1}{x-1}=\frac{1}{x^2-1}$$
$$\forall x\in D:\left(\frac{f}{g}\right)(x)=\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{x-1}{x+1}$$

**تركيب دالتين:**

ليكن $f$ و $g$ دالتين معرفتين على $D_f$ و $D_g$ على الترتيب ولتكن $D$ المجموعة المعرفة بـ: $D=\{x\in D_f / f(x)\in D_g\}$ عندئذ الدالة المركبة $g\circ f$ هي الدالة المعرفة بـ:
$$\forall x\in D:(g\circ f)(x)=g(f(x))$$

**خاصية:** عملية التركيب بين الدالتين "$\circ$" عملية تجميعية: $(f\circ g)\circ h=f\circ(g\circ h)$

لكن حذار العملية "$\circ$" ليست تبديلية $f\circ g\neq g\circ f$ كما يوضحه المثال التالي

**مثال:** نعتبر الدالتين
$$f:\mathbb{R}\to\mathbb{R} \qquad g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$$
$$x\to f(x)=2x+3 \qquad x\to g(x)=x^2$$

عندئذ لدينا
$$g\circ f(x)=g(f(x))=(f(x))^2=(2x+3)^2=4x^2+12+9$$
$$f\circ g(x)=f(g(x))=2g(x)+3=2x^2+3$$

إذن $g\circ f\neq f\circ g$

## خواص خاصة لبعض الدوال

### 1/ الشفعية:

**تعريف:** لتكن $D$ مجموعة جزئية من $\mathbb{R}$ $(D\subset\mathbb{R})$. نقول عن $D$ أنها متناظرة إذا كان:
$$\forall x[x\in D\Rightarrow -x\in D]$$

**أمثلة:** المجموعات التالية هي مجموعات متناظرة:

$D=]-1,1[$ ، $D=]-\infty,0[\cup]0,+\infty[$ ، $D=]-\infty,-3[\cup]-3,-1]\cup[1,3[\cup]3,+\infty[$

**تعريف:** ليكن $f$ دالة معرفة على مجموعة متناظرة $D$

- نقول عن $f$ أنها زوجية إذا كان: $\forall x\in D: f(-x)=f(x)$
- نقول عن $f$ أنها فردية إذا كان: $\forall x\in D: f(-x)=-f(x)$

**أمثلة:**

الدوال التالية دوال فردية: $x, x^3, x^n, \frac{1}{x}, \sin x, tgx, \ldots.$ ($n$ فردي)

الدوال التالية دوال زوجية: $x^2, x^4, x^n, \cos x, |x|, \ldots.$ ($n$ زوجي)

**ملاحظة:** أغلب الدوال ليست فردية وليست زوجية مثل $x^2+x, e^x, \ldots.$

### 2/ الدورية:

**تعريف:** ليكن $f$ دالة معرفة على $D$ و $\alpha$ عدد حقيقي موجب تماما، نقول عن $f$ أنها دورية دورها $\alpha$ أو ($\alpha$–دوري) إذا تحقق:
$$\forall x\in D:\begin{cases}x+\alpha\in D\\ f(x+\alpha)=f(x)\end{cases}$$

**أمثلة:** الدوال: $\sin x, \cos x$ دورية دورها $2\pi$، الدالة $tgx$ دورية دورها $\pi$

### 3/ الرتابة:

ليكن $f$ دالة حقيقية معرفة على $D$ و $I$ مجالا من $D$، نقول عن $f$ أنها:

1. متزايدة على $I$ إذا كان: $[\forall x,x'\in I: x>x'\Rightarrow f(x)\geq f(x')]$
2. متزايدة تماما على $I$ إذا كان: $[\forall x,x'\in I: x>x'\Rightarrow f(x)>f(x')]$
3. متناقصة تماما على $I$ إذا كان: $[\forall x,x'\in I: x>x'\Rightarrow f(x)\leq f(x')]$
4. متناقصة تماما على $I$ إذا كان: $[\forall x,x'\in I: x>x'\Rightarrow f(x)<f(x')]$
5. رتيبة على $I$ إذا كان متناقصا أو متزايدا على $I$.
6. رتيبة تماما على $I$ إذا كان متناقصة تماما أو متزايدة تماما على $I$

## 2- النهايات

**تعاريف:** ليكن $\ell$ عدد حقيقي، I مجال من $\mathbb{R}$ و $x_0$ نقطة من I وليكن $f : I \to \mathbb{R}$ دالة عددية (يمكن لــ $f$ أن تكون غير معرفة عند $x_0$)

- نقول عن $f$ أنها تقبل النهاية $\ell$ عند النقطة $x_0$ إذا كان:

$\forall \varepsilon > 0, \exists \alpha > 0, \forall x \in I : |x - x_0| \leq \alpha \Rightarrow |f(x) - \ell| \leq \varepsilon$ ونكتب $\lim_{x \to x_0} f(x) = \ell$

- نقول عن $f$ أنها تؤول نحو $+\infty$ لما $x$ يؤول إلى $x_0$ إذا كان:

$\forall K > 0, \exists \alpha > 0, \forall x \in I, |x - x_0| \leq \alpha \Rightarrow f(x) > K$ ونكتب $\lim_{x \to x_0} f(x) = +\infty$

- نقول عن $f$ أنها تؤول نحو $\ell$ لما $x$ يؤول نحو $+\infty$ إذا كان:

$\forall \varepsilon > 0, \exists K > 0, \forall x, x > K \Rightarrow |f(x) - \ell| < \varepsilon$ ونكتب $\lim_{x \to +\infty} f(x) = \ell$

- نقول عن $f$ أنها تؤول إلى $+\infty$ لما $x$ يؤول إلى $+\infty$ إذا كان:

$\forall K > 0, \exists M > 0, \forall x, x > M \Rightarrow f(x) > K$ ونكتب $\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$

**ملاحظة:** بنفس الطريقة نعرف النهايات: $\lim_{x \to \pm\infty} f(x) = -\infty$ و $\lim_{x \to x_0} f(x) = -\infty$

### النهاية من اليمين ومن اليسار

**تعريف:**

- نقول عن $f$ أنها تؤول نحو $\ell$ لما $x$ يؤول نحو $x_0$ من اليسار (أو بقيم صغرى) إذا كان:

$\forall \varepsilon > 0, \exists \alpha > 0$ ، $\forall x, 0 < x - x_0 < \alpha \Rightarrow |f(x) - \ell| < \varepsilon$

ونكتب $\lim_{\substack{x \to x_0 \\ <}} f(x) = \ell$ أو $\lim_{x \to x_0^-} f(x) = \ell$

- نقول عن $f$ أنها تؤول نحو $\ell$ لما $x$ يؤول نحو $x_0$ من اليمين (أو بقيم كبرى) إذا كان:

$\forall \varepsilon > 0, \exists \alpha > 0$ ، $\forall x, 0 < x - x_0 < \alpha \Rightarrow |f(x) - \ell| < \varepsilon$

ونكتب $\lim_{\substack{x \to x_0 \\ >}} f(x) = \ell$ أو $\lim_{x \to x_0^+} f(x) = \ell$

**نظرية:** نقول عن $f$ أن لها نهاية $\ell$ لما $x$ يؤول نحو $x_0$ إذا وفقط إذا كان:

$$\lim_{\substack{x \to x_0 \\ >}} f(x) = \lim_{\substack{x \to x_0 \\ <}} f(x) = \ell$$

**أمثلة:**

1) نعتبر الدالة $f$ المعرفة بــ:

$$f(x) = \begin{cases} x & x > 0 \\ 1 & x = 0 \\ -x & x < 0 \end{cases}$$

لدينا $\lim_{x \to 0} f(x) = 0$ لأن: $\lim_{\substack{x \to 0 \\ >}} f(x) = \lim_{\substack{x \to 0 \\ <}} f(x) = 0$

2) نعتبر الدالة المعرفة بـــ: $f(x)=\begin{cases}1 & x>0\\ 0 & x=0\\ -1 & x<0\end{cases}$

الدالة $f$ ليس لها نهاية عند 0 لأن: $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ >}} f(x)=1$ و $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ <}} f(x)=-1$ أي $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ >}} f(x)\neq\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ <}} f(x)$

**نظرية:** إذا قبلت الدالة $f$ نهاية عند النقطة $x_0$ فإنها وحيدة.

## عمليات على النهايات:

**نظرية 1:** ليكن $f$ و $g$ دالتين عدديتين و $\lambda$ عدد حقيقي بحيث $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=\ell$ و $\lim\limits_{x\to x_0} g(x)=\ell'$ عندئذ:

1/ $\lim\limits_{x\to x_0}(f+g)(x)=\ell+\ell'$ 3/ $\lim\limits_{x\to x_0}(\lambda.f)(x)=\lambda.\ell$

2/ $\lim\limits_{x\to x_0}(f.g)(x)=\ell.\ell'$ 4/ $(l'\neq 0)$ $\lim\limits_{x\to x_0}\left(\frac{f}{g}\right)(x)=\frac{l}{l'}$

**ملاحظة:** تتمتع النهايات عند $\pm\infty$ بنفس الخواص المذكورة في درس المتتاليات.

**نظرية 2:** (نهاية تابع مركب)

ليكن $f:I\to\mathbb{R}$ و $g:J\to\mathbb{R}$ دالتين بحيث $(f(I)\subset J)$. ولتكن $x_0$ نقطة من I و $y_0$ نقطة من J

بحيث:

1/ $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=y_0$

2/ $\lim\limits_{y\to y_0} g(y)=l$

عندئذ $\lim\limits_{x\to x_0}(g\circ f)(x)=\ell$

## خواص النهايات

**نظرية:** ليكن $f:I\to\mathbb{R}$ و $g:I\to\mathbb{R}$ دالتين عدديتين تحققان

1/ $\forall x\in I: f(x)\leq g(x)$

2/ $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$ و $\lim\limits_{x\to x_0} g(x)$ موجودة

عندئذ $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)\leq\lim\limits_{x\to x_0} g(x)$

**ملاحظة:** إذا كان $\forall x\in I: f(x)<g(x)$ لا يعني أن $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)<\lim\limits_{x\to x_0} g(x)$

**نظرية الحصر:** لتكن $h,g,f$ ثلاث دوال عددية معرفة على مجال I تحقق

1/ $\forall x\in I: g(x)\leq f(x)\leq h(x)$

2/ $\lim\limits_{x\to x_0} g(x)=\lim\limits_{x\to x_0} h(x)=\ell$

عندئذ $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=l$

**نتيجة:** ليكن $f,g: I \to \mathbb{R}$ دالتين عدديتين بحيث:

1/ $\forall x \in I : 0 \le f(x) \le g(x)$

2/ $\lim\limits_{x \to x_0} g(x) = 0$

عندئذ $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = 0$

**بعض الطرق لحساب النهايات :** (إزالة حالة عدم التعيين)

**1. حساب نهاية** $\frac{P(x)}{q(x)}$: حيث p و $q$ كثيري حدود ونميز حالتين.

a. **عند** $\pm\infty$ : النهاية في هذه الحالة هي نهاية الحد الأكبر درجة لـــ p على نهاية الحد الأكبر درجة لـــ $q$.

**أمثلة:** أحسب النهايات التالية: $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{2x^3-x^2+5}{5x^2-4}$ ، $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{5x^3+4x^2+1}{2x^4-x+5}$ ، $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{4x^3+2x^2-1}{3x^3-x+5}$

**الحل:**

1. $$\lim_{x\to+\infty}\frac{2x^3-x^2+5}{5x^2-4}=\lim_{x\to+\infty}\frac{2x^3}{5x^2}=\lim_{x\to+\infty}\frac{2}{5}x=+\infty$$

2. $$\lim_{x\to-\infty}\frac{5x^3+4x^2+1}{2x^4-x+5}=\lim_{x\to-\infty}\frac{5x^3}{2x^4}=\lim_{x\to-\infty}\frac{5}{2x}=0$$

3. $$\lim_{x\to+\infty}\frac{4x^3+2x^2-1}{3x^3-x+5}=\lim_{x\to+\infty}\frac{4x^3}{3x^3}=\frac{4}{3}$$

b. **عند نقطة** $x_0$ : نقوم بالقسمة الإقليدية لكل من p و $q$ على $x-x_0$.

**أمثلة:** أحسب كل من: $\lim\limits_{x\to1}\frac{x^2-1}{5x^3-x-4}$ ، $\lim\limits_{x\to2}\frac{-3x^2-4x+4}{x^2-5x+6}$

**الحل:**

1) لدينا:

$$\begin{array}{r|l} 5x^2-x-4 & x-1 \\ \cline{2-2} -\ 5x^2-5x & 5x+4 \\ \cline{1-1} 4x-4 & \\ -\ 4x-4 & \\ \cline{1-1} 0 & \end{array}$$

اذا: $5x^2-x-4=(x-1)(5x+4)$

واضح أن: $(x^2-1)=(x-1)(x+1)$

إذن بالتعويض نجد: $\lim\limits_{x\to1}\frac{x^2-1}{5x^2-x-4}=\lim\limits_{x\to1}\frac{(x-1)(x+1)}{(x-1)(5x+4)}=\lim\limits_{x\to1}\frac{x+1}{5x+4}=\frac{2}{9}$

**(2** لدينا:

$$\begin{array}{r|l} x^2-5x+6 & x-2 \\ \cline{2-2} -\quad x^2-2x & x-3 \\ \cline{1-1} -3x+6 & \\ -\quad -3x+4 & \\ \cline{1-1} 0 & \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} -3x^2+4x+4 & x-2 \\ \cline{2-2} -\quad -3x^2+6x & -3x-2 \\ \cline{1-1} -2x+4 & \\ -\quad -2x+4 & \\ \cline{1-1} 0 & \end{array}$$

إذن $-3x^2+4x+4=(x-2)(-3x-2)$ و $x^2-5x+6=(x-2)(x-3)$

بالتعويض نجد: $\lim\limits_{x\to2}\frac{-3x^2+4x+4}{x^2-5x+6}=\lim\limits_{x\to2}\frac{(x-2)(-3x+2)}{(x-2)(x-3)}=\lim\limits_{x\to2}\frac{-3x-2}{x-3}=8$

**.2 الضرب في المرافق:** نستعمل هذه الطريقة خاصة في وجود الجذور.

**أمثلة:** أحسب النهايات التالية: $\lim\limits_{x\to0}\frac{1-\sqrt{1-x^2}}{x^2}$ ، $\lim\limits_{x\to5}\frac{\sqrt{2x-1}-3}{x-5}$

**الحل:**

/1
$$\lim_{x\to0}\frac{1-\sqrt{1-x^2}}{x^2}=\lim_{x\to0}\frac{\left(1-\sqrt{1-x^2}\right)\left(1+\sqrt{1-x^2}\right)}{x^2\left(1+\sqrt{1-x^2}\right)}=\lim_{x\to0}\frac{1-\left(1-x^2\right)}{x^2\left(1+\sqrt{1-x^2}\right)}$$
$$=\lim_{x\to0}\frac{\cancel{x^2}}{\cancel{x^2}\left(1+\sqrt{1-x^2}\right)}=\lim_{x\to0}\frac{1}{1+\left(\sqrt{1-x^2}\right)}=\frac{1}{2}$$

/2
$$\lim_{x\to5}\frac{\sqrt{2x-1}-3}{x-5}=\lim_{x\to5}\frac{\left(\sqrt{2x-1}-3\right)\left(\sqrt{2x-1}+3\right)}{(x-5)\left(\sqrt{2x-1}+3\right)}=\lim_{x\to5}\frac{(2x-1)-9}{(x-5)\left(\sqrt{2x-1}+3\right)}$$
$$=\lim_{x\to5}\frac{2x-10}{(x-5)\left(\sqrt{2x-1}+3\right)}=\lim_{x\to5}\frac{2(x-5)}{(x-5)\left(\sqrt{2x-1}+3\right)}=\frac{1}{3}$$

**.3 باستخراج عامل مشترك**

**مثال:** أحسب $\lim\limits_{x\to0}\frac{x}{x^2+\sqrt{x}}$ ، $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{3x^2+2x-5}}{-2x+3}$

**الحل:**

$$\lim_{x\to0}\frac{x}{x^2+\sqrt{x}}=\lim_{x\to0}\frac{\cancel{x}}{\cancel{x}\left[x+\frac{\sqrt{x}}{x}\right]}=\lim_{x\to0}\frac{1}{x+\frac{1}{\sqrt{x}}}=0$$

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{3x^2+2x-5}}{-2x+3}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{x^2\left(3+\frac{2}{x}-\frac{5}{x^2}\right)}}{x\left[-2+\frac{3}{x}\right]}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\cancel{x}\sqrt{3+\frac{2}{x}-\frac{5}{x^2}}}{\cancel{x}\left[-2+\frac{3}{x}\right]}=-\frac{\sqrt{3}}{2}$$

## 4. باستعمال العدد المشتق: نستعمل كون $\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=f'(x_0)$

**أمثلة:** أحسب النهايات $\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}$ ، $\lim_{x\to 5}\frac{\sqrt{2x-1}-3}{x-5}$

**الحل:**

1/ نأخذ $f(x)=\sin(x)$ و $x_0=0$ لدينا: $f'(x_0)=\cos x$ و $f'(0)=1$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{\sin(x)-\sin(0)}{x-0}=\sin'(0)=\cos(0)=1$$

2/ بأخذ $f(x)=\sqrt{2x-1}$ و $x_0=5$ ، لدينا: $f'(x)=\frac{1}{\sqrt{2x-1}}$ و $f'(5)=\frac{1}{3}$

$$\lim_{x\to 5}\frac{\sqrt{2x-1}-3}{x-5}=\lim_{x\to 5}\frac{f(x)-f(5)}{x-5}=f'(5)=\frac{1}{3}$$

## 5. باستعمال تغيير المتغير:

**مثال:** أحسب $\lim_{x\to+\infty}x\sin\left(\frac{1}{x}\right)$

**الحل:** نضع $t=\frac{1}{x}$ عندئذ $x=\frac{1}{t}$ و $x\to+\infty \Leftrightarrow t\to 0$ ومنه:

$$\lim_{x\to+\infty}x\sin\left(\frac{1}{x}\right)=\lim_{t\to 0}\frac{1}{t}\sin(t)=\lim_{t\to 0}\frac{\sin(t)}{t}=1$$

## 6. طريقة الحصر:

**مثال:** أحسب $\lim_{x\to 0}x^2\sin\left(\frac{1}{x}\right)$ ، $\lim_{x\to+\infty}\frac{x+\cos(5x^2-3)}{x+1}$

**الحل:**

1/ لدينا $-1\le\sin\left(\frac{1}{x}\right)\le 1$ ومنه: $\underset{\nearrow 0}{-x^2}\le x^2\sin\left(\frac{1}{x}\right)\le\underset{\nearrow 0}{x^2}$

بما أن $\lim_{x\to 0}x^2=\lim_{x\to 0}-x^2=0$ إذن حسب نظرية الحصر فإن $\lim_{x\to 0}x^2\sin\left(\frac{1}{x}\right)=0$

2/ لدينا: $-1\le\cos(5x^2-3)\le 1$ إذن: $x-1\le x+\cos(5x^2-3)\le x+1$ وبالتالي

$\frac{x-1}{x+1}\le\frac{x+\cos(5x^2-3)}{x-1}\le\frac{x+1}{x+1}$ ومنه: $\lim_{x\to+\infty}\frac{x-1}{x+1}\le\lim_{x\to+\infty}\frac{x+\cos(5x^2-3)}{x-1}\le 1$

وبما أن: $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x-1}{x+1}=1$ إذن $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x+\cos(5x^2-3)}{x-1}=1$

**7. بمقارنة سرعة التزايد:** نستعمل النظرية التالية التي تبين أن الدالة الاسية $e^x$ أقوى من الدالة $x^\alpha$ $(\alpha>0)$ و أن الدالة $x^\alpha$ أقوى من الدالة اللوغاريتمية $ln$

**نظرية:** ليكن $\alpha$ عدد حقيقي حيث $\alpha>0$ ، عندئذ

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{e^x}{x^\alpha}=+\infty \text{ ، } \lim_{x\to-\infty}x^\alpha e^x=0 \text{ ، } \lim_{x\to+\infty}\frac{\ln(x)}{x^\alpha}=0 \text{ ، } \lim_{x\to0^+}x^\alpha\ln(x)=0$$

**أمثلة:** أحسب النهايات التالية:

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{3e^x}{4x^3-5x+1},\quad \lim_{x\to+\infty}\frac{\ln(x)}{2x^2-x+3},\quad \lim_{x\to-\infty}(x^3+3x^2-5)e^x,\quad \lim_{x\to0^+}(x^2+x)\ln x$$

**الحل:**

- $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{3e^x}{4x^3-5x+1}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{3e^x}{x^3}\times\frac{x^3}{4x^3-5x+1}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{3e^x}{x^3}\times\frac{x^3}{4x^3}=\frac{1}{4}\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{3e^x}{x^3}=+\infty.$

- $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{ln(x)}{2x^3-x+3}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{ln(x)}{x^2}\times\frac{x^2}{2x^2-x+3}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{ln(x)}{x^2}\times\frac{x^2}{2x^2}=\frac{1}{2}\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{ln(x)}{x^2}=0.$

- $\lim\limits_{x\to0^+}(x^2+x)\ln x=\lim\limits_{x\to0^+}x^2ln(x)+x\ln(x)=0$

**8. باستعمال المقارنة:**

إذا كان $f(x)\le g(x),\forall x$ فإن:

- إذا كان $\lim g(x)=-\infty$ فإن $\lim f(x)=-\infty$
- إذا كان $\lim f(x)=+\infty$ فإن $\lim g(x)=+\infty$

**أمثلة:** أحسب النهايات التالية:

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\left(\sqrt{x}+\ln(x^2+1)\right)^2}{\sqrt{x}} \text{ ، } \lim_{x\to+\infty}\frac{-x^3+5\cos(x+3)}{2x} \text{ ، } \lim_{x\to+\infty}\frac{x^3+e^{\sqrt{x}}}{\ln(x)}$$

**الحل:**

1/ لدينا: $\frac{x^3+e^{\sqrt{x}}}{\ln(x)}\ge\frac{x^3}{\ln(x)}$ وبما أن $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x^3}{\ln(x)}=+\infty$ إذن $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x^3+e^{\sqrt{x}}}{\ln(x)}=+\infty$

2/ بما أن $cos(x+3)\le1$ إذن $\frac{-x^3+5cos(x+3)}{2x}\le\frac{-x^3+5}{2x}$ وبما أن $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{-x^3+5}{2x}=-\infty$

إذن $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{-x^3+5cos(x+3)}{2x}=-\infty$

3/ لدينا $\sqrt{x}+\ln\left(x^2+1\right)\geq\sqrt{x}$ ومنه $\left(\sqrt{x}+\ln\left(x^2+1\right)\right)^2\geq x$

وبالتالي $\frac{\left(\sqrt{x}+\ln\left(x^2+1\right)\right)}{\sqrt{x}}\geq\sqrt{x}$ وبما أن $\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt{x}=+\infty$ إذن: $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\left(\sqrt{x}+\ln\left(x^2+1\right)\right)^2}{\sqrt{x}}=+\infty$

## 9 . بتطبيق نظرية لوبيتال أو قاعدة لوبيتال

**القاعدة الأولى:** تخص النهاية من الشكل $\frac{0}{0}$

ليكن f و $g$ دالتين معرفتين وقابلتين للاشتقاق في جوار $x_0$ وتُحققان

1/ $g(x)\neq0$ و $g'(x)\neq0$ في جوار $x_0$.

2/ $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=\lim\limits_{x\to x_0}g(x)=0$

عندئذ إذا كانت النهاية $\lim\limits_{x\to x_0}\frac{f'(x)}{g'(x)}$ موجودة (منتهية أو غير منتهية) فإن $\lim\limits_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim\limits_{x\to x_0}\frac{f'(x)}{g'(x)}$

**القاعدة الثانية:** تخص النهاية من الشكل $\frac{\infty}{\infty}$

ليكن f و $g$ دالتين قابلتين للاشتقاق في جوار $x_0$ وتُحققان :

1/ $g'(x)\neq0$ في جوار $x_0$.

2/ $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=\lim\limits_{x\to x_0}g(x)=+\infty$

عندئذ: إذا كانت النهاية $\lim\limits_{x\to x_0}\frac{f'(x)}{g'(x)}$ موجودة (منتهية أو غير منتهية) فإن $\lim\limits_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim\limits_{x\to x_0}\frac{f'(x)}{g'(x)}$

**ملاحظات مهمة:**

1. إذا كانت $\lim\limits_{x\to x_0}\frac{f'(x)}{g'(x)}=\frac{0}{0}$ يمكن تطبيق لوبيتال مرة ثانية $\lim\limits_{x\to x_0}\frac{f'(x)}{g'(x)}=\lim\limits_{x\to x_0}\frac{f''(x)}{g''(x)}$
2. يمكن تطبيق لوبيتال (القاعدة الأولى والثانية) لما $x\to x_0^+,\quad x\to x_0^-,\quad x\to\pm\infty$
3. يمكن تطبيق لوبيال في حالة $0.\infty$ أو $\infty-\infty$

**أمثلة:** أحسب النهايات التالية:

$\lim\limits_{x\to0}\frac{ln(1+2x)}{ln(1+3x)}$ ، $\lim\limits_{x\to5}\frac{\sqrt{2x-1}-3}{x-5}$ ، $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{2x^2-3x+1}{x^2+x-2}$ ، $\lim\limits_{x\to0^+}xln(x)$

$\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{x}}{\ln(x)}$ ، $\lim\limits_{x\to0^+}\frac{1}{x}-\frac{1}{\sin(x)}$ ، $\lim\limits_{x\to+\infty}xtg\left(\frac{1}{x}\right)$

**الحل:**

$$1/\ \lim_{x\to 0}\frac{ln(1+2x)}{ln(1+3x)}=\lim_{x\to 0}\frac{[ln(1+2x)]'}{[ln(1+3x)]'}==\lim_{x\to 0}\frac{\frac{2}{1+2x}}{\frac{3}{1+3x}}=\frac{2}{3}$$

$$2/\ \lim_{x\to 5}\frac{\sqrt{2x-1}-3}{x-5}=\lim_{x\to 5}\frac{\frac{2}{2\sqrt{2x-1}}}{1}=\lim_{x\to 5}\frac{1}{\sqrt{2x-1}}=\frac{1}{\sqrt{9}}=\frac{1}{3}$$

$$3/\ \lim_{x\to+\infty}\frac{2x^2-3x+1}{x^2+x-2}=\lim_{x\to+\infty}\frac{4x-3}{2x+1}=\lim_{x\to+\infty}\frac{(4x-3)'}{(2x+1)'}=\lim_{x\to+\infty}\frac{4}{2}=2$$

$$4/\ \lim_{x\to 0^+}x\ln(x)=\lim_{x\to 0^+}\frac{ln(x)}{\frac{1}{x}}=\lim_{x\to 0^+}\frac{\frac{1}{x}}{\frac{-1}{x^2}}=\lim_{x\to 0^+}=\frac{1}{x}\times\frac{x^2}{-1}=0$$

$$5/\ \lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{x}}{\ln(x)}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{1}{2\sqrt{x}}}{\frac{1}{x}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{2\sqrt{x}}\times x=\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{2}\sqrt{x}=+\infty$$

$$6/\ \lim_{x\to 0^+}\frac{1}{x}-\frac{1}{\sin(x)}=\lim_{x\to 0^+}\frac{\sin-x}{x\sin(x)}=\lim_{x\to 0}\frac{\cos x-1}{\sin(x)+x\cos x}=\lim_{x\to 0^+}\frac{(\cos(x)-1)'}{(\sin(x)+x\cos x)'}$$

$$=\lim_{x\to 0^+}\frac{-\sin(x)}{\cos(x)+\cos x-x\sin x}=\frac{0}{2}=0$$

$7/\ \lim_{x\to+\infty}x\,tg\left(\frac{1}{x}\right)=\lim_{y\to 0^+}\frac{1}{y}\mathrm{tg}(y)$ (تغيير المتغير $y=\frac{1}{x}$)

$$=\lim_{y\to 0^+}\frac{tg(y)}{y}=\lim_{y\to 0^+}\frac{tg(y)'}{y'}=\lim_{y\to 0}\frac{1+\mathrm{tg}^2(y)}{1}=\frac{1+0}{1}=1$$

**حساب النهاية من الشكل** $\ell im f(x)^{g(x)}$ مع $f(x)>0$

لحساب هذا النوع من النهايات، هناك ثلاث حالات يتعذر علينا إيجاد النهاية (حالات عدم التعيين) وهي $0^0,\infty^0,1^\infty$. لحساب النهاية $\lim_{x\to x_0}f(x)^{g(x)}$ مع $f(x)>0$ في جوار $x_0$، نستعمل العلاقة

$$f(x)^{g(x)}=e^{\ln(f(x))^{g(x)}}=e^{g(x)\ln(f(x))}$$

وبما أن الدالة الأسية دالة مستمرة فإن

$$\lim_{x\to x_0}f(x)^{g(x)}=e^{\lim_{x\to x_0}g(x)\ln(f(x))}$$

**أمثلة:** أحسب النهايات التالية: $\lim_{x\to 1}x^{\frac{1}{1-x}}$ ، $\lim_{x\to 0^+}(x)^{5x}$

**الحل:**

**1/** $\lim_{x\to 0^+}(x)^{5x}=\lim_{x\to 0^+}e^{\ln(x)^{5x}}=\lim_{x\to 0^+}e^{5x\ln(x)}=e^{\lim_{x\to 0^+}5x\ln(x)}=e^{5.0}=e^0=1$

**/2** لدينا $x^{\frac{1}{1-x}}=e^{\ln\left(x^{\frac{1}{(1-x)}}\right)}=e^{\frac{1}{1-x}\ln(x)}=e^{\frac{\ln(x)}{1-x}}$

وبما أن $\lim\limits_{x\to1}\frac{\ln(x)}{1-x}=\lim\limits_{x\to1}\frac{\frac{1}{x}}{-1}=-1$ إذن $\lim\limits_{x\to1}x^{\frac{1}{1-x}}=\lim\limits_{x\to1}e^{\ln\left(x^{\frac{1}{1-x}}\right)}=\lim\limits_{x\to1}e^{\frac{\ln(x)}{1-x}}=e^{-1}=\frac{1}{e}$

## 3- الاستمرار

**تعريف:** لتكن $f:I\to\mathbb{R}$ دالة عددية و $x_0$ نقطة من $I$. نقول عن $f$ أنها مستمرة عن النقطة $x_0$ إذا تحقق ما يلي:

/1 $f$ معرفة عند $x_0$.

/2 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=f(x_0)$

**أمثلة:** هل الدوال التالية مستمرة عند النقطة $x_0=0$.

$$f(x)=\begin{cases}x^2e^x, & x\neq0\\ 0, & x=0\end{cases}\quad،\quad g(x)=\begin{cases}\frac{\sin(x)}{x}, & x\neq0\\ 1, & x=0\end{cases}\quad،\quad h(x)=\begin{cases}\frac{\sin(x)}{\ln(1+x^2)}, & x\neq0\\ 0, & x=0\end{cases}$$

**الحل:**

**/1** دراسة استمرارية $f$ عند "0": لدينا $f(0)=0$ و $\lim\limits_{x\to0}f(x)=\lim\limits_{x\to0}x^2e^x=0$

ومنه $\lim\limits_{x\to0}f(x)=f(0)$ وبالتالي $f$ مستمرة عند "0"

**/2** دراسة استمرارية g عند "0" : لدينا $g(0)=1$ وَ

(لوبيتال) $\lim\limits_{x\to0}g(x)=\lim\limits_{x\to0}\frac{\sin(x)}{x}=\lim\limits_{x\to0}\frac{(\sin(x))'}{x'}=\lim\limits_{x\to0}\frac{\cos x}{1}=1$

إذن $\lim\limits_{x\to0}g(x)=g(0)$ ومنه $g$ مستمرة عند "0"

**/3** دراسة استمرارية $h$ عند "0": لدينا $h(0)=0$ وَ

$$\lim\limits_{x\to0}h(x)=\lim\limits_{x\to0}\frac{\sin(x)}{\ln(1+x^2)}=\lim\frac{(\sin x)'}{\left[\ln\left(1+x^2\right)\right]'}=\lim\limits_{x\to0}\frac{\cos x}{\frac{2x}{1+x^2}}=\lim\limits_{x\to0}\frac{(1+x^2)\cos x}{2x}=\infty$$

إذن $\lim\limits_{x\to0}h(x)\neq h(0)$ ومنه $h$ غير مستمرة عند "0".

### الاستمرار من اليمين ومن اليسار

- نقول عن الدالة $f$ أنها مستمرة على يمين $x_0$ إذا كانت معرفة عند $x_0$ و $\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\ >}}f(x)=f(x_0)$
- نقول عن الدالة $f$ أنها مستمرة على يسار $x_0$ إذا كانت معرفة عند $x_0$ و $\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\ <}}f(x)=f(x_0)$

**نظرية:** $f$ مستمرة عند $x_0$ إذا وفقط إذا كانت مستمرة على يمين وعلى يسار $x_0$ . أي

$$f \text{ مستمرة عند } x_0 \Leftrightarrow \lim_{\substack{x\to x_0 \\ >}} f(x) = \lim_{\substack{x\to x_0 \\ <}} f(x) = f(x_0)$$

**أمثلة:** أدرس استمرارية الدوال التالية عند النقطة "0"

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{e^x-1}{x}, & x<0\\ \sqrt{x^2+1}, & x\geq 0\end{cases} \quad ، \quad g(x)=\begin{cases}\dfrac{ln(1+x)}{x}, & x>0\\ 2x+3, & x\leq 0\end{cases}$$

**الحل:**

**1/** دراسة استمرارية $f$ عند "0": لدينا: $f(0)=\sqrt{0^2+1}=1$ و $\lim_{\substack{x\to 0 \\ >}} f(x) = \lim_{\substack{x\to 0 \\ >}} \sqrt{x^2+1}=1$

(قاعدة لوبيتال) $$\lim_{\substack{x\to 0 \\ <}} f(x) = \lim_{\substack{x\to 0 \\ <}} \frac{e^x-1}{x} = \lim_{\substack{x\to 0 \\ <}} \frac{(e^x-1)'}{x'} = \lim_{\substack{x\to 0 \\ <}} \frac{e^x}{1}=1$$

وبالتالي $\lim_{\substack{x\to 0 \\ >}} f(x) = \lim_{\substack{x\to 0 \\ <}} f(x) = f(0)$ ومنه $f$ عند "0"

**2/** دراسة استمرارية $g$ عند "0": لدينا $g(0)=2.0+3=3$ و $\lim_{\substack{x\to 0 \\ <}} g(x) = \lim_{\substack{x\to 0 \\ <}} 2x+3=3$

$$\lim_{\substack{x\to 0 \\ >}} g(x) = \lim_{\substack{x\to 0 \\ >}} \frac{\ln(1+x)}{x} = \lim_{\substack{x\to 0 \\ >}} \frac{(\ln(1+x))'}{x'} = \lim_{\substack{x\to 0 \\ >}} \frac{\frac{1}{1+x}}{1}=1$$

بما أن $\lim_{\substack{x\to 0 \\ <}} g(x) \neq \lim_{\substack{x\to 0 \\ >}} g(x)$ إذن $g$ غير مستمرة عند "0"

## عمليات على دوال مستمرة

**نظرية 1:** إذا كانت $f$ و $g$ دالتين مستمرتين عند $x_0$ و $\lambda$ عدد حقيقي فإن الدوال $f+g$ ، $\lambda f$ ، $f.g$ ، $\frac{f}{g}\left(g(x_0)\neq 0\right)$ كلها دوال مستمرة عند $x_0$.

**نظرية 2:** إذا كانت $f:I\mapsto\mathbb{R}$ و $g:J\mapsto\mathbb{R}$ دالتين مع $f(I)\subset J$ و $x_0$ نقطة من $I$ عندئذ:
إذا كانت $f$ مستمرة عند $x_0$ و $g$ مستمرة عند $f(x_0)$ فإن الدالة $gof$ مستمرة عند $x_0$.

**الاستمرار على مجموعة:**

**تعريف 1:** نقول عن الدالة $f$ أنها مستمرة على مجموعة $A$ إذا كانت مستمرة عند كل نقطة من $A$.

**تعريف 2:** نقول عن الدالة $f$ أنها مستمرة على المجال $[a,b]$ إذا كانت:

- مستمرة على $]a,b[$
- مستمرة على يمين $a$
- مستمرة على يسار $b$

**أمثلة:**

الدوال التالية هي دوال مستمرة على مجموعة تعريفها: دالة كثيرات الحدود، الدالة الناطقة، الدالة الجذرية، الدالة الأسية، الدالة اللوغارتمية، الدالة الجيبية $sin(x)$ ، دالة $cos(x)$ ، دالة $tg$ ، .....

**أمثلة:** أدرس استمرارية الدوال التالية على $\mathbb{R}$

$$h(x)=\begin{cases}\dfrac{\sqrt{1+x}-1}{x}, & x>0\\ 0, & x=0\\ \dfrac{\sin(x)}{xe^{x}}, & x<0\end{cases} \quad ، \quad g(x)=\begin{cases}\dfrac{e^{\sqrt{x}}-1}{\sqrt{x}}, & x>0\\ 5x^2-3x+1, & x\le 0\end{cases} \quad ، \quad f(x)=\begin{cases}\dfrac{e^{x}+1}{e^{-x}+1}, & x\neq 0\\ 1, & x=0\end{cases}$$

**الحل:**

**1/** دراسة استمرارية الدالة $f$ على $\mathbb{R}$:

- بما أن الدالة الأسية والدالة الناطقة مستمرة على مجموعة تعريفها إذن حسب النظرية 1 و2 نستنتج أن الدالة $f$ مستمرة على $\mathbb{R}-\{0\}$
- دراسة استمرارية $f$ عند "0": لدينا $f(0)=1$

$$\lim_{x\to 0} f(x)=\lim_{x\to 0}\frac{e^{x}+1}{e^{-x}-1}=\lim_{x\to 0}\frac{(e^{x}+1)'}{(e^{-x}-1)'}=\lim_{x\to 0}\frac{e^{x}}{-e^{-x}}=-1$$

بما أن $\lim_{x\to 0} f(x)\neq f(0)$ إذن $f$ غير مستمرة عند "0" وبالتالي $f$ مستمرة على $\mathbb{R}-\{0\}$

**2/** دراسة استمرارية الدالة $g$ على $\mathbb{R}$:

- بما أن الدالة الأسية والدالة الجذرية والناطقة هي دوال مستمرة على $]0,+\infty[$ إذن $g$ مستمرة على $]0,+\infty[$، وبما أن دوال كثيرات الحدودة مستمرة على $]-\infty,0[$ إذن $g$ مستمرة على $]-\infty,0[$
- دراسة الاستمرارية عند "0": لدينا $g(0)=1$ و $\lim_{\substack{<\\x\to 0}} g(x)=\lim_{\substack{<\\x\to 0}} 5x^2-3x+1=1$

$$\lim_{\substack{>\\x\to 0}} g(x)=\lim_{\substack{>\\x\to 0}}\frac{e^{\sqrt{x}}-1}{\sqrt{x}}=\lim_{\substack{>\\x\to 0}}\frac{(e^{\sqrt{x}}-1)'}{(\sqrt{x})'}=\lim_{\substack{>\\x\to 0}}\frac{\frac{1}{2\sqrt{x}}e^{\sqrt{x}}}{\frac{1}{2\sqrt{x}}}=\lim_{\substack{>\\x\to 0}} e^{\sqrt{x}}=1$$

بما أن $\lim_{\substack{>\\x\to 0}} g(x)=\lim_{\substack{<\\x\to 0}} g(x)=g(0)$ إذن $g$ مستمرة عند "0" وبالتالي مستمرة على $\mathbb{R}$

**3/** دراسة استمرارية الدالة $h$ على $\mathbb{R}$: بما أن الدوال $x,\ \ \sqrt{1+x},\ \ \sin(x),\ \ e^{x}$ و الدالة الناطقة هي دوال مستمرة على مجموعة تعريفها إذن الدالة $h$ مستمرة على $]0,+\infty[$ و $]-\infty,0[$ تبقى دراسة الاستمرار عند "0". لدينا $h(0)=0$ و

$$\lim_{\substack{x\to 0 \\ <}} h(x)=\lim_{\substack{x\to 0 \\ <}}\frac{\sin x}{xe^{x}}=\lim_{\substack{x\to 0 \\ <}}\frac{\sin x}{x}\times\frac{1}{e^{x}}=1$$

$$\lim_{\substack{x\to 0 \\ >}} h(x)=\lim_{\substack{x\to 0 \\ >}}\frac{\sqrt{1+x}-1}{x}=\lim_{\substack{x\to 0 \\ >}}\frac{\frac{1}{2\sqrt{1+x}}}{1}=\frac{1}{2}$$

لاحظ أن $h(0)$ و $\lim\limits_{\substack{x\to 0 \\ <}} h(x)$ و $\lim\limits_{\substack{x\to 0 \\ >}} h(x)$ غير متساوية إذن $h$ غير مستمرة عند "0" وبالتالي $h$ مستمرة على $]-\infty,0[\cup]0,+\infty[$

**التمديد بالاستمرار**

لتكن $f:I\to\mathbb{R}$ دالة عددية و $a$ نقطة من I. نفرض أن $f$ غير معرفة عند $a$ إذا قبلت $f$ نهاية منتهية $\ell$ عند $a$ أي $\left(\lim\limits_{x\to a} f(x)=\ell\right)$ فنقول أن $f$ قابلة للتمديد باستمرار عند $a$ والدالة $\tilde{f}$ المعرفة بــ

$$\tilde{f}:I\cup\{a\}\to\mathbb{R}$$
$$x\mapsto \tilde{f}(x)=\begin{cases} f(x), x\in I \\ \ell \quad x=a\end{cases}$$

تسمى الدالة الممددة لــ $f$.

**مثال:** هل الدالة $f$ المعرفة بــ: $f(x)=\frac{\sin x}{x}$ قابلة للتمديد باستمرار عند "0"

**الحل:** بما أن $\lim\limits_{x\to 0} f(x)=1$ (النهاية موجودة ومنتهية) إذن الدالة $f$ قابلة للتمديد باستمرار والدالة الممددة $\tilde{f}$ معرفة كما يلي:

$$\tilde{f}:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$$
$$x\mapsto \tilde{f}(x)=\begin{cases}\frac{\sin x}{x}, x\in\mathbb{R}^{*} \\ 1, \quad x=0\end{cases}$$

**نظرية القيم المتوسطة:**

إذا كان $f$ دالة عددية مستمرة على مجال $[a,b]$ بحيث $f(a).f(b)<0$ $\left(f(a)\right.$ و $\left.f(b)\right)$ مختلفين في الإشارة) فإنه يوجد على الأقل c من المجال $]a,b[$ يحقق $f(c)=0$.

**ملاحظة:** إذا كان $f$ رتيبة تماما فإن النقطة c وحيدة

**مثال:** أثبت أن المعادلة $x^{3}-3x+1=0$ تقبل حلا في المجال $]0,1[$

**الحل:** نعتبر على المجال $[0,1]$، الدالة $f$ المعرفة بــ: $f(x)=x^{3}-3x+1$

بما أن $f$ مستمرة على $[0,1]$ (كثير حدود) و $f(0).f(1)=-1<0$ إذن حسب نظرية القيم المتوسطة يوجد $c\in]0,1[$ يحقق $f(c)=0$ أي $c^{2}-3c+1=0$ إذن c هو حل للمعادلة $x^{2}-3x+1=0$

**نظرية الدوال العكسية:**

ليكن $f$ دالة عددية مستمرة ورتيبة تماما على المجال I من $\mathbb{R}$. عندئذ $f$ تقبل دالة عكسية $f^{-1}$ لها نفس رتابة $f$ ومستمرة على المجال $J=f(I)$ .

$f$ مستمرة على $I \Leftrightarrow f^{-1}$ مستمر على $J = f(I)$

$f$ متزايد تماما على $I \Leftrightarrow f^{-1}$ متزايدة تماما على $J = f(I)$

$f$ متناقص تماما على $I \Leftrightarrow f^{-1}$ متناقص تماما على $J = f(I)$.

## 4- الاشتقاق

**تعريف:** لتكن $f{:}I \to \mathbb{R}$ دالة و $x_0 \in \mathrm{I}$ ( $f$ معرفة في جوار $x_0$).

نقول عن الدالة $f$ أنها قابلة للاشتقاق عند النقطة $x_0$ إذا كانت النهاية $\lim\limits_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ موجودة ومنتهية وتُسمى بالعدد المشتق للدالة $f$ عند $x_0$ ونرمز لها بــ $f'(x_0)$ أي:

$$f'(x_0)=\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$$

| |
|---|
| $f$ قابلة للاشتقاق عند $x_0$ $\Leftrightarrow$ النهاية $\lim\limits_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ موجودة ومنتهية |

**كتابة أخرى:** بوضع $x=x_0+h$ أي $x-x_0=h$ نستنتج ما يلي:

| | | | |
|---|---|---|---|
| $f$ قابلة للاشتقاق عند | $x_0$ | النهاية $\Leftrightarrow$ | $\lim\limits_{h\to x_0}\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$ موجودة ومنتهية |

**أمثلة:** هل الدوال التالية قابلة للاشتقاق عند "0"

$$f(x)=\begin{cases}\frac{e^x-1}{x}, & x\neq 0\\ 1, & x=0\end{cases} \quad ، \quad g(x)=\begin{cases}x\ell n(x^2), & x\neq 0\\ 0, & x=0\end{cases}$$

**الحل:**

**/1** هل $f$ قابلة للاشتقاق عند "0": لدينا $f(0)=1$ و

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-0}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{e^x-1}{x}-1}{x-0}=\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1-x}{x^2}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{(e^x-1-x)'}{(x^2)'}=\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{2x}=\lim_{x\to 0}\frac{(e^x-1)'}{(2x)'}=\lim_{x\to 0}\frac{e^x}{2}=\frac{1}{2}$$

لاحظ أن النهاية $\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-0}$ موجودة ومنتهية $\left(\frac{1}{2}\right)$ إذن $f$ قابلة للاشتقاق عند "0".

**/2** هل الدالة $g$ قابلة للاشتقاق عند "0" : لدينا $g(0)=0$ و

$$\lim_{x\to 0}\frac{g(x)-g(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0}\frac{x\ln(x^2)-0}{x-0}=\lim_{x\to 0}\frac{x\ln(x^2)}{x}=\lim_{x\to 0}\ln(x^2)=-\infty$$

لاحظ أنه النهاية $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{g(x)-g(0)}{x-0}$ غير منتهية $(-\infty)$ إذن $g$ غير قابلة للاشتقاق عند "0".

**الاشتقاق من اليمين ومن اليسار**

- نقول عن الدالة $f$ أنها قابلة للاشتقاق على يمين $x_0$ إذا كانت النهاية $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ >}}\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ موجودة ومنتهية ونرمز لها بـ $f'_d(x_0)$
- نقول عن الدالة $f$ أنها قابلة للاشتقاق على يسار $x_0$ إذا كانت النهاية $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ <}}\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ موجودة ومنتهية ونرمز لها بـ $f'_g(x_0)$ أي: $f'_d(x_0)=\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ >}}\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ ، $f'_g(x_0)=\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ <}}\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$

**نظرية:** الدالة $f$ قابلة للاشتقاق عند $x_0$ إذا وفقط إذا كانت قابلة للاشتقاق على يمين وعلى يسار $x_0$ وكان $f'_d(x_0)=f'_g(x_0)$.

**أمثلة:** أدرس قابلية الاشتقاق للدالة $f$ عند "0" حيث $f(x)=\begin{cases}\ln(1+x), & x\geq 0\\ -x, & x<0\end{cases}$

**الحل:** 1/ قابلية الاشتقاق على يمين "0": لدينا

$$\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ >}}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ >}}\frac{\ln(1+x)-0}{x-0}=\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ >}}\frac{\ln(1+x)}{x}=\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ >}}\frac{\frac{1}{1+x}}{1}=1$$

أي $f'_d(0)=1$ ومنه $f$ قابلة للاشتقاق على يمين "0"

2/ قابلة للاشتقاق على يسار "0" : لدينا

$\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ <}}\dfrac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ <}}\dfrac{-x-0}{x-0}=\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ <}}\dfrac{-x}{x}=-1$ أي $f'_g(0)=-1$ ومنه $f$ قابلة للاشتقاق على يسار "0" لكن بما أن $f'_d(0)\neq f'_g(0)$ إذن $f$ غير قابلة للاشتقاق عند "0"

**الاشتقاق على مجموعة:**

نقول عن الدالة $f$ أنها قابلة للاشتقاق على المجال $I$ (المجموعة $I$) إذا قبلت الاشتقاق عند كل نقطة من $I$ عندئذ الدالة: $\begin{array}{l} f':I\to\mathbb{R}\\ x\to f'(x)\end{array}$ تُسمى بالدالة المشتقة.

**أمثلة:** أدرس قابلية الاشتقاق للتوابع التالية على مجموعة تعريفها $x^2$, $\sqrt{x}$, $\sin x$,

**الحل:**

1. دراسة قابلية الاشتقاق للدالة $f(x)=x^2$ على مجموعة التعريف $D=\mathbb{R}$

لتكن $x_0$ نقطة من $\mathbb{R}$، هل التابع $f$ يقبل الاشتقاق عند $x_0$ أي هل النهاية $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ موجودة ومنتهية؟ لدينا:

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=\lim_{x\to x_0}\frac{x^2-x_0^2}{x-x_0}=\lim_{x\to x_0}\frac{\cancel{(x-x_0)}(x+x_0)}{\cancel{(x-x_0)}}=\lim_{x\to x_0}x+x_0=2x_0$$

إذن النهاية السابقة موجودة ومنتهية $\forall x_0\in\mathbb{R}$ وبالتالي التابع $f$ يقبل الاشتقاق على $D=\mathbb{R}$ و

$$\boxed{f'(x)=2x,\forall x\in\mathbb{R}}$$

2. دراسة قابلية الاشتقاق للدالة $f(x)=\sin x$ على مجموعة التعريف $D=\mathbb{R}$

لتكن $x_0$ من $\mathbb{R}$. هل الدالة $f$ تقبل الاشتقاق عند $x_0$ أي هل النهاية $\lim_{h\to 0}\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$ موجودة ومنتهية؟ لدينا:

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{\sin(x_0+h)-\sin x_0}{h}$$
$$=\lim_{h\to 0}\frac{[\sin x_0\cos h+\cos x_0\sin h]-\sin x_0}{h}$$
$$=\lim_{h\to 0}\frac{\sin x_0[\cos h-1]+\cos x_0\sin h}{h}$$
$$=\lim_{h\to 0}\sin x_0.\frac{[\cos h-1]}{h}+\cos x_0\frac{\sin h}{h}$$
$$=\lim_{h\to 0}\frac{\cos h-1}{h}+\cos x_0\frac{\sin h}{h}$$

بما أن $\lim_{h\to 0}\frac{\sin h}{h}=1$ و $\lim_{h\to 0}\frac{\cos h-1}{h}=0$ إذن $\lim_{h\to 0}\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}=\cos x_0$ (أي النهاية موجودة ومنتهية مهما يكن $x_0$ من $\mathbb{R}$) إذن التابع $\sin x$ يقبل الاشتقاق على $\mathbb{R}$ و $\boxed{(\sin x)'=\cos x}$

3. دراسة قابلية الاشتقاق للدالة $f(x)=\sqrt{x}$ على مجموعة التعريف $D=[0,+\infty[$

ليكن $x_0$ من $[0,+\infty[$، هل $f$ تقبل الاشتقاق عند $x_0$ أي هل النهاية $\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ موجودة ومنتهية؟ لدينا:

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=\lim_{x\to x_0}\frac{\sqrt{x}-\sqrt{x_0}}{x-x_0}$$
$$=\lim_{x\to x_0}\frac{(\sqrt{x}-\sqrt{x_0})(\sqrt{x}+\sqrt{x_0})}{(x-x_0)(\sqrt{x}+\sqrt{x_0})}=\lim_{x\to x_0}\frac{\cancel{(x-x_0)}}{\cancel{(x-x_0)}(\sqrt{x}+\sqrt{x_0})}$$
$$=\lim_{x\to x_0}\frac{1}{\sqrt{x}+\sqrt{x_0}}=\frac{1}{2\sqrt{x_0}}$$

لاحظ أن النهاية السابقة موجودة ومنتهية إذا كان $x_0\neq 0$ إذن التابع $\sqrt{x}$ يقبل الاشتقاق على $]0,+\infty[$

$$\boxed{(\sqrt{x})'=\frac{1}{2\sqrt{x}},\quad \forall x\in]0,+\infty[}$$

## أمثلة أخرى:

- الدوال التالية: (كثيرات الحدود، الدالة الأسية، اللوغارتمية، $sin$ ، $cos$ ) هي دوال قابلة للاشتقاق على
مجموعة تعريفها.
- الدالة $x \mapsto \sqrt{x}$ دالة قابلة للاشتقاق على $]0,+\infty[$ أي غير قابلة للاشتقاق عند "0" لأن

$$\lim_{x \overset{>}{\to} 0} \frac{\sqrt{x}-\sqrt{0}}{x-0} = \lim_{x \overset{>}{\to} 0} \frac{\sqrt{x}}{x} = \lim_{x \overset{>}{\to} 0} \frac{1}{\sqrt{x}} = +\infty$$ (النهاية غير منتهية)

**نظرية:** إذا كانت $f$ قابلة للاشتقاق عند $x_0$ فهي مستمرة عند $x_0$.

العكس غير صحيح فالمثال الموالي يوضح أن الدالة $f$ مستمرة عند "0" لكنها غير قابلة للاشتقاق عند "0".

**مثال:** لتكن الدالة المعرفة بـ

$$f(x) = \begin{cases} \ln(1+x), & x \geq 0 \\ -x, & x < 0 \end{cases}$$

لدينا: $\lim_{x \overset{>}{\to} 0} f(x) = \lim_{x \overset{>}{\to} 0} \ln(1+x) = 0$ ، $\lim_{x \overset{<}{\to} 0} f(x) = \lim_{x \overset{<}{\to} 0} (-x) = 0$ ، $f(0) = 0$

أي $\lim_{x \overset{<}{\to} 0} f(x) = \lim_{x \overset{>}{\to} 0} f(x) = f(0)$ وبالتالي $f$ مستمرة عند"0" لكن $f$ غير قابلة للاشتقاق عند"0" لأن:

$$\lim_{x \overset{>}{\to} 0} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim_{x \overset{>}{\to} 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = \lim_{x \overset{>}{\to} 0} \frac{\frac{1}{1+x}}{1} = 1$$

$$\lim_{x \overset{<}{\to} 0} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim_{x \overset{<}{\to} 0} \frac{-x-0}{x-0} = \lim_{x \overset{<}{\to} 0} \frac{-x}{x} = -1$$

أي $f'_d(0) \neq f'_g(0)$ ومنه $f$ غير قابلة للاشتقاق عند"0"

## عمليات على الدوال القابلة للاشتقاق

**نظرية:** لتكن $f$ و $g$ دالتين قابلتين للاشتقاق و $\lambda$ عدد حقيقي عندئذ:

$$1/ \left[\lambda f(x)\right]' = \lambda f'(x) \qquad 3/ \left[f(x).g(x)\right]' = f'(x)g(x) + g'(x).f(x)$$

$$2/ \left[f(x)+g(x)\right]' = f'(x)+g'(x) \qquad 4/ \left[\frac{f(x)}{g(x)}\right]' = \frac{f'(x).g(x)-g'(x).f(x)}{\left[g(x)\right]^2}$$

## مشتق دالة مركبة:

**نظرية:** لتكن $f: I \to \mathbb{R}$ و $f: J \to \mathbb{R}$ دالتين قابلتين للاشتقاق مع $f(I) \subset J$ عندئذ الدالة $g \circ f$ قابلة للاشتقاق و $(g \circ f)'(x) = \left[g(f(x))\right]' = f'(x).g'(f(x))$

## مشتق الدالة العكسية:

**نظرية:** لتكن $f:I\rightarrow\mathbb{R}$ دالة قابلة للاشتقاق وتقابلية. عندئذ الدالة العكسية $f^{-1}$ تقبل الاشتقاق وَ

$$\left(f^{-1}(y)\right)'=\frac{1}{f'(x)}.\qquad y=f(x)$$

## مشتقة الدالة من الشكل $\left[f(x)\right]^{g(x)}$ مع $f>0$ :

لاحظ أولا أن: $\left[f(x)\right]^{g(x)}=e^{\ln\left[f(x)\right]^{g(x)}}=e^{g(x)\ln(f(x))}$ و منه:

$$\left(\left[f(x)\right]^{g(x)}\right)'=\left(e^{g(x)\ln(f(x))}\right)'=\left[g(x)\ln\left(f(x)\right)\right]'e^{g(x)\ln(f(x))}$$

## مشتقة بعض الدوال الشهيرة والدوال المركبة

| دوال مركبة | | دوال بسيطة | |
|---|---|---|---|
| مشتقتها | الدالة | مشتقتها | الدالة |
| $f'(x)$ | $f(x)$ | $1$ | $x$ |
| $a.f'(x)$ | $af(x)$ | $a$ | $ax$ |
| $n.f'(x)f(x)^{n-1}$ | $\left[f(x)\right]^{n}$ | $nx^{n-1}$ | $x^{n}$ |
| $f'(x)e^{f(x)}$ | $e^{f(x)}$ | $e^{x}$ | $e^{x}$ |
| $\frac{f'(x)}{f(x)}$ | $\ln(f(x))$ | $\frac{1}{x}$ | $ln(x)$ |
| $f'(x)cos(f(x))$ | $\sin(f(x))$ | $\cos(x)$ | $\sin(x)$ |
| $-f'(x)cos(f(x))$ | $\cos(f(x))$ | $-\sin(x)$ | $\cos(x)$ |
| $f'(x)\left[1+tg^2(f(x))\right]$ | $tg(f(x))$ | $1+tg^2(x)$ | $tg(x)$ |
| $\frac{f'(x)}{\cos^2(f(x))}$ | $tg(f(x))$ | $\frac{1}{\cos^2(x)}$ | $tg(x)$ |

**أمثلة:**

1. $\left((x^2+3)\sqrt{x}\right)=2x\sqrt{x}+(x^2+3)\frac{1}{2\sqrt{x}}=2x\sqrt{x}+\frac{x^2+3}{2\sqrt{x}}$

2. $\left(\sqrt{5x^2+4}\right)'=\frac{(5x^2+4)'}{2\sqrt{5x^2+4}}=\frac{10x}{2\sqrt{5x^2+4}}=\frac{5x}{\sqrt{5x^2+4}}$

3. $\left(xe^{5x+4}\right)'=e^{5x+4}+x(5x+4)'e^{5x+4}=e^{5x+4}+5xe^{5x+4}=(5x+1)e^{5x+4}$

4. $\left[\ln\left(\sqrt{x}+\frac{1}{x}\right)\right]'=\frac{\left[\sqrt{x}+\frac{1}{x}\right]'}{\sqrt{x}+\frac{1}{x}}=\frac{\frac{1}{2\sqrt{x}}-\frac{1}{x^2}}{\sqrt{x}+\frac{1}{x}}=\frac{(x^2-2\sqrt{x})}{2x(x\sqrt{x}+1)\sqrt{x}}$

5. $\left[\sin\left(5x^3-4x+1\right)\right]'=\left(5x^3-4x+1\right)'\cos\left(5x^3-4x+1\right)=\left(15x^2-4\right)\cos\left(5x^3-4x+1\right)$

6. $\left(e^{\sin(x+3)}\right)'=\left(\sin\left(x+3\right)\right)'e^{\sin(x+3)}=\cos\left(x+3\right)e^{\sin(x+3)}$

7. $\left(\sqrt{e^x+\sqrt{x}}\right)'=\dfrac{\left(e^x+\sqrt{x}\right)'}{2\sqrt{e^x+\sqrt{x}}}=\dfrac{e^x+\dfrac{1}{2\sqrt{x}}}{2\sqrt{e^x+\sqrt{x}}}$

8. $\left[\ln\left(5x^3+2x+1\right)^3\right]'=3\left[\ln\left(5x^3+2x+1\right)\right]'\left[\ln\left(5x^3+2x+1\right)\right]^2$

$$=3\frac{\left(5x^3+2x+1\right)'}{5x^3+2x+1}\left[\ln\left(5x+2x+1\right)\right]^2$$

$$=\frac{3\left(15x^2+2\right)}{5x^3+2x+1}\left[\ln\left(5x+2x+1\right)\right]^2$$

9. $\left(tg\left(\ln\left(x\right)\right)\right)'=\left(\ln\left(x\right)\right)'\left[1+tg^2\left(\ln\left(x\right)\right)\right]=\dfrac{1}{x}\left[1+tg^2\left(\ln\left(x\right)\right)\right]$

10. $\left[\dfrac{\ln\left(x+1\right)}{\sin\left(2x+3\right)}\right]'=\dfrac{\left(\ln\left(x+1\right)\right)'\sin(2x+3)-(\sin(2x+3))'\ln(x+1)}{\left[\sin\left(2x+3\right)\right]^2}$

$$=\frac{\dfrac{1}{x+1}.\sin(2x+3)-2\cos(2x+3).\ln(x+1)}{\left[\sin\left(2x+3\right)\right]^2}$$

11. $\left[\ln\left(\ln\left(x\right)\right)\right]'=\dfrac{\left[\ln\left(x\right)\right]'}{\ln\left(x\right)}=\dfrac{\dfrac{1}{x}}{\ln\left(x\right)}=\dfrac{1}{x\ln\left(x\right)}$

**تمرين:**

1/ عين $\alpha$ و $\beta$ حتى تكون الدالتين $f$ و $g$ مستمرتين عند "0" و"2" على التوالي مع:

$$g\left(x\right)=\begin{cases}\dfrac{x^3-8}{x-2}, & x\neq 2\\ \beta, & x=2\end{cases} \quad ، \quad f\left(x\right)=\begin{cases}\dfrac{e^{2x}-1}{x}, & x>0\\ x^3+\alpha-1, & x\leq 0\end{cases}$$

2/ أحسب مشتقة الدوال التالية: $\left(x^3+1\right)^x$ ، $x^x$ ، $x^{\frac{1}{x}}$

**الحل:** 1/ – تعيين $\alpha$ حتى تكون $f$ مستمرة عند "0" :

$f$ مستمرة عند "0" $\Leftrightarrow \lim\limits_{\substack{> \\ x\to 0}} f(x)=\lim\limits_{\substack{< \\ x\to 0}} f(x)=f(0)$

لدينا $f(0)=\alpha-1$ ، $\lim\limits_{\substack{< \\ x\to 0}} f(x)=\lim\limits_{\substack{< \\ x\to 0}}\left(x^3+\alpha-1\right)=\alpha-1$ و

$$\lim_{\substack{> \\ x\to 0}} f(x)=\lim_{\substack{> \\ x\to 0}}\frac{e^{2x}-1}{x}=\lim_{\substack{> \\ x\to 0}}\frac{\left(e^{2x}-1\right)'}{x'}=\lim_{\substack{> \\ x\to 0}}\frac{2e^{2x}}{1}=2$$

إذن حتى تكون $f$ مستمرة عند "0" لا بد أن تكون $\alpha-1=2$ أي $\alpha=3$.

– تعيين $\beta$ حتى تكون g مستمرة عند "2" :

$g$ مستمرة عند "2" $\Leftrightarrow \lim\limits_{x\to 2} g(x)=g(2)$

لدينا $g(2)=\beta$ و $\lim\limits_{x\to 2} g(x)=\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^3-8}{x-2}=\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{3x^2}{1}=12$

إذن حتى تكون $g$ مستمرة لا بد أن يكون $\beta=12$

2/ **مشتقة** $x^{\frac{1}{x}}$ : لدينا $x^{\frac{1}{x}}=e^{\ln\left(x^{\frac{1}{x}}\right)}=e^{\frac{1}{x}\ln(x)}=e^{\frac{\ln(x)}{x}}$

وبالتالي: $$\left(x^{\frac{1}{x}}\right)'=\left[e^{\frac{\ln(x)}{x}}\right]'=\left[\frac{\ln(x)}{x}\right]'e^{\frac{\ln(x)}{x}}=\frac{\left[1-\ln(x)\right]}{x^2}e^{\frac{\ln(x)}{x}}$$

**مشتقة** $x^x$ : لدينا: $x^x=e^{\ln\left(x^x\right)}=e^{x\ln(x)}$

ومنه: $$\left(x^x\right)'=\left[e^{x\ln(x)}\right]'=\left[x\ln(x)\right]'e^{x\ln(x)}=\left[\ln(x)+1\right]e^{x\ln(x)}$$

## المشتقات من الرتب العليا

لتكن $f:I\to\mathbb{R}$ دالة عددية. نفرض أن الدالة المشتقة $f'$ موجودة عند كل نقطة من المجال I. إذا كان الدالة $f'$ بدورها قابلة للاشتقاق عند النقطة $x_0\,(x_0\in I)$ أي النهاية $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f'(x)-f'(x_0)}{x-x_0}$ موجودة ومنتهية فإننا نرمز لها بـ$f''(x_0)$ وتسمى المشتقة الثانية لــ $f$ عند $x_0$، وبنفس الطريقة نعرف المشتقة الثالثة لــ $f$ عند $x_0$ ونرمز لها بــ $f'''(x_0)$ أو $f^{(3)}(x_0)$ كما يمكننا أيضا أن نعرف المشتقة من الرتبة n $(n\in\mathbb{N})$ لــ $f$ عند $x_0$ والذي نرمز له بــ $f^{(n)}(x_0)$

## نظريات أساسية للدوال القابلة للاشتقاق

### الحضيض والذروة:

**تعاريف:** لتكن $f:I\to\mathbb{R}$ دالة عددية

- نقول عن $f$ أنها تتمتع بذروة محلية عند النقطة $x_0$ من I إذا وُجد عدد $0<\alpha$ بحيث:

$$\forall x\in\left]x_0-\alpha,x_0+\alpha\right[:f(x_0)\geq f(x)$$

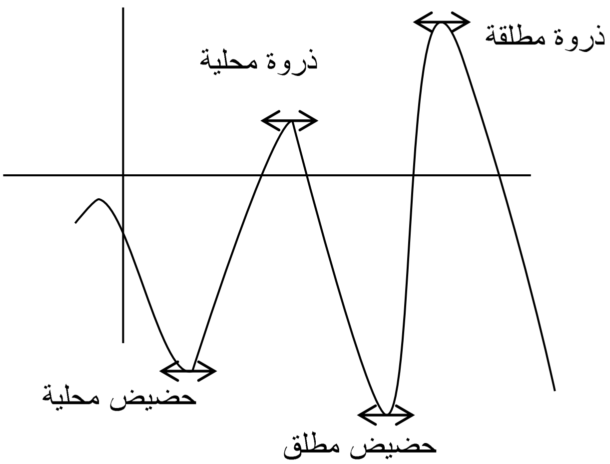
- نقول عن $f$ أنها تتمتع بحضيض محلي عند النقطة $x_0$ إذا وُجد عدد $0<\alpha$ بحيث:

$$\forall x\in ]x_0-\alpha,x_0+\alpha[:f(x_0)\le f(x)$$

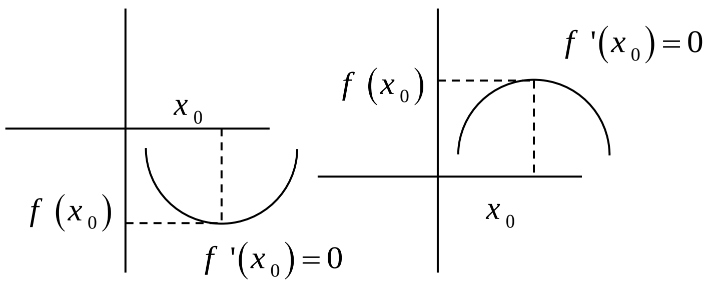
- نقول عن $f$ أنها تتمتع بذروة مطلقة عند النقطة $x_0$ إذا كان: $\forall x\in I:f(x_0)\ge f(x)$
- نقول عن $f$ أنها تتمتع بحضيض مطلق عند النقطة $x_0$ إذا كان $\forall x\in I:f(x_0)\le f(x)$

**القيمة القصوى:**

نقول أن لــ $f$ قيمة صغرى عند $x_0$ إذا كان لها حضيض أو ذروة عند $x_0$ **(محلي أو مطلق)**




**نظرية:** لتكن $f$ دالة معرفة وقابلة للاشتقاق على المجال $I=]a,b[$ إذا كانت لــ $f$ قيمة صغرى عند $x_0$ فإن $f'(x_0)=0$



**نظرية روول:** لتكن $f:I\to\mathbb{R}$ دالة عددية تحقق الشروط التالية:

1. $f$ معرفة ومستمرة على المجال $[a,b]$
2. $f$ قابلة للاشتقاق على المجال $]a,b[$
3. $f(a)=f(b)$

عندئذ يوجد $c$ من $]a,b[$ يحقق $f'(c)=0$

**تطبيقات المشتقة في دراسة الرتابة:**

**نظرية:** لتكن $f:I\to\mathbb{R}$ دالة عددية قابلة للاشتقاق على المجال $I$. عندئذ:

1/ $f'(x)=0,\forall x\in I \Leftrightarrow f$ ثابتة على المجال $I$

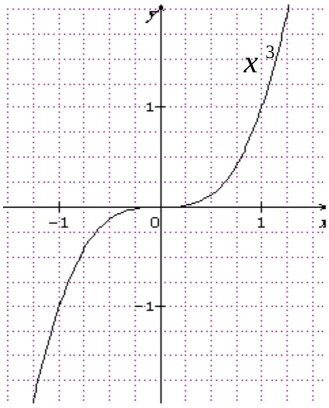
2/ $f'(x)\geq 0,\forall x\in I \Leftrightarrow f$ متزايدة على المجال $I$

3/ $f'(x)\leq 0,\forall x\in I \Leftrightarrow f$ متناقصة على المجال $I$ I

4/ $f'(x)>0,\forall x\in I \Leftarrow f$ متزايدة تماما على المجال I

5/ $f'(x)<0,\forall x\in I \Leftarrow f$ متناقصة تماما على المجال I

**ملاحظة:** الاستلزام العكسي في القضيتين 4/ و 5/ غير صحيح (لا يوجد تكافؤ) يمكن أخذ المثال التالي في القضية 4/.




**مثال:** نعتبر $f$ الدالة المعرفة بـــ: $f(x)=x^3$

الدالة $f$ متزايدة تماماعلى $\mathbb{R}$ لكنها لا تحقق $\forall x\in\mathbb{R}, f'(x)>0$

توضيح: لدينا $f'(x)=2x^2$ إذن $f'(0)=0$ أي العلاقة $f'(0)>0$ غير محققة.

# الفصل الرابع: الدالة الأسية واللوغارتمية والدوال المثلثية والمثلثية العكسية

## 1- الدالة الأسية والدالة اللوغارتمية

### a. الدالة الأسية

توجد دالة وحيدة $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}_*^+$ قابلة للاشتقاق وتحقق: $\begin{cases} f'(x)=f(x), \forall x\in\mathbb{R} \\ f(0)=1 \end{cases}$ . تُسمى هذه الدالة بالدالة الأسية ونرمز لها بـ exp أي: $\begin{aligned} exp:&\mathbb{R}\to\mathbb{R}_*^+ \\ x&\mapsto \exp(x) \end{aligned}$

**ملاحظة:**

1- هذه الدالة تحقق $\exp(0)=1$ $\quad exp(1)=e\simeq 2,71$

2- دالة exp تحقق $\forall x,y\in\mathbb{R}$ $\quad exp(x,y)=(\exp(x))^y,$

**ترميز:** من خلال الملاحظة السابقة يمكننا كتابة: $exp(x)=\exp(1.x)=(exp(1))^x=e^x$

و بالتالي: $exp(x)=e^x$

**خواص الدالة الأسية:**

1/ $e^x>0, \quad \forall x\in\mathbb{R}$ 2/ $e^0=1$ 3/ $\forall x,y\in\mathbb{R}, \quad e^{x+y}=e^x.e^y$

4/ $e^{-x}=\dfrac{1}{e^x}, \quad \forall x\in\mathbb{R}$ 5/ $e^{x-y}=\dfrac{e^x}{e^y}$ 6/ $a=b\Leftrightarrow e^a=e^b$

7/ $e^a>e^b\Leftrightarrow a>b$ 8/ $e^q<e^b\Leftrightarrow a<b$ 9/ $e^{nx}=(e^x)^n$

**دراسة الدالة الأسية:** $x\mapsto e^x$

مجموعة التعريف: $D=\mathbb{R}=]-\infty,+\infty[$

النهايات: $\lim\limits_{x\to+\infty} e^x=+\infty$ ، $\lim\limits_{x\to-\infty} e^x=0$

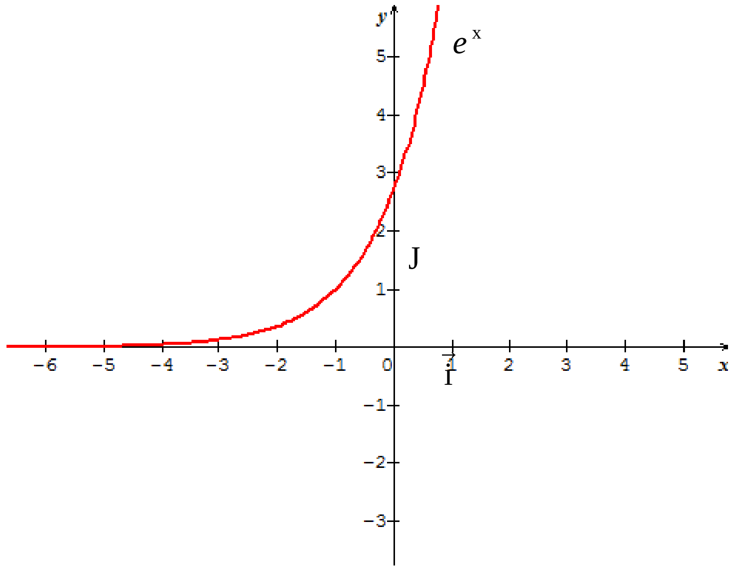
المشتقة: $(e^x)'=e^x, \quad \forall x\in\mathbb{R}$

إشارة المشتقة: لدينا: $(e^x)'>0, \quad \forall x\in\mathbb{R}$

جدول التغيرات: لدينا: $e^0=1$

| $x$ | $-\infty$ | $0$ | $+\infty$ |
|---|---|---|---|
| $(e^x)'=e^x$ | | $+$ | |
| $e^x$ | $0$ ↗ | $1$ ↗ | $+\infty$ |

المنحنى البياني:




**ملاحظة:**

لاحظ أن الدالة $e^x$ هي دالة مستمرة ورتيبة تماما على $\mathbb{R}$ وبالتالي تقبل دالة عكسية تسمى الدالة اللوغارتمية ونرمز لها بـــ $ln$.

**b- الدالة اللوغارتمية:** $x \mapsto ln(x)$

الدالة اللوغارتمية هي الدالة التي نرمز لها بـــ $ln$ وهي الدالة العكسية للدالة الأسية exp أي:

$$exp\ :\mathbb{R} \to \mathbb{R}_*^+,\quad x \mapsto \exp(x)$$

دالتها العكسية هي:

$$ln\ :\mathbb{R}_*^+ \to \mathbb{R},\quad x \mapsto \ln(x)$$

**خواص الدالة اللوغارتمية:**

1/ $ln(e)=1, \quad \ln(1)=0$ ،

2/ $y=e^x \Leftrightarrow x=\ln(y), \forall x \in \mathbb{R}, \forall y \in \mathbb{R}_+^*$

3/ $y=ln(x) \Leftrightarrow x=e^y, \quad \forall x \in \mathbb{R}^+, \forall y \in \mathbb{R}^+$ ،

4/ $a=b \Leftrightarrow \ln(a)=\ln(b)$ ،

5/ $a>b \Leftrightarrow \ln(a)>\ln(b)$ ،

6/ $\ln(e^x)=x, \quad \forall x \in \mathbb{R}$ ،

7/ $e^{\ln(x)}=x, \quad \forall x>0$

8/ $\ln(x)>0, \quad \forall x>1$

9/ $\ln(x)<0, \quad \forall x \in ]0,1[$

10/ $\ln(x.y)=\ln(x)+\ln(y)$

11/ $\ln\left(\frac{x}{y}\right)=\ln(x)-\ln(y)$

12/ $\ln(x^n)=n\ln(x)$

**دراسة الدالة اللوغارتمية:**

مجموعة التعريف: $D=\mathbb{R}_+^* = ]0,+\infty[$

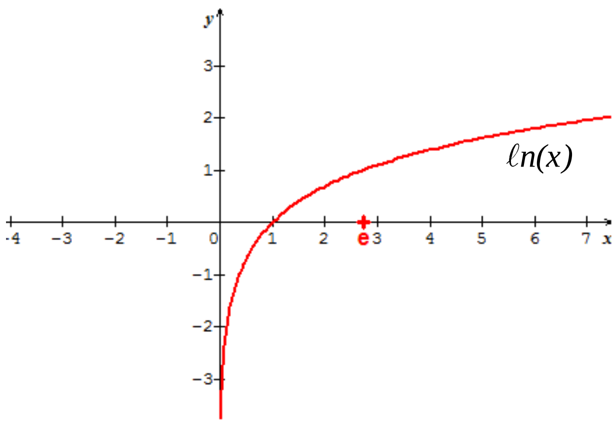
النهايات: $\lim_{x\to+\infty} ln(x)=+\infty$ ، $\lim_{x\to 0^+} ln(x)=-\infty$ ، $ln(1)=0, \quad ln(e)=1$

المشتقة: لدينا: $(\ln(x))' = \frac{1}{x} > 0, \quad \forall x \in ]0,+\infty[$

جدول التغيرات:

| $x$ | $0$ | $1$ | $e$ | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|
| $(\ln(x))'$ | | $+$ | | |
| $\ln(x)$ | $-\infty$ | $0$ | $1$ | $+\infty$ |

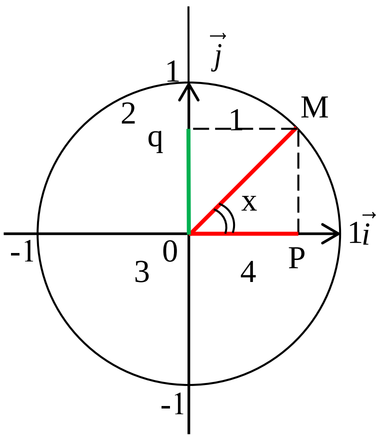
المنحنى البياني:




## 2- الدوال المثلثية والمثلثية العكسية

a.2 دالة الجيب $x \mapsto sin(x)$ : ليكن $(o,\vec{i},\vec{j})$ معلم متعامد ومتجانس ونعتبر الدائرة المثلثية التي مركزها O ونصف قطرها 1 (أنظر الشكل المقابل).

ترتيب النقطة $M(\overline{oq})$ يمثل جيب الزاوية $x$ ونرمز له بـ $sin(x)$ أي $sin(x)=\overline{oq}$ وفاصلة $M(\overline{OP})$ تمثل تجب $x$ أي $cos(x)$.



## خواص دالة $sin$

1/ $\forall x \in \mathbb{R}, \quad -1 \le sin(x) \le 1$

2/ $\sin(0)=0, \quad \sin\left(\frac{\pi}{2}\right)=1$

3/ $\sin(\pi)=1, \ \sin(2\pi)=0$

4/ $\sin(x+2\pi)=\sin(x)$

5/ $sin(-x)=-\sin(x)$

6/ $sin(\pi+x)=-\sin(x)$

7/ $\sin(x)\ge 0$ في الجزء 1 و 2 من الشكل

8/ $\sin(x)\le 0$ في الجزء 3 و 4 من الشكل

## دراسة دالة $sin$

مجموعة التعريف: $D=\mathbb{R}$

الشفعية: دالة $sin$ هي دالة فردية لأن $\sin(-x)=\sin(x)$

الدورية: دالة $sin$ هي دالة دورية دورها $2\pi$ أي: $\sin(x+2\pi)=\sin(x)$

المشتقة: $(\sin x)'=\cos(x)$

جدول التغيرات: بما أن دالة $sin$ هي دالة دورية دورها $2\pi$ إذن يكفي دراستها على المجال $[0,2\pi]$ ثم نقوم بانسحابات طولها $2\pi$.

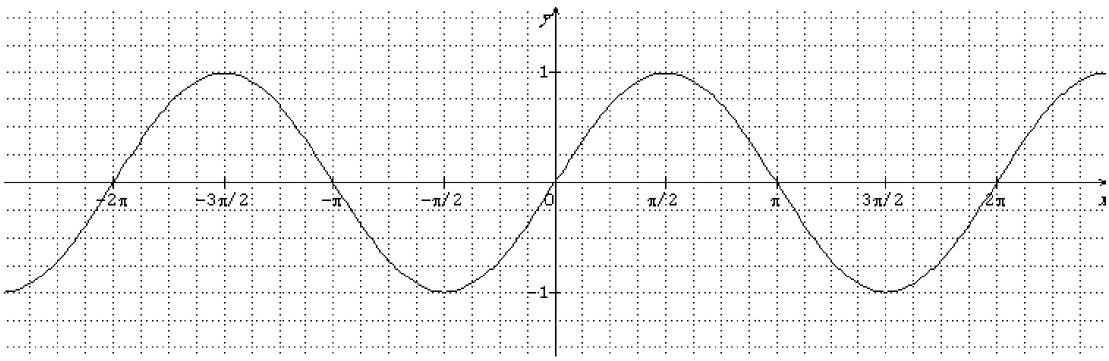
إشارة المشتقة على $[0,2\pi]$:

لدينا $(\sin x)'=\cos(x)$ و $\cos(x)\ge 0$ على الجزء 1 و 4 و $\cos(x)\le 0$ على الجزء 2 و 3

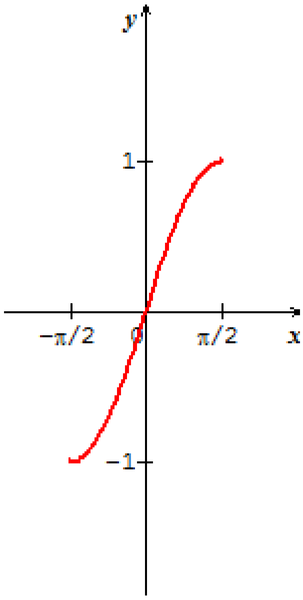
$$sin(0)=0, \quad \sin\left(\frac{\pi}{2}\right)=1, \quad sin(\pi)=0, \quad \sin\left(\frac{3\pi}{2}\right)=-1, \quad sin(2\pi)=0$$

| $x$ | $0$ | | $\frac{\pi}{2}$ | | $\pi$ | | $\frac{3\pi}{2}$ | | $2\pi$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $(sinx)'=\cos x$ | | + | 0 | − | | − | 0 | + | |
| $sinx$ | $0$ | ↗ | $1$ | ↘ | $0$ | ↘ | $-1$ | ↗ | $0$ |

المنحنى البياني:



**ملاحظة:** لو نأخذ الآن الجزء من هذا المنحنى المرسوم على المجال $\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$ أي نقتصر دراسة $sin$ على المجال $\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$ فنجد أن $sin:\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]\to[-1,1]$ دالة مستمرة ورتيبة تماما على المجال $\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$ فهي إذن تقبل دالة عكسية نُسميها دالة قوس الجيب ونرمز لها بـ $Arcsin$ $\left(\sin^{-1}=\arcsin\right)$




**2.b- دالة قوس الجيب** $Arcsin$:

$$Arcsin:[-1,1]\to\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$$
$$x\mapsto Arcsin(x)$$

دالة $Arcsin$ هي الدالة العكسية لدالة $sin$ على المجال $\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$

**خواص دالة** $Arcsin$

1/ $y=Arcsin(x)\Leftrightarrow x=\sin(y),\forall x\in[-1,1];\forall y\in\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$

2/ $\sin(Arcsin(x))=x,\forall x\in[-1,1]$, $\quad Arcsin(\sin(x))=x,\forall x\in\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$

3/ $Arcsin(-x)=-\arcsin(x)$

4/ $\cos(Arcsin(x))=\sqrt{1-x^2}$

5/ $(Arcsin(x))'=\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

**2.c- دالة التجب** $x\mapsto cos(x)$ :

**خواص دالة** $cos$: من الدائرة المثلثية نستنتج ما يلي:

1/ $-1\le\cos(x)\le1,\forall x\in\mathbb{R}$

2/ $\cos\left(\frac{\pi}{2}\right)=0,\ \cos(0)=1$

3/ $\cos(2\pi)=1,\ \cos(\pi)=0$

4/ $\cos(x+2\pi)=\cos(x)$

5/ $\cos(-x)=\cos(x)$

6/ $\cos(\pi+x)=-\cos(x)$

7/ $\cos(x)\ge0$ في الجزء 1 و4 من الدائرة المثلثية

8/ $\cos(x)\le0$ في الجزء 2 و3 من الدائرة المثلثية

**دراسة دالة:** $x \to \cos(x)$

مجموعة التعريف: $D=\mathbb{R}$

الشفعية: دالة $cos$ هي دالة زوجية لأن: $cos(-x)=\cos(x)$

الدورية: دالة $cos$ هي دالة دورية دورها $2\pi$ لأن: $cos(x+2\pi)=\cos(x)$

المشتقة: $\forall x \in \mathbb{R} : (\cos(x))' = -\sin x$ : بما أن دالة $cos$ هي دالة دورية دورها $2\pi$ إذن يكفي دراستها على المجال $[0,2\pi]$ ثم نقوم بانسحاب.

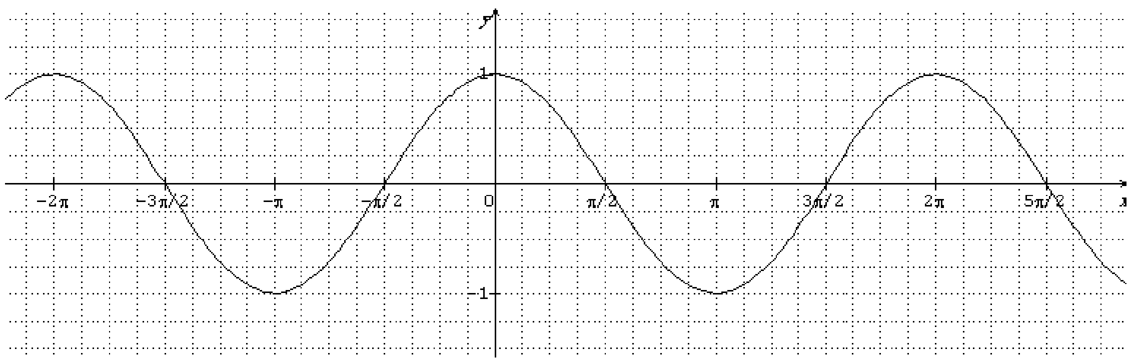
إشارة المشتقة على المجال $[0,2\pi]$: لدينا $(cosx)' = -\sin(x)$

$\sin(x) \geq 0$ في الجزء 1 و2 و $\sin(x) \leq 0$ في الجزء 3 و4

$$cos(0)=1, \quad \cos\left(\frac{\pi}{2}\right)=0, \quad cos(\pi)=-1, \quad \cos\left(\frac{3\pi}{2}\right)=0, \quad cos(2\pi)=1$$

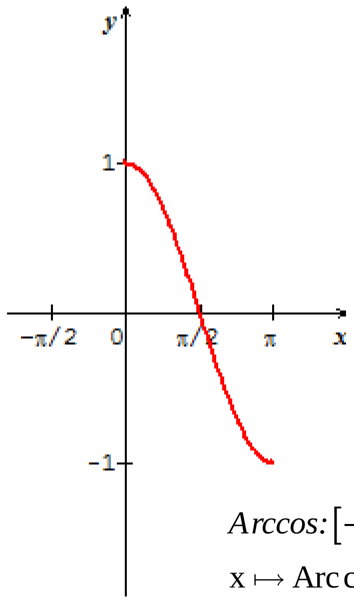
| $x$ | $0$ | $\frac{\pi}{2}$ | $\pi$ | $\frac{3\pi}{2}$ | $2\pi$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $(sinx)' = \cos x$ | | $+$ | $0$ | $+$ | |
| $sinx$ | $1$ | $0$ | $1-$ | $0$ | $1$ |

**المنحنى البياني:**




**ملاحظة:** لو نأخذ الآن الجزء من المنحنى السابق والمرسوم على المجال $[0,\pi]$ أي نقتصر دراسة دالة التجب على المجال $[0,\pi]$ نجد أن:

$$cos:[0,\pi]\to[-1,1]$$
$$x\mapsto\cos(x)$$
مستمرة ورتيبة تماما على المجال $[0,\pi]$ فهي تقبل دالة عكسية نسميها دالة قوس التجب ونرمز لها بـــ $Arccos$




**2.d- دالة قوس التجب:**

$$Arccos:[-1,1]\to[0,\pi]$$
$$x\mapsto \operatorname{Arccos}(x)$$

الدالة $Arccos$ هي الدالة العكسية للدالة $cos$ على المجال $[0,\pi]$.

<u>خواص دالة</u> $Arccos$

1/ $y=Arccos(x)\Leftrightarrow x=\cos(y)$

2/ $Arccos(\cos x)=x,\forall x\in[0,\pi]$

3/ $sin(Arccos(x))=x,\quad \forall x\in[-1,1]$

5/ $Arccos(-1)=\pi,\quad Arcos(1)=0$

6/ $sin(Arccos(x))=\sqrt{1-x^2}$

7/ $(Arccos(x))'=\dfrac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$

**2.e- <u>دالة الظل</u>** $x\mapsto tg(x)$ : دالة $tg$ هي الدالة المعطاة بـــ: $tg(x)=\dfrac{\sin(x)}{\cos(x)}$

<u>دراسة دالة الظل</u>

مجموعة التعريف:

$$D=\{x\in\mathbb{R}/\cos(x)\neq0\}=\left\{x\in\mathbb{R}/x\neq\frac{\pi}{2}+\pi k,k\in\mathbb{Z}\right\}=\mathbb{R}-\left\{\frac{\pi}{2}+\pi k/k\in\mathbb{Z}\right\}$$

$$D=.............\cup\left]\frac{-3\pi}{2},\frac{-\pi}{2}\right[\cup\left]\frac{-\pi}{2},\frac{-\pi}{2}\right[\cup\left]\frac{\pi}{2},\frac{3\pi}{2}\right[\cup.....$$

الشفعية: دالة $tg$ هي دالة فردية لأن $tg(-x)=\dfrac{\sin(-x)}{\cos(-x)}=\dfrac{-\sin(x)}{\cos(x)}=\operatorname{tg}(x)$

الدورية: دالة $tg$ دالة دورية دورها $\pi$ لأن $tg(x+\pi)=\dfrac{\sin(x+\pi)}{\cos(x+\pi)}=\dfrac{-\sin(x)}{-\cos(x)}=\operatorname{tg}(x)$

المشتقة : اما $(tg(x))'=\left(\dfrac{\sin(x)}{\cos(x)}\right)'=\dfrac{\cos^2(x)+\sin^2(x)}{\cos^2(x)}=\dfrac{1}{\cos^2 x}$

أو $\left(tg(x)\right)' = \left(\frac{\sin(x)}{\cos(x)}\right)' = \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2(x)} = \frac{\cos^2 x}{\cos^2 x} + \frac{\sin^2(x)}{\cos^2 x} = 1 + tg^2(x)$

المنحنى البياني:

بما أن $tg$ دالة دورية دورها $\pi$ إذن يكفي دراستها على المجال $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$ ثم نقوم بانسحاب.

النهايات:

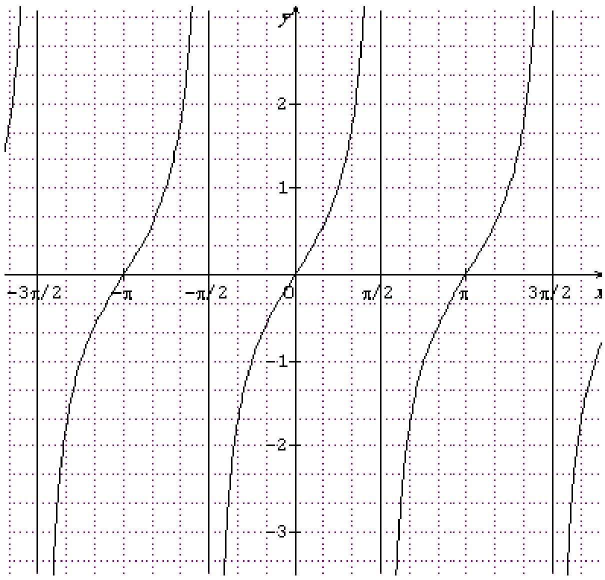
$$\lim_{\substack{x \to \frac{\pi}{2} \\ <}} tg = \lim_{\substack{x \to \frac{\pi}{2} \\ <}} \frac{\sin(x)}{\cos(x)} = \frac{-1}{0^+} = +\infty \quad ، \quad \lim_{\substack{x \to \frac{-\pi}{2} \\ >}} tg = \lim_{\substack{x \to \frac{-\pi}{2} \\ >}} \frac{\sin(x)}{\cos(x)} = \frac{-1}{0^+} = -\infty$$

إشارة المشتقة: لدينا: $\left(tg(x)\right)' = \frac{1}{\cos^2 x} > 0$

جدول التغيرات:

| $x$ | $-\frac{\pi}{2}$ | $0$ | $\frac{\pi}{2}$ |
|---|---|---|---|
| $\left(tg(x)\right)'$ | | + | |
| | $-\infty$ | $0$ | $+\infty$ |

**المنحنى البياني**



**ملاحظة:** لاحظ من خلال المنحنى البياني أن دالة $tg$ هي دالة مستمرة ورتيبة تماما على المجال $\left]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[$ فهي إذن تقبل دالة عكسية نسميها دالة قوس الظل ونرمز لها بـ $Arctg$، أي أن الدالة العكسية لـ

$$tg:\left]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[\to\mathbb{R},\quad x\mapsto tg(x)$$

هي الدالة

$$Arctg:\mathbb{R}\to\left]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[,\quad x\mapsto tg(x)$$

**2. f- دالة قوس الظل:** دالة $Arctg$ هي الدالة العكسية لدالة $tg$

**خواص:**

**1/** $y=tg(x)\Leftrightarrow x=\mathrm{Arctg}(y),\forall x\in\left]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[;\forall y\in\mathbb{R}$

**2/** $tg(\mathrm{Arctg}(x))=x,\forall x\in\mathbb{R}$

**3/** $\mathrm{Arctg}(tg(x))=x,\forall x\in\left]\frac{-\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[$

**4/** $\mathrm{Arctg}(-x)=-\mathrm{Arctg}(x)$

**5/** $\mathrm{Arctg}(0)=0$ ، $\mathrm{Arctg}(1)=\frac{\pi}{4}$

**6/** $(\mathrm{Arctg}(x))'=\frac{1}{1+x^2}$

**2.g – دالة التظل** $:x\to ctg(x)$ $\quad ctg=\frac{\cos}{\sin}$

1) مجموعة التعريف: $D=\mathbb{R}-\{k\pi,k\in\mathbb{Z}\}$ أي: $D=....\cup]0,\pi[\cup]\pi,2\pi[\cup....$

2) الشفعية: الدالة $ctg$ دالة فردية لأن $\forall x\in D: ctg(-x)=\frac{\cos(-x)}{\sin(-x)}=\frac{\cos(x)}{-\sin(x)}=-ctgx$

3) الدورية: دالة $ctg$ دورية و دورها $\pi$

4) المشتقة: $ctg'x=-\frac{1}{\sin^2 x}=-(1+ctg^2(x))$

5) المنحنى البياني: يكفي رسمه على المجال $]0,\pi[$

6) النهايات

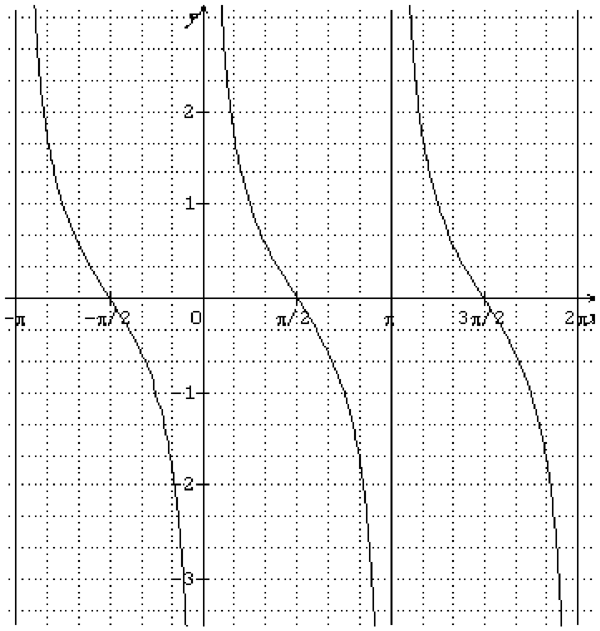
$$\lim_{\substack{x\to 0\\ >}} ctgx=\lim_{\substack{x\to 0\\ >}}\frac{\cos x}{\sin x}=\frac{1}{0^+}=+\infty$$

$$\lim_{\substack{x\to \pi\\ <}} ctgx=\lim_{\substack{x\to \pi\\ <}}\frac{\cos x}{\sin x}=\frac{-1}{0^+}=-\infty$$

**جدول التغيرات:**

| $x$ | $0$ | $\pi$ |
|---|---|---|
| $ctg'$ | $-$ | |
| $ctg$ | $+\infty$ ↘ | $-\infty$ |

**المنحنى البياني:**




**2.h – دالة قوس التظل:** بما أن الدالة ة $ctg:]0,\pi[\to\mathbb{R}$ دالة مستمرة ورتيبة تماما إذا فهي تقابلية وبالتالي تقبل دالة عكسية تدعى بقوس التظل ونرمز لها بـــ $arcctg$

$$ctg:]0,\pi[\to\mathbb{R} \qquad ctg^{-1}=arcctg:\mathbb{R}\to]0,\pi[$$

$$x\mapsto ctg(x) \qquad x\mapsto arcctg(x)$$

**خواص:**

1/ $y=ctg(x)\Leftrightarrow x=\text{Arcctg}(y),\forall x\in]-0,\pi[;\ \forall y\in\mathbb{R}$

2/ $ctg(\text{Arcctg}(x))=x,\quad \forall x\in\mathbb{R}$

3/ $\text{Arcctg}(ctg(x))=x,\forall x\in]0,\pi[$

4/ $\text{Arctg}(-x)=-\text{Arctg}(x)$

5/ $\text{Arcctg}(0)=\frac{\pi}{2},\quad \text{Arcctg}(1)=\frac{\pi}{4}$

6/ $(\text{Arcctg}(x))'=-\frac{1}{1+x^2},\quad \forall x\in\mathbb{R}$

**أمثلة توضيحية:**

| $x$ | 0 | $\frac{\pi}{6}$ | $\frac{\pi}{4}$ | $\frac{\pi}{3}$ | $\frac{\pi}{2}$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $sin(x)$ | 0 | $\frac{1}{2}$ | $\frac{\sqrt{2}}{2}$ | $\frac{\sqrt{3}}{2}$ | 1 |

| $x$ | 0 | $\frac{1}{2}$ | $\frac{\sqrt{2}}{2}$ | $\frac{\sqrt{3}}{2}$ | 1 |
|---|---|---|---|---|---|
| $\text{Arcsin}\,x$ | 0 | $\frac{\pi}{6}$ | $\frac{\pi}{4}$ | $\frac{\pi}{3}$ | $\frac{\pi}{2}$ |

| $x$ | 0 | $\frac{\pi}{6}$ | $\frac{\pi}{4}$ | $\frac{\pi}{3}$ | $\frac{\pi}{2}$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $cos(x)$ | 1 | $\frac{\sqrt{3}}{2}$ | $\frac{\sqrt{2}}{2}$ | $\frac{1}{2}$ | 0 |

| $x$ | 0 | $\frac{1}{2}$ | $\frac{\sqrt{2}}{2}$ | $\frac{\sqrt{3}}{2}$ | 1 |
|---|---|---|---|---|---|
| $\text{Arccos}\,x$ | $\frac{\pi}{2}$ | $\frac{\pi}{3}$ | $\frac{\pi}{4}$ | $\frac{\pi}{6}$ | 0 |

| $x$ | $0$ | $\frac{1}{\sqrt{3}}$ | $1$ | $\sqrt{3}$ | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $\text{Arctg}\,(x)$ | $0$ | $\frac{\pi}{6}$ | $\frac{\pi}{4}$ | $\frac{\pi}{3}$ | $\frac{\pi}{2}$ |

| $x$ | $0$ | $\frac{\pi}{6}$ | $\frac{\pi}{4}$ | $\frac{\pi}{3}$ | $\frac{\pi}{2}$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $tg\,(x)$ | $0$ | $\frac{1}{\sqrt{3}}$ | $1$ | $\sqrt{3}$ | $+\infty$ |

## اشتقاق الدوال المثلثية العكسية

**تذكير بمشتق الدالة العكسية:** إذا كانت الدالة $f$ تقابلية وقابلة للاشتقاق عند النقطة $x_0$ بحيث $f'(x_0)\neq 0$ فإن دالتها العكسية $f^{-1}$ تقبل الاشتقاق عند $y_0=f(x_0)$ و:

$$\boxed{\left(f^{-1}\right)'(y_0)=\frac{1}{f'(x_0)}.....(*)}$$

- **مشتقة دالة قوس الجيب** $arc\sin$: بتعويض في العلاقة السابقة $f$ بـ $\sin$ نجد $f^{-1}=Arc\sin$ و إذا كان $y_0=\sin x_0$ فإن $x_0=arc\sin y_0$ وبالتالي العلاقة (*) تعطينا:

$$(arc\sin)'(y_0)=\frac{1}{\sin' x_0}=\frac{1}{\cos x_0}=\frac{1}{\cos(arc\sin y_0)}=\frac{1}{\sqrt{1-y_0^2}}$$

إذن $$\boxed{\forall y\in\left]-1,1\right[:(arc\sin)'(y)=\frac{1}{\sqrt{1-y^2}}}$$

- **مشتقة دالة قوس التجب** arccos : بتعويض في العلاقة (*) $f$ بـ $\cos$ نجد $f^{-1}=arc\cos$ و إذا كان $y_0=\cos x_0$ فإن $x_0=Arc\cos y_0$ و بالتالي

$$(arc\cos)'(y_0)=\frac{1}{\cos' x_0}=\frac{1}{-\sin x_0}=-\frac{1}{\sin(arc\cos(y_0))}=-\frac{1}{\sqrt{1-y_0^2}}$$

إذن $$\boxed{\forall y\in\left]-1,1\right[:(arc\cos)'(y)=\frac{-1}{\sqrt{1-y^2}}}$$

- **مشتقة دالة قوس الظل** $arctg$: بتعويض في العلاقة (*) $f$ بـ $tg$ و $y_0=tgx_0$ نجد" $f^{-1}=arctg$ و $x_0=arctgy_0$ وبالتالي

$$(arctg)'(y_0)=\frac{1}{tg'(x_0)}=\frac{1}{1+tg^2(x_0)}=\frac{1}{1+tg^2(arctg(y_0))}=\frac{1}{1+y_0^2}$$

إذن $$\boxed{\forall y\in\mathbb{R}:(Arc\,ctg)'(y)=\frac{1}{1+y^2}}$$

- **مشتقة دالة قوس التظل** $arcctg$: بتعويض في العلاقة (*) $f$ بـ $ctg$ و $y_0=ctg(x_0)$ نجد: $f^{-1}=arcctg$ و $x_0=arcctg(y_0)$ و التالي

$$(Arcctg)'(y_0)=\frac{1}{(ctg)'(x_0)}=\frac{1}{-1-ctg^2(x_0)}=\frac{-1}{1+ctg^2(arcctg(y_0))}=\frac{-1}{1+ctg^2(arcctgy_0)}=\frac{-1}{1+y_0^2}$$

إذن $\boxed{\forall y \in \mathbb{R} : (Arcctg)'(y) = \frac{-1}{1+y^2}}$

**خلاصة:**

| الدالة | مجموعة تعريفها | المشتقة |
|---|---|---|
| $e^x$ | $D=\mathbb{R}$ | $e^x$ |
| $e^{f(x)}$ | $D=D_f$ | $f'(x)e^{f(x)}$ |
| $ln(x)$ | $D=]0,+\infty[$ | $\frac{1}{x}$ |
| $ln(f(x))$ | $D=\{x \in D_f$ و $f(x)>0\}$ | $\frac{f'(x)}{f(x)}$ |
| $\sin(x)$ | $D=\mathbb{R}$ | $cos(x)$ |
| $\sin(f(x))$ | $D=D_f$ | $f'(x)\cos(f(x))$ |
| $\cos(x)$ | $D=\mathbb{R}$ | $-sin(x)$ |
| $\cos(f(x))$ | $D=D_f$ | $-f'(x)\sin(f(x))$ |
| $tg(x)$ | $D=\mathbb{R}-\left\{\frac{\pi}{2}+\pi k / k \in \mathbb{Z}\right\}$ | $\frac{1}{cos^2 x}$ أو $1+tg^2(x)$ |
| $tg(f(x))$ | $D=\left\{x \in D_f \text{ و } f(x) \neq \frac{\pi}{2}+\pi k / k \in \mathbb{Z}\right\}$ | $\frac{f'(x)}{cos^2(f(x))}$ أو $f'(x)\left[1+tg^2 f(x)\right]$ |
| $Arc\sin(x)$ | $D=[-1,1]$ | $\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ |
| $Arc\sin(f(x))$ | $D=\{x \in D_f / -1 \leq f(x) \leq 1\}$ | $\frac{f'(x)}{\sqrt{1-(f(x))^2}}$ |
| $Arccos(x)$ | $D=[-1,1]$ | $-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ |
| $Arccos(f(x))$ | $D=\{x \in D_f / -1 \leq f(x) \leq 1\}$ | $\frac{-1}{\sqrt{1-(f(x))^2}}$ |
| $Arctg(x)$ | $D=\mathbb{R}$ | $\frac{1}{1+x^2}$ |
| $Arc\,tg(f(x))$ | $D=D_f$ | $\frac{f'(x)}{1+[f(x)]^2}$ |

**تمرين 1:** أحسب مجموعة التعريف وكذا المشتقة للدوال التالية:

$$t(x)=\text{Arctg}\left(\sqrt{x}\right),\quad h(x)=\text{Arcsin}(2x+1),\quad g(x)=\text{Arctg}(\ln(x)),\ \text{،}\ f(x)=\text{Arcsin}(\ln(x))$$

**الحل:**

**1/ إيجاد** $D_f$

$$D_f=\{x\in\mathbb{R}/x>0 \text{ و } -1\le\ln(x)\le1\}=\{x\in\mathbb{R}/x>0 \text{ و } e^{-1}\le e^{\ln(x)}\le e^{1}\}$$

$$D_f=\left\{x\in\mathbb{R}/x>0 \text{ و } \frac{1}{e}\le x\le e\right\}=\left[\frac{1}{e},e\right]$$

**حساب** $f'(x)$ :

$$f'(x)=\left(Arcsin(\ln(x))\right)'=\frac{(\ln(x))'}{\sqrt{1-(\ln(x))^2}}=\frac{1}{x\sqrt{1-(\ln(x))^2}}$$

**2/ إيجاد** $D_g$ :

$$D_g=\{x\in\mathbb{R}/x>0\}=]0,+\infty[$$

**حساب** $g'(x)$ :

$$g'(x)=\left(Arctg(\ln(x))\right)'=\frac{(\ln(x))'}{1+[\ln(x)]^2}=\frac{1}{x[\ln(x)]^2}$$

**3/ إيجاد** $D_h$ :

$$D_h=\{x\in\mathbb{R}/-1\le 2x+1\le1\}=\{x\in\mathbb{R}/-2\le 2x\le 0\}$$

$$D_h=\{x\in\mathbb{R}/-1\le x\le 0\}=[-1,0]$$

**حساب** $h'(x)$ :

$$h'(x)=(Arcsin(2x+1))'=\frac{(2x+1)'}{\sqrt{1-(2x+1)^2}}=\frac{2}{\sqrt{1-(2x+1)^2}}$$

**4/ إيجاد** $D_t$ :

$$D_t=\{x\in\mathbb{R}/x\ge0\}=[0,+\infty[$$

**حساب** $t'(x)$

$$t(x)=(Arctg\left(\sqrt{x}\right))'=\frac{\left(\sqrt{x}\right)'}{1+\left(\sqrt{x}\right)^2}=\frac{\frac{1}{2\sqrt{x}}}{1+x}=\frac{1}{2\sqrt{x}(1+x)}$$

**تمرين 2:** أوجد مجموعة التعريف وكذا المشتقة للدوال التالية:

$$h(x)=arctg\left(\sqrt{x^2-1}\right)\quad ,g(x)=arctg(\ln(x))\quad ,f(x)=arc\sin\left(\frac{x}{x-1}\right)$$

**الحل:**

**a/** $f(x)=Arc\sin\left(\frac{x}{x-1}\right)$

**1/** مجموعة تعريف $f$: $D_f=\left\{x\in\mathbb{R}:x-1\neq 0\wedge -1\leq\frac{x}{x-1}\leq 1\right\}$

$x-1\neq 0\Rightarrow x\neq 1$

$$-1\leq\frac{x}{x-1}\leq 1\Leftrightarrow\begin{cases}\frac{x}{x-1}\leq 1\\ \wedge\\ \frac{x}{x-1}\geq -1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\frac{x}{x-1}-1\leq 0\\ \wedge\\ \frac{x}{x-1}+1\geq 0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\frac{x-(x-1)}{x-1}\leq 0\\ \wedge\\ \frac{x+(x-1)}{x-1}\geq 0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\frac{1}{x-1}\leq 0\\ \wedge\\ \frac{2x-1}{x-1}\geq 0.\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x-1\leq 0.......(1)\\ \wedge\\ (2x-1)(x-1)\geq 0.....(2)\end{cases}$$

حلول المتراجحة $(1)$ هي $S_1=]-\infty,1]$

حل المتراجحة $(2)$: لحل المتراجحة$(2)$ نستعمل جدول الإشارات:

| $x$ | $-\infty$ | $\frac{1}{2}$ | | $1$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $x-1$ | $-$ | | $-$ | 0 | $+$ | |
| $2x-1$ | $-$ | 0 | $+$ | | $+$ | |
| $(x-1)(2x-1)$ | $+$ | 0 | $-$ | 0 | $+$ | |

من الجدول نستنتج أن حلول المتراجحة $(2)$ هو $S_2=\left]-\infty,\frac{1}{2}\right]\cup[1,+\infty[$

إذن $S_1\cap S_2=(]-\infty,1])\cap\left(\left]-\infty,\frac{1}{2}\right]\cup[1,+\infty[\right)$ أي: $S_1\cap S_2=\left]-\infty,\frac{1}{2}\right]$

و منه مجموعة التعريف $f$ هي $D=\left]-\infty,\frac{1}{2}\right]$

**2/** مشتقة $f$:

$$f'(x)=\left(arc\sin\left(\frac{x}{x-1}\right)\right)'=\frac{\left(\frac{x}{x-1}\right)'}{\sqrt{1-\left(\frac{x}{x-1}\right)^2}}=\frac{\frac{(x-1)-x}{(x-1)^2}}{\sqrt{1-\frac{x^2}{(x-1)^2}}}$$

$$f'(x)=\frac{-1}{(x-1)^2\sqrt{1-\frac{x^2}{(x-1)^2}}}=\frac{-1}{\sqrt{(x-1)^4-x^2(x-1)^2}}$$

**b)** الدالة g: $g(x)=arctg(\ln x)$

**1/** مجموعة التعريف: $D_g=\{x\in\mathbb{R}/x>0\}=]0,+\infty[$

**2/** مشتقة $g$:

$$g'(x)=\left(arctg\left(\ln x\right)\right)'=\frac{\left(\ln x\right)'}{1+\left(\ln x\right)^2}=\frac{\frac{1}{x}}{1+\ln^2 x}=\frac{1}{x\left(1+\ln^2 x\right)}$$

**c/** الدالة $h$ : $h(x)=arctg\left(\sqrt{x^2-1}\right)$

**1/** مجموعة التعريف: $D_h=\left\{x\in\mathbb{R}:x^2-1\geq 0\right\}$

$$x^2-1\geq 0\Leftrightarrow (x-1)(x+1)\geq 0$$

| $x$ | $-\infty$ | $-1$ | | $1$ | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $(x-1)$ | $-$ | | $-$ | 0 | $+$ |
| $(x+1)$ | $-$ | 0 | $+$ | | $+$ |
| $(x-1)(x+1)$ | $+$ | 0 | $-$ | 0 | $+$ |

من الجدول نجد: $D_h=\left]-\infty,-1\right]\cup\left[1,+\infty\right[$

**2/** المشتقة:

$$h'(x)=\left(arctg\left(\sqrt{x^2-1}\right)\right)'=\frac{\left(\sqrt{x^2-1}\right)'}{1+\left(\sqrt{x^2-1}\right)^2}=\frac{\frac{2x}{2\sqrt{x^2-1}}}{1+\left(x^2-1\right)}=\frac{\frac{x}{\sqrt{x^2-1}}}{x^2}=\frac{1}{x\sqrt{x^2-1}}$$

**تمرين 03:** أحسب النهايات التالية:

$1/\ \lim\limits_{x\to 0}\frac{arc\sin x}{x}$　　　　$3/\ \lim\limits_{x\to 0}\frac{arctgx}{1-e^x}$

$2/\ \lim\limits_{x\to 0}\frac{arc\sin(2x)-arc\sin x}{x}$　　　　$4/\ \lim\limits_{x\to 0}\frac{arctg(ax)-arctg(bx)}{\ln(1+x)}$

**الحل:**

1/ $\lim\limits_{x\to 0}\frac{arc\sin x}{x}=\frac{0}{0}$ (ح.ع.ت). بتطبيق قاعدة لويتال نجد:

$$\lim_{x\to 0}\frac{arc\sin x}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{(arc\sin x)'}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}}{1}=1$$

**2/** $\lim\limits_{x\to 0}\frac{arc\sin(2x)-arc\sin x}{x}=\frac{0}{0}$ (ح.ع.ت) . بتطبيق قاعدة لويتال نجد:

$$\lim_{x\to 0}\frac{arc\sin(2x)-arc\sin(x)}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{\left(arc\sin(2x)-arc\sin(x)\right)'}{x'}=\lim_{x\to 0}\frac{2}{\sqrt{1-(2x)^2}}-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}=2-1=1$$

**3/** $\lim\limits_{x\to 0}\frac{arctgx}{1-e^x}=\frac{0}{0}$ (ح.ع.ت). بتطبيق لويتال نجد:

$$\lim_{x\to 0}\frac{arctgx}{1-e^x}=\lim_{x\to 0}\frac{(arctgx)'}{(1-e^x)'}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{1+x^2}}{-e^x}=\frac{1}{-1}=-1$$

**4/** $\lim_{x\to 0}\frac{arctg(ax)-arctg(bx)}{\ln(1+x)}=\frac{0}{0}$ **(ح.ع.ت)** بتطبيق لويتال نجد:

$$\lim_{x\to 0}\frac{arctg(ax)-arctg(bx)}{\ln(1+x)}=\lim_{x\to 0}\frac{(arctg(ax))'-(arctg(bx))'}{(\ln(1+x))'}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{a}{1+(ax)^2}-\frac{b}{1+(bx)^2}}{\frac{1}{1+x}}=\frac{a-b}{1}=a-b$$

# الفصل الخامس: الدوال العددية ذات عدة متغيرات حقيقية

## 1- تعاريف

سنُركز هنا على الدوال العددية ذات متغيرين حقيقيين و ذات ثلاثة متغيرات حقيقية

**تعريف 1:** نسمي دالة عددية ذات متغيرين حقيقيين، كل دالة $f$ معرفة على المجموعة $\mathbb{R}^2$ (أو جزء من $\mathbb{R}^2$) نحو $\mathbb{R}$ ترفق بكل ثنائية $(x,y)$ من $\mathbb{R}^2$ العدد الحقيقي $z=f(x;y)$ ونكتب:

$$f:\mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$(x,y) \longmapsto f(x,y)$$

**تعريف 2:** نسمي دالة عددية ذات ثلاثة متغيرات حقيقية، كل دالة $f$ معرفة على المجموعة $\mathbb{R}^3$ (أو جزء من $\mathbb{R}^3$)، وذات قيم في $\mathbb{R}$ ترفق بكل ثلاثية $(x,y,z)$ العدد الحقيقي $t=f(x,y,z)$ ونكتب.

$$f:\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$$
$$(x,y,z) \mapsto f(x,y,z)$$

**مثال1:** الدوال التالية هي نماذج بسيطة لدوال ذات متغيرين

$$f:\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, \quad (x,y) \mapsto f(x,y) = 5x+y-2$$
،
$$g:\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, \quad (x,y) \mapsto g(x,y) = \frac{e^{x+y}}{x^2+y^2}$$
،
$$h:\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, \quad (x,y) \mapsto h(x,y) = \ln(x+5y)$$

**مثال2:** الدوال التالية هي نماذج بسيطة لدوال ذات ثلاث متغيرات:

$$f:\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}, \quad (x,y,z) \mapsto f(x,y,z) = \sin(x^2+y^2+z^2)$$
،
$$g:\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}, \quad (x,y,z) \mapsto g(x,y,z) = \frac{\sqrt{z}}{1+x^2+y^2}$$

### مجموعة التعريف:

**تعريف1:** لتكن $f:\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, \ (x,y) \mapsto f(x,y)$ دالة ذات متغيرين، مجموعة تعريف الدالة $f$ هي مجموعة الثنائيات $(x,y)$ من $\mathbb{R}^2$ التي لها صورة بالدالة $f$ ونرمز لها بـ $D_f$ .

**تعريف2:** لتكن $f:\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}, \ (x,y,z) \mapsto f(x,y,z)$ دالة ذات ثلاثة متغيرات، مجموعة تعريف الدالة $f$ هي مجموعة الثلاثيات $(x,y,z)$ من $\mathbb{R}^3$ التي لها صورة بالدالة $f$ ونرمز لها بـ $D_f$.

**مثال1:** أوجد مجموعة تعريف الدوال التالية:

$f:\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$

$(x,y) \mapsto f(x,y) = 2x^2 + 3y - 5$

$g:\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$

$(x,y) \mapsto g(x,y) = \dfrac{\sin(x+y)}{x^2+y^2-4}$ ،

$h:\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$

$(x,y) \mapsto f(x,y) = \dfrac{e^{x+y}}{x+y-1}$

$t:\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$

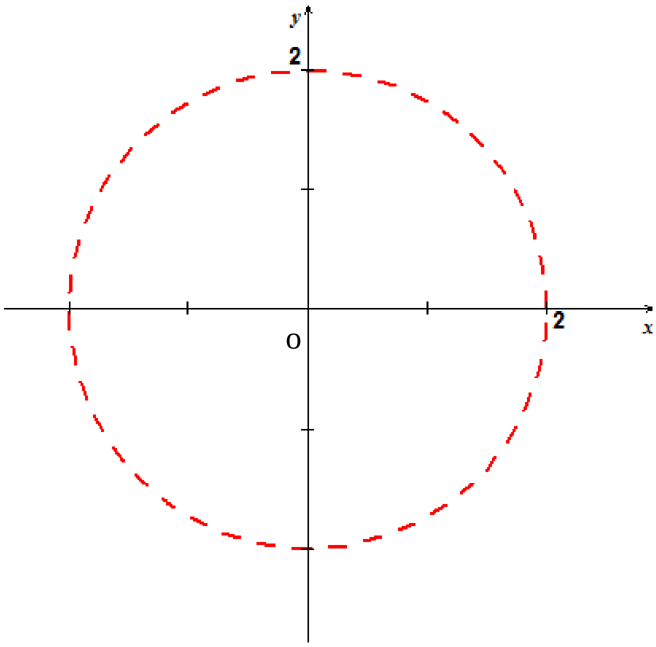
$(x,y) \mapsto t(x,y) = \dfrac{2x+y-5}{\sqrt{x+y-1}}$ ،

**الحل:**

- **إيجاد** $D_f$: لاحظ أن $f$ معرفة من أجل كل $(x,y)$ ومنه $D_f = \mathbb{R}^2$ (أي كل المستوي)
- **إيجاد** $D_g$:

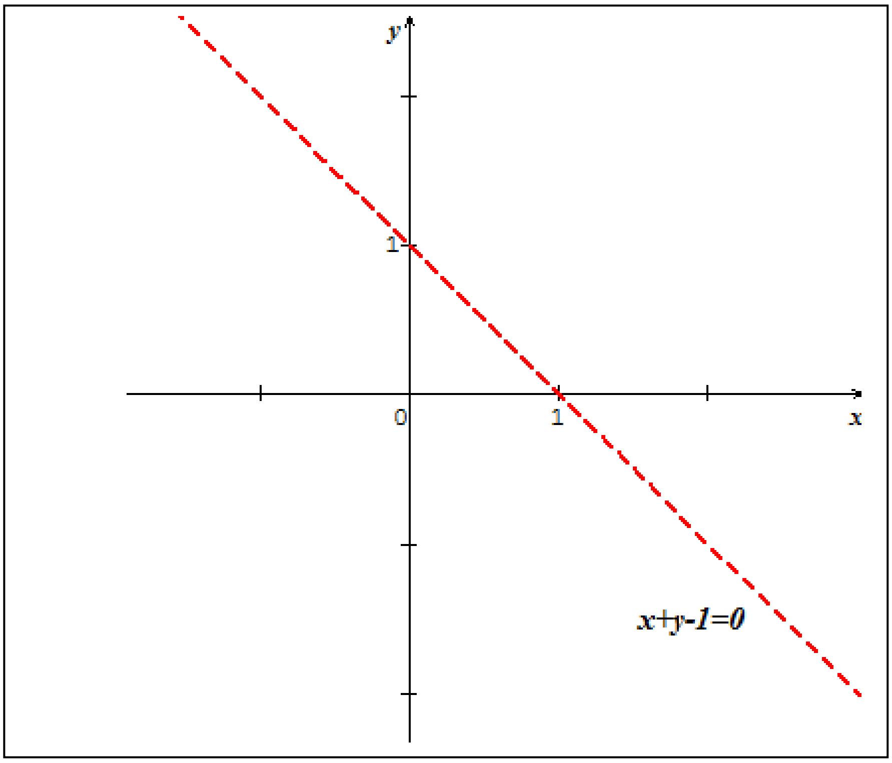
$$D_g = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 / x^2+y^2-4 \neq 0\} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 / x^2+y^2 \neq 4\}$$

أي $D_g$ هو كل المستوي $\mathbb{R}^2$ ما عدا الدائرة التي مركزها (0، 0) ونصف قطرها 2.



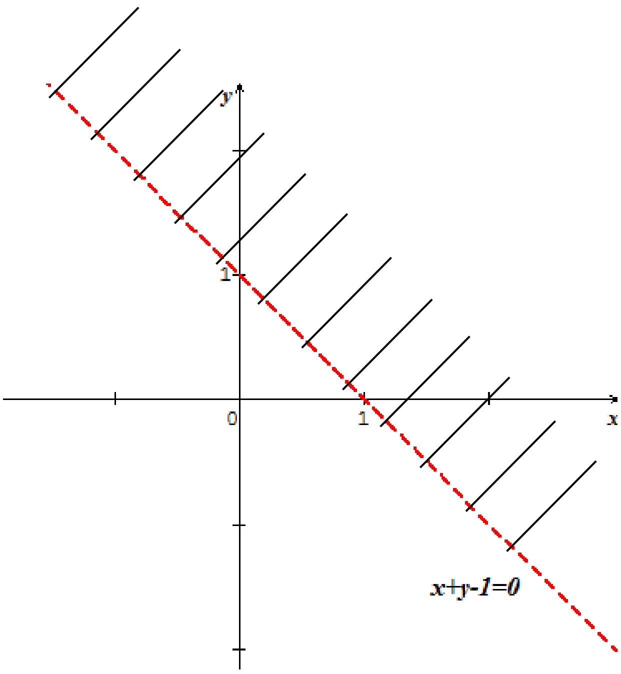

* **إيجاد** $D_h$ : $D_h = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 / x+y-1 \neq 0\}$

$D_h$ هو المستوي $\mathbb{R}^2$ ما عدا المستقيم الذي معادلته $x+y-1=0$




**إيجاد** $D_t$ : $D_t = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 / x+y-1>0\}$

أي $D_t$ هو نصف المستوي الذي يقع فوق المستقيم الذي معادلته $x+y-1=0$



**مثال2:** أوجد مجموعة تعريف الدوال التالية:

$$f:\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R},\quad (x,y,z) \mapsto f(x,y,z)=\frac{x^2+3y}{z}$$

$$g:\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R},\quad (x,y,z) \mapsto g(x,y,z)=\sqrt{x}+2y+\frac{1}{z}$$

**الحل:**

**1/** إيجاد $D_f$:
$$D_f=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 / z\neq 0\}=\mathbb{R}\times\mathbb{R}\times\mathbb{R}^*$$

**2/** إيجاد $D_g$:
$$D_g=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 / x\geq 0,\quad z\neq 0\}=\mathbb{R}^+\times\mathbb{R}\times\mathbb{R}^*$$

## 2- المشتقات الجزئية

### المشتقات الجزئية لدالة ذات متغيرين:

**تعريف:** لتكن $f:\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R},\ (x,y)\mapsto f(x,y)$ دالة ذات متغيرين حقيقين.

- مشتقة $f$ بالنسبة لـ $x$ هي المشتقة الاعتيادية للدالة $f(x,y)$ بالنسبة للمتغير $x$ وذلك باعتبار $y$ ثابت ونرمز لها بـ $\frac{\partial f}{\partial x}$ أو $f'_x$
- مشتقة $f$ بالنسبة لـ $y$ هي المشتقة الاعتيادية للدالة $f(x,y)$ بالنسبة للمتغير $y$ وذلك باعتبار $x$ ثابت ونرمز لها بـ $\frac{\partial f}{\partial y}$ أو $f'_y$ .

**مثال:** أوجد كل من $f(0,0)$، $f(1,0)$، $f(0,1)$، $\frac{\partial f}{\partial x}$، $\frac{\partial f}{\partial y}$ في كل حالة.

1/ $f(x,y)=x^2+y^2$ 2/ $f(x,y)=e^{2x}+3y-5$

3/ $f(x,y)=\ln(x^2+y^3+1)$ 4/ $f(x,y)=\frac{1}{x+1}+2yx-1$

**الحل:**

**1/** لما $f(x,y)=e^{2x}+3y-5$

$$f(0,0)=e^0+3.0-5=1-5=-4,\quad f(1,0)=e^{2.1}+3.0-5=e^2-5,\quad f(0,1)=e^0+3.1-5=-1$$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)=2e^{2x},\quad \frac{\partial f}{\partial y}(x,y)=3$$

**2/** لما $f(x,y)=x^2+y^2$

$$f(0,0)=0^2+0^2=0,\quad f(1,0)=1^2+0^2=1,\quad f(1,0)=0^2+1^2=1$$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)=2x,\quad \frac{\partial f}{\partial y}(x,y)=2y$$

**3/** لما $f(x,y)=\ln(x^2+y^2+1)$

$$f(0,0)=\ln(1)=0,\quad f(1,0)=\ln(2),\quad f(0,1)=\ln(2)$$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)=\frac{2x}{x^2+y^2+1},\quad \frac{\partial f}{\partial y}(x,y)=\frac{2y}{x^2+y^2+1}$$

4/ لما $f(x,y)=\frac{1}{x+1}-2yx-1$

$$f(0,0)=1-1=0,\quad f(1,0)=\frac{1}{2}-1=-\frac{1}{2},\quad f(0,1)=1-1=0$$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)=\frac{-1}{(x+1)^2}-2y,\quad \frac{\partial f}{\partial y}(x,y)=-2x$$

## المشتقات الجزئية من الرتبة 2

إذا كانت الدالة $f(x,y)$ لها مشتقات جزئية $\frac{\partial f}{\partial x}$ و $\frac{\partial f}{\partial y}$ فيمكن لهذه الأخيرة أن تكون لها أيضا مشتقات جزئية فنسميها بالمشتقات الجزئية من الرتبة الثانية للدالة $f(x,y)$ عندئذ:

- نرمز لمشتقة $\frac{\partial f}{\partial x}$ بالنسبة لـ $x$ بـ $\frac{\partial^2 f}{\partial^2 x}$ $\left(\frac{\partial^2 f}{\partial^2 x}(x,y)=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)\right)\right)$
- نرمز لمشتقة $\frac{\partial f}{\partial x}$ بالنسبة لـ $y$ بـ $\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}$ $\left(\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}(x,y)=\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)\right)\right)$
- نرمز لمشتقة $\frac{\partial f}{\partial y}$ بالنسبة لـ $x$ بـ $\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}$ $\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(x,y)=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)\right)\right)$
- نرمز لمشتقة $\frac{\partial f}{\partial y}$ بالنسبة لـ $y$ بـ $\frac{\partial^2 f}{\partial^2 y}$ $\left(\frac{\partial^2 f}{\partial^2 y}(x,y)=\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)\right)\right)$

**مثال:** نعتبر الدالة $f$ المعرفة بـــ:

$$f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$$
$$(x,y)\mapsto f(x,y)=3xy^2+\sqrt{x}+ye^x+\sin(y)$$

أحسب المشتقات الجزئية للدالة $f$ من الرتبة الاولى والثانية.

**الحل:**

**1/** حساب المشتقات الجزئية من الرتبة الأولى

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)=3y^2+\frac{1}{2\sqrt{x}}+ye^x,\quad \frac{\partial f}{\partial y}(x,y)=6xy+e^x+\cos(y)$$

**2/** حساب المشتقات الجزئية من الرتبة 2:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial^2 x}(x,y)=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)\right)=\frac{\partial}{\partial x}\left[3y^2+\frac{1}{2\sqrt{x}}+ye^x\right]=\frac{1}{4x\sqrt{x}}+ye^x$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}(x,y)=\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)\right)=\frac{\partial}{\partial y}\left(3y^2+\frac{1}{2\sqrt{x}}+ye^x\right)=6y+e^x$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(x,y)=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)\right)=\frac{\partial}{\partial x}\left(6xy+e^x+\cos(y)\right)=6y+e^x$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial^2 y}(x,y)=\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)\right)=\frac{\partial}{\partial y}\left(6xy+e^x+\cos(y)\right)=6x-\sin(y)$$

## المشتقات الجزئية لدالة ذات ثلاثة متغيرات

إذا كانت $f\,(x,y,z)$ دالة ذات ثلاث متغيرات، فبنفس الطريقة نعرف المشتقات الجزئية من الرتبة الأولى وهي $\frac{\partial f}{\partial x}$ ، $\frac{\partial f}{\partial y}$ و $\frac{\partial f}{\partial z}$ وكذلك المشتقات الجزئية من الرتبة الثانية ( $\frac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial y}$ ، $\frac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial z}$ ، $\frac{\partial^2 f}{\partial^2 x}$ ، $\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}$ ، $\frac{\partial^2 f}{\partial^2 y}$ ، $\frac{\partial^2 f}{\partial y\,\partial z}$ ، $\frac{\partial^2 f}{\partial y\,\partial x}$ ، $\frac{\partial^2 f}{\partial y\,\partial z}$ ، $\frac{\partial^2 f}{\partial^2 z}$ )

**مثال:** نعتبر الدالة $f$ المعرفة بـــ: $f\,(x,y,z)=2\left(x^2+z^2\right)+x\cos\left(y\right)+e^z$

أحسب كل من: $f(0,0,0), f(1,0,0), f(1,0,1)$ , $\frac{\partial f}{\partial x}$ ، $\frac{\partial^2 f}{\partial y\,\partial x}$ ، $\frac{\partial f}{\partial z}$ ، $\frac{\partial^2 f}{\partial^2 z}$

**الحل:**

$$f(0,0,0)=1,\quad f(1,0,0)=2+1+1=4,\quad f(1,0,1)=2+1+e=+e$$

$$\frac{\partial f}{\partial x}\left(x,y,z\right)=4x+\cos\left(y\right)$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y\,\partial x}\left(x,y,z\right)=\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\left(x,y\right)\right)=\frac{\partial}{\partial y}\left(4x+\cos(y)\right)=-\sin(y)$$

$$\frac{\partial f}{\partial z}\left(x,y,z\right)=4z+e^3,\quad \frac{\partial^2 f}{\partial^2 z}\left(x,y,z\right)=\frac{\partial}{\partial z}\left(4z+e^3\right)=4+e^z$$

# الفصل السادس: الدوال الأصلية و حساب التكاملات

## 1-تعاريف

في هذا الفصل نركز أساسا على حساب الدوال الأصلية الذي يُعتبر العملية العكسية لعملية الاشتقاق وهي العملية الأساسية لحساب التكاملات، لهذا الغرض سنتطرق إلى بعض الطرق (تقنيات) لحساب هذه التكاملات.

**تعريف:** لتكن $f$ دالة عددية معرفة على مجال I، نُسمي دالة أصلية لدالة $f$ على I، كل دالة $F$ قابلة للاشتقاق على I وتحقق: $F'(x)=f(x), \forall x\in I$

**ملاحظة:** إذا كانت $F$ دالة أصلية للدالة $f$ على مجال I فإنه من أجل كل عدد حقيقي C فإن الدوال $F(x)+C$ كلها دوال أصلية لـــ $f$ لأن $(F(x)+C)'=f(x)$ $\forall x\in I:$

**مثال:**

الدالة $\frac{1}{3}x^3$ هي دالة أصلية للدالة $x^2$ لأن $\left(\frac{1}{3}x^3\right)'=x^2$ ومن أجل كل $C\in\mathbb{R}$ فإن $\frac{1}{3}x^3+C$ هي أيضا دالة أصلية لـــ $x^2$ وذلك لأن: $\left(\frac{1}{3}x^3\right)'=x^2$

**نظرية1:** إذا كانت $F_1$ و $F_2$ دالتين أصليتين لـــ $f$ فإن $F_1-F_2$ يكون ثابتا.

**نظرية2:** كل دالة مستمرة على مجال I تقبل دالة أصلية على I

**جدول الدوال الأصلية لبعض الدوال المألوفة**

| دالتها الأصلية | الدالة | دالتها الأصلية | الدالة |
|---|---|---|---|
| $-\cos(x)+C$ | $\sin(x)$ | C (C ثابت) | 0 |
| $\sin(x)+C$ | $\cos(x)$ | $ax+C$ | $a$ |
| $\mathrm{tg}(x)+C$ | $\frac{1}{\cos^2 x}=1+\mathrm{tg}^2(x)$ | $\frac{1}{\alpha+1}x^{\alpha+1}+C$ | $x^{\alpha}(\alpha\neq-1)$ |
| $\mathrm{Arcsin}(x)+C$ | $\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ | $\ln\|x\|+C$ | $x^{-1}=\frac{1}{x}$ |
| $\mathrm{Arctg}(x)+C$ | $\frac{1}{1+x^2}$ | $2\sqrt{x}+C$ | $\frac{1}{\sqrt{x}}$ |
| $\frac{1}{x}+C$ | $-\frac{1}{x^2}$ | $e^x+C$ | $e^x$ |

## 2- التكامل المحدود

**تعريف:** لتكن $f$ دالة مستمرة على مجال $I$ و $F$ دالة أصلية لـــ $f$ على $I$ وليكن a و b عددين من $I$. عندئذ العدد الحقيقي $F(b)-F(a)$ يُسمى تكامل الدالة $f$ من a إلى b ونكتب $\int_a^b f(x)dx$ ونقرأ: "تكامل من a إلى b لـــ $f(x).dx$ ونكتب أيضا: $\int_a^b f(x)dx=[F(x)]_b^a=F(b)-F(a)$

**ملاحظات:**

**1-** a و b تُسمى حدود التكامل.

**2-** في الكتابة $\int_a^b f(x)dx$ يمكن تعويض المتغير $x$ بمتغير آخر أي:

$$\int_a^b f(x)dx=\int_a^b f(x)dt=\int_a^b f(x)du=.....$$

**3-** $\int_a^b f(x)dx=-\int_b^a f(x)dx$ ، $\int_a^a f(x)dx=0$

**4-** $\int_a^b f(x)dx=\int_a^c f(x)dx+\int_c^b f(x)dx$

**5-** $\int_a^b[\alpha f(x)+\beta g(x)]dx=\alpha\int_a^b f(x)dx+\beta\int_a^b g(x)dx$

**أمثلة:** أحسب كل من $\int_1^4\frac{1}{x}dx$ ، $\int_0^3(x^2+3x+1)dx$ ، $\int_0^1\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx$

- حساب $\int_1^4\frac{1}{x}dx$: نعلم أن الدالة الأصلية لـ $\frac{1}{x}$ هي $ln(x)$ وبالتالي:

$$\int_1^4\frac{1}{x}dx=[ln(x)]_1^4=\ln(4)-\ln(1)=\ln(4)$$

- حساب $\int_0^3(x^2+3x+1)dx$: نعلم أن الدالة الأصلية: $x^2+3x+1$ هي $\frac{1}{3}x^3+\frac{3}{2}x^2+x$

وبالتالي $$\int_0^3(x^2+3x+1)dx=\left[\frac{1}{3}x^3+\frac{3}{2}x^2+x\right]_0^3=\frac{1}{3}3^3+\frac{3}{2}3^2+3=\frac{51}{2}$$

- حساب $\int_0^1\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx$: نعلم أن الدالة الأصلية لـــ $\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ هي $Arcsin(x)$ إذن:

$$\int_0^1\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx=[Arcsin(x)]_0^1=\mathrm{Arcsin}(1)-\mathrm{Arsin}(0)=\frac{\pi}{2}$$

## 3-التكامل غير المحدود

**تعريف:** إذا كانت $F$ دالة أصلية للدالة $f$ على المجال $I$ ، فإن التكامل غير المحدود للدالة $f$ والذي نرمز له به: $\int f(x)dx$ معطى بـــ: $\int f(x)dx=F(x)+C$ حيث C ثابت، أي أن التكامل غير المحدود لـــ $f$ هي مجموعة دوالها الأصلية.

**أمثلة:**

1/ $\int 1.dx = x + c$

2/ $\int x^n.dx = \frac{1}{n+1}x^{n+1} + C$

3/ $\int \frac{dx}{x} = \ln|x| + c$

4/ $\int e^x.dx = e^x + C$

5/ $\int \frac{dx}{\cos^2 x} = tg(x) + c$

6/ $\int \sin(x)dx = -\cos x + c$

7/ $\int \cos x dx = \sin(c) + C$

8/ $\int \frac{dx}{1+x^2} = Arctg(x) + c$

9/ $\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = Arc\sin(x) + C$

10/ $\int (1 + tg^2(x))dx = tg(x) + C$

## 4-بعض الطرق لحساب التكاملات:

**1- الطريقة المباشرة:** نعتمد في هذه الطريقة على خواص التكاملات و على جدول التكاملات الأساسية

**أمثلة:**

1/ $\int (2x^3 + 5x^2 + 4)dx = \frac{2}{4}x^4 + \frac{5}{3}x^3 + 4x + C$

2/ $\int (5\cos x + 4e^{3x})dx = 5\int \cos x dx + 4\int e^{3x}dx = 5\sin(x) + \frac{4}{3}e^{3x} + C$

3/ $\int \frac{3}{\sqrt{x}} + \sin(2x) + \frac{5}{x}dx = 6\sqrt{x} - \frac{1}{2}\cos(2x) + 5\ln(x) + C$

**2- الطريقة الثانية:** نستعمل العلاقة $\left(g(f(x))\right)' = f'(x).g'(f(x))$ فينتج:

$$\int f'(x).g'(f(x))dx = \int g(f(x))'dx = g(f(x)) + C$$

وباستعمال الجدول السابق نستنتج الجدول التالي:

| الدالة | دالتها الأصلية | الدالة | دالتها الأصلية |
|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | $f(x) + C$ | $(f'(x)).\cos(f(x))$ | $\sin(f(x)) + C$ |
| $f'(x)[f(x)]^\alpha \quad \alpha \neq -1$ | $\frac{1}{\alpha+1}[f(x)]^{\alpha+1} + C$ | $\frac{f'(x)}{\cos^2[f(x)]}$ | $tg(f(x)) + C$ |
| $\frac{f'(x)}{f(x)}$ | $\ln(\|f(x)\|) + C$ | $f'(x)[1 + tg^2(f(x)]$ | $tg(f(x)) + C$ |
| $\frac{f'(x)}{\sqrt{f(x)}}$ | $2\sqrt{f(x)} + C$ | $\frac{f'(x)}{\sqrt{1-[f(x)]^2}}$ | $Arcsin(f(x)) + C$ |
| $f'(x)e^{f(x)}$ | $e^{f(x)} + C$ | $\frac{f'(x)}{1+[f(x)]^2}$ | $Arctg(f(x)) + C$ |
| $f'(x)\sin(f(x))$ | $-\cos(f(x)) + C$ | $\frac{f'(x)}{[f(x)]^2}$ | $-\frac{1}{f(x)} + C$ |

**أمثلة:**

1/ $$\int (10x-2)\left(5x^2-2x+1\right)^3 dx=\int\left(5x^2-2x+1\right)'\left(5x^2-2x+1\right)^3 dx$$
$$=\frac{1}{4}\left(5x^2-2x+1\right)^4+C.$$ ( من الشكل $\int f' f^3 dx$ )

2/ $$\int \frac{e^x+5}{e^x+5x-1}dx=\int\frac{(e^x+5x-1)'}{(e^x+5x-1)}dx=\ln\left|e^x+5x-1\right|+C.$$ (من الشكل $\int \frac{f'}{f}$)

3/ $$\int\frac{1}{x\sqrt{\ln(x)}}=\int\frac{\frac{1}{x}}{\sqrt{\ln(x)}}dx=\int\frac{(\ln(x))'}{\sqrt{\ln(x)}}dx=2\sqrt{\ln(x)}+C.$$ (من الشكل $\int\frac{f'}{\sqrt{f}}$)

4/ $$\int\cos(x)e^{\sin(x)}dx=\int[\sin(x)]'e^{\sin(x)}dx=e^{\sin(x)}+C.$$ (من الشكل $\int f'e^f$)

5/ $$\int 2x\sin(x^2+5)dx=\int\left(x^2+5\right)'\sin\left(x^2+5\right)dx=-\cos\left(x^2+5\right)+C.$$ (من الشكل $\int f'\sin(f)$)

6/ $$\int\frac{1}{(x+2)\cos^2(\ln(x+2))}dx=\int\frac{(\ln(x+2))'}{\cos^2(\ln(x+2))}dx$$
$$=\mathrm{tg}(\ln(x+2))+C$$ (من الشكل $\int\frac{f'}{\cos^2 f}$)

7/ $$\int\frac{1+\mathrm{tg}^2(\mathrm{Arcsin}(x))}{\sqrt{1-x^2}}dx=\int(\mathrm{Arcsin}(x))'\left[1+\mathrm{tg}^2(\mathrm{Arcsin}(x)\right]dx$$
$$=\mathrm{tg}(\mathrm{Arcsin}(x))+C.$$ (من الشكل $\int f'\left[1+\mathrm{tg}^2 f\right]$)

8/ $$\int\frac{1}{\sqrt{x}\sqrt{1-x}}dx=2\int\frac{1}{2\sqrt{x}\left(\sqrt{1-x}\right)}dx=2\int\frac{\left(\sqrt{x}\right)'}{\sqrt{1-x}}dx=2\int\frac{\left(\sqrt{x}\right)'}{\sqrt{1-\left(\sqrt{x}\right)^2}}dx$$
$$=2\left(\mathrm{Arcsin}(\sqrt{x})\right)+C.$$ (من الشكل $\int\frac{f'}{\sqrt{1-f^2}}$)

9/ $$\int\frac{\cos(x)}{1+(\sin x)^2}dx=\int\frac{(\sin(x))'}{1+(\sin(x))^2}dx=\mathrm{Arctg}(\sin(x))+C.$$ (من الشكل $\int\frac{f'}{1+f^2}$)

10/ $$\int\frac{dx}{x\ln(x)}dx=\int\frac{\frac{1}{x}}{\ln x)}dx=\int\frac{(\ln(x))'}{\ln(x)}dx=\ln(\ln(x))+C$$ (من الشكل $\int\frac{f'}{f}$)

11/ $$\int\frac{3x^2+2}{(x^3+2x-1)^2}dx=\int\frac{(x^3+2x-1)'}{(x^3+2x-1)^2}dx=-\frac{1}{(x^3+2x-1)}+C$$ (من الشكل $\int\frac{f'}{f^2}$)

**3/ الطريقة الثالثة: بتغير المتغير:** نفرض أن $F$ دالة أصلية للدالة $f$ ونريد أن نبحث عن التكامل $\int f(g(t))g'(t)dt$ . في هذه الحالة نقوم بتغير المتغير $x=g(t)$ عندئذ: $1.dx=g'(t)dt$ وبالتالي:

$$\int f(g(t))g'(t)dt=\int f(x)dx=F(x)+C$$

**أمثلة:** *أحسب كل من:*

**1/** $\int tg(x)dx$ ، **2/** $\int x\sqrt{x-5}dx$ ، **3/** $\int \frac{cos(\ln)}{x}dx$

**4/** $\int \frac{x}{\cos^2(x^2+1)}dx$ ، **5/** $\int \cos^3(x)\sin(x)dx$ ، **6/** $\int \frac{\ln(\ln(x))}{x\ln(x)}dx$

**الحل:**

**1/** حساب $\int tg(x)dx$: لدينا $\int tg(x)dx = \int \frac{sin(x)}{\cos(x)}dx$

نضع $t=cosx$ عندئذ: $1.dt = -\sin x.dx$ وبالتعويض نجد

$$\int tg(x)dx = \int \frac{sin(x)}{\cos(x)}dx = -\int \frac{-sin(x)}{cosx}dx = -\int \frac{1}{t}dt = -\ln|t| + C$$

بالعودة إلى المتغير الأصلي $x$ نجد: $\int tg(x)dx = -ln(|\cos(x)|) + C$

**2/** حساب $\int x\sqrt{x-5}dx$، نضع $t=\sqrt{x-5}$ ومنه $t^2 = x-5$ وبالتالي $x=t^2+5$ ومنه: $1.dx = 2tdt$

وبالتعويض نجد: $\int x\sqrt{x-5}dx = \int (t^2+5)t(2tdt) = \int 2t^4 + 10t^2dt = \frac{2}{5}t^5 + \frac{10}{3}t^3 + C$

بالعودة إلى المتغير $x$ نجد: $\int x\sqrt{x-5} == \frac{2}{5}(x-5)^{\frac{5}{2}} + \frac{10}{3}(x-5)^{\frac{3}{2}} + C$

**3/** حساب $\int \frac{cos(\ln(x))}{x}dx$: نضع $t=ln(x)$ عندئذ $1.dt=\frac{1}{x}dx$ بالتعويض

$$\int \frac{cos(\ln(x))}{x}dx = \int cos(\ln(x))\frac{dx}{x} = \int cos(t)dt = \sin(t) + C$$

بالعودة إلى المتغير الأصلي $x$ نجد: $\int \frac{cos(\ln(x))}{x}dx = \sin(\ln(x)) + C$

**4/** حساب $\int \frac{x}{\cos^2(x^2+1)}dx$: نضع $t = x^2+1$ عندئذ $1.dt=2xdx$ بالتعويض

$$\int \frac{x}{\cos^2(x^2+1)}dx = \frac{1}{2}\int \frac{2xdx}{\cos^2(x^2+1)} = \int \frac{1dt}{\cos^2(t)} = tg(t) + C = tg(x^2+1) + C$$

**تمرين:** أحسب التكامل التالية

$$\int \frac{dx}{a^2+x^2}, \quad \int \frac{Arc\sin x}{\sqrt{1-x^2}}dx, \quad \int \sqrt{1-x^2}dx, \quad \int \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}},$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}\left[1+(Arc\sin(x))^2\right]}, \quad \int (2x+1)\sin(x^2+x)dx, \quad \int \frac{e^x}{e^x+1}dx,$$

**الحل:**

**1/** حساب التكامل $\int \frac{dx}{a^2+x^2}$

لدينا $$\int \frac{dx}{a^2+x^2} = \int \frac{dx}{a^2\left(1+\left(\frac{x}{a}\right)^2\right)} = \frac{1}{a^2}\int \frac{dx}{1+\left(\frac{x}{a}\right)^2}$$

نضـــــــــــع: $t=\frac{x}{a}$ أي $x=at$ ومنـــــــــــــــه $dx=adt$ وبالتـــــــــــــــالي

$$\int \frac{dt}{a^2+x^2} = \frac{1}{a^2}\int \frac{adt}{1+t^2} = \frac{a}{a^2}\int \frac{dt}{1+t^2} = \frac{1}{a}Arctgt+c = \frac{1}{a}Arctg\left(\frac{x}{a}\right)+c$$ ( مع c ثابت)

**2** / حساب التكامل $I=\int \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}}$

لدينا $$I=\int \frac{dx}{\sqrt{a^2-x}} = \int \frac{dx}{\sqrt{a^2\left(1-\left(\frac{x}{a}\right)\right)^2}} = \frac{1}{|a|}\int \frac{dx}{\sqrt{1-\left(\frac{x}{a}\right)^2}}$$

نضع $t=\frac{x}{a}$ عندئذ $x=at$ و $dx=adt$ و منه

$$I=\int \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}} = \frac{1}{|a|}\int \frac{adt}{\sqrt{1-t^2}} = \frac{a}{|a|}\int \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}} = arc\sin t + c = \frac{a}{|a|}arc\sin\frac{x}{a}+c$$

**3**/ حساب التكامل $I=\int \sqrt{1-x^2}dx$

نضع $x=\sin t$ أي $t=Arc\sin x$ و $dx=\cos tdt$

إذن $$I=\int \sqrt{1-x^2}dx = \int \sqrt{1-\sin^2 t}\cos(t)dt = \int \cos^2(t)dt$$

لدينا $\cos 2t = 2\cos^2 t - 1$ وبالتالي $\cos^2 t = \frac{\cos 2t+1}{2}$ ومنه:

$$I=\int \frac{\cos 2t+1}{2}dt = \frac{1}{2}\int \cos 2tdt + \frac{1}{2}\int dt$$
$$=\frac{1}{2}\frac{1}{2}\sin 2t + \frac{1}{2}t + c$$
$$=\frac{1}{4}\sin(2\arcsin(x)) + \frac{1}{2}\arcsin(x) + c$$

**5**/ حساب $I=\int \frac{Arc\sin x}{\sqrt{1-x^2}}dx$

نضع $t=Arc\sin x$ ومنه $dt=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx$ وبالتالي:

$$I=\int \frac{Arc\sin x}{\sqrt{(1-x^2)}}dx = \int Arc\sin x\left(\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}\right) = \int tdt = \frac{1}{2}t^2 + c$$

$$I=\frac{1}{2}(Arc\sin x)^2 + c$$

**6/** حساب التكامل $I=\int(2x+1)\sin\left(x^2+x\right)dx$

$$\int(2x+1)\sin\left(x^2+x\right)dx=\int\left(x^2+x\right)'\sin\left(x^2+x\right)dx=-\cos\left(x^2+x\right)+c$$

**7/** حساب التكامل $I=\int\frac{e^x}{e^x+1}dx$

$$I=\int\frac{e^x}{e^x+1}dx=\int\frac{\left(e^x+1\right)'}{e^x+1}dx=\ln\left(e^x+1\right)+c$$

**8/** حساب التكامل $I=\int\frac{e^x}{e^x+1}dx$

$$I=\int\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}\left[1+\left(Arc\sin(x)\right)^2\right]}=\int\frac{\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}}{1+\left(Arc\sin(x)\right)^2}=\int\frac{\left(Arc\sin x\right)'}{1+\left(Arc\sin(x)\right)^2}dx==Arctg\left(Arc\sin x\right)+c$$

## 4/ الطريقة الرابعة: طريقة التكامل بالتجزئة

لتكن $f$ و $g$ دالتين قابلتين للاشتقاق عندئذ $\left(f\left(x\right)g\left(x\right)\right)'=f'(x)g(x)+g'(x)f(x)$

أي $f\left(x\right)'g\left(x\right)=\left(f\left(x\right)g(x)\right)'-g'(x)f(x)$ بالتكامل الطرفين نجد:

$$\int f'(x).g(x)\,dx=\int\left[f\left(x\right).g(x)\right]'dx-\int g'(x)f(x)dx$$

وبالتالي نتحصل على قاعدة التكامل بالتجزئة التالية:

$$\boxed{\int f'(x).g(x)\,dx=f\left(x\right).g(x)-\int g'(x).f(x)dx \qquad (*)}$$

**ملاحظة:**

**1/** هذه الطريقة تصلحُ لحساب تكاملات من الشكل:

$\int e^{ax}\sin(bx)dx$ ، $\int e^{ax}\cos(bx)dx$ ، $\int P(x)e^{ax}dx$ ، $\int P(x)\sin(ax)dx$

$\int P(x)\cos(bx)dx$ ، $\int P(x)\ln(x)dx$ ، $\int P(x)Arctg(x)$ ، $\int P(x)Arc\sin(x),...$

حيث $P(x)$ كير حدود و a و b أعداد حقيقية.

**2/** هذه الطريقة يمكن استعمالها بطريقتين: الطريقة العادية أو بطريقة الأسهم.

### A. الطريقة العادية

**أمثلة:** أحسب التكاملات التالية:

$\int x\ln(x)dx$ ، $\int Arctg(x)dx$ ، $\int xe^{x}dx$ ، $\int x\cos(x)dx$ ، $\int e^{x}\sin(x)dx$

**الحل:**

**/1** حساب $\int x\ln(x)dx$

نضع: $\begin{cases} f(x)=\ln(x) \\ g'(x)=x \end{cases}$ عندئذ $\begin{cases} f'(x)=\frac{1}{x} \\ g(x)=\frac{1}{2}x^2 \end{cases}$ ومنه بتطبيق قانون التكامل بالتجزئة $(*)$ نجد:

$$\int x\ln(x)dx=\int g'(x)f(x)dx=g(x).f(x)-\int f'(x).g(x)dx$$
$$=\frac{1}{2}x^2\ln(x)-\frac{1}{2}\int\frac{1}{x}.x^2dx=\frac{1}{2}x^2\ln(x)-\frac{1}{2}\int xdx$$
$$=\frac{1}{2}x^2\ln(x)-\frac{1}{4}x^2+C$$

**/2** حساب $\int xe^xdx$ : نضع $\begin{cases} f'(x)=e^x \\ g(x)=x \end{cases}$ عندئذ $\begin{cases} f(x)=e^x \\ g'(x)=1 \end{cases}$

بتطبيق قانون التكامل بالتجزئة نجد:

$$\int xe^xdx=\int f'(x)g(x)dx=f(x).g(x)-\int f(x).g'(x)dx$$
$$=x.e^x-\int 1.e^xdx=xe^x+e^x+C=(x+1)e^x+C$$

**/3** حساب $\int x\cos(x)dx$ : نضع $\begin{cases} f'(x)=\cos(x) \\ g(x)=x \end{cases}$ عندئذ $\begin{cases} f(x)=\sin(x) \\ g'(x)=1 \end{cases}$ ومنه:

$$\int x\cos(x)dx=\int f'(x)g(x)dx=f(x).g(x)-\int f(x).g'(x)dx$$
$$=x\sin(x)-\int\sin(x)dx=x\sin(x)+\cos(x)+C$$

**/4** حساب $\int Arctg(x)dx$ : نضع $\begin{cases} f'(x)=1 \\ g(x)=Arctg(x) \end{cases}$ عندئذ $\begin{cases} f(x)=x \\ g'(x)=\frac{1}{1+x^2} \end{cases}$

بتطبيق التكامل بالتجزئة نجد:

$$\int Arctg(x)dx=\int f'(x).g(x)dx=f(x).g(x)-\int f(x).g'(x)dx$$
$$=x.Arctg(x)-\int\frac{x}{1+x^2}dx=xActg(x)-\frac{1}{2}\int\frac{2x}{1+x^2}dx$$
$$=x.Arctg(x)-\frac{1}{2}\int\frac{(1+x^2)'}{1+x^2}dx=xActg(x)-\frac{1}{2}\ln(1+x^2)+c$$

**/5** حساب $\int e^x\sin(x)dx$ نضع $\begin{cases} f'(x)=e^x \\ g(x)=\sin(x) \end{cases}$ عندئذ $\begin{cases} f(x)=e^x \\ g'(x)=\cos(x) \end{cases}$ ومنه:

$$\int e^x\sin(x)dx=e^x\sin(x)-\int e^x\cos(x)dx \quad (1)$$

لنطبق مرة أخرى التكامل بالتجزئة لحساب $\int e^x\sin(x)dx$

نضع $\begin{cases} f'(x)=e^x \\ g(x)=cosx \end{cases}$ عندئذ $\begin{cases} f(x)=e^x \\ g'(x)=-\sin(x) \end{cases}$ وبالتالي

$$\int e^{x}\sin(x)dx=(\cos x)e^{x}+\int e^{x}\sin(x)\,dx$$

بالتعويض في العلاقة $(1)$ نجد:

$$\int e^{x}\sin(x)dx=(\cos x)e^{x}-\left[e^{x}\cos(x)+\int e^{x}\sin(x)\,dx\right]$$

$$\int e^{x}\sin(x)dx=e^{x}\left(\sin(x)-\cos(x)\right)-\int e^{x}\sin(x)\,dx$$

وبالتالي: $2\int e^{x}\sin(x)dx=e^{x}\left(\sin(x)-\cos(x)\right)$ ومنه:

$$\int e^{x}\sin(x)dx=\frac{1}{2}e^{x}\left(\sin(x)-\cos(x)\right)+C$$

**B/ الطريقة الثانية: طريقة الأسهم:** وهي موضحة في الأمثلة التالية:

**أمثلة:** أحسب التكاملات التالية:

**1/** $\int\left(x^{3}+1\right)\sin(2x)dx$ ، **2/** $\int x^{3}e^{2x}dx$ ، **3/** $\int x^{5x}\cos(2x)dx$

**الحل:**

**1/** حساب $\int\left(x^{3}+1\right)\sin(2x)dx$ . نأخذ $\left(x^{3}+1\right)$ كدالة و *sin(2x)* كمشتقة

| $\left(x^{3}+1\right)$ ومشتقاتها | | دالة *sin(2x)* وتكاملاتها |
|---|---|---|
| $x^{3}+1$ | + | $\sin(2x)$ |
| $3x^{2}$ | - | $\frac{1}{2}\cos(2x)$ |
| $6x$ | + | $-\frac{1}{4}\sin(2x)$ |
| $6$ | - | $\frac{1}{8}\cos(2x)$ |
| $0$ | | $\frac{-1}{16}\sin(2x)$ |
| // | | |

عندئذ:

$$\int\left(x^{3}+1\right)\sin(2x)dx=+\left(x^{3}+1\right)\times\left[\frac{1}{2}\cos(2x)\right]-\left(3x^{2}\right)\left(-\frac{1}{4}\sin(2x)\right)+6x\times\left(\frac{1}{8}\cos(2x)\right)-6\times\left(-\frac{1}{16}(\sin(2x)\right)$$

$$\int\left(x^{3}+1\right)\sin(2x)dx=\frac{1}{2}\left(x^{3}+1\right)\cos(2x)+\frac{3}{4}x\cos(2x)+\frac{3}{4}\sin(2x)+C$$

**2/** حساب $\int x^{3}e^{2x}dx$ : نأخذ $x^{3}$ كدالة و $e^{2x}$ كمشتقة

| دالة $x^{3}$ ومشتقاتها | | $e^{2x}$ وتكاملاتها |
|---|---|---|
| $x^{3}$ | $+$ | $e^{2x}$ |
| $3x^{2}$ | $-$ | $\frac{1}{2}e^{2x}$ |
| $6x$ | $+$ | $\frac{1}{4}e^{2x}$ |
| $6$ | $-$ | $\frac{1}{8}e^{2x}$ |
| $0$ | | $\frac{1}{16}e^{2x}$ |

عندئذ:

$$\int x^{3}e^{2x}dx=+x^{3}\times\left(\frac{1}{2}e^{2x}\right)-\left(3x^{2}\right)\times\left(\frac{1}{4}e^{2x}\right)+\left(6x\right)\times\left(\frac{1}{8}e^{2x}\right)-6\times\left(\frac{1}{16}e^{2x}\right)+C$$

ومنه:

$$\int x^{3}e^{2x}dx=\frac{x^{3}}{2}e^{2x}-\frac{3}{4}x^{2}e^{2x}+\frac{3}{4}xe^{2x}+\frac{3}{8}e^{2x}+C$$

$$\int x^{3}e^{2x}dx=\left[\frac{x^{3}}{2}-\frac{3}{4}x^{2}+\frac{3}{4}x+\frac{3}{8}\right]e^{2x}+C$$

**3/** حساب $\int x^{5x}\cos(2x)dx$ : نأخذ $e^{5x}$ كدالة و $\cos(2x)$ كمشتقة

| دالة $e^{5x}$ ومشتقاتها | | $\cos(2x)$ وتكاملاتها |
|---|---|---|
| $e^{5x}$ | $+$ | $\underbrace{\cos(2x)}$ |
| $5e^{5x}$ | $-$ | $-\frac{1}{2}\sin(2x)$ |
| $25e^{5x}$ | $+$ | $-\frac{1}{4}\underbrace{\cos(2x)}$ |

عندئذ:

$$\int x^{5x}\cos(2x)dx=+e^{5x}\times\left(-\frac{1}{2}\sin(2x)\right)-5e^{5x}\times\left(-\frac{1}{4}\cos(2x)\right)+\int 25e^{5x}\left(-\frac{1}{4}\cos(2x)\right)dx$$

$$\int x^{5x}\cos(2x)dx=-\frac{1}{2}e^{5x}\sin(2x)+\frac{5}{4}e^{5x}\cos(2x)-\frac{25}{4}\int e^{5x}\cos(2x)dx$$

ومنه:

$$\left(1+\frac{25}{4}\right)\int e^{5x}\cos(2x)dx = e^{5x}\left(-\frac{1}{2}\sin(2x)\right)+\frac{5}{4}\cos(2x)$$

$$\frac{29}{4}\int e^{5x}\cos(2x)dx = e^{5x}\left(-\frac{1}{2}\sin(2x)+\frac{5}{4}\cos(2x)\right)$$

$$\int e^{5x}\cos(2x)dx = \frac{4}{29}e^{5x}\left(-\frac{1}{2}\sin(2x)+\frac{5}{4}\cos(2x)\right)+C$$

**ملاحظة:**

- في التكاملات من الشكل $\int P(x)e^{ax}dx$ ، $\int P(x)\sin(ax)dx$ ، $\int e^{ax}\cos(a\,x)dx$ نأخذ $P(x)$ كدالة و الدوال الأخرى كمشتقة.
- في التكاملات من الشكل $\int P(x)Arctg(x)dx$, $\int P(x)Arcsin(x)dx$ ، $\int P(x)Arccos(x)dx$ $\int P(x)\ln^n(x)dx$ نأخذ $P(x)$ كمشتقة و الدوال الأخرى كدالة.
- في التكاملات من الشكل $\int e^{ax}\sin(bx)dx$ و $\int e^{ax}cos(bx)dx$ يجب إجراء التكامل بالتجزئة مرتين متتاليين.
- إذا كانت درجة $P(x)$ كبيرة، الأفضل استعمال طريقة الأسهم.

**تمرين:** أحسب التكامل التالية

$$\int\left(x^2-x+2\right)e^{2x}dx \qquad \int\left(x^3-x^2+2x-3\right)\sin x dx \qquad \int Arc\sin x dx \qquad \int Arctgx dx$$

**الحل:**

**1.** حساب التكامل $I(x)=\int\left(x^2-x+2\right)e^{2x}dx$

$$I(x)=\frac{1}{2}\left(x^2-x+2\right)e^{2x}-\frac{1}{2}\int(2x-1)e^{2x}dx$$

$$=\frac{1}{2}\left(x^2-x+2\right)e^{2x}-\left[\frac{1}{2}(2x-1)e^{2x}-\frac{1}{2}\int 2e^{2x}dx\right]$$

$$=\frac{1}{2}\left(x^2-x+2\right)e^{2x}-\frac{1}{2}\left[\frac{1}{2(2x-1)}e^{2x}-e^{2x}\right]+c$$

$$=\frac{1}{2}\left(x^2-x+2\right)e^{2x}-\frac{1}{2}[x-2]e^{2x}+c$$

$$=\frac{1}{2}\left(x^2-2x+4\right)e^{2x}+c$$

**2.** حساب التكامل $I(x)=\int\left(x^3-x^2+2x-3\right)\sin x dx$

نستعمل التكامل بالتجزئة

$$f(x)=x^3-x^2-3\Rightarrow f'(x)=3x^2-2x+2$$

$$g'(x)=\sin x\Rightarrow g(x)=-\cos x$$

$$I(x)=\int f(x)g'(x)dx=-\left(x^3-x^2+2x-3\right)\cos x+\int\left(3x^2-2x+2\right)\cos x dx.....(*)$$

- حساب $\int\left(3x^{2}-2x+2\right)\cos x dx$ . بإستعمال مرة أخرى التكامل التجزئة

$$f(x)=3x^{3}-2x+2 \Rightarrow f'(x)=6x-2$$
$$g'(x)=\cos x \Rightarrow g(x)=\sin x$$

نجد
$$\int\left(3x^{2}-2x+2\right)\cos x dx=\left(3x^{2}-2x+2\right)\sin x-\int(6x-2)\sin x dx......(**)$$

- حساب $\int(6x-2)\sin x dx$ بإستعمال أيضا التكامل التجزئة

$$f(x)=6x-2 \Rightarrow f'(x)=6$$
$$g'(x)=\sin x \Rightarrow g(x)=-\cos x$$

نجد
$$\int(6x-2)\sin x dx=-(6x-2)\cos x+\int 6\cos x dx$$
$$\int(6x-2)\sin x dx=-(6x-2)\cos x+6\sin x+c................ \quad (***)$$

من (*) و(**) و(***) نجد:

$$I(x)=-\left(x^{3}-x^{2}+2x-3\right)\cos x+\left(3x^{3}-2x+2\right)\sin x+(6x-2)\cos x-6\sin x+c$$

أي
$$I(x)=\left(-x^{3}+x^{2}+4x+1\right)\cos x+\left(3x^{3}-2x+4\right)\sin x+(6x-2)\sin x+c$$

**3.** حساب التكامل $\int Arctgx dx$

بوضع
$$f(x)=Arctgx \Rightarrow f'(x)=\frac{1}{1+x^{2}}$$
$$g'(x)=1 \Rightarrow g(x)=x$$

بإستعمال التكامل بالتجزئة نجد

$$\int Arctgx dx=\int 1.Arctgx=\int g'(x)f(x)dx$$
$$=f(x).g(x)-\int g(x)f'(x)dx$$
$$=xArctgx-\int\frac{x}{1+x^{2}}dx$$
$$=xArctgx-\frac{1}{2}\int\frac{2x}{1+x^{2}}dx$$
$$=xArctgx-\frac{1}{2}\ln\left(1+x^{2}\right)+c$$

**4.** حساب التكامل $\int Arc\sin x dx$

نضع
$$f(x)=Arc\sin x \Rightarrow f'(x)=\frac{1}{\sqrt{1-x^{2}}}$$
$$g'(x)=1 \Rightarrow g(x)=x$$

$$\int Arc\sin x dx = \int 1.Arc\sin x = \int g'(x) f(x) dx$$
$$= f(x).g(x) - \int g(x) f'(x) dx$$
$$= xArc\sin x - \int \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} dx$$
$$= xArc\sin x - \frac{1}{2}\int \frac{2x}{\sqrt{1-x^2}} dx$$
$$= xArc\sin x + \sqrt{1-x^2} + c$$

**5- الطريقة الخامسة: طريقة تفكيك الكسور** نستخدم هذه الطريقة لحساب التكاملات من الشكل $\int \frac{P(x)}{q(x)} dx$ حيث $P(x)$ و $q(x)$ كثيري حدود سنحاول في هذه الطريقة كتابة الكسر $\frac{P(x)}{q(x)}$ على شكل مجموع كسور بسيطة ذات تكاملات معلومة حيث نميز حالتين:

الحالة الأولى: **درجة $P(x)$ أقل من درجة $q(x)$**

في هذه الحالة نقوم بتحليل المقام $q(x)$ إلى جداء عوامل خطية ثم نكتب الكسر $\frac{P(x)}{q(x)}$ على شكل مجاميع كسور بسيطة.

**أمثلة:** *أحسب التكامل* $\int \frac{2x-1}{x^2-4x+3}$

**الحل:** لإيجاد هذا التكامل نتبع الخطوات التالية:

1- نقوم بتحليل المقام:

لدينا: $x^2-4x+3=(x-1)(x-3)$ (نحسب المميز $\Delta$ لإيجاد الجذور)

2- نكتب الكسر على الشكل: $\frac{2x-1}{x^2-4x+3} = \frac{2x-1}{(x-1)(x-3)} = \frac{A}{(x-1)} + \frac{B}{(x-3)}$

3- نبحث عن قيم A و B:

$$\frac{2x-1}{(x-1)(x-3)} = \frac{A}{(x-1)} + \frac{B}{(x-3)} = \frac{A(x-3)+B(x-1)}{(x-1)(x-3)} = \frac{(A+B)x-(3A+B)}{(x-1)(x-3)}$$

بالمطابقة نجد: $2x-1=(A+B)x-(3A+B)$

ومنه: $\begin{cases} A+B=2 \\ 3A+B=1 \end{cases}$ وبالتالي: $\begin{cases} A=-\frac{1}{2} \\ B=\frac{5}{2} \end{cases}$

نستنتج إذن أن: $\frac{2x-1}{x^2-4x+3} = \frac{1}{2}\frac{1}{(x-1)} + \frac{5}{2}\frac{1}{(x-3)}$

بالمكالمة نجد

$$\int \frac{2x-1}{x^2-4x+3}dx=-\frac{1}{2}\int\frac{1}{x-1}dx+\frac{5}{2}\int\frac{1}{x-3}dx=-\frac{1}{2}\ln|x-1|+\frac{5}{2}\ln|x-3|+C$$

**الحالة الثانية: درجة $P(x)$ أكبر أو تساوي من درجة $q(x)$**

في هذه الحالة نقوم أولا بقسمة $P(x)$ على $q(x)$ فنتحصل على: $\frac{P(x)}{q(x)}=r(x)+\frac{d(x)}{q(x)}$

مع درجة $d(x)$ أقل من درجة $q(x)$ ثم نقوم بنفس الخطوات السابقة (الحالة 1) على $\frac{d(x)}{q(x)}$

**مثال:** أحسب التكامل $\int\frac{x^3-7x+9}{x^2-3x+2}dx$

**الحل:** لحساب هذا التكامل نتبع الخطوات التالية:

**1/ نقوم بالقسمة الإقليدية لــ $x^3-7x+9$ على $x^2-3x+2$**

$$\begin{array}{r|l}
x^3-7x+9 & x^2-3x+2 \\ \cline{2-2}
-\;\; x^3-3x^2+2x & x+3 \\ \cline{1-1}
3x^2-9x+9 & \\
-\;\; 3x^2-9x^2+6 & \\ \cline{1-1}
3 &
\end{array}$$

إذن: $x^3-7x+9=(x+3)(x^2-3x+2)+3$

وبالتالي: $\frac{x^3-7x+9}{x^2-3x+2}=\frac{(x+3)(x^2-3x+2)+3}{(x^2-3x+2)}=(x+3)+\frac{3}{x^2-3x+2}$

ومنه: $\int\frac{x^3-7x+9}{x^2-3x+2}dx=\int(x+3)dx+\int\frac{3}{x^2-3x+2}dx$

لحساب $\int\frac{3}{(x^2-3x+2)}dx$ نتبع نفس الخطوات الحالة الأولى.

**2- نقوم بتحليل المقام** $x^2-3x+2$: لدينا $x^2-3x+2=(x-1)(x-2)$

**3- نكتب الكسر** $\frac{3}{x^2-3x+2}$ على الشكل

$$\frac{3}{x^2-3x+2}=\frac{A}{(x-1)}+\frac{B}{(x-2)} \qquad (*)$$

**4- نبحث على A وB:**

$$\frac{3}{x^2-3x+2}=\frac{A}{(x-1)}+\frac{B}{(x-2)}=\frac{A(x-2)+B(x-1)}{(x-1)(x-2)}$$

وبالتالي:
$$\frac{3}{(x-1)(x-2)}==\frac{(A+B)x+(-2A-B)}{(x-1)(x-2)}$$

بالمطابقة نجد: $\begin{cases} A+B=0 \\ -2A-B=3 \end{cases}$ أي: $\begin{cases} A=-3 \\ B=3 \end{cases}$

**5- بالتعويض في العلاقة** $(*)$ نجد
$$\frac{3}{x^2-3x+2}=\frac{-3}{x-1}+\frac{3}{x-2}$$

وبالتالي
$$\frac{x^3-7x+9}{x^2-3x+2}=(x+3)+\frac{-3}{x-1}+\frac{3}{x-2}$$

بالتكامل نتحصل على
$$\int\frac{x^3-7x+9}{x^2-3x+2}dx=\int(x+3)\,dx+\int\frac{-3}{x-1}dx+\int\frac{3}{x-2}dx$$
$$=\int(x+3)\,dx-3\int\frac{1}{x-1}dx+3\int\frac{1}{x-2}dx$$
$$=\frac{1}{2}x^2+3x-3\ln|x-1|+3\ln|x-2|+C$$

# مواضيع امتحانات محلولة

## الموضوع الأول

**التمرين الأول:** نعتبر المتتالية العددية المعرفة بالعلاقة التراجعية التالية:

$$\begin{cases} v_0 = 3 \\ v_{n+1} = \dfrac{2v_n^2}{v_n + 4}, \quad \forall n \in \mathbb{N} \end{cases}$$

1. أوجد الدالة $f$ التي تحقق $v_{n+1} = f(v_n), \quad \forall n \in \mathbb{N}$
2. أثبت أن الدالة $f$ متزايدة ثم استنتج رتابة $(v_n)_n$.
3. برهن أن $0 \le v_n \le 3, \quad \forall n \in \mathbb{N}$
4. استنتج أن المتتالية متقاربة نحو نهاية يطلب تعيينها.

**التمرين الثاني:**

**1**- إليك الدوال العددية التالية:

$$g(x) = \frac{\ln(1+2x)}{\ln(1+3x)} \qquad h(x) = \frac{1-e^{2x}}{1-e^{3x}} \qquad t(x) = \frac{2x^2-1}{3x^2+1}$$

أحسب كل من: $D_g$ ، $D_h$ ، $D_t$ ، $\lim\limits_{x\to 0} g(x)$ ، $\lim\limits_{x\to 0} h(x)$ ، $\lim\limits_{x\to +\infty} t(x)$

**2**- نعتبر الدالة المعرفة بـــ:

$$f(x) = \begin{cases} x^2 \cos\left(\dfrac{5}{x^3+3x}\right), & x<0 \\ 0, & x=0 \\ \dfrac{\sin(x)}{xe^x}, & x>0 \end{cases}$$

أدرس استمرارية الدالة $f$ عند النقطة $x_0 = 0$ .

**التمرين الثالث:**

**1**- لتكن الدالة المعطاة بـــ $f(x) = \arcsin(3x)$

أوجد مجموعة تعريف الدالة $f$ $(D_f)$ ثم أحسب الدالة المشتقة $f'(x)$

**2**- نعتبر الدالة ذات متغيرين معرفة بالعلاقة $g(x,y) = xe^y + ye^x + \ln(x+y)$

أحسب كل من: $g(0,1)$ ، $g(1.0)$ ، $\dfrac{\partial g}{\partial x}(x,y)$ ، $\dfrac{\partial g}{\partial y}(x,y)$

**3**– أحسب التكاملات التالية:

$$\int \frac{2x}{x^2+1}dx \quad ، \int \frac{\cos(x)}{2\sqrt{\sin(x)}}dx \quad ، \quad \int (x+3)e^x dx$$

# تصحيح الموضوع الأول

## حل التمرين الأول:

1. لدينا $f(\mathrm{v_n}) = \frac{2\mathrm{v_n^2}}{\mathrm{v_n}+4} = v_{n+1}$ إذن الدالة $f$ هي دالة معرفة بـــ: $f(\mathrm{x}) = \frac{2x^2}{x+4}$

2. إثبات أن $f$ متزايدة: لدينا:

$$f'(\mathrm{x}) = \frac{4x(x+4)-2x^2}{(x+4)^2} = \frac{2x^2+16x}{(x+4)^2} \geq 0, \quad \forall x \in [0,+\infty[$$

إذن $f$ متزايدة على $[0,+\infty[$.

3. رتابة $(v_n)_n$ : لدينا $v_1 = \frac{2\mathrm{v_0^2}}{\mathrm{v_0}+4} = \frac{18}{7} < 3 = \mathrm{v_0}$

إذن بما أن $f$ متزايدة و $v_1 < \mathrm{v_0}$ إذن المتتالية $(v_n)$ متناقصة.

4. إثبات أن $0 \leq v_n \leq 3$: نضع $p(\mathrm{n})$ القضية المعرفة بـــ : $p(\mathrm{n}) = 0 \leq v_n \leq 3$

- بما أن $0 \leq v_n = 3 \leq 3$ إذن القضية $p(0)$ محققة.
- نفرض الآن أن $p(\mathrm{n})$ صحيحة أي $0 \leq v_n \leq 3$ ونبرهن صحة $p(\mathrm{n}+1)$

لدينا فرضا $0 \leq v_n \leq 3$ وبما أن $f$ متزايدة إذن $f(0) \leq \mathrm{f}(v_n) \leq \mathrm{f}(3)$

أي $0 \leq v_{n+1} \leq \frac{2.3^2}{3+4} = \frac{18}{7} \leq 3$ وبالتالي $p(\mathrm{n}+1)$ صحيحة.

وحسب مبدأ البرهان بالتراجع فإن $p(\mathrm{n})$ صحيحة دوما وبالتالي $0 \leq v_n \leq 3, \quad \forall n \in \mathbb{N}$

5. التقارب والنهاية: بما أن $(v_n)_n$ متناقصة ومحدودة من الأسفل $(v_n \geq 0)$ إذن فهي متقاربة نحو نهاية $\ell$ تحقق $f(\ell) = \ell$ (نظرية النقطة الصامدة)

$$f(\ell) = \ell \Leftrightarrow \frac{2\ell^2}{\ell+4} = \ell \Leftrightarrow 2\ell^2 = \ell(\ell+4) \Leftrightarrow \ell^2 - 4\ell = 0 \Leftrightarrow \ell(\ell-4) = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \ell = 0 \\ \text{و} \\ \ell = 4 \end{cases}$$

ومنه $\lim_{n\to+\infty} v_n = 0$ ($\ell = 4$ مرفوض لأن $0 \leq v_n \leq 3$)

## حل التمرين الثاني:

-1
$$D_g=\{x\in\mathbb{R}/1+2x>0\ ,\ 1+3x>0\ ,\ 1+3x\neq 1\}$$
$$=\left\{x\in\mathbb{R}/\ x>\frac{-1}{2}\ ,\ x>-\frac{1}{3}\ ,\ 3x\neq 0\right\}=\left]\frac{-1}{3},0\right[\cup]0,+\infty[$$
$$D_h=\{x\in\mathbb{R}/1-e^{3x}\neq 0\}=\{x\in\mathbb{R}/e^{3x}\neq 1\}$$
$$=\{x\in\mathbb{R}/3x\neq 0\}=\mathbb{R}-\{0\}$$
$$D_t=\mathbb{R}$$

$$\lim_{x\to 0} g(x)=\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+2x)}{\ln(1+3x)}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{2}{1+2x}}{\frac{3}{1+3x}}=\frac{2}{3}\qquad \text{(لويتال)}$$

$$\lim_{x\to 0} h(x)=\lim_{x\to 0}\frac{1-e^{2x}}{1-e^{3x}}=\lim_{x\to 0}\frac{-2e^{2x}}{-3e^{3x}}=\frac{2}{3}\qquad \text{(لويتال)}$$

$$\lim_{x\to +\infty} t(x)=\lim_{x\to +\infty}\frac{2x^2-1}{3x^2+1}=\lim_{x\to +\infty}\frac{2x^2}{3x^2}=\frac{2}{3}$$

-2 دراسة استمرارية $f$ عند "0"

$$\lim_{\substack{> \\ x\to 0}} f(x)=\lim_{\substack{< \\ x\to 0}} f(x)=f(0)\Leftrightarrow \text{"0" مستمرة عند } f$$

لدينا: $f(0)=0$ و $\lim_{\substack{< \\ x\to 0}} f(x)=\lim_{\substack{< \\ x\to 0}} x^2\cos\left(\frac{5}{x^3+3x}\right)$. بما أن $-1\leq \cos\left(\frac{5}{x^3+3x}\right)\leq 1$

إذن $-x^2\leq x^2\cos\left(\frac{5}{x^3+3x}\right)\leq x^2$ ومنه حسب نظرية الحصر فإن

$$\lim_{\substack{< \\ x\to 0}} f(x)=\lim_{\substack{< \\ x\to 0}} x^2\cos\left(\frac{5}{x^3+3x}\right)=0$$

$$\lim_{\substack{> \\ x\to 0}} f(x)=\lim_{\substack{> \\ x\to 0}} x^2\frac{\sin x}{xe^x}=\lim_{\substack{> \\ x\to 0}}\frac{\cos x}{e^x+xe^x}=\frac{1}{1}=1\quad \text{(لوريتال)}$$

بما أن $\lim_{\substack{> \\ x\to 0}} f(x)\neq f(0)$ إذن $f$ ليست مستمرة على يمين "0" وبالتالي $f$ ليست مستمرة عند "0".

## حل التمرين الثالث:

**1-**

$$D_f=\{x\in\mathbb{R}/-1\le 3x\le 1\}=\left\{x\in\mathbb{R}/-\frac{1}{3}\le x\le\frac{1}{3}\right\}=\left[-\frac{1}{3},\frac{1}{3}\right]$$

$$f'(x)=\frac{3}{\sqrt{1-(3x)^2}}=\frac{3}{\sqrt{1-9x^2}}$$

**2-** لدينا $g(x,y)=ne^y+ye^x+\ell n(x+y)$

$$g(1,0)=1e^0+0y^1+\ell n(1+0)=1$$

$$g(1,0)=0e^0+1e^1+\ell n(0+1)=1$$

$$\frac{\partial g}{\partial x}(x,y)=e^y+y^{e^x}+\frac{1}{x+y}$$

$$\frac{\partial g}{\partial y}(x,y)=xe^y+e^x+\frac{1}{x+y}$$

**3-**

$$\int\frac{2x}{x^2+1}dx=\int\frac{(x^2+1)'}{x^2+1}dx=\ell n(x^2+1)+C$$ (من الشكل $\int\frac{f}{f'}$ )

$$\int\frac{cosx}{2\sqrt{\sin(x)}}dx=\int\frac{(sn(x))'}{2\sqrt{sn(x)}}dx=\sqrt{\sin x}+C$$ (من الشكل $\int\frac{f'}{2\sqrt{f}}$ )

لحساب التكامل $\int(x+3)e^x dx$ نستعمل التكامل بالتجزئة ونضع

$$\begin{cases} f(x)=(x+3)\Rightarrow f'(x)=1 \\ g'(x)=e^x\Rightarrow g(x)=e^x \end{cases}$$

عندئذ:

$$\begin{aligned}\int(x+3)e^x dx&=(x+3).e^x-\int 1.e^x dx\\ &=(x+3)e^x-e^x+C\\ &=(x+2)e^x+C\end{aligned}$$

## الموضوع الثاني

**التمرين الأول:** نعتبر المتتالية المعرفة بالعلاقة التراجعية التالية:

$$\begin{cases} u_0 = \dfrac{1}{2} \\ u_{n+1} = \dfrac{u_n}{2} + \dfrac{(u_n)^2}{4}, \quad \forall n \in \mathbb{N} \end{cases}$$

1. أثبت أن $\forall n \in \mathbb{N}: \quad 0 < u_n \le 1$
2. أثبت أن $(u_n)_{n\ge 0}$ متتالية متناقصة ثم استنتج أنها متقاربة.
3. أوجد نهاية المتتالية $(u_n)_{n\ge 0}$
4. ما هي طبيعة السلسلتين التاليتين $\sum_{n=0}^{n=+\infty} \left(\dfrac{1}{2}\right)^n$ ، $\sum_{n=0}^{n=+\infty} \dfrac{n^2+1}{2n^2+3n+5}$

**التمرين الثاني:** نعتبر الدالة المعرفة بالعلاقة:

$$f(x) = \begin{cases} xe^{-x^2}, & x<0 \\ 3\ln(1+x), & x \ge 0 \end{cases}$$

1. أدرس استمرارية وقابلية الاشتقاق الدالة $f$ عند النقطة $x_0 = 0$
2. أحسب مشتقة الدوال التالية:

$$r(x) = (x^2+1)^{\sin x}, h(x) = \mathrm{tg}\left(\sqrt{x} + e^x\right), g(x) = \ln(\cos x)$$

**التمرين الثالث:**

**1**− أوجد مجموعة التعريف وكذا الدالة المشتقة للدالتين التاليتين

$$f(x) = \arcsin\left(\frac{x}{x+1}\right), g(x) = \mathrm{arctg}\left(\frac{\sqrt{x}}{(x+1)\ln(x)}\right)$$

**2**− أحسب التكامليين التاليين:

$$\int (2x+3)e^{(x^2+3x)}dx, \quad \int \frac{1}{x\ln(x)}dx$$

**3**− أثبت أن:

$$\forall x \in [-1,1]: \quad \cos(\arcsin x) = \sqrt{1-x^2}$$
$$\forall x \in [-1,1]: \quad \sin(\arccos x) = \sqrt{1-x^2}$$

# تصحيح الموضوع الأول

## حل التمرين الأول:

$$u_{n+1}=\frac{u_n}{2}+\frac{u_n^2}{4} \quad ، \quad u_0=\frac{1}{2}$$

**.1** إثبات أن $\forall n\in\mathbb{N}: \quad 0<u_n\leq 1$

- لدينا $0\langle u_0=\frac{1}{2}\leq 1$ إذن العلاقة صحيحة من أجل $n=0$
- نفرض أن $0<u_n\leq 1$ ونبرهن أن $0<u_{n+1}\leq 1$.

$$0<u_n\leq 1\Rightarrow\begin{cases}0<\frac{u_n}{2}\leq\frac{1}{2}\\ 0<u_n^2\leq 1\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}0<\frac{u_n}{2}\leq\frac{1}{2}\\ 0<u_n^2\leq\frac{1}{4}\end{cases}\Rightarrow 0<\frac{u_n}{2}+u_n^2<\frac{1}{2}+\frac{1}{4}<1\Rightarrow 0<u_{n+1}\leq 1$$

حسب مبدأ البرهان بالتراجع فإن $\forall n\in\mathbb{N} \quad 0<u_n\leq 1$

**.2** إثبات أن $(u_n)_n$ متناقصة:

**الطريقة الأولى:** بما أن $(u_n)_n$ متتالية موجبة تماما إذن يكفي مقارنة $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ بالعدد 1.

$$\frac{u_{n+1}}{u_n}=\frac{\frac{u_n}{2}+\frac{u_n^2}{4}}{u_n}=\frac{1}{2}+\frac{u_n}{4}\leq\frac{1}{2}+\frac{1}{4}=\frac{3}{4}\leq 1$$

إذن المتتالية $(u_n)$ متناقصة.

**الطريقة الثانية:**

$$u_{n+1}-u_n=\frac{u_n}{2}+\frac{u_n^2}{4}-u_n=\frac{u_n^2}{4}-\frac{u_n}{2}=\frac{u_n}{4}(u_n-2)<\frac{u_n}{4}(u_n-2)<0$$

إذن المتتالية $(u_n)_n$ متناقصة.

استنتاج أن $(u_n)$ متقاربة:

بما أن $(u_n)_n$ محدودة من الأسفل $(u_n>0)$ ومتناقصة إذن فهي متقاربة نحو نهاية $\ell$.

**.3** إيجاد النهاية $\ell$: حسب مبدأ نظرية النقطة الصامدة فإن النهاية تحقق

$$\ell=\frac{\ell}{2}+\frac{\ell^2}{4} \text{ أي } \frac{\ell^2}{4}-\frac{\ell}{2}=0 \text{ ومنه } \frac{\ell}{4}(\ell-2)=0$$

وبالتالي $\ell=0$ أو $\ell=2$ (لكن $\ell=2$ مرفوض لأن $u_n\leq 1$) ومنه $\lim\limits_{n\to+\infty}u_n=0$

**.4** **a/** طبيعة السلسلة $\sum_{n=0}^{0}\left(\frac{1}{2}\right)^{n}$ : لدينا

(مج متتالية هندسية)
$$S_n=\left(\frac{1}{2}\right)^0+\left(\frac{1}{2}\right)^1+\ldots+\left(\frac{1}{2}\right)^n=1.\frac{1-\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}}{1-\left(\frac{1}{2}\right)}$$

(النهاية موجودة ومنتهية)
$$S_n=2-\left(\frac{1}{2}\right)^n\Rightarrow \lim_{n\to+\infty}S_n=\lim_{n\to+\infty}2-\left(\frac{1}{2}\right)^n=2$$

وبالتالي السلسلة السابقة متقاربة.

**b** / طبيعة السلسلة $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{n^2+1}{2n^2+3n+5}$

بما أن $\lim_{n\to+\infty}\frac{n^2+1}{2n^2+3n+5}=\frac{1}{2}\neq 0$ إذن حسب نظرية (في الدرس) السلسلة متباعدة.

**حل التمرين الثاني:**

1. a دراسة الاستمرارية عند $"x_0=0"$: لدينا

$$f(0)=0\ ،\ \lim_{\substack{>\\x\to0}}f(x)=\lim_{\substack{>\\x\to0}}3\ell n(1+x)=0\ ،\ \lim_{\substack{<\\x\to0}}f(x)=\lim_{\substack{<\\x\to0}}xe^{-x^2}=0$$

بما أن $\lim_{\substack{>\\x\to0}}f(x)=\lim_{\substack{<\\x\to0}}f(x)=f(x)$ إذن $f$ مستمرة عند "0".

1. b دراسة قابلية الاشتقاق عند $"x_0=0"$: لدينا

$$\lim_{\substack{>\\x\to0}}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{\substack{>\\x\to0}}\frac{3\ell n(1+x)-0}{x-0}=\lim_{\substack{>\\x\to0}}\frac{3\ell n(1+x)}{x-0}=\lim_{\substack{>\\x\to0}}3\frac{\frac{1}{1+x}}{1}=3$$

$$\lim_{\substack{<\\x\to0}}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{\substack{<\\x\to0}}\frac{xe^{-x^2}-0}{x-0}=\lim_{\substack{<\\x\to0}}e^{-x^2}=1$$

بما أن $f'g(0)\neq f'd(0)$ إذن $f$ غير قابلة للاشتقاق عند "0".

2. حساب المشتقات:

$$g'(x)=\left(\ell n(\cos(x))\right)'=\frac{(\cos(x))'}{\cos(x)}=-\frac{\sin x}{\cos x}=-\mathrm{tg}(x)$$

$$h'(x)=\left(\mathrm{tg}\left(\sqrt{x}+e^x\right)\right)'=\frac{\left(\sqrt{x}+e^x\right)'}{\cos^2\left(\sqrt{x}+e^x\right)}=\frac{1+2\sqrt{x}\,e^x}{2\sqrt{x}\cos^2\left(\sqrt{x}+e^x\right)}$$

$$r'(x)=\left(\left(x^2+1\right)^{\sin(x)}\right)'=\left(e^{\sin(x)\ell n\left(x^2+1\right)}\right)'=\left[\cos(x)\ell n\left(x^2+1\right)+\frac{2x}{x^2+1}\sin x\right]e^{\sin(x)\ell n}$$

## حل التمرين الثالث:

1. a إيجاد مجموعة التعريف للدالة: $f(x)=\operatorname{Arcsin}\left(\frac{x}{x+1}\right)$

$$D_f=\left\{x\in\mathbb{R}/x+1\neq 0,-1\leq\frac{x}{x+1}\leq 1\right\}$$

$$-1\leq\frac{x}{x+1}\leq 1\Leftrightarrow\begin{cases}\frac{x}{x+1}\leq 1\\ \frac{x}{x+1}\geq -1\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\frac{x}{x+1}-1\leq 0\\ \frac{x}{x+1}+1\geq 0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\frac{-1}{x+1}\leq 0\\ \frac{2x+1}{x+1}\geq 0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x+1\geq 0\\ (2x+1)(x+1)\geq 0\end{cases}$$

$$\Rightarrow(2x+1)\geq 0\Rightarrow x\geq-\frac{1}{2}\Rightarrow x\Rightarrow\left[-\frac{1}{2},+\infty\right)$$

إذن $D_f=\left[-\frac{1}{2},+\infty\right)$

$$f'(x)=\left(\operatorname{Arcsin}\left(\frac{x}{x+1}\right)\right)'=\frac{\left(\frac{x}{x+1}\right)'}{\sqrt{1-\left(\frac{x}{x+1}\right)^2}}=\frac{1}{(x+1)\sqrt{(x+1)-x^2}}$$

1. b إيجاد مجموعة التعريف للدالة $g$ و مشتقتها :

$$D_g=\left\{x\in\mathbb{R}/x\geq 0,\quad x+1\neq 0,\quad x>0,\quad x\neq 1\right\}=]0,1[\cup]1,+\infty[$$

$$g'(x)=\frac{\left(\frac{\sqrt{x}}{(x+1)\ell n(x)}\right)'}{1+\left[\frac{\sqrt{x}}{(x+1)\ell n(x)}\right]^2}=\frac{\frac{(x+1)\ell n(x)}{2\sqrt{x}}+\left[\frac{(x+1)}{x}+\ell n(x)\right]\sqrt{x}}{(x+1)^2(\ell n(x))^2+x}$$

2. حساب التكاملات

$$\int(2x+3)e^{(x^2+3x)}dx=\int(x^2+3x)'e^{x^2+3x}dx=e^{x^2+3x}+C$$

$$\int\frac{1}{x\ell n(x)}dx=\int\frac{\frac{1}{x}}{\ell n(x)}dx=\int\frac{(\ell n(x))'}{\ell n(x)}dx=\ell n(\ell n(x))+C$$

3. لدينا $\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1$

A. بوضع $\alpha=Arcsin(x)$ في العلاقة السابقة نجد:

$$(\sin(\operatorname{Arcsin}x))^2+(\cos(\operatorname{Arcsin}x))^2=1$$

$$x^2+\left(\cos\left(\mathrm{Arcsin}(x)\right)\right)^2=1 \Rightarrow \cos\left(\mathrm{Arcsin}\,x\right)=\sqrt{1-x^2}$$

B. بوضع $\alpha = Arccos(x)$ في العلاقة السابقة نجد:

$$\left(sin\left(\mathrm{Arccos}(x)\right)\right)^2+\left(\cos\left(\mathrm{Arccos}(x)\right)\right)^2=1$$

$$\left(sin\left(\mathrm{Arccos}(x)\right)\right)^2+x^2=1 \Rightarrow \sin\left(\mathrm{Arccos}(x)\right)=\sqrt{1-x^2}$$

## الموضوع الثالث

**التمرين الأول:** نعتبر المتتالية العددية المعرفة بالعلاقة التراجعية التالية:

$$\begin{cases} u_0=1 \\ u_{n+1}=\dfrac{1}{4}u_n+3, \quad \forall n\in\mathbb{N} \end{cases}$$

1. أحسب الحدود $u_1$ ، $u_2$
2. برهن أن $u_n \le 4, \quad \forall n\in\mathbb{N}$
3. أثبت أن المتتالية $(u_n)_n$ متزايدة.
4. استنتج أن $(u_n)_n$ متقاربة نحو نهاية يطلب تعيينها.
5. استنتج أن السلسلة $\sum_{n=0}^{n=+\infty} u_n$ متباعدة.

**التمرين الثاني:** نعتبر الدالتين التاليتين المعرفتين بـــ:

$$g(x)=\begin{cases} x^2 sin\left(\dfrac{5}{x^2}\right), & x<0, \\ 0, & x=0 \\ \dfrac{3\sin(2x)}{\ln(1+5x)}, & x>0 \end{cases} \qquad f(x)=\frac{\ln(2x+3)}{\sqrt{2x-4}}$$

1. أوجد مجموعة تعريف الدالة $f$ ثم أحسب الدالة المشتقة $f'(x)$ .
2. أدرس استمرارية الدالة g عند النقطة $x_0=0$
3. أحسب النهايتين التاليتين $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x-1}{5x^2-x-4}$ ، $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+\sin(2x))}{\ln(1+\sin(5x))}$

**التمرين الثالث:**

1. لتكن الدالة المعرفة بالعبارة: $f(x,y)=ye^x-(x+3)e^y+3x^2y$

   أوجد كل من $\dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y)$ ، $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y)$ ، $f(1,0)$ ، $f(0,0)$
2. أحسب التكاملات التالية :

$$\int (3x-1)e^{2x}dx \quad ، \quad \int \frac{6x}{\sqrt{3x^2+5}}dx \quad ، \quad \int \frac{\cos(\sqrt{x})}{2\sqrt{x}}dx$$

$$\int \frac{3x+1}{(x-1)(x+3)}dx \quad ، \quad \int (5x+2)\cos(x)dx$$

## تصحيح الموضوع الثالث

### حل التمرين الأول:

**1.** أحسب الحدود $u_1$ ، $u_2$

$$u_1 = \frac{1}{4}u_0 + 3 = \frac{1}{4}.1 + 3 = \frac{13}{4} \quad ، \quad u_2 = \frac{1}{4}u_1 + 3 = \frac{1}{4}.\frac{13}{4} + 3 = \frac{61}{16}$$

**2.** اثبات أن $u_n \le 4, \ \forall n \in \mathbb{N}$:

نضع $P(n): u_n \le 4$ . واضح أن $P(0)$ محققة لأن $u_0 = 1 \le 4$

نفرض أن $P(n)$ صحيحة أي $u_n \le 4$ ونبرهن أن $P(n+1)$ صحيحة.

لدينا: $u_{n+1} = \frac{1}{4}u_n + 3 \le \frac{1}{4}.4 + 3 = 1 + 4 \le 4$

ومنه $P(n+1)$ صحيحة. حسب مبدأ البرهان بالتراجع فإن $u_n \le 4, \quad \forall n \in \mathbb{N}$

**3.** اثبات أن المتتالية $(u_n)_n$ متزايدة:

$$u_{n+1} - u_n = \left(\frac{1}{4}u_n + 3\right) - u_n = \left(\frac{1}{4} - 1\right)u_n + 3 = \frac{-3}{4}u_n + 3$$

$$= \frac{3}{4}(-u_n) + 3 \ge \frac{3}{4}.(-4) + 3 = -3 + 3 = 0$$

إذن $u_{n+1} - u_n \ge 0$ ومنه $(u_n)$ متزايدة.

**4.** استنتاج أن $(u_n)_n$ متقاربة نحو نهاية يطلب تعيينها:

بما أن $(u_n)_n$ متزايدة ومحدودة من الأعلى فإن $(u_n)$ متقاربة نحو نهاية $\ell$ و حسب نظرية النقطة الصامدة فإن $\ell$ تحقق العلاقة $\ell = \frac{1}{4}\ell + 3$

$$\ell = \frac{1}{4}\ell + 3 \Rightarrow \ell - \frac{1}{4}\ell = 3 \Rightarrow \frac{3}{4}\ell = 3 \Rightarrow \ell = 4$$

إذن $(u_n)$ متتالية متقاربة نحو النهاية $\ell = 4$ $\left(\lim\limits_{n\to\infty} u_n = 4\right)$

**5.** بما أن $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 4 \neq 0$ إذن السلسلة $\sum\limits_{n=0}^{\infty} u_n$ متباعدة.

(الشرط اللازم لتقارب السلسلة $\sum_{n=0} u_n$ هو $\lim_{n\to+\infty} u_n = 0$).

## حل التمرين الثاني:

**1.** a مجموعة التعريف الدالة $f$:

$$D_f = \{x \in \mathbb{R} / 2x+3>0, \quad 2x-4>0\} = \left\{x \in \mathbb{R} / x > \frac{-3}{2}, \; x>2\right\} = ]2,+\infty[$$

**1.** b حساب المشتقة:

$$f'(x) = \frac{[\ln(2x+3)]'\sqrt{2x-4} - (\sqrt{2x-4})'\ln(2x+3)}{(\sqrt{2x-4})^2}$$

$$f'(x) = \frac{\frac{2}{2x+3}\sqrt{2x-4} - \frac{2}{2\sqrt{2x-4}}\ln(2x\,3)}{2x-4}$$

$$f'(x) = \frac{2\sqrt{2x-4}}{(2x+3)(2x-4)} - \frac{\ln(2x+3)}{(2x-4)\sqrt{2x-4}}$$

**2.** دراسة استمرارية الدالة g عند النقطة $x_0 = 0$

$$\lim_{\substack{> \\ x\to 0}} g(x) = \lim_{\substack{< \\ x\to 0}} g(x) = g(0) \Leftrightarrow x_0 = 0 \text{ مستمرة عند } g$$

$$g(0) = 0$$

$$\lim_{\substack{> \\ x\to 0}} g(x) = \lim_{\substack{> \\ x\to 0}} \frac{3\sin(2x)}{\ln(1+5x)} = \lim_{\substack{> \\ x\to 0}} \frac{6\cos(2x)}{\frac{5}{1+5x}} = \frac{6}{5}$$

$$\lim_{\substack{< \\ x\to 0}} g(x) = \lim_{\substack{< \\ x\to 0}} x^2 \sin\left(\frac{5}{x^2}\right) = ?$$

بما أن $-1 \le \sin\left(\frac{5}{x^2}\right) \le 1$ و ($x^2$ موجب) إذن $-x^2 \le x^2 \sin\left(\frac{5}{x^2}\right) \le x^2$

وبالتالي $\lim_{\substack{< \\ x\to 0}} x^2 \le \lim_{\substack{< \\ x\to 0}} x^2 \sin\left(\frac{5}{x^2}\right) \langle \lim_{\substack{< \\ x\to 0}} (-x^2)$ ومنه $\lim_{\substack{< \\ x\to 0}} x^2 \sin\left(\frac{5}{x^2}\right) = 0$

وبالتالي $\lim_{\substack{< \\ x\to 0}} g(x) = 0$ أي g غير مستمرة عند "0".

**3.** حساب النهايتين

$$\lim_{x\to 1} \frac{x-1}{5x^2 - x\,4} = \lim_{x\to 1} \frac{x-1}{(x-1)(5x+4)} = \lim_{x\to 1} \frac{1}{5x+4} = \frac{1}{9}$$

$$\ell im_{x\to 0}\frac{\ell n(1+\sin(2x))}{\ell n(1+\sin(5x))}=\ell im_{x\to 0}\frac{[\ell n(1+\sin(2x))]'}{[\ell n(1+\sin(5x))]'}=\ell im_{x\to 0}\frac{\frac{(1+\sin(2x))'}{1+\sin(2x)}}{\frac{(1+\sin(5x))'}{1+\sin(5x)}}$$

$$=\ell im_{x\to 0}\frac{\frac{2cos(2x)}{1+\sin(2x)}}{\frac{5\cos(5x)}{1+\sin(5x)}}=\frac{\frac{2}{1}}{\frac{5}{1}}=\frac{2}{5}$$

**حل التمرين الثالث:**

**1.** لدينا: $f(x,y)=ye^{x}-(x+3)e^{y}+3x^{2}y$

$$f(0,0)=0e^{0}-(0+3)e^{0}+30^{2}.0=-3$$

$$f(1,0)=0e^{1}-(1+3)e^{0}+31^{2}.0=-4$$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)=ye^{x}-e^{y}+6xy$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)=e^{x}-(x+3)e^{y}+3x^{2}$$

**2.** حساب التكاملات:

$$\int\frac{cos(\sqrt{x})}{2\sqrt{x}}dx=\int\frac{1}{2\sqrt{x}}\cos(\sqrt{x})dx=\int(\sqrt{x})'\cos(\sqrt{x})dx=\sin(\sqrt{x})+\lambda$$

$$\int\frac{6x}{\sqrt{3x^{2}+5}}dx=\int\frac{(3x^{2}+5)'}{\sqrt{3x^{2}+5}}=2\int\frac{f'}{2\sqrt{f}}dx=2\sqrt{f}+\lambda=2\sqrt{3x^{2}+5}+\lambda$$

لحساب $\int(3x-1)e^{2x}dx$ نستعمل التكامل بالتجزئة

$$\begin{cases}v(x)=3x-1\\ v'(x)=e^{2x}\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}u'(x)=3\\ v(x)=\frac{1}{2}e^{2x}\end{cases}$$

$$\int(3x-1)e^{2x}dx=\frac{1}{2}(3x-1)e^{2x}-\int\frac{3}{2}e^{2x}dx=\frac{1}{2}(3x-1)e^{2x}-\frac{3}{4}e^{2x}+\lambda$$

لحساب $\int(5x+2)\cos(x)dx$ نستعمل التكامل بالتجزئة

$$\begin{cases}u(x)=5x+2\\ v'(x)=\cos x\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}u'(x)=5\\ v(x)=\sin x\end{cases}$$

$$\int(5x+2)\cos(x)dx=(5x+2)\sin(x)-\int 5\sin(x)dx=(5x+2)\sin(x)+5\cos(x)+\lambda$$

لحساب $\int \frac{3x+1}{(x-1)(x+3)}dx$ نستعمل تفكيك الكسور

$$\frac{3x+1}{(x-1)(x+3)}=\frac{A}{(x-1)}+\frac{B}{(x+3)}=\frac{A(x+3)+B(x-1)}{(x-1)(x+3)}=\frac{(A+B)x+(3A-B)}{(x-1)(x+3)}$$

بالمطابقة نجد:

$\begin{cases}A+B=3\\3A-B=1\end{cases}$ ومنه $\begin{cases}A=1\\B=2\end{cases}$ وبالتالي:

$$\int \frac{3x+1}{(x-1)(x+3)}dx=\int \frac{1}{x-1}dx+\int \frac{2}{x+3}dx=\ell n(|x-1|)+2\ell n((x+3))+\lambda$$

## الموضوع الرابع

**التمرين الأول:** نعتبر المتتالية المعرفة كما يلي:

$$\begin{cases}u_0=5\\3u_{n+1}=u_n+4, \quad n\in\mathbb{N}\end{cases}$$

1. أحسب $u_1$ و $u_2$.
2. أثبت بالتراجع أن: $\forall n\geq 0: \quad u_n\geq 2$
3. أثبت أن $(u_n)_n$ متناقصة ثم استنتج أنها متقاربة نحو نهاية يطلب تعينها.
4. نضع

$$v_n=u_n-2,$$
$$S_n=v_0+v_1+......+v_n$$

أثبت أن $(v_n)_n$ متتالية هندسية مع تعيين أساسها وحدها الأول ثم أوجد عبارة كل من $v_n$ و $S_n$ بدلالة $n$.

**التمرين الثاني:**

1. أحسب النهايات التالية:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+2x)}{e^x-1} ،\ \lim_{x\to+\infty}\frac{5x^3+4x-1}{2x-3} ،\ \lim_{x\to 0}\frac{\sin(3x)}{x-\sin(2x)}$$

2. أحسب مشتقات الدوال

$$f(x)=\frac{\ln(2x)}{x+1} ،\ g(x)=e^{\sin x} ،\ h(x)=\ln(\sqrt{x})$$

**التمرين الثالث:**

**1**- أحسب مجموعة التعريف للدوال التالية:

$$f(x)=arsin(3x) ،\ g(x)=arctg(ln(x+1))$$

**2-** أحسب النهاية $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{g(x)}$

**التمرين الرابع:** أحسب التكاملات التالية:

$$\int xe^{x}\,dx \quad ، \quad \int (2x+3)e^{x^2+3x}\,dx \quad ، \quad \int \frac{e^{\frac{1}{x}}}{x^2}\,dx \quad ، \quad \int \frac{1}{2x\sqrt{\ln(x)}}\,dx$$

## تصحيح الموضوع الرابع

**حل التمرين الأول:**

$$\begin{cases} u_0 = 5 \\ 3u_{n+1} = u_n + 4 \end{cases}$$

1. حساب $u_1$ و $u_2$

$$u_{n+1} = \frac{u_n+4}{3} \Rightarrow \quad u_1 = \frac{u_0+4}{3} = \frac{5+4}{3} = 3 \;،\; u_2 = \frac{u_1+4}{3} = \frac{7}{3}$$

2. إثبات أن $\forall n: u_n \geq 2$: نضع $P(n):\ u_n \geq 2$

a. لدينا $u_0 = 5 \geq 2$ إذن الخاصية $P(0)$ محققة.

b. نفرض أن $P(n)$ محققة أي $u_n \geq 2$ ونبرهن صحة $P(n+1)$

$$\left.\begin{array}{l} u_{n+1} = \dfrac{u_n+4}{3} \\ u_n \geq 2 \end{array}\right\} \Rightarrow u_{n+1} \geq \frac{2+4}{3} = \frac{6}{3} = 2$$

إذن $P(n+1)$ محققة. وبالتالي حسب مبدأ البرهان بالتراجع فإن $P(n)$ صحيحة دوما ومنه

$$\forall n \in \mathbb{N}: \quad u_n \geq 2$$

3. إثبات أن $(u_n)_n$ متناقصة.

**الطريقة الأولى:** لدينا $u_{n+1} - u_n = \dfrac{u_n+4}{3} - u_n = \dfrac{u_n+4-3u_n}{3} = \dfrac{4-2u_n}{3}$

بما أن $u_n \geq 2$ إذن $-2u_n \leq -4$ ومنه $4-2u_n \leq 0$ إذن $(u_n)_n$ متناقصة.

**الطريقة الثانية:** نضع $f(x) = \dfrac{x+4}{3}$ إذن $f'(x) = \dfrac{1}{3}$ وبالتالي الدالة $f$ متزايدة.

ومن جهة أخرى لدينا $u_1 < u_0$ إذن حسب نظرية (في الدرس) فإن المتتالية $(u_n)_n$ متناقصة.

استنتاج أن $(u_n)_n$ متقاربة: بما أن $(u_n)_n$ متناقصة ومحدودة من الأسفل إذن $(u_n)_n$ متقاربة نحو نهاية $\ell$ و حسب نظرية النقطة الصامدة فإن النهاية $\ell$ تحقق $\ell = f(\ell)$

$$\ell = \frac{\ell+4}{3} \Rightarrow 3\ell = \ell + 4 \Rightarrow 2\ell = 4 \Rightarrow \ell = 2$$

إذن المتتالية $(u_n)_n$ متقاربة نحو 2 أي $\lim_{n\to+\infty} u_n = 2$

4. نضع $v_n = u_n - 2$

A/ إثبات أن $(v_n)_n$ متتالية هندسية: بما أن $u_n > 2$ إذن $v_n > 0$. حتى تكون $(v_n)_n$ متتالية هندسية يكفي أن تكون النسبة $\frac{v_{n+1}}{v_n}$ ثابتة.

$$\frac{v_{n+1}}{v_n} = \frac{u_{n+1}-2}{u_n-2} = \frac{\frac{u_n+4}{3}-2}{u_n-2} = \frac{\frac{u_n+4}{3}-6}{u_n-2} = \frac{(u_n-2)}{3(u_n-2)} = \frac{1}{3}$$

إذن $\frac{v_{n+1}}{v_n}$ ثابتة ومنه $(v_n)_n$ متتالية هندسية أساسها $q=\frac{1}{3}$ وحده الأول $v_0 = u_0 - 2 = 3$

B/ عبارة $v_n$ بدلالة $n$ : $v_n = v_0.q^n = 3.\left(\frac{1}{3}\right)^n = \frac{1}{3^{n-1}}$

C/ عبارة $S_n$ بدلالة $n$:

$$S_n = v_0 + v_1 + \ldots + v_n = v_0.\frac{1-q^{n+1}}{1-q} = 3.\frac{1-\left(\frac{1}{3}\right)^{n+1}}{1-\frac{1}{3}} = \frac{9}{2}\left(1-\frac{1}{3^{n+1}}\right)$$

## حل التمرين الثاني:

**1-** حساب النهايات

$$\lim_{x\to0}\frac{\ell n(1+2x)}{e^x-1} = \lim_{x\to0}\frac{(\ell n(1+2x))'}{(e^x-1)'} = \lim_{x\to0}\frac{\frac{2}{1+2x}}{e^x} = 2$$

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{5x^3+4x-1}{2x-3} = \lim_{x\to+\infty}\frac{5x^3}{2x} = \lim_{x\to+\infty}\frac{5x^2}{2} = +\infty$$

$$\lim_{x\to0}\frac{\sin(3x)}{x-\sin(2x)} = \lim_{x\to0}\frac{(\sin(3x))'}{(x-\sin(2x))'} = \lim_{x\to0}\frac{3\cos(3x)}{1-2\cos(2x)} = \frac{3}{1-2} = -3$$

**2-** حساب المشتقات:

$$f'(x) = \frac{(\ell n(2x))'(x+1)-(x+1)'\ell n(2x)}{(x+1)^2} = \frac{1}{x(x+1)} - \frac{\ell n(2x)}{(x+1)^2}$$

$$g'(x) = (\sin x)' e^{\sin x} = \cos x e^{\sin x}$$

$$h'(x) = \left(\ell n\left(\sqrt{x}\right)\right)' = \left(\ell n\left(x^{\frac{1}{2}}\right)\right)' = \frac{1}{2}(\ell n x)' = \frac{1}{2x}$$

## حل التمرين الثالث:

**1-** حساب مجموعة تعريف:

$$D_f=\{x\in\mathbb{R}/-1\le 3x\le 1\}=\left\{x\in\mathbb{R}/-\frac{1}{3}\le x\le\frac{1}{3}\right\}=\left[-\frac{1}{3},\frac{1}{3}\right]$$

$$D_g=\{x\in\mathbb{R}/x+1>0\}=\{x\in\mathbb{R}/x>-1\}=]-1,+\infty[$$

**2-** حساب النهاية $\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x)}{g(x)}$. لدينا $\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{0}{0}$ بتطبيق لويتال نجد

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to 0}\frac{f'(x)}{g'(x)}=\lim_{x\to 0}\frac{(Arcsin(3x))'}{(\text{Arctg}(\ell n(x+1)))'}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\dfrac{3}{\sqrt{1-(3x)^2}}}{\dfrac{(\ell n(x+1))'}{1+(\ell n(x+1))^2}}=\lim_{x\to 0}\frac{\dfrac{3}{\sqrt{1-(3x)^2}}}{\dfrac{1}{(x+1)\left(1+\ell n(x+1)^2\right)}}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{3}{\sqrt{1-(3x)^2}}\times(x+1)\left(1+\ell n(x+1)^2\right)=3$$

## حل التمرين الرابع: حساب التكاملات

**/1** $\left[\int\frac{f'(x)}{2\sqrt{f(x)}}dx=\sqrt{f(x)}+c\right]$

$$\int\frac{1}{2x\sqrt{\ell nx}}dx=\int\frac{\frac{1}{x}}{2\sqrt{\ell nx}}dx==\sqrt{\ell nx}+c$$

**/2** $\left[\int f'(x)e^{f(x)}dx=e^{f(x)}+c\right]$

$$\int\frac{e^{\frac{1}{x}}}{x^2}dx=\int\frac{1}{x^2}e^{\frac{1}{x}}dx=-\int\left(-\frac{1}{x^2}\right)e^{\frac{1}{x}}dx=e^{\frac{1}{x}}+c$$

**/3** $\left[\int f'(x)e^{f(x)}dx=e^{f(x)}+c\right]$

$$\int(2x+3)e^{x^2+3x}dx=e^{x^2+3x}+c$$

**/4** لحساب $\int xe^2dx$ نستعمل التكامل بالتجزئة

$$\begin{cases}f(x)=x\\ g'(x)=e^x\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}f'(x)=1\\ g(x)=e^x\end{cases}$$

إذن

$$\int xe^xdx=xe^x-\int 1.e^xdx=xe^x-e^x+c=(x-1)e^x+c$$

# الموضوع الخامس

**التمرين الأول:** نعتبر المتتاليات المعرفة كما يلي:

$$\begin{cases} u_0 = 0 \\ u_{n+1} = 1 + e^{u_n}, \quad n \in \mathbb{N} \end{cases}، \quad v_n = \frac{n+2}{2n+1}, \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad ، \quad w_n = \left(\frac{3}{5}\right)^n, \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

1. أوجد الدالة $f$ التي تحقق $u_{n+1} = f(u_n), \forall n \in \mathbb{N}$ ثم أثبت أن $f$ متزايدة؟ ماهي رتابة $(u_n)_n$ ؟
2. بحساب الفرق $v_{n+1} - v_n$ تأكد أن المتتالية $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ متناقصة؟
3. ما هو نمط المتتالية $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$؟ وما هي رتابتها؟ وما هي طبيعتها؟
4. بوضع $S_n = w_0 + w_1 + w_2 + \dots + w_n$ أوجد $\lim\limits_{n\to+\infty} S_n$ ثم استنتج طبيعة السلسلة $\sum_{n=0}^{n=+\infty} w_n$

**التمرين الثاني:**

**1-** أحسب النهايات التالية: $\lim\limits_{x\to 0} \frac{e^{2x} - \sqrt{1+x}}{3x - \sin(3x)}$ ، $\lim\limits_{x\to 0} \frac{e^{3x} - \cos(2x)}{\sin(2x)}$ ، $\lim\limits_{x\to+\infty} 3x^3 - 5\ln(x)$

**2-** ما هي قيمة $\alpha$ التي تجعل الدالة $f$ مستمرة عند الصفر حيث

$$f(x) = \begin{cases} 3xe^x, & x \geq 0 \\ \dfrac{\alpha x + \sin(x)}{1 - e^x}, & x < 0 \end{cases}$$

**3-** أحسب مشتقة الدول التالية:

$$t(x) = (x+1)^{5x^2} \text{ ، } h(x) = e^{3\sqrt{x+1}} \text{ ، } g(x) = \ln\left(5e^x + \sin(x) + 3\right)$$

**التمرين الثالث:**

**1-** لتكن الدالة المعطاة بـ $f(x) = \arcsin(5x - 2)$

أوجد مجموعة تعريف الدالة f $(D_f)$ ثم أحسب الدالة المشتقة $f'(x)$.

**2-** نعتبر الدالة ذات متغيرين معرفة بالعلاقة: $g(x,y) = x^3 + ye^x + x\sqrt{y} + 3$

أحسب كل من: $D_g$ , $g(0,0)$ ، $g(0,1)$ ، $g(1.0)$ ، $\frac{\partial g}{\partial x}(x,y)$ ، $\frac{\partial g}{\partial y}(x,y)$

**3-** أحسب التكاملات التالية:

$$\int \frac{e^x}{1+e^x} dx \qquad \int \frac{\cos(\sqrt{x})}{\sqrt{x}} dx \qquad \int \frac{\ln(x)}{x} dx$$

# تصحيح الموضوع الخامس

## حل التمرين الأول:

**1.** الدالة $f(x)=1+e^{x}$. بما أن $f'(x)=e^{x}>0$ إذن $f$ متزايدة.

وبما أن $u_1=1+e^{u_0}=1+e^{0}=2>u_0$ إذن المتتالية $(u_n)_n$ متزايدة.

**2.** لدينا:

$$v_{n+1}-v_n=\frac{(n+3)(2n+1)-(2n+3)(n+2)}{(2n+3)(n+1)}=\frac{-3}{(2n+3)(n+1)}<0$$

إذن المتتالية $(v_n)$ متناقصة.

**3.** المتتالية المعرفة بـــ $w_n=\left(\frac{3}{5}\right)^{n}$ هي متتالية هندسية أساسها $q=\frac{3}{5}$ لدينا $w_n>0,\ \forall n$.

بما أن $\frac{w_{n+1}}{w_n}=\frac{\left(\frac{3}{5}\right)^{n+1}}{\left(\frac{3}{5}\right)^{n}}=\frac{3}{5}>1$ فإن $w_{n+1}<w_n$ وبالتالي المتتالية $(w_n)$ متناقصة تماما.

و لدينا $\lim\limits_{n\to+\infty}u_n=\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\frac{3}{5}\right)^{n}=0$ إذن $(v_n)_n$ متقاربة نحو "0".

**4.** نضع $S_n=w_0+w_1+w_2+\ldots+w_n$ عندئذ

$$S_n=1+\frac{3}{5}+\left(\frac{3}{5}\right)^{2}+\ldots\left(\frac{3}{5}\right)^{n}=1.\frac{1-\left(\frac{3}{5}\right)^{n+1}}{1-\frac{3}{5}}=\frac{5}{2}\left(1-\left(\frac{3}{5}\right)^{n+1}\right)$$

وبما أن $\lim\limits_{n\to+\infty}S_n=\frac{5}{2}$ (النهاية موجودة ومنتهية) فإن السلسلة $\sum\limits_{n}w_n$ متقاربة.

## حل التمرين الثاني:

**1-** حساب النهايات:

$$\lim_{n\to+\infty}3x^{3}-5\ell n(x)=\lim_{n\to+\infty}x^{3}\left[3-5\frac{\ell n(x)}{x^{3}}\right]=+\infty$$

$$\lim_{n\to0}\frac{e^{3x}-\cos(2x)}{\sin(2x)}=\lim_{n\to0}\frac{3e^{3x}+2\sin(2x)}{2\cos(2x)}=\frac{3+0}{2}=\frac{3}{2}$$

$$\lim_{n\to0}\frac{e^{2x}-\sqrt{1+x}}{3x-\sin(x)}=\lim_{n\to0}\frac{2e^{2x}-\frac{1}{2\sqrt{1+x}}}{3-\cos(x)}=\frac{2-\frac{1}{2}}{3-1}=\frac{\frac{3}{2}}{2}=\frac{3}{4}$$

**2-** تعين $\alpha$ حتى تكون $f$ مستمرة عند " 0":

$$f \text{ مستمرة عند } "0" \Leftrightarrow \lim_{\substack{> \\ x\to 0}} f(x) = \lim_{\substack{< \\ x\to 0}} f(x) = f(0)$$

لدينا

$$f(0)=0, \qquad \lim_{\substack{> \\ x\to 0}} f(x) = \lim_{\substack{> \\ x\to 0}} 3xe^{x} = 0$$

$$\lim_{\substack{< \\ x\to 0}} f(x) = \lim_{\substack{< \\ x\to 0}} \frac{\alpha x + \sin(x)}{1-e^{x}} = \lim_{\substack{< \\ x\to 0}} \frac{\alpha + \cos x}{-e^{x}} = \frac{\alpha+1}{-1} = -\alpha-1$$

وبالتالي حتى تكون $f$ مستمرة عند "0" يجب أن يكون $-\alpha-1=0$ أي $\alpha=-1$

**3-** حساب المشتقات:

$$g'(x) = \left[\ell n\left(5e^{x} + \sin(x) + 3\right)\right]' = \frac{5e^{x} + \cos(x)}{5e^{x} + \sin(x) + 3}$$

$$h'(x) = \left(e^{3\sqrt{x}+1}\right)' = \frac{3}{2\sqrt{x}} e^{3\sqrt{x}+1}$$

$$t(x) = (x+1)^{5x^2} = e^{\ell n\left[(x+1)^{5x^2}\right]} = e^{5x^2 \ell n(x+1)}$$

ومنه:

$$t'(x) = \left[5x^2 \ell n(x+1)\right]' e^{5x^2\ell n(x+1)} = \left[10x\, \ell n(x+1) + \frac{5x^2}{x+1}\right] e^{5x^2 \ell n(x+1)}$$

## حل التمرين الثالث:

**1/** لدينا $f(x) = \text{Arcsin}(5x-2)$

$$D_f = \{x\in\mathbb{R} / -1 \le 5x-2 \le 1\} = \{x\in\mathbb{R} / 1\le 5x \le 3\} = \left\{x\in\mathbb{R} / \frac{1}{5} \le x \le \frac{3}{5}\right\} = \left[\frac{1}{5}, \frac{3}{5}\right]$$

$$f'(x) = \left(\text{Arcsin}(5x-2)\right)' = \frac{(5x-2)'}{\sqrt{1-(5x-2)^2}} = \frac{5}{\sqrt{1-(5x-2)^2}}$$

**2/** لدينا $g(x,y) = x^3 + y^{ex} + x\sqrt{y} + 3$

$$D_g = \left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 / y \ge 0\right\} = \mathbb{R}\times\mathbb{R}^{+}$$

$g(0,0)=3$ ، $g(0,1)=4$ ، $g(1,0)=1^3+3=4$

$$\frac{\alpha g}{\alpha x}(x,y) = 3x^2 + ye^{x} + \sqrt{y}, \qquad \frac{\alpha g}{\alpha y}(x,y) = e^{x} + \frac{x}{2\sqrt{y}}$$

**3/** حساب التكاملات:

$$\int \frac{\ell n(x)}{x}\mathrm{dx} = \int \frac{1}{x}\ell n(x)\mathrm{dx} = \int (\ell \mathrm{n}(\mathrm{x}))'\ell \mathrm{n}(\mathrm{x})\mathrm{dx} = \frac{1}{2}\left[\ell \mathrm{n}(\mathrm{x})\right]^2 + \lambda$$

$$\int \frac{\cos\left(\sqrt{x}\right)}{\sqrt{x}}\mathrm{dx} = 2\int \frac{1}{2\sqrt{x}}.\cos\left(\sqrt{x}\right)\mathrm{dx} = 2\int \left(\sqrt{x}\right)'\cos\left(\sqrt{x}\right)\mathrm{dx} = 2\sin\left(\sqrt{x}\right) + \lambda$$

$$\int \frac{e^{x}}{1+\mathrm{e}^{x}}\mathrm{dx} = \int \frac{\left(1+\mathrm{e}^{x}\right)'}{1+\mathrm{e}^{x}}.\mathrm{dx} = \ell \mathrm{n}\left(1+\mathrm{e}^{x}\right) + \lambda$$

## الموضوع السادس

**التمرين الأول:** نعتبر المتتالية العددية المعرفة بالعلاقة التراجعية التالية:

$$\begin{cases} u_0 = 5 \\ \mathrm{u}_{n+1} = \dfrac{\mathrm{u}_n + 4}{3} = \mathrm{f}\left(\mathrm{u}_n\right) \end{cases}$$

1. أثبت أن الدالة $f$ متزايدة على $]-\infty,+\infty[$
2. أحسب الحد $u_1$ ثم استنتج رتابة المتتالية $(u_n)$ .
3. أثبت بالتراجع أن $\forall n \geq 0:\ u_n \geq 2$ .
4. استنتج أن $(u_n)$ متقاربة نحو نهاية $\ell$ يطلب تعيينها.

**التمرين الثاني:**

1. أحسب مجموعة تعريف الدالة $f$ ثم أحسب $\lim\limits_{x\to 0} f(\mathrm{x})$ مع العلم أن $f(\mathrm{x}) = \dfrac{\ln(3\mathrm{x}+1)}{x}$
2. أدرس استمرارية الدالة التالية عند النقطة الصفر

$$\mathrm{g}(x) = \begin{cases} \dfrac{\mathrm{e}^{x}-1}{2\mathrm{x}}, & \mathrm{x} < 0 \\ \sqrt{\mathrm{x}^2+1}, & \mathrm{x} \geq 0 \end{cases}$$

**التمرين الثالث:**

**1-** لتكن الدالة المعرفة بالعبارة $f(\mathrm{x},\mathrm{y}) = \mathrm{ye}^{x} - (\mathrm{x}+1)\mathrm{e}^{x} + 2\mathrm{x}^2\mathrm{y}^3$

أوجد كل من $\dfrac{\partial f}{\partial \mathrm{y}}(\mathrm{x},\mathrm{y})$ ، $\dfrac{\partial f}{\partial x}(\mathrm{x},\mathrm{y})$ ، $f(1,0)$ ، $f(0,0)$

**2-** أحسب التكاملات التالية: $\displaystyle\int \frac{2x}{x^2+3}\mathrm{dx}$ ، $\displaystyle\int \left(x^2+3x+5\right)\mathrm{dx}$

# تصحيح الموضوع السادس

## حل التمرين الأول:

1. لدينا $f(x)=\frac{x+4}{3}\Rightarrow f'(x)=\frac{1}{3}>0,\forall x\in\mathbb{R}$ إذن $f$ متزايدة على $]-\infty,+\infty[$

2. بالتعويض نجد $u_1=\frac{u_0+4}{3}=\frac{5+4}{3}=3$.

بما أن $f$ متزايدة و $u_1<u_0$ إذن $(u_n)$ متناقصة.

3. نضع $P(n):\quad u_n\geq 2$. بما ان $u_0=5\geq 2$ إذن $P(0)$ صحيحة.

نفرض أن $P(n)$ صحيحة ونبرهن صحة $P(n+1)$

$$u_n\geq 2\Rightarrow u_n+4\geq 6\Rightarrow \frac{u_n+4}{3}\geq 2$$

ومنه $u_{n+1}\geq 2$ وبالتالي $P(n+1)$ صحيحة. حسب مبدأ البرهان بالتراجع $P(n)$ صحيحة دوما.

4. بما أن $(u_n)$ متناقصة ومحدودة من الأسفل إذن $(u_n)$ متقاربة نحو نهاية $\ell$ مع $\ell$ تحقق $f(\ell)=\ell$ .

$$f(\ell)=\ell\Leftrightarrow\frac{\ell+4}{3}=\ell\Leftrightarrow\ell+4=3\ell\Leftrightarrow 2\ell=4\Leftrightarrow\ell=2$$

ومنه $\lim\limits_{n\to+\infty}u_n=2$

## حل التمرين الثاني

**a−1**

$$D_f=\{x\in\mathbb{R}/3x+1>0\ \ x\neq 0\}=\left\{\ \in\mathbb{R}/\ \frac{-1}{3}<x\neq 0\right\}$$

$$D_f=\left]-\frac{1}{3}+0\right[\cup\,]0,+\infty[$$

**b−1**

$$\lim_{x\to0}g(x)=\lim_{x\to0}\frac{\ell n(3x+1)}{x}=\lim_{x\to0}=\frac{\frac{3}{3x+1}}{1}=3$$

**2−** لدينا

$$g(0)=0,\quad \lim_{\substack{x\to0\\>}}g(x)=\lim_{\substack{x\to0\\>}}\sqrt{x^2+1}=1,\quad \lim_{\substack{x\to0\\<}}g(x)=\lim_{\substack{x\to0\\<}}\frac{e^x-1}{2x}=\lim_{\substack{x\to0\\<}}\frac{e^x}{2x}=\frac{1}{2}$$

أي $\lim\limits_{\substack{x\to0\\<}}g(x)\neq\lim\limits_{\substack{x\to0\\>}}g(x)$ إذن $g$ غير مستمرة عند "0".

## حل التمرين الثالث

**1-** لدينا: $f\left(\mathrm{x},\mathrm{y}\right)=\mathrm{ye}^{\mathrm{x}}-\left(\mathrm{x}+1\right)\mathrm{e}^{\mathrm{x}}+2\mathrm{x}^{2}\mathrm{y}^{3}$

$$f\left(0,0\right)=0.e^{0}-\left(0+1\right)\mathrm{e}^{0}+20^{2}.0^{3}=-1$$

$$f\left(1,0\right)=0.e^{1}-\left(1+1\right)\mathrm{e}^{0}+2.1^{2}.0^{3}=-2$$

$$\frac{\partial f}{\partial x}\left(\mathrm{x},\mathrm{y}\right)=ye^{x}-\mathrm{e}^{\mathrm{y}}+4x\mathrm{y}^{3}$$

$$\frac{\partial f}{\partial \mathrm{y}}\left(\mathrm{x},\mathrm{y}\right)=e^{\mathrm{x}}-\left(\mathrm{x}+1\right)\mathrm{e}^{\mathrm{y}}+6\mathrm{x}^{2}\mathrm{y}^{2}$$

**2-** حساب التكاملات:

$$\int\frac{2x}{x^{2}+3}\mathrm{d}x=\int\frac{\left(x^{2}+3\right)'}{x^{2}+3}\mathrm{d}x=\ell n\left(x^{2}+3\right)+\mathrm{C}$$

$$\int\left(x^{2}+3x+5\right)\mathrm{d}x=\frac{1}{3}x^{2}+\frac{3}{2}x^{2}+5x+\mathrm{c}$$

# مواضيع امتحانات مقترحة

## الموضوع الأول

**تمرين 1:** لتكن $(u_n)$ متتالية معرفة بـــ: $u_0=-6$ ومن أجل كل عدد طبيعي $n\geq 1$

$$u_n=\frac{u_{n-1}-4}{1-u_{n-1}}$$

1.1 برهن أن النهايتين الوحيدتين الممكنتين لـــ: $u_n$ عندما تؤول $n$ نحو ما لانهاية هما $-2$ و$+2$.

2.1 نضع: $v_n=\dfrac{u_n-2}{u_n+2}$ برهن عندئذ أن: $u_n=\dfrac{2(1+v_n)}{1-v_n}$

**تمرين 2:**

1.2 أوجد نهاية ما يلي: $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt{x^2+3x}-2}{x-1}$

2.2 باستعمال تعريف المشتقة، أدرس قابلية الاشتقاق الدالة $f(x)=|x-1|$ عند النقطة $x_0=1$

**تمرين 3:**

كامل ما يلي: $J=\int x.\mathrm{Ln}(x).dx$ $\qquad$ $I=\int x.\mathrm{Arctg}(x).dx$

**التمرين 4:** عين مجموعة تعريف الدوال التالية:

a) $f(x)=\dfrac{x^2+4}{x^3+x^2+2x}$ $\qquad$ b) $g(x)=\sqrt{x(x-1)}$

c) $h(x)=\dfrac{1}{1-|x|}$ $\qquad$ d) $t(x)=\sqrt{6-|x-2|}$

## الموضوع الثاني

**تمرين 1:** لتكن المتتاليات العدديتين $(u_n)$ و $(v_n)$ بحيث:

$$\begin{cases} u_n=\sum_{m=0}^{n}\dfrac{1}{m!} \\ v_n=\quad u_n+\dfrac{1}{n!}\end{cases}$$

برهن أن المتتاليتين $(u_n)$ و $(v_n)$ متجاورتان.

**تمرين 2:**

(1.2) أوجد النهايتين التاليتين: $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(1+\dfrac{19}{x}\right)^x$ ، $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1+x^2}}{x}$

(2.2) من أجل أية قيمة لـــ $\beta$ تكون الدالة $f$ التالية مستمرة على $\mathbb{R}$ :

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{x^3-8}{x-2} & ; x\neq 2\\ \beta\ ; & x=2\end{cases}$$

(3.2) أحسب مشتقتي الدالتين: $f(x)=tg\left(1+x^3\right)$ $g(x)=e^{-\left(x^2+x+\ln x\right)}$

**تمرين 3:**

(1.3) عين مجال تعريف الدالة التالية ثم أحسب مشتقتها: $f(x)=\mathrm{Arc}\cos\left(\dfrac{x-2}{3}\right)$

(2.3) أحسب المشتقات الجزئية للدالة: $f(x,y)=e^y x^2 y$

(3.3) كامل ما يلي:

$$I=\int \frac{5x}{x^2+7}.dx \quad ، \quad I=\int e^x \sin x .dx$$

**تمرين 4:**

كيف نُعرف $f(a)$ بحيث تكون $f$ مستمرة عند $a$ .

$$a)\ f(x)=\frac{x^2-1}{x-1},\quad a=1 \qquad\qquad b)\ f(x)=\frac{\cos^2 x-1}{\sin(x)},\quad a=0$$

## الموضوع الثالث

**تمرين 1:**

نعرف المتتالية $(U_n)_{n\geq 0}$ بواسطة علاقة التراجع: $u_{n+1}=u_n^2+u_n$ من أجل كل عدد طبيعي $n$ وليكن حدها الأول $u_0\in\mathbb{R}$ .

1.1 أدرس رتابة المتتالية $(U_n)_{n\geq 0}$.

2.1 عين نهايتي المتتاليتين التاليتين، إن وجدت: $u_n=1+\dfrac{1}{2^n}$ ، $v_n=\dfrac{2n}{n+1}$

**تمرين 2:**

1.2 لتكن: $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ معرفة بـــ:

$$f(x)=\begin{cases} x+\dfrac{\sqrt{x^2}}{x}, & x\neq 0\\ 0\ , & x=0\end{cases}$$

عين مجموعة النقاط التي تكون فيها الدالة مستمرة.

2.2 لتكن $f(x,y)=2xy+y^3$ ، أوجد $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ ، $\dfrac{\partial f}{\partial y}$ ، $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial y}$

3.2 كامل ما يلي: $I=\displaystyle\int_0^2 \frac{dx}{x-1}$ ، $J=\displaystyle\int \frac{2x+1}{\sqrt{x^2+x+1}}dx$

**التمرين 3:** أحسب النهايات التالية:

1) $\lim\limits_{x\to-\infty} \sqrt{x^2+x+1}-ax$

2) $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\sqrt{x^2+1}-x+2}{x+3}$

3) $\lim\limits_{x\to2} \dfrac{x-2}{x^2-4}$

4) $\lim\limits_{x\to1} \dfrac{x^{\frac{1}{3}}-1}{x-1}$

5) $\lim\limits_{x\to0} \dfrac{1}{1+e^x}$

5) $\lim\limits_{x\to0} \left(\sqrt{\dfrac{1}{x^2}+\dfrac{1}{x}+1}-\sqrt{\dfrac{1}{x^2}+\dfrac{1}{x}-1}\right)$

## الموضوع الرابع

**تمرين 1:**

لتكن المتتالية التراجعية المعرفة بـــ: $\begin{cases} u_0=0 \\ u_{n+1}=\sqrt{u_n+6} \end{cases}$

(1.1) برهن أن: $\forall n\in\mathbb{N}:\quad 0\le u_n<3$

(2.1) أثبت أن المتتالية التراجعية متزايدة تماما ثم استنتج طبيعتها.

(3.1) أحسب النهاية $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$ .

**تمرين 2:**

لتكن الدالة $f$ المعرفة كالتالي: $f(x)=\begin{cases} x^3(1+x); & x>0 \\ xe^x; & x\le 0 \end{cases}$

(2.1) أدرس استمرارية الدالة $f$ عند "0".

(2.2) أدرس قابلية اشتقاق $f$ عند "0".

(3.2) أحسب مشتقة الدالة $g(x)=(x+1)^x$

**تمرين 3:**

كامل ما يلي: $I=\int\dfrac{dx}{(x+1)\mathrm{Ln}(x+1)}$ ، $J=\int \sin x\,.e^{2x}.dx$

**تمرين 4:** أحسب مشتقات الدوال التالية:

1) $f(x)=\dfrac{\cos(x)}{1+\cos^2(x)}$

2) $g(x)=\sqrt[x]{x}$

3) $h(x)=3^x\sqrt{x^2+1}.\cos^2(x)$

4) $t(x)=x^{\sin(x)}$

# الموضوع الخامس

## التمرين الأول:

لتكن المتتالية التراجعية المعرفة كما يلي:

$$\begin{cases} u_0 = 0 \\ u_{n+1} = \sqrt{\dfrac{1+u_n}{2}} = f(u_n) \end{cases}$$

1- برهن أن الدالة $f$ متزايدة تماما.

2- برهن أن: $\forall n \in \mathbb{N}: \quad 0 \le u_n < 1$

3- استنتج أن المتتالية $(u_n)$ متزايدة تماما. استنتج طبيعتها ثم أحسب: $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n$

4- أدرس طبيعة السلسلتين: $\sum_{n\ge 0} u_n$ و $\sum_{n\ge 0} \left(\dfrac{1}{4}\right)^n$

## التمرين الثاني:

لتكن الدالة $f$ المعرفة كما يلي:

$$f(x) = \begin{cases} 3e^{-x^2} & x<0 \\ \sqrt{1+x^2}+2 & x \ge 0 \end{cases}$$

1- أدرس استمرارية الدالة $f$ عند $x_0 = 0$ .

2- أحسب النهايات التالية : $(1) \quad \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{e^x - 1}{5\ln(1+x)} \qquad (2) \quad \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{x}{e^x}\cos(x^3+1)$

3- أحسب مشتق الدوال التالية: $h(x) = (x^3+2x+1)^x \qquad g(x) = \sin(e^x + 5x^2)$

## التمرين الثالث:

1- عين مجموعة تعريف الدالة g ثم أحسب الدالة المشتقة $g'(x)$ مع: $g(x) = \text{Arctg}(\sqrt{x+3})$

ثم أحسب $g(-2)$ .

2- أحسب المشتقات الجزئية من الرتبة 1 للدالة: $f(x,y) = e^{2x+y^2} + \ln(3x+5y) + 4y$

3- أحسب التكاملات التالية:

$$(1) \quad \int \frac{4x^3+6x}{x^4+3x^2+1}dx \quad ،(2) \quad \int \frac{(Arctgx)^2}{\sqrt{1-x^2}}dx \quad ، \qquad (3) \quad \int (x+3)e^x dx$$

## الموضوع السادس

### التمرين 1

لتكن المتتالية التراجعية $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ المعرفة بـــ:

$$\begin{cases} u_0 = 2 \\ u_{n+1} = -\frac{1}{2}u_n^2 + 3u_n - \frac{3}{2} \end{cases}$$

ونعرف من أجل كل قيم $n$ في $\mathbb{N}$ المتتالية $(V_n)$ بالعبارة التالية: $v_n = u_n - 3$

1- أحسب قيمة $u_1$ و $u_2$ .

2- بين أن $v_{n+1} = -\frac{1}{2}v_n^2$ .

3- برهن بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي $n$ ، $-1 \le v_n \le 0$ .

4- أثبت أن من أجل كل عدد طبيعي $n$: $v_{n+1} - v_n = -v_n\left(\frac{1}{2}v_n + 1\right)$ ثم استنتج اتجاه تغير $(v_n)$

5- ما هي طبيعة $(v_n)$؟ في حالة ما إذا كانت متقاربة، ما هي نهايتها ونهاية $(u_n)$ .

### التمرين 2

**I.** لتكن الدالة $f$ المعرفة على $\mathbb{R}$ كما يلي:

$$f(x) = \begin{cases} \sqrt{x}, & x>0 \\ ax^2 + bx + 1, & x \le 0 \end{cases}$$

عين $a$ و $b$ حتى تكون $f$ مستمرة وتقبل الاشتقاق على $\mathbb{R}$.

**II.** أحسب ما يلي:

$$\int (x^2 + 3x + 1)\ln(x)dx \qquad\qquad \int_1^2 \frac{x-5}{x}dx$$

**III.** أحسب المشتقات الجزئية الأولى والثانية للدوال التالية:

$$g(x,y) = e^{x\ln(y)} \qquad\qquad f(x,y) = x^3 + xy^3 + 1$$

## الموضوع السابع

**التمرين الأول** $(u_n)_n$ متتالية عددية معرفة بحدها العام: $\forall n\in\mathbb{N}: \quad u_n = \frac{6}{(2n+1)(2n+3)}$

1- عين قيمتي العددين a و b بحيث يكون: $\forall n\in\mathbb{N}: \quad u_n = \frac{a}{2n+1} + \frac{b}{2n+3}$

2- استنتج صيغة بسيطة للمجموع: $S_n = u_0 + u_1 + ... + u_n$ ثم أحسب $\lim_{n\to+\infty} S_n$

3- عين طبيعة السلسلة ذات الحد العام $u_n = \frac{n^3}{n!}$

### التمرين الثاني

لتكن الدالة $f$ المعرفة كما يلي:

$$f(\mathrm{n})=\begin{cases}4\mathrm{e}^{x}, & x<0\\ \sqrt{x^2+1}+\mathrm{a}, & x\geq 0\end{cases}$$

1- عين قيمة a حتى تكون الدالة $f$ مستمرة عند $x_0=0$ .

2- أحسب مشتق الدوال التالية:

$$1)\ f(x)=\mathrm{e}^{1+x^5}+\mathrm{Arcsin}(x) \quad ، \quad 2)\ g(x)=\ell\mathrm{n}\left(\ell\mathrm{n}\left(2x+x\sin(x)\right)\right)$$

3- أحسب النهايات التالية:

$$1)\ \lim_{x\to 0}\frac{e^x-\cos x}{4x} \quad ، \quad 2)\ \lim_{x\to+\infty}\sqrt{x^2+3}-x$$

### التمرين الثالث

أحسب التكاملات التالية:

$$1)\ I=\int\frac{x^4-x^3+1}{x-1}\mathrm{d}x \quad ، \quad 2)\ J=\int\frac{2x+3}{x(x-1)(x+2)}\mathrm{d}x \quad ، \quad 3)\ \mathrm{k}=\int\frac{\sin x}{1+\sin(x)}\mathrm{d}x$$

## الموضوع الثامن

**التمرين الأول:** لتكن المتتالية التراجعية المعرفة كما يلي:

$$\begin{cases}u_0=0\\ \mathrm{u}_{\mathrm{n}+1}=\sqrt{3\mathrm{u}_\mathrm{n}+4}=\mathrm{f}(\mathrm{u}_\mathrm{n})\end{cases}$$

1- برهن أن الدالة $f$ متزايدة تماما.

2- برهن أن: $\forall x\in\mathbb{N}:\ \mathrm{u}_\mathrm{n}<4$

3- استنتج أن المتتالية $(\mathrm{u}_\mathrm{n})_n$ متزايدة تماما.

4- استنتج أن المتتالية $(\mathrm{u}_\mathrm{n})_n$ متقاربة نحو نهاية يُطلب تعيينها.

### التمرين الثاني

**1-** عين القيمة $\alpha$ حتى تكون الدالة التالية مستمرة عند $x_0=0$

$$\mathrm{f}(x)=\begin{cases}\dfrac{\sin(x)}{2x}, & x<0\\ (x+\alpha)^2, & x\geq 0\end{cases}$$

**2-** عين مجموعة التعريف للدوال التالية:

$$f(x)=\mathrm{Arcsin}\left(\frac{1-x}{4}\right) \ ، g(x)=\mathrm{Arctg}\left(\sqrt{x^2+2}\right) \ ، \ h(x)=\ell\mathrm{n}\left(\frac{2x+1}{3x+3}\right)$$

## التمرين الثالث

**1**- نعتبر الدالة $f$ ذات متغيريين $x$ و $y$ والمعرفة بالشكل التالي: $f(x,y)=\ell n(x+y+5)$

أحسب كل من $\frac{\partial f}{\partial x}$ ، $\frac{\partial f}{\partial y}$ ، $\frac{\partial^2 f}{\partial x \gamma y}$، $\frac{\partial^2 f}{\partial y \gamma x}$، $\frac{\partial^2 f}{\partial^2 x}$، $\frac{\partial^2 f}{\partial^2 y}$

**2**- أحسب التكاملات التالية:

$$1)\ \int \frac{3dx}{5x-1}، \quad 2)\ \int \sqrt{1-x^2}dx \ ، \quad 3)\ \int x\sin(2x)dx \ ، \quad 4)\ \int x\ell n(x)dx$$

# فهرس المواضيع

**مقدمة:** ........ 1
**الفصل الأول: مبادئ نظرية المجموعات** ........ 2
**1- المجموعات** ........ 2
**2-المجموعات والتطبيقات** ........ 6
**الفصل الثاني: المتتاليات العددية والسلاسل العددية** ........ 13
**1- المتتاليات العددية** ........ 13
**2- السلاسل العددية:** ........ 27
**الفصل الثالث: الدوال العددية لمتغير حقيقي** ........ 32
**1-عموميات** ........ 32
**2- النهايات** ........ 36
**3- الاستمرار** ........ 44
**4- الاشتقاق** ........ 48
**الفصل الرابع: الدالة الأسية واللوغارتمية والدوال المثلثية والمثلثية العكسية** ........ 57
**1− الدالة الأسية والدالة اللوغارتمية** ........ 57
**2- الدوال المثلثية والمثلثية العكسية** ........ 59
**الفصل الخامس: الدوال العددية ذات عدة متغيرات حقيقية** ........ 73
**1- تعاريف** ........ 73
**2- المشتقات الجزئية** ........ 76
**الفصل السادس: الدوال الأصلية و حساب التكاملات** ........ 79
**1-تعاريف** ........ 79
**2- التكامل المحدود** ........ 80
**3-التكامل غير المحدود** ........ 80
**4-بعض الطرق لحساب التكاملات:** ........ 81
**مواضيع امتحانات محلولة** ........ 94