

جامعة الجزائر 3

كلية العلوم الاقتصادية والعلوم التجارية وعلوم التسيير

قسم العلوم الاقتصادية

مطبوعة بيداغوجية موجهة لطلبة السنة الأولى ماستر

تخصص: اقتصاد نقدي ومالي

بعنوان:

دروس وتمارين محلولة في مقياس تحليل السلاسل الزمنية

إعداد الأستاذة: فتح الله مسعودة

أستاذة محاضرة أ

السنة الجامعية

2026-2025

إعداد الأستاذة فتح الله مسعودة

فهرس المحتويات:

03.....	الفصل الأول: عموميات حول السلاسل الزمنية وتقدير مركباتها
03.....	1. مفهوم السلسلة الزمنية:
06.....	2. أنواع السلاسل الزمنية والهدف من دراستها:
07.....	3. مركبات السلاسل الزمنية، تعريفها، قياسها وطرق الكشف عنها:
24.....	4. اختبارات الكشف عن مركبة الاتجاه العام والمركبة الموسمية:
37.....	5. سلسلة تمارين الفصل الأول:
39.....	6. حلول تمارين الفصل الأول:
57.....	الفصل الثاني: الاستقرار، دالة الارتباط الذاتي والجزئي
57.....	1. مفهوم الاستقرار وطرق اختبارها:
67.....	2. دالة الارتباط الذاتي (المفهوم، الخصائص والاهمية، التقدير):
73.....	3. دالة الارتباط الذاتي الجزئي (المفهوم، الخصائص والاهمية، التقدير، نظام المعادلات ليول والكر):
84.....	4. سلسلة تمارين الفصل الثاني:
85.....	5. حلول تمارين الفصل الثاني:
91.....	الفصل الثالث: نماذج التنبؤ باستخدام السلاسل الزمنية
91.....	1. عرض مختصر لمنهجية بوكس-جينكينز (BOX-JENKINS):
94.....	2. النماذج الخطية للسلاسل الزمنية:
105.....	3. نماذج التمهيد الأسّي التنبؤ بالسلاسل الزمنية:
113.....	قائمة المراجع:

يُعتبر تحليل السلاسل الزمنية أحد أهم الأدوات الكمية الأساسية التي يركز عليها الاقتصاد التطبيقي، إن دراسة هذا المقياس تُعتبر من الموضوعات الهامة للطلبة في ميدان العلوم الاقتصادية، خاصة في مجال تحليل البيانات المالية، لما يتميز به هذا الأخير من مؤشرات تتعلق أو تتغير مباشرة بدلالة الزمن.

ويمكن القول بأن تحليل السلاسل الزمنية هو علم له تاريخ قديم، ويعرف في كل مرة تطورات هائلة ومُستحدثة، أما عن جذور هذا العلم فتعود تاريخيا إلى العالم الرياضي (Fourier, 1807) والذي يعتبر أول من تطرق إلى دراسة السلاسل الزمنية باستعمال دوال الجيب وجيب التمام.

أما عن الطلبة المستهدفين، فهم طلبة سنة أولى ماستر تخصص اقتصاد نقدي ومالي، أي تكوينهم كان ضمن شعبة العلوم الاقتصادية، بالتالي هم على دراية تامة بضرورة دراسة مثل هكذا مقاييس، والتي تعتمد على الطرق الكمية، وليست نظرية بحتة، وهذا لطبيعة المجال الذي يتخصصون فيه ألا وهو الجانب النقدي والمالي، والذي لا يخفى على أي طالب علم بأن معظم مؤشرات هذا المجال هي عبارة عن سلاسل زمنية نذكر منها: معدل الفائدة، مجموع الإيداعات لدى بنك معين، أسعار التداول في سوق البورصة...إلخ.

ومن أجل الالمام بالبرنامج المقرر دراسته كما جاء في البرنامج الرسمي المعمول به، تم تقسيم هذه المطبوعة إلى ثلاث فصول تتمثل فيما يلي:

الفصل الأول: عموميات حول السلاسل الزمنية وتقدير مركباتها

الفصل الثاني: الاستقرار، دالة الارتباط الذاتي والجزئي

المفصل الثالث: نماذج التنبؤ باستخدام السلاسل الزمنية

الفصل الأول:

عموميات حول السلاسل الزمنية

وتقدير مركباتها

الفصل الأول: عموميات حول السلاسل الزمنية وتقدير مركباتها

البيانات الزمنية يتم الحصول عليها من خلال رصد البيانات أو القيم التي تعبر عن الظاهرة أو المتغير موضع الدراسة على فترات زمنية متتالية بهدف تحقيق عدة أهداف أهمها اكتشاف نمط التطور التاريخي للظاهرة أو المتغير موضع الدراسة، وكيفية الاستفادة من هذا النمط في التنبؤ بهذه الظاهرة في المستقبل، ويُطلق على البيانات الزمنية "السلاسل الزمنية" وهي الموضوع الرئيسي لهذا المقياس.

1. مفهوم السلسلة الزمنية:

البيانات الزمنية يتم الحصول عليها من خلال رصد البيانات أو القيم التي تعبر عن الظاهرة أو المتغير موضع الدراسة على فترات زمنية متتالية بهدف تحقيق عدة أهداف أهمها اكتشاف نمط التطور التاريخي للظاهرة أو المتغير موضع الدراسة، وكيفية الاستفادة من هذا النمط في التنبؤ بهذه الظاهرة في المستقبل، ويُطلق على البيانات الزمنية "السلاسل الزمنية" وهي الموضوع الرئيسي لهذا المقياس.

تعريف:

السلسلة الزمنية هي مجموعة من المشاهدات أو القياسات التي تُؤخذ على إحدى الظواهر (الاقتصادية- الاجتماعية- الطبية- الطبيعية-....) على فترات زمنية متتالية، عادة ما تكون متساوية الطول. من خلال هذا التعريف نستنتج بأن السلاسل الزمنية لا تقتصر على مجال واحد، بل يُمكن رصدها في شتى المجالات:

- في الاقتصاد، يُمكن رصد بيانات الدخل السنوي، أو عدد العاطلين عن العمل، أو الناتج الداخلي الخام...إلخ.

- في العلوم الاجتماعية، يُمكن رصد تطور أعداد الطلبة في الأطوار التعليمية المختلفة، رصد عدد حوادث المرور الأسبوعية...إلخ.

- في مجال الطب كذلك يُمكن رصد تطور الأمراض المختلفة، رصد السلاسل الزمنية الخاصة برسم القلب أو الدماغ... إلخ.

- في مجال الأحوال الجوية، يُمكن رصد كمية الأمطار المتساقطة أسبوعياً أو شهرياً أو سنوياً... إلخ.

نعلم بأن هناك ثلاث أنواع من البيانات، بيانات تجريبية، بيانات الحصر (المسح، أو المعاينة) وبيانات السلاسل الزمنية. وتختلف هذه الأخيرة عن سابقتها في ثلاث نقاط أساسية نذكرها:

الفصل الثاني: الاستقرارية، حالة الارتباط الذاتي والارتباط الذاتي الجزئي

1. تؤخذ بيانات السلسلة الزمنية على فترة زمنية طويلة نسبيا، يُعتقد أنها تؤثر على الظاهرة أو المتغير موضع الدراسة، بينما تؤخذ البيانات التجريبية أو بيانات الحصر عند نقطة معينة أو على الأكثر في فترة قصيرة يُعتقد أنها لا تؤثر بشكل معنوي على الظاهرة أو المتغير موضع الدراسة، وعادة ما تسمى بالبيانات المقطعية (cross sectional data).

2. يتم دراسة السلسلة الزمنية عادة بمعزل عن العوامل الأخرى من غير الزمن التي قد تؤثر عليها وعن الظواهر الأخرى التي قد ترتبط معها في شكل علاقات إحصائية.

3. عادة ما تكون بيانات أو مشاهدات السلسلة الزمنية مرتبطة ببعضها البعض، ويأخذ الارتباط بين هذه المشاهدات أشكالا وأنماطا عديدة تختلف باختلاف طبيعة الظاهرة.

ولهذا فإن ترتيب المشاهدات في السلاسل الزمنية يكتسي أهمية خاصة، ولذلك فإن الأساليب التي تُستخدم في تحليل البيانات التجريبية أو بيانات الحصر تختلف اختلافا كبيرا عن تلك التي تُستخدم في تحليل السلاسل الزمنية.

يندرج تحليل السلاسل الزمنية ضمن مجال منفرد للإحصاء والخاص بتحليل البيانات الزمنية. وقد عرف مجال السلاسل الزمنية تطورا هائلا في العقود الثلاثة الأخيرة من القرن العشرين بسبب المنهجية الحديثة التي قدمها بوكس G.E.Box و جينكنز G.M.Jenkin سنة 1976، و التي يمكن اعتبارها بحق البداية الحقيقية للتحليل الحديث للسلاسل الزمنية، والسبب الحقيقي وراء القفزات العلمية الهائلة التي حدثت في هذا المجال.

وتُعرض السلسلة الزمنية عادة في صورة جدول أو خط أو منحنى بياني يُعرف بالخط التاريخي أو المنحنى الزمني time series plot كما في الأمثلة الآتية:

مثال (1-1):

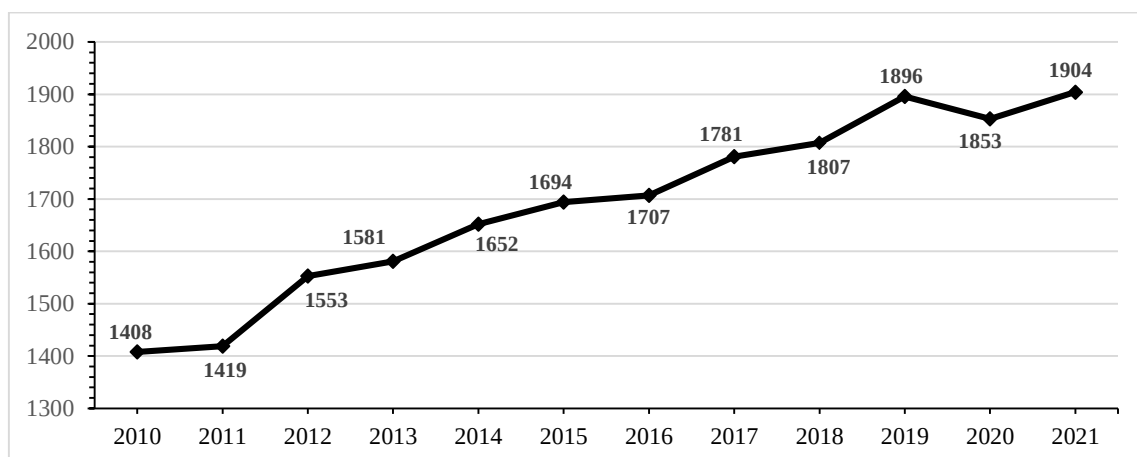
يوضح الجدول الآتي حجم الإنتاج السنوي للكهرباء في الجزائر خلال الفترة 2010-2021.

الجدول رقم 1: بيانات كمية إنتاج الكهرباء في الجزائر خلال الفترة 2010-2021

السنة	2010	2011	2012	2013	2014	2015	2016	2017	2018	2019	2020	2021
كمية الإنتاج	1408	1419	1553	1581	1652	1694	1707	1781	1807	1896	1853	1904

يمكن تمثيل هذه البيانات في شكل منحنى بياني (تاريخي) كما هو موضح في الشكل رقم 1-1 الممثل أسفله، بحيث تكون السنوات في محور الفواصل، وحجم الإنتاج في محور الترتيب.

الشكل 1-1 المنحنى البياني لبيانات المثال 1-1



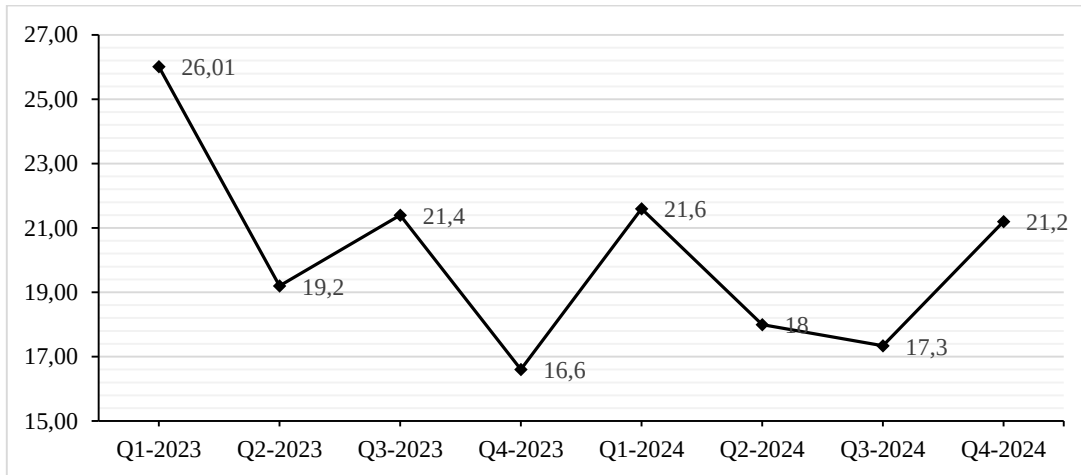
مثال 1-2: ليكن الجدول الموالي يُوضح تطور قيمة الإيداعات ربع السنوية (الفصلية) بالمليون دولار في أحد البنوك في سنتي 2023 و 2024.

الجدول رقم 1-2: قيمة الإيداعات في أحد البنوك في سنتي 2023 و 2024.

السنة	الموسم (الفصل)	الإيداعات
2023	1	26,01
	2	19,2
	3	21,4
	4	16,6
2024	1	21,6
	2	18
	3	17,3
	4	21,2

ويمكن تمثيل بيانات الجدول رقم 1-2 أعلاه على شكل منحنى بياني بحيث تكون الفصول على محور الفواصل والإيداعات على محور الترتيب.

الشكل 2-1: المنحنى البياني لبيانات المثال 2-1.



2. أنواع السلاسل الزمنية والهدف من دراستها:

حسب القراءة الأولية لمشاهدات السلسلة الزمنية، يمكن تقسيم هذه الأخيرة إلى نوعين:

أ- السلاسل المتصلة continuous series:

هي السلاسل الزمنية التي يُمكن أخذ أو قراءة بياناتها عند كل لحظة زمنية، و من أمثلتها نجد، درجات الحرارة، رسم القلب و رسم الدماغ.

ب- السلاسل المتقطعة discrete time series:

هي السلاسل التي يُمكن أخذ أو قراءة بياناتها عند فترات زمنية محددة مسبقاً، وقد تكون هذه الفترات دقائق أو ساعات أو أيام أو شهور أو سنوات. ومن أمثلتها، الناتج الوطني السنوي، سعر الإقفال اليومي لأحد الأسهم في بورصة الأوراق المالية، عدد خريجي الجامعات سنوياً.... إلخ.

ويمكن الحصول على السلسلة الزمنية المتقطعة بمعاينة سلسلة زمنية متصلة، وذلك بأن يتم رصد أو تسجيل القراءات فقط عند نقاط زمنية محددة متساوية الأبعاد. كما يمكن الحصول على السلسلة الزمنية المتقطعة بتراكم متغير معين خلال فترة زمنية مثل، كمية الأمطار التي عادة ما تتراكم خلال يوم أو شهر، الناتج السنوي من أحد المحاصيل الزراعية.

تُدرس السلاسل الزمنية عادة لتحقيق عدد من الأهداف نلخصها فيما يلي:

- استخدام السلسلة الزمنية لوصف وتصوير المعلومات المُتاحة عن فترة زمنية تُوضح تطور الظاهرة المدروسة، أي وصف الملامح والسمات الرئيسية للسلسلة.

الفصل الثاني: الاستقرارية، حالة الارتباط الذاتي والارتباط الذاتي الجزئي

- التعرف على المكونات الرئيسية للسلسلة مثل الاتجاه العام والتغيرات الموسمية.
- تحديد النموذج الذي يمكن أن يكون مناسباً لتحقيق أهداف معينة، والتعرف على حركات الهبوط والصعود في السلسلة.
- تفسير (توضيح وشرح) التغيرات التي تحدث في الظاهرة المدروسة باستخدام السلاسل الزمنية الأخرى التي ترتبط بها، ومثال ذلك تفسير التغيرات التي تحدث في سلسلة المبيعات الخاصة بإحدى السلع باستخدام السلسلة الخاصة بتغيرات أسعار هذه السلعة
- أما أهم أهداف دراسة السلاسل الزمنية على الإطلاق فهو التنبؤ بالمشاهدات المستقبلية، والذي عادة ما يشمل الهدف النهائي من تحليل السلاسل الزمنية.

3. مركبات السلسلة الزمنية، تعريفها، قياسها، وطرق الكشف عنها:

3-1. تعريف مركبات السلسلة الزمنية:

إن التغيرات التي تطرأ على الظاهرة المدروسة من فترة زمنية لأخرى تحدث بسبب أربعة أنواع من العوامل، تُعرف هذه العوامل في أدبيات السلاسل الزمنية بأسماء عديدة منها مؤثرات السلاسل الزمنية، عناصر السلاسل الزمنية، وأخيراً مركبات السلاسل الزمنية وهو المصطلح الذي سنستعمله في هذه المطبوعة، وتتمثل في أربع مركبات هي: الاتجاه العام والعوامل الموسمية، والعوامل الدورية، والعوامل العارضة أو العشوائية. تُعرف العوامل الثلاثة الأولى (الاتجاه العام -العوامل الموسمية -العوامل الدورية) بالعوامل الرئيسية أو المنتظمة في السلسلة، وهي التي يمكن دراستها واكتشاف أنماطها والتنبؤ بها في المستقبل. بينما تُعرف العوامل العارضة (العشوائية) بالعوامل غير الرئيسية أو غير المنتظمة في السلسلة، وهي التغيرات غير النمطية (مركبة الخطأ error component)، التي لا يمكن اكتشافها أو التنبؤ بها. يؤثر كل نوع من هذه العوامل على الظاهرة المدروسة عند أي فترة زمنية بشكل معين، وفي اتجاه معين، وبدرجة معينة. وقد تتأثر السلسلة الزمنية بكل هذه العوامل مجتمعة أو ببعضها فقط.

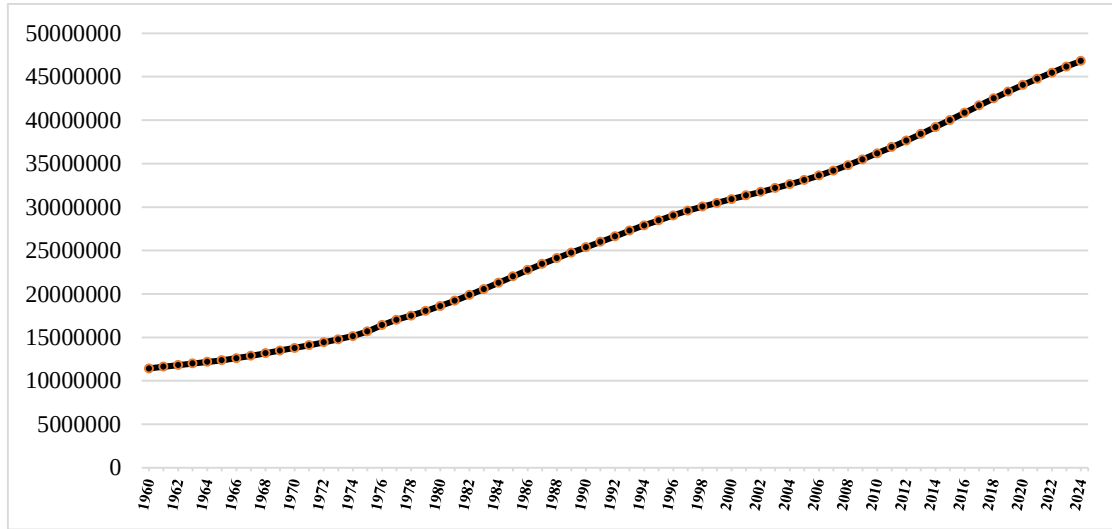
وفيما يلي سنفصل أكثر في مركبات السلسلة الزمنية:

أولاً: مركبة الاتجاه العام:

المقصود بالاتجاه العام هو التحركات الصاعدة أو النازلة في مستوى السلسلة الزمنية على المدى الطويل، ويُعرف بتغيرات المدى الطويل (long time variation). والشكل البياني المُمثل أسفله والذي يمثل تطور

عدد السكان في الجزائر خلال الفترة الممتدة من 1960 إلى 2024 يُوضح لنا أن سلسلة عدد السكان تتزايد عبر الزمن، ما يعكس وجود مركبة الاتجاه العام في السلسلة.

الشكل رقم 1-3: سلسلة تطور عدد السكان في الجزائر خلال الفترة 1960-2024



يدل الاتجاه العام على وجود مجموعة من العوامل الهامة المؤثرة في الظاهرة المدروسة، فالزيادة في عدد السكان مثلا هو انعكاس للزيادة في عدد المواليد، وتحسن الظروف المعيشية للفرد الجزائري، وكذلك تحسن متوسط توقع العمر نتيجة تحسن الرعاية الصحية، وغيرها من العوامل.

لنفرض أن قيمة الظاهرة موضع الدراسة عند الزمن t هي y_t ، إذن من دراستنا في علم الإحصاء نعلم أن نموذج المتوسط (mean model) يمكن التعبير عنه في الصورة العامة التالية:

$$y_t = E(y_t) + \varepsilon_t \dots\dots\dots(1-1)$$

حيث ε_t متغيرات عشوائية غير مرتبطة، توقعها الرياضي منعدم (يساوي الصفر)، وتباينها ثابت. ويُقال أن هذا النموذج محدد deterministic أو غير عشوائي nonstochastic إذا أمكن التعبير عن $E(y_t)$ كدالة رياضية مباشرة في الزمن t ولتكن $f(t, \beta)$ حيث يرمز β إلى معلمات هذه الدالة الرياضية. وفي هذه الحالة يمكن التعبير عن مشاهدات السلسلة الزمنية y_t على الشكل:

$$y_t = f(t, \beta) + \varepsilon_t; \quad t = 1, 2, \dots, n \dots\dots\dots(2-1)$$

ويُمكن أن تأخذ الدالة $f(t, \beta)$ أشكالا مختلفة، نذكر منها:

- دالة خطية من الدرجة الأولى $f(t, \beta) = \beta_0 + \beta_1 t$.

الفصل الثاني: الاستقرارية، حالة الارتباط الذاتي والارتباط الذاتي الجزئي

- دالة كثير حدود من الدرجة الثانية $f(t, \beta) = \beta_0 + \beta_1 t + \beta_2 t^2$.
- دالة أسية $f(t, \beta) = c.e^{rt}$ بحيث c و r ، مقداران ثابتان يُمثلان معلمتي النموذج.

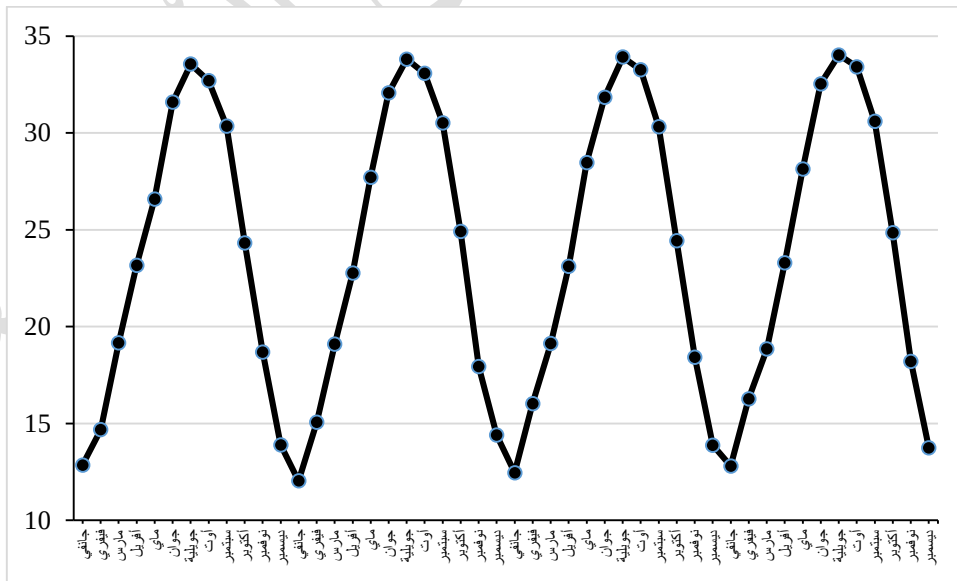
ثانيا. المركبة الموسمية Seasonal Variations

يُطلق عليها كذلك التقلبات الموسمية، وهي التغيرات التي تؤدي إلى حدوث نمط دوري (periodical pattern) كامل في السلسلة يتكرر بانتظام بعد عدد معين من الفترات الزمنية، يُرمز له عادة بالرمز S . وتسمى السلسلة من هذا النوع بالسلسلة الزمنية الموسمية seasonal time series ذات دورة period طولها S .

يختلف طول الدورة S باختلاف طبيعة البيانات:

- فقد يساوي 12 إذا كانت البيانات شهرية، وهنا يتكرر النظام الدوري بعد كل 12 شهر أي على أساس سنوي.
- وأوضح مثال على ذلك السلسلة الخاصة بمتوسط درجة الحرارة الشهرية في الجزائر خلال الفترة 2018-2021، والذي يكون عادة أقل ما يمكن في شهري جانفي وفيفري، ويبدأ في الزيادة التدريجية من شهر مارس وبلغ ذروته عادة في شهري جويلية وأوت، ثم يبدأ في التناقص مرة أخرى حتى يصل إلى أدنى قيمة له في شهري جانفي وفيفري كما كان، ثم يتكرر هذا النظام الدوري كل سنة. والشكل البياني الممثل أسفله يوضح ذلك.

الشكل 1-4 درجة الحرارة شهريا على مدار أربع سنوات



- وقد يساوي طول الدورة 4 عندما تكون البيانات ربع سنوية - وتسمى بيانات فصلية- وهنا يتكرر النظام الدوري بعد أربعة فصول على أساس سنوي أيضا.

الفصل الثاني: الاستقرارية، حالة الارتباط الذاتي والارتباط الذاتي الجزئي

ومثال ذلك المبيعات الفصلية للملابس الصوفية والتي تكون عادة أقل ما يمكن في فصل الصيف، وتبدأ في الزيادة في فصل الخريف، وتبلغ ذروتها في فصل الشتاء ثم تبدأ في التناقص مرة أخرى حتى تصل إلى أدنى قيمة لها في فصل الصيف، ويتكرر هذا النظام الدوري كل سنة.

لا يخفى على الطالب أن يعلم بأن النظام الموسمي يحدث في السلسلة حسب البيانات، فقد تحدث الموسمية كل أسبوع وذلك عند حدوث تغيرات موسمية في أيام معينة من الأسبوع.

مثلاً: مبيعات أحد المطاعم الشهيرة عادة ما تبلغ ذروتها في أيام العطلة الأسبوعية، وتقل في باقي الأيام.

كما يمكن حدوث نظام موسمي على أساس يومي، وذلك إذا حدثت تغيرات موسمية في ساعات معينة كل يوم.

مثلاً: عدد حوادث المرور عادة ما تأخذ شكل موسمي كل يوم، فعادة يبلغ ذروته عند الساعات الأولى من بداية الدوام صباحاً، وفي المساء عند نهاية الدوام.

ثالثاً: المركبة الدورية (cyclical variations):

هي تغيرات تؤدي إلى حدوث نمط دوري في السلسلة يتكرر كل فترة زمنية طويلة (سنتين أو أكثر)، وهي في ذلك تشبه التغيرات الموسمية، إلا أنها تختلف عن هذه التغيرات في العديد من الأوجه، نذكرها فيما يلي:

- طول الدورة التي تحدثها هذه التغيرات أكبر كثيراً من طول الدورة الموسمية، وعادة ما يكون خمس أو عشر سنوات أو أكثر، ولذلك تسمى هذه التغيرات بالتغيرات طويلة الأجل.
- أسباب حدوث هذه التغيرات، حيث أن هذه التغيرات تعكس آثار الدورات والتقلبات الاقتصادية من حيث الكساد أو الراج وغيرها.

- طول هذا النوع من الدورات لا يمكن تحديده بدقة، فهو يتسم بعدم الانتظام.

ومن أمثلة ذلك، دورات الأعمال الاقتصادية (Business Cycles)، التي تتميز بعدة فترات:

الازدهار ← الذروة ← الركود ← الانكماش ← الانتعاش ← الازدهار مرة أخرى.

كما هو الحال فيما يحدث في الاقتصاد العالمي عبر الزمن، كالأزمات التي تؤدي إلى الركود ثم العودة إلى الانتعاش بعد اتباع سياسات اقتصادية لمواجهة الأزمة، ليعود الانتكاس مرة أخرى بحدوث أزمة أخرى وهكذا.... وهذا ينطبق على أسعار الأسهم، أسعار النفط، وغيرها في المدى الطويل.

رابعاً: التغيرات غير المنتظمة - العشوائية - (Irregular):

تختلف هذه التغيرات عن كل التغيرات السابق ذكرها في أنها لا يمكن التنبؤ بها لأنها لا تحدث طبقاً لقاعدة أو نظام أو قانون معين، فهي تغيرات غير مادية تسبب اهتزازات فجائية في الظاهرة بالارتفاع أو الانخفاض، وتتصف هذه التغيرات بأنها لا تستمر طويلاً ولذلك فهي تسمى التغيرات قصيرة الأجل ومن أسباب هذه التغيرات الحروب، الكوارث الطبيعية والإضرابات العمالية وغيرها.

3-2. قياس مركبات السلسلة الزمنية:

أولاً: قياس مركبة الاتجاه العام:

الاتجاه العام هو أهم مركبة في السلسلة الزمنية، ويمثل التغير طويل الأجل في السلسلة، وقياسه هام لأسباب ثلاثة هي:

أ. يمكن معرفة الكيفية التي تتطور بها الظاهرة على المدى الطويل.

ب. يساعد في التنبؤ بما سيكون عليه حال القيم المستقبلية.

ج. يستخدم في حذف أثر الاتجاه العام من السلسلة ومن ثم يمكن دراسة التغيرات الأخرى بشكل أفضل.

سننتقل إلى طريقتين لقياس مركبة الاتجاه العام، وهما طريقة الانحدار، وطريقة المتوسطات المتحركة.

نفرض هنا أن بيانات السلسلة الزمنية يمكن تجزئتها إلى مركبتين فقط، إحداها أساسية وهي مركبة الاتجاه العام وهي المركبة المنتظمة الوحيدة في السلسلة، والتي يمكن تقديرها، والمركبة الثانية هي المركبة العشوائية والتي لا يمكن تقديرها أو التنبؤ بها. في حالة ما إذا احتوت البيانات على المركبة الموسمية فإنه يُفترض التخلص منها أولاً (وهو ما سنتعرض له في نقاط أخرى من المطبوعة).

1. طريقة الانحدار Regression Analysis:

يمكن التعبير عن مشاهدات السلسلة الزمنية y_t على الشكل:

$$y_t = f(t, \beta) + \varepsilon_t; \quad t = 1, 2, \dots, n \dots \dots \dots (3-1)$$

وفيما يلي سنهتم بشكلين يمكن أن تأخذهما الدالة $f(t, \beta)$ ، وهما الشكل الخطي من الدرجة الأولى والخطي من الدرجة الثانية (مع الإشارة إلى أن الدالة $f(t, \beta)$ يمكن أن تأخذ صيغاً غير خطية، لكن سوف لن نتناول ذلك في هذه المطبوعة لأنها لا تندرج ضمن المقرر الدراسي، ولكن أشرنا إلى هذه النقطة حتى يعرف الطالب بأن هناك نماذج غير خطية).

أ. الاتجاه الخطي من الدرجة الأولى (Linear Trend):

تظهر الكثير من الظواهر التي تنشأ في مجالات المعرفة المختلفة اتجاها عاما خطيا مع الزمن على المدى الطويل، وفي مثل هذه الحالات يمكن كتابة النموذج الممثل في المعادلة (3-1) على النحو التالي:

$$y_t = \beta_0 + \beta_1 t + \varepsilon_t \dots\dots\dots(3-1)$$

حيث تمثل y_t قيمة الظاهرة عند الفترة الزمنية t ، و الثابتان β_0 و β_1 يمثلان معلمتي النموذج أو معاملي الانحدار.

ينحصر تقدير الاتجاه العام في تقدير معلمتي النموذج β_0 و β_1 ، ويُذكرنا هذا النموذج بنموذج الانحدار الخطي البسيط حيث يكون المتغير $t = 1, 2, \dots, n$ متغيراً مستقلاً (مُفسِّراً).

وعليه يمكن تقدير معلمتي النموذج β_0 و β_1 بطريقتين، الأولى تعتمد على كتابة النموذج على الشكل المصفوفي، والطريقة الثانية باستعمال المعادلات الطبيعية.

الطريقة الأولى:

يمكن كتابة النموذج في المعادلة (3-1) أعلاه على الشكل المصفوفي كما يلي:

$$Y = X\beta + \varepsilon \dots\dots\dots(4-1)$$

حيث: Y شعاع عمودي من الرتبة n يحتوي على مشاهدات السلسلة، أي أن:

$$Y = [y_1 \quad y_2 \quad \dots y_n]'$$

والمصفوفة X من الرتبة $2 \times n$ ، عناصر عمودها الأول كلها تساوي الواحد الصحيح، وعناصر عمودها الثاني هي القيم المختلفة للوحدات الزمنية وتساوي دائماً الأعداد $1, 2, \dots, n$ بغض النظر عن طبيعة الوحدات الزمنية المستخدمة (سنة-شهر-يوم-...) أي أن:

$$X = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \\ \vdots & \vdots \\ 1 & n \end{bmatrix}$$

أما الشعاع β فهو من الرتبة 2 ويحتوي على معلمتي النموذج، أي أن:

$$\beta = \begin{bmatrix} \beta_0 \\ \beta_1 \end{bmatrix}$$

والشعاع ε من الرتبة n ويحتوي على المتغيرات ε_t أي أن:

$$\varepsilon = [\varepsilon_1 \quad \varepsilon_2 \quad \varepsilon_n]'$$

انطلاقاً من صيغة النموذج (4-1) أعلاه والذي يعتبر كتابة مصفوفية للنموذج، يتم تقدير معلماته بطريقة المربعات الصغرى العادية، وهي من أفضل طرق تقدير معلمات النماذج الخطية، بحيث تكون الصيغة العامة لمقدر الشعاع β على النحو التالي:

$$\hat{\beta} = (X'X)^{-1} X'Y$$

بحيث:

$$X'X = \begin{bmatrix} n & \sum_{t=1}^n t \\ \sum_{t=1}^n t & \sum_{t=1}^n t^2 \end{bmatrix}, \quad X'Y = \begin{bmatrix} \sum_{t=1}^n y_t \\ \sum_{t=1}^n ty_t \end{bmatrix}$$

ويكون شعاع القيم المقدرة كالتالي:

$$\hat{Y} = X\hat{\beta}$$

أما شعاع البواقي هو:

$$e = \hat{\varepsilon} = Y - \hat{Y}$$

ومجموع مربعات البواقي هو:

$$\begin{aligned} SSE = e'e &= \sum_{t=1}^n e_t^2 \\ &= \sum (y_t - \hat{y}_t)^2 = Y'Y - \hat{\beta}X'Y \end{aligned}$$

وتقدير تباين الأخطاء هو:

$$s^2 = \hat{\sigma}^2 = \frac{SSE}{n-2}$$

وتقدير تباين مقدرات المربعات الصغرى هو:

$$\hat{V}(\hat{\beta}) = s^2(X'X)^{-1} = s^2C$$

حيث:

$$(X'X)^{-1} = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} \\ C_{21} & C_{22} \end{bmatrix}$$

ومن ثم يكون تقدير معادلة الاتجاه العام الخطية:

$$\hat{y}_t = \hat{\beta}_0 + \hat{\beta}_1 t \quad t = 1, 2, \dots, n \dots \dots \dots (5-1)$$

ويمكن استخدام معادلة الاتجاه العام المقدرة في المعادلة (5-1) في تقدير الاتجاه العام للظاهرة لكل الفترات الزمنية المتاحة بالتعويض المتتالي عن قيم $t = 1, 2, \dots, n$ فنحصل على القيم المقدرة $\hat{y}_1, \hat{y}_2, \dots, \hat{y}_n$ فضلا عن ذلك يمكن استخدام هذه المعادلة في التنبؤ بما سيكون عليه الاتجاه العام في فترات زمنية غير موجودة ولكنها قريبة من نطاق الزمن المُستخدم، فإذا كنا نرغب - على سبيل المثال - في التنبؤ بالاتجاه العام عند الزمن $t = t_0$ نعوض بهذه القيمة في المعادلة 5-1 لنحصل على تنبؤ الاتجاه المناظر $\hat{y}_0$.

إنشاء مجال ثقة للاتجاه العام الحقيقي:

كما يمكن إنشاء مجال ثقة للاتجاه العام الحقيقي عند الزمن $t = t_0$ بافتراض التوزيع الطبيعي للأخطاء ε_t (normality) كما يلي:

$$\hat{Y}_0 \pm t_{(\alpha/2, n-1)} S [1 + x'_0 (X'X)^{-1} x_0]^{1/2}$$

بحيث :

$$x'_0 = (1 \quad t_0)$$

ويشير المقدار $t_{(\alpha/2, n-1)}$ إلى القيمة المجدولة لإحصائية ستودنت التي نحصل عليها من جدول توزيع t بدرجات حرية $n - 2$ وتحصر على يمينها مساحة قدرها $\frac{\alpha}{2}$ حيث يمثل $(1 - \alpha)$ مستوى المعنوية المطلوبة.

الطريقة الثانية:

أما إذا اعتمدنا على النموذج كما هو مكتوب في المعادلة 3 أعلاه فإننا سنقوم بتقدير معاملات هذا النموذج باستخدام طريقة المربعات الصغرى العادية بالاعتماد على طريقة المعادلات الطبيعية.

في هذه الحالة نقوم بتقدير معاملات النموذج التالي: $y = f(t) = \beta_0 + \beta_1 t + \varepsilon_t$

تقدير المعلمة β_1 :

$$\hat{\beta}_1 = \frac{\sum (t_i - \bar{t})(t_i - \bar{y})}{\sum (t_i - \bar{t})^2}$$

تقدير المعلمة $\hat{\beta}_0$:

$$\hat{\beta}_0 = \bar{y} - \hat{\beta}_1 \bar{t}$$

مع العلم أن:

$$\bar{t} = \frac{\sum t_i}{N}, \quad \bar{y} = \frac{\sum y_i}{N}$$

اختبار معنوية المعلمة β_1 :

فرضيات الاختبار:

فرضية العدم: تفترض أن: $\beta_1 = 0$ ونكتب:

$$H_0 : \beta_1 = 0$$

الفرضية البديلة: تفترض أن: $\beta_1 \neq 0$ ونكتب:

$$H_1 : \beta_1 \neq 0$$

إن الاختبار الخاص بمعنوية المعلمة β_1 مهم جداً، حيث يُحدد وجود أو عدم وجود مركبة الاتجاه الخطي في الظاهرة، وتُستخدم الاحصائية المحسوبة t^* المعرفة بالصيغة التالية للحكم على معنوية المعلمة:

$$t^* = \frac{\hat{\beta}_1 - \beta_1}{\sqrt{V(\hat{\beta}_1)}}$$

والذي يتبع توزيع ستودنت t بدرجات حرية $n - 2$ بافتراض صحة فرضية العدم $H_0 : \beta_1 = 0$ ، وتصبح تُكتب كالتالي:

$$t^* = \frac{\hat{\beta}_1}{s \sqrt{c_{22}}}$$

القرار الناتج عن هذا الاختبار:

- إذا كان: $|t^*| > t_{(\alpha/2, n-1)}$ نرفض الفرضية المنعدمة، وبالتالي نستنتج أن $\beta_1 \neq 0$ ، وهذا يدل على وجود اتجاه خطي في الظاهرة.

- إذا كان: $|t^*| < t_{(\alpha/2, n-1)}$ فإننا نقبل الفرضية المنعدمة، وبالتالي نستنتج أن $\beta_1 = 0$ ، وهذا يدل على عدم وجود اتجاه عام خطي في الظاهرة، بالتالي يكتب النموذج في المعادلة 1-3 كما يلي:

$$y_t = \beta_0 + \varepsilon_t$$

ويمكن في هذه الحالة إثبات أن: $\hat{y}_t = \hat{\beta}_0 = \bar{y}$

ب- الاتجاه العام الخطي من الدرجة الثانية (Quadratic Trend):

في بعض التطبيقات قد لا يكون الخط المستقيم ملائماً لتمثيل الاتجاه العام والأفضل توفير منحني من الدرجة الثانية لتمثيله، وفي مثل هذه الحالات يمكن كتابة النموذج العام للظاهرة على النحو التالي:

$$y_t = \beta_0 + \beta_1 t + \beta_2 t^2 + \varepsilon_t$$

ويمكن كتابة النموذج في الشكل المصفوفي التالي:

$$Y = X\beta + \varepsilon$$

بحيث:

$$Y = (y_1 \quad y_2 \dots y_n)$$

$$X = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1^2 \\ 1 & 2 & 2^2 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & n & n^2 \end{pmatrix}_{(n \times 3)}$$

$$\beta = \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \beta_3 \end{pmatrix}, \quad \varepsilon = (\varepsilon_1 \quad \varepsilon_2 \quad \dots \quad \varepsilon_n)$$

وفي هذه الحالة نجد أن:

$$XY = \begin{pmatrix} \sum_{t=1}^n y_t \\ \sum_{t=1}^n ty_t \\ \sum_{t=1}^n t^2 y_t \end{pmatrix} \quad \text{و} \quad XX' = \begin{pmatrix} n & \sum_{t=1}^n t & \sum_{t=1}^n t^2 \\ \sum_{t=1}^n t & \sum_{t=1}^n t^2 & \sum_{t=1}^n t^3 \\ \sum_{t=1}^n t^2 & \sum_{t=1}^n t^3 & \sum_{t=1}^n t^4 \end{pmatrix}$$

ومن ثم يمكن تطبيق القانون العام لإيجاد مقدر المربعات الصغرى للمعلمة $\hat{\beta}$ ، أي:

$$\hat{\beta} = (X'X)^{-1} X'Y$$

2. طريقة المتوسطات المتحركة Moving Averages:

من الأساليب البسيطة لتقدير الاتجاه العام تمهيد البيانات المشاهدة بتخليصها من التغيرات قصيرة الأجل، التي تحدث بسبب التغيرات الفجائية غير المنتظمة (والتغيرات الموسمية إن وجدت) عن طريق ما يعرف بالمتوسطات المتحركة.

لحساب المتوسطات لا بد أولاً من تحديد عدد معين من الوحدات الزمنية k -يُطلق عليه طول الدورة- يكون أساساً لحساب هذه المتوسطات وتمهيد البيانات بالتخلص من الذبذبات و التغيرات التي تعترضه. بعد ذلك يتم تعريف وحساب المتوسطات المتحركة واللذان يختلفان باختلاف العدد k فردي أو زوجي.

← إذا كان: k عدداً فردياً يعرف المتوسط المتحرك بأنه:

$$\hat{y}_t = \frac{1}{k} \left[y_{t-\frac{k-1}{2}} + \dots + y_{t-1} + y_t + y_{t+1} + \dots + y_{t+\frac{k-1}{2}} \right]$$

ويلاحظ أنه يتعذر علينا حساب المتوسطات المتحركة لأول $\frac{k-1}{2}$ مشاهدة ولآخر $\frac{k-1}{2}$ مشاهدة، وبذلك نحصل على عدد $[n - (k - 1)]$ متوسط متحرك فقط لسلسلة طولها n .

على سبيل المثال:

إذا كان $k = 3$ فإن المتوسطات المتحركة تكون على الترتيب:

$$\hat{y}_2 = \frac{1}{3} [y_1 + y_2 + y_3]$$

$$\hat{y}_3 = \frac{1}{3} [y_2 + y_3 + y_4]$$

$$\vdots \quad \quad \quad \vdots$$

$$\hat{y}_{n-1} = \frac{1}{3} [y_{n-2} + y_{n-1} + y_n]$$

وبالتالي تُعتبر المتوسطات $\hat{y}_2, \hat{y}_3, \dots, \hat{y}_{n-1}$ تقديرات الاتجاه العام للقيم $y_2, y_3, \dots, y_{n-1}$ على الترتيب.

← إذا كان k عدداً زوجياً يعرف المتوسط المتحرك بأنه:

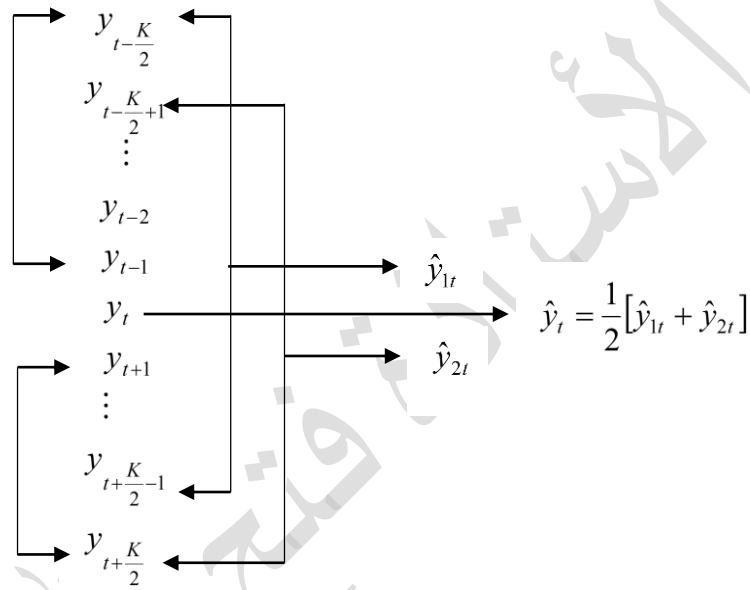
$$\hat{y}_t = \frac{1}{k} \left[y_{t-\frac{k}{2}} + y_{t-\frac{k}{2}+1} + \dots + y_{t-2} + y_{t-1} + y_t + y_{t+1} + \dots + y_{t+\frac{k}{2}-1} \right]$$

الفصل الثاني: الاستقرارية، حالة الارتباط الذاتي والارتباط الذاتي الجزئي

في حالة طول الفترة عدد زوجي، نلاحظ بأنه لا يمكن وضع المتوسط المتحرك أمام إحدى القيم المشاهدة وإنما يوضع بين قيمتين معينتين، ومن ثم كان لا بد من مركزة المتوسطات المتحركة حتى يتسنى وضعها في مقابل القيمة الحقيقية المُشاهدة، ولذلك يعرف المتوسط المتحرك الممركز إذا كان طول الدورة k زوجي بأنه متوسط المتوسطين المتحركين بحيث:

$$\hat{y}_t = \frac{1}{2} [\hat{y}_{1t} + \hat{y}_{2t}]$$

والشكل التالي يوضح كيفية حساب المتوسطات المتحركة والمركزة في حالة طول الدورة عدد زوجي:



ملاحظة:

في الواقع أن حساب المتوسطات المتحركة عمليا يبدو أسهل من الصورة النظرية، كما سنرى في التمارين.

مميزات طريقة المتوسطات المتحركة:

- (1) البساطة وسهولة إجراء العمليات الحسابية.
- (2) لا تفترض شكل رياضي معين لمنحنى الاتجاه العام.
- (3) لا تتطلب إعادة الحسابات إذا توافرت مشاهدات جديدة.

عيوب طريقة المتوسطات المتحركة:

- (1) لا يمكن معرفة القيم الاتجاهية لكل القيم المشاهدة.

(2) لا يمكن معرفة الشكل الرياضي لمنحنى الاتجاه العام المُقدر بالضبط، ومن ثم عدم إمكانية استخدامه بشكل مباشر في التنبؤ بالقيم الاتجاهية.

(3) تتأثر المتوسطات بالقيم الشاذة والمتطرفة، مما يجعل منحنى الاتجاه العام مجذوبا لهذه القيم.

(4) اختيار طول الدورة

للعلاقة بين مركبات السلسلة:

قبل الانتقال إلى تقدير المركبة الموسمية، يجب معرفة شكل العلاقة بين المركبات هل هي علاقة تجميعية أو جدائية. وفي هذه المرحلة نتعرف على النموذج التجميعي والنموذج الجدائي الذي يُمكن أن يعبر على العلاقة بين المركبات الأربع للسلسلة الزمنية.

• النموذج التجميعي additive model: ويفترض أن قيمة الظاهرة عند الزمن t هي حاصل جمع المركبات الأربعة التي تتكون منها السلسلة عند نفس الزمن، ويكون هذا النموذج مناسباً إذا كانت التأرجحات الموسمية seasonal swings مستقلة عن مستوى الظاهرة مقاساً بالاتجاه العام. وتُكتب السلسلة على الشكل التالي:

$$y_t = T_t + S_t + C_t + I_t$$

حيث يشير y_t إلى قيمة الظاهرة عند الزمن t ، و تمثل كل من I_t ، C_t ، S_t ، T_t العوامل غير المنتظمة أو العشوائية، أثر العامل الدوري، أثر الموسم، وأثر الاتجاه العام على الترتيب.

• النموذج الجدائي multiplicative model: ويفترض هذا النموذج أن قيمة الظاهرة عند الزمن t هي حاصل ضرب المركبات الأربع التي تتكون منها السلسلة عند نفس الزمن. ويكون هذا النموذج مناسباً إذا كانت التأرجحات الموسمية تتناسب مع مستوى السلسلة مقاساً بالاتجاه العام. وتُكتب السلسلة على الشكل التالي:

$$y_t = T_t \times S_t \times C_t \times I_t$$

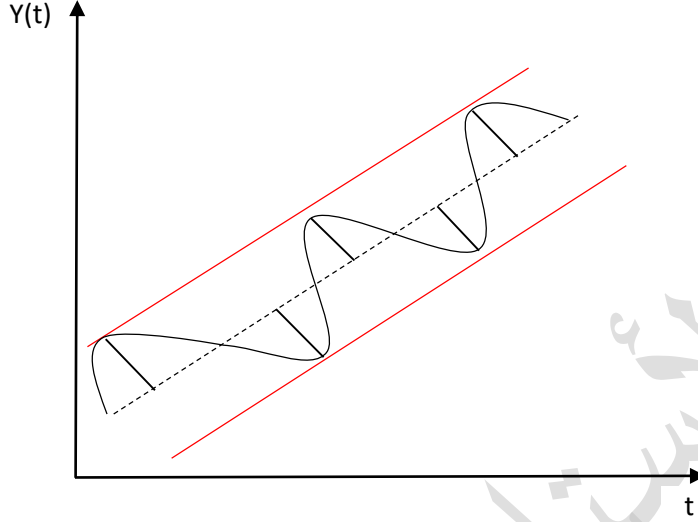
حيث يشير y_t إلى قيمة الظاهرة عند الزمن t ، وتمثل كل من I_t ، C_t ، S_t ، T_t العوامل غير المنتظمة أو العشوائية، أثر العامل الدوري، أثر الموسم، وأثر الاتجاه العام على الترتيب.

كيفية التعرف على نوع العلاقة التي تجمع بين المركبات الأربع للسلسلة الزمنية:

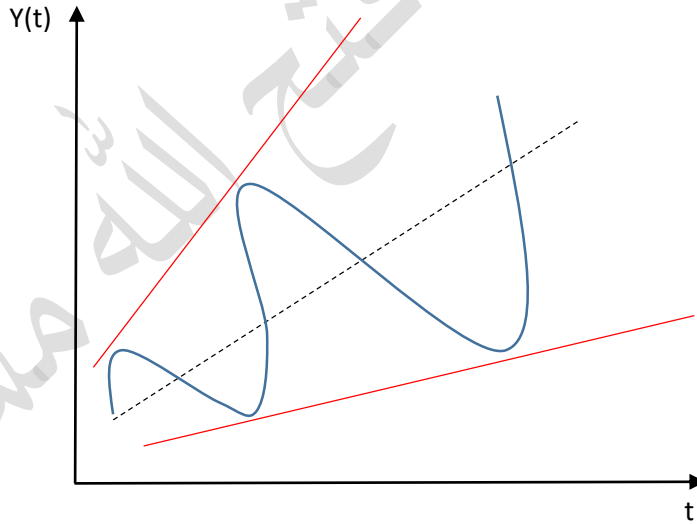
للتعرف على شكل النموذج الذي يجمع المركبات الأربعة هل هو تجميعي أو جدائي هناك طريقتين:

1. الطريقة البيانية:

تكون وفق هذه الطريقة السلسلة الزمنية ذات عناصر تجميعية لما تنحصر ذبذباتها بين خطين متوازيين، كما يوضحه المنحنى البياني التالي:



وتكون السلسلة الزمنية ذات عناصر جدائية إذا كانت ذبذباتها غير ثابتة الشدة، بالتالي تقع بين خطين منفرجين كما يظهر في المنحنى البياني التالي:



2. طريقة الانحدار:

ويعتمد هذا الأسلوب على تقدير المعادلة التالية:

$$\sigma_i = a + b\bar{y}_i, \quad i = 1, 2, 3, \dots, m$$

مع m يمثل عدد السنوات.

$$\bar{y}_i = \frac{1}{p} \sum_{j=1}^p y_{ij}$$

$$\sigma_i = \sqrt{\frac{1}{p} \sum_{j=1}^p (y_{ij} - \bar{y}_i)^2}$$

$$\hat{b} = \frac{\sum_{j=1}^p \sigma_i \bar{y}_i - m \bar{\sigma} \bar{y}}{\sum_{j=1}^p \bar{y}_i^2 - m \bar{y}^2}$$

وبالتالي القرار يكون كالتالي:

- تكون السلسلة الزمنية تجميعية إذا كان $\hat{b} < 0.05$.
- تكون السلسلة الزمنية جدائية إذا كان $\hat{b} > 0.10$.
- تكون السلسلة الزمنية مختلطة إذا كان $0.05 \leq \hat{b} \leq 0.10$.

مثال 1-3:

لتكن لدينا بيانات السلسلة الزمنية التالية، هل النموذج الذي تتبعه معطيات هذه السلسلة الزمنية هو جدائي أم تجميعي؟ مع وضع المجاميع الآزمة للإجابة على السؤال في شكل جدول ملخص للنتائج.

السنة i	الفصل 1	2	3	4
1	10	19	64	32
2	12	12	68	29
3	7	18	60	36
4	6	11	64	50
5	11	19	69	20

الإجابة:

$\sigma_i \bar{y}_i$	σ_i	$(\bar{y}_i)^2$	$(y_{i4} - \bar{y}_i)^2$	$(y_{i3} - \bar{y}_i)^2$	$(y_{i2} - \bar{y}_i)^2$	$(y_{i1} - \bar{y}_i)^2$	$\bar{y}_i$
639,37	20,46	976,56	0,56	1072,56	150,06	451,56	31,25
691,81	22,87	915,06	1,56	1425,06	333,06	333,06	30,25
606,51	20,05	915,06	33,06	885,06	150,06	540,56	30,25
2676,75	24,81	1072,56	297,56	976,56	473,06	715,56	32,75
681,87	22,92	885,06	95,06	1540,56	115,56	351,56	29,75
$\sum \sigma_i \bar{y}_i$ = 5296,31	$\bar{\sigma} = 22,22$	$\sum (\bar{y}_i)^2$ = 4764,30					$\bar{y} = 30,85$

$$\sigma_i = \sqrt{\frac{1}{p} \sum_{j=1}^p (y_{ij} - \bar{y}_i)^2}$$

وبالتالي نجد من خلال التطبيق العددي لما وجدناه في الجدول أعلاه بأن:

$$\hat{b} = \frac{\sum_{j=1}^p \sigma_i \bar{y}_i - m \bar{\sigma} \bar{y}}{\sum_{j=1}^p \bar{y}_i^2 - m \bar{y}^2} = \frac{5296,31 - 5 \times 22,22 \times 30,85}{4764,30 - 5 \times 30,85^2} = 0,4 > 0,1$$

وبالتالي نستنتج أن العلاقة التي تربط بين مركبات السلسلة الأربع هي علاقة جدائية.

ثانياً. تقدير المركبة الموسمية (المعاملات الموسمية seasonal factors):

في الواقع، تقدير المركبة الموسمية يتوقف على الكيفية التي يتم بها نمذجة مركبات السلسلة الزمنية الأربعة، فيما إذا كنت ترتبط فيما بينها بطريقة تجميعية أو جدائية.

لـ في حالة الشكل الجدائي:

في حالة العلاقة بين المركبات الأساسية للسلسلة الزمنية من الشكل الجدائي يأخذ النموذج الشكل العام التالي:

$$y_t = T_t \times S_t \times C_t \times I_t$$

بحيث تمثل y_t قيمة الظاهرة عند الزمن t ، وكل من T_t ، S_t ، C_t ، I_t تمثل العوامل غير المنتظمة أو العشوائية، أثر العامل الدوري، أثر الموسم، وأثر الاتجاه العام على الترتيب.

الفصل الثاني: الاستقرارية، حالة الارتباط الذاتي والارتباط الذاتي الجزئي

كما نشير إلى تقديرات هذه المركبات المختلفة من البيانات المتاحة بالرموز الصغيرة: t_t, s_t, c_t, i_t على التوالي.

تعرف تأثيرات المواسم المختلفة S_t بالمعاملات الموسمية، ولتقدير هذه المعاملات تقترح طريقة التجزئة الجذائية (الضربية) إجراء الخطوات التالية:

1. الحصول على المتوسطات المتحركة باستخدام الطول الحقيقي للدورة الموسمية في البيانات، فإذا كانت البيانات ربع سنوية نعتبر طول الدورة 4، وإذا كانت البيانات شهرية نستخدم طول الدورة 12، ... وهكذا. بحساب المتوسطات المتحركة نكون قد تخلصنا من المركبة الموسمية وغير المنتظمة، وبالتالي فإن هذه المتوسطات تمثل توليفة من عاملي الاتجاه العام والدوري، أي أن:

$$(MA)_t = (t_t, c_t)$$

حيث يشير الرمز $(MA)_t$ إلى المتوسط المتحرك عند الزمن t .

2. بقسمة قيمة الظاهرة الأصلية y_t والتي تتكون من حاصل ضرب المركبات الأربع على المتوسطات المتحركة نحصل على تقديري المركبتين الأخيرتين الموسمية وغير المنتظمة، أي أن:

$$(s_t, i_t) = \frac{y_t}{(MA)_t}$$

3. تحذف أثر العوامل غير المنتظمة من التوليفة (s_t, i_t) بإيجاد المتوسط الحسابي لها، وبالتالي نحصل على متوسطات المعاملات الموسمية $\bar{S}_t$.

4. عادة ما يتم تعديل التقديرات بحيث يساوي مجموعها عدد المواسم (طول الدورة)، ومن ثم يمكن مقارنة كل معامل موسمي بالواحد الصحيح، ويُعرف معامل التصحيح correction factor بالصيغة التالية:

$$CF = \frac{K}{\sum_{t=1}^k \bar{S}_t}$$

5. تُحسب تقديرات المعاملات الموسمية كما يلي:

$$s_t = (CF)(\bar{S}_t) ; t = 1, 2, \dots, k$$

في حالة الشكل التجميعي:

في الشكل التجميعي يأخذ النموذج الشكل العام التالي:

$$y_t = T_t + S_t + C_t + I_t$$

بحيث تمثل y_t قيمة الظاهرة عند الزمن t ، وكل من T_t ، S_t ، C_t ، I_t تمثل العوامل غير المنتظمة أو العشوائية، أثر العامل الدوري، أثر الموسم، وأثر الاتجاه العام على الترتيب.

مع الإشارة إلى أن تقديرات هذه المركبات المختلفة من البيانات المتاحة بالرموز الصغيرة: t_t ، s_t ، c_t ، i_t على التوالي.

في هذه الحالة يجب تقدير نموذج من الشكل:

$$Y_t = \beta_0 + \beta_1 t + \sum_{j=1}^P C_j S_j + \varepsilon_t \quad (*)$$

وتقدير هذا النموذج بطريقة المربعات الصغرى العادية غير ممكن إلا بعد حذف الحد الثابت ليصبح:

$$Y_t = \beta_1 t + \sum_{j=1}^P \lambda_j S_j + \varepsilon_t \quad (**)$$

وسنتطرق في الفقرة الخاصة بالاختبارات غير الحرة للكشف عن المركبة الموسمية إلى كيفية تقدير المركبة الموسمية والكشف عنها.

4. اختبارات الكشف عن مركبة الاتجاه العام والمركبة الموسمية:

1.4 الاختبارات الحرة للكشف عن مركبة الاتجاه العام والمركبة الفصلية:

الاختبارات الحرة، نقصد بها استعمال الأدوات الاختبارية التي لا تخضع بالضرورة لأي توزيع إحصائي، فهي لا تتطلب أي فرضية حول التوزيع الاحتمالي للخطأ.

أ. الاختبارات الحرة للكشف عن المركبة الفصلية:

للكشف عن وجود أو عدم وجود المركبة الفصلية في السلسلة الزمنية، يمكن استخدام عدة اختبارات مثل:

اختبار نقاط الانعطاف (Turing points) واختبار الإشارة (Sign test) للكشف عن المركبة الفصلية ومركبة

الاتجاه العام وللتفصيل في هذين الاختبارين يمكن للطالب الاطلاع على المرجع: السلاسل الزمنية وتقنيات

التنبؤ قصير المدى، للدكتور مولود حشمان، الديوان الوطني للمطبوعات الجامعية، سنة 2010.

الفصل الثاني: الاستقرارية، حالة الارتباط الذاتي والارتباط الذاتي الجزئي

أما في هذه المحاضرة، فسننظر لإختبار Kruskal-Wallis وكيفية تطبيقه، والذي يستعمل خصيصا للكشف عن وجود المركبة الفصلية في السلسلة الزمنية فقط.

❖ صيغة الاختبار والفرضية المختبرة:

في هذه الحالة نختبر فرضية العدم التي مفادها

H_0 : جميع الفصول لها نفس الوسيط (لا توجد مركبة فصلية /سلسلة عشوائية)

H_1 : يوجد على الأقل وسيطي فصلين مختلفين (توجد فصلية)

نكتب صيغة الاختبار وفق العلاقة التالية:

$$KW = \frac{12}{T(T+1)} \left[\sum_{i=1}^p \frac{R_i^2}{n_i} \right] - 3(T+1) \rightarrow \chi^2_{(p-1)}$$

بحيث:

R_i : تمثل مجموع رتب المشاهدات المقابلة للفصل i .

n_i : تمثل عدد المشاهدات المقابلة للفصل i .

p : تعبر عن الدورة (période)، وهي تعادل 4 في المشاهدات الفصلية، و12 في المشاهدات الشهرية وهكذا.

فإذا كان كل n_i أكبر من 5 وفرضية العدم صحيحة، يمكن إظهار أن KW يتبع تقريبا توزيع $\chi^2_{(p-1)}$ كاي تربيع بدرجة حرية $p-1$.

القرار:

نرفض الفرضية المنعدمة H_0 إذا كان: $KW > \chi^2_{(p-1)}$.

إضافة لشرط عدد المشاهدات وحتى لا يكون هذا الاختبار مغلطاً، يجب إزالة مركبة الاتجاه العام من السلسلة قبل محاولة الكشف عن وجود المركبة الفصلية، وبناء على ذلك يمكن تلخيص خطوات الاختبار فيما يلي:

1. إزالة مركبة الاتجاه العام؛
2. تجميع البيانات حسب الفصل؛
3. ترتيب جميع القيم؛
4. حساب متوسط الرتب لكل فصل؛

الفصل الثاني: الاستقرارية، حالة الارتباط الذاتي والارتباط الذاتي الجزئي

5. حساب إحصائية الاختبار؛

6. مقارنة القيمة المحسوبة بالقيمة المجدولة لكاي تربيع واتخاذ القرار.

مثال 1-4:

لتكن لدينا البيانات الخاصة بالسلسلة Y المبينة في الجدول ادناه، والمطلوب الكشف عن وجود المركبة الفصلية باستخدام اختبار كروسكال واليس.

السنة	T1	T2	T3	T4
2019	120	135	150	200
2020	125	140	155	210
2021	118	132	145	195
2022	130	145	160	220
2023	135	150	165	230

الإجابة:

الخطوة الأولى: إزالة مركبة الاتجاه العام

تقدير المربعات الصغرى لدالة الاتجاه العام:

$$\hat{Y} = 138,3286 + 2,070677 * t$$

ونقوم بإزالة الاتجاه بطرح السلسلة Y من السلسلة المقدرة، كما هو مبين في الجدول التالي:

الفرق	$\hat{Y}$	Y	الزمن
-20,4	140,4	120	T12019
-7,5	142,5	135	T22019
5,5	144,5	150	T32019
53,4	146,6	200	T42019
-23,7	148,7	125	T12020
-10,8	150,8	140	T22020
2,2	152,8	155	T32020
55,1	154,9	210	T42020

الفصل الثاني: الاستقرارية، حالة الارتباط الذاتي والارتباط الذاتي الجزئي

T12021	118	157,0	-39,0
T22021	132	159,0	-27,0
T32021	145	161,1	-16,1
T42021	195	163,2	31,8
T12022	130	165,2	-35,2
T22022	145	167,3	-22,3
T32022	160	169,4	-9,4
T42022	220	171,5	48,5
T12023	135	173,5	-38,5
T22023	150	175,6	-25,6
T32023	165	177,7	-12,7
T42023	230	179,7	50,3

الخطوة 2: تجميع البواقي حسب الفصول:

السنة	Y	المقدرة	البواقي	R
2021T1	118	157,0	-39,0	1
2023T1	135	173,5	-38,5	2
2022T1	130	165,2	-35,2	3
2021T2	132	159,0	-27,0	4
2023T2	150	175,6	-25,6	5
2020T1	125	148,7	-23,7	6
2022T2	145	167,3	-22,3	7
2019T1	120	140,4	-20,4	8
2021T3	145	161,1	-16,1	9
2023T3	165	177,7	-12,7	10
2020T2	140	150,8	-10,8	11
2022T3	160	169,4	-9,4	12
2019T2	135	142,5	-7,5	13
2020T3	155	152,8	2,2	14
2019T3	150	144,5	5,5	15
2021T4	195	163,2	31,8	16
2022T4	220	171,5	48,5	17
2023T4	230	179,7	50,3	18

الفصل الثاني: الاستقرارية، حالة الارتباط الذاتي والارتباط الذاتي الجزئي

2019T4	200	146,6	53,4	19
2020T4	210	154,9	55,1	20

الخطوة الثالثة والرابعة: الترتيب الفصلي للرتب وحساب متوسط الرتب:

السنوات الفصل	2019	2020	2021	2022	2023	مجموع الرتب	تربيع مجموع الرتب	متوسط تربيع مجموع الرتب
T1	8	6	1	3	2	20	400	80
T2	13	11	4	7	5	40	1600	320
T3	15	14	9	12	10	60	3600	720
T4	19	20	16	17	18	90	8100	1620

بحيث: مجموع الرتب هو مجموع رتب الفصول في كل سنة المأخوذة من الجدول الوارد في الخطوة الثانية، مثلاً الفصل الأول هو: $20=2+3+1+6+8$ ، تربيع مجموع الرتب هو مربع المجموع المحسوب لكل فصل (مثلاً الفصل الأول: $20^2=400$)، أما متوسط التربيع فهو عبارة عن حاصل قسمة مربع المجموع على عدد السنوات (وهو 5 سنوات)، مثلاً بالنسبة للفصل الأول: $(80=5 \div 400)$ ، وهكذا بالنسبة لباقي الفصول. الخطوة الخامسة: حساب إحصائية كروسكال واليس:

بعد إجراء الحسابات اللازمة كما هو مبين في الجدول أعلاه، نقوم بحساب إحصائية كروسكال واليس بالتعويض في الصيغة التالية:

$$KW = \frac{12}{T(T+1)} \left[\sum_{i=1}^p \frac{R_i^2}{n_i} \right] - 3(T+1)$$

$$= \frac{12}{20(20+1)} \left[\frac{400}{5} + \frac{1600}{5} + \frac{3600}{5} + \frac{8100}{5} \right] - 3(20+1) = 15,2857$$

الخطوة السادسة: مقارنة القيمة المحسوبة بالقيمة المجدولة لكاي تربيع.

بمقارنة الإحصائية المحسوبة بالقيمة المجدولة لكاي تربيع بدرجة حرية 3 (P-1)، المقدرة بـ 7,815، نلاحظ أن الإحصائية المحسوبة أكبر من الإحصائية المجدولة، وهذا يقودنا إلى رفض فرضية العدم التي تنص على عدم وجود الفصلية في السلسلة الزمنية وبالتالي هذا يقودنا إلى استنتاج وجود المركبة الفصلية في السلسلة الزمنية، والتي يجب أخذها بعين الاعتبار في عمليات النمذجة والتنبؤ.

ب. الاختبارات الحرة للكشف عن مركبة الاتجاه العام:

هناك عدة اختبارات حرة للكشف عن مركبة الاتجاه العام، ورغم سهولة تكوينها وحسابها، إلا أنه يُعاب عليها ضعفها في الكشف عن المركبات المعنية، ومن بين هذه الأنواع نجد، اختبار التوالي (اختبار تعاقب الإشارات Run Test)، اختبار نقاط الانعطاف (Turing points)، اختبار الإشارة (Sign test).

وفي الأخير نجد اختبار دانيال (Daniel's test)، والذي يُعتبر أقوى اختبار ضمن المجموعة المذكورة، وهو الاختبار الذي سنتطرق إليه بنوع من التفصيل، مع إدراج مثال تطبيقي لفهمه أكثر.

يستعين اختبار دانيال بمعامل الارتباط لسبيرمان "Spearman Correlation"، بحيث يعتمد هذا المعامل على قياس الارتباط الخطي بين ترتيبين، الرتبي (التصاعدي) R_t والزمن t ، وبتعبير رياضي:

$$R_t = f(t)$$

$$t = \overline{1, T}, \quad R_t = 1, T$$

ومنه فإن معامل الارتباط النظري هذا يُعرف بـ:

$$r_s = \frac{\text{cov}(R_t, t)}{\sqrt{\text{var}(R_t) \cdot \text{var}(t)}}$$

بحيث $\text{var}(R_t) = \text{var}(t)$ و يُعادلان $\frac{(T^2 - 1)}{12}$ ، حيث يكون في حالة العينة وبسلسلة غير مكررة المشاهدات،

معطى وفق العلاقة التالية:

$$r_s = \frac{\sum_{t=1}^T (R_t - \bar{R})(t - \bar{t})}{\sum_{t=1}^T (t - \bar{t})^2}$$

حيث ومراعاة لعدم تكرار الرتب، نعوض تلك المكررة المتساوية بوسطها الحسابي. ولتبسيط هذا المعامل يمكن إعطاؤه في الشكل النهائي التالي:

$$r_s = \frac{6 \sum_{t=1}^T d_i^2}{T(T^2 - 1)}$$

الفصل الثاني: الاستقرارية، حالة الارتباط الذاتي والارتباط الذاتي الجزئي

حيث $\sum_{t=1}^T d_i^2$ يمثل مجموع مربعات الفرق بين الترتيب التصاعدي والزمني، أي $d_i = (R_t - t)$ ، وبما أن r_s هو معامل ارتباط خطي فإن $-1 \leq r_s \leq 1$.

صيغة فرضيات الاختبار هي كالتالي:

H0: السلسلة عشوائية، بمعنى لا يوجد اتجاه عام.

H1: يوجد اتجاه عام.

القرار: بعد حساب معامل الارتباط r_s يتم رفض الفرضية الصفرية H0 وفق حجم العينة كما يلي:

أ- إذا كان حجم العينة أقل من 30 مشاهدة، نرفض H0 إذا تحقق لدينا $|r_s| > r_{\alpha/2}$.

ب- في العينات الكبيرة والتي يفوق حجمها 30 مشاهدة، نرفض H0 إذا تحقق $|Z| > Z_{\alpha/2}$ ، حيث

$$Z = \frac{r_s - \mu_{r_s}}{\sigma_{r_s}}, \text{ بحيث } \mu_{r_s} = 0, \sigma_{r_s} = \frac{1}{\sqrt{T-1}}$$

مثال 5-1:

لدينا بيانات سلسلة زمنية للظاهرة X (12 مشاهدة) وهي مبينة في الجدول التالي:

t	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
X _t	155	158	163	171	153	156	162	172	162	164	173	181

ونريد اجراء اختبار دانيال للكشف عن مركبة الاتجاه العام في السلسلة.

لإجراء الاختبار نتبع عدة خطوات على النحو التالي:

الخطوة الأولى: ترتيب بيانات السلسلة تصاعديا واعطائها رتب (R_t) ، ثم نحسب الفرق بين رتب القيم ورتب

الزمن $(d_t = R_t - t)$ وكذلك تربيع الفرق بين الرتب (d_t^2) ، كما هو موضح في الجدول التالي:

t	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
R _t	2	4	7	9	1	4	5,5	10	5,5	8	11	12
d _t =R _t -t	-1	-2	-4	-5	4	2	-1,5	-2	-2,5	2	0	0
d _t ²	1	4	16	25	16	4	2,25	4	12,25	4	0	0

$$\sum_{t=1}^{12} d_t^2 = 1 + 4 + 16 + 25 + 16 + 4 + 2,25 + 4 + 12,25 + 4 + 0 + 0 = 93,5$$

ومنه، نجد: $\sum_{t=1}^{12} d_t^2 = 93,5$

ملاحظة: بالنسبة لترتيب المشاهدات وتحديد الرتب، القيمة الدنيا (153) أخذت الرتبة الأولى (1) تقابلها الرتبة الزمنية (5)، القيمة التي تليها في الرتبة الثانية (156) تقابلها الرتبة الزمنية (1)، ... وهكذا.

الخطوة الثانية: حساب قيمة معامل الارتباط لسبيرمان:

$$r_s = 1 - \frac{6 \sum_{t=1}^{12} d_t^2}{T(T^2 - 1)} = 1 - \frac{6(93,5)}{12(12^2 - 1)} = 0,67$$

الخطوة الثالثة: اتخاذ القرار:

وبما أن القيمة المحسوبة لمعامل الارتباط $r_s = 0,67$ أكبر من القيمة الحرجة عند مستوى $\alpha = 5\%$ المقدر بـ $r_{\alpha/2} = r_{2,5\%} = 0,5804$ ، فإننا نرفض فرضية فرضية العدم ونقر بوجود مركبة الاتجاه العام في السلسلة الزمنية المدروسة.

2.4 الاختبارات غير الحرة للكشف عن مركبة الاتجاه العام والمركبة الموسمية:

أ. الاختبارات غير الحرة للكشف عن مركبة الاتجاه العام:

تعتمد هذه الطريقة على افتراض وجود مركبة اتجاه العام في السلسلة الزمنية إضافة إلى السلسلة العشوائية بتوزيع احتمالي للأخطاء يكون معروفاً. وفي هذه الحالة يمكننا أن نكتب:

$$y_t = f(t, \beta) + \varepsilon_t; \quad t = 1, 2, \dots, n$$

مع افتراض أن الخطأ العشوائي يتبع التوزيع الطبيعي، بمتوسط منعدم وتباين ثابت.

$$\varepsilon_t \rightarrow N(0, \sigma^2)$$

إذن وبعد تحديد شكل الدالة $f(t)$ أعلاه (هل هي انحدار خطي من الدرجة الثانية، أم من الدرجة الأولى، أم أنها غير خطية)، يتم تقدير معالمها واختبار معنوية معلمة الانحدار، باستعمال الاختبار الملائم.

في حالة ما إذا كان شكل الدالة $f(t)$ خطي من الدرجة الأولى فإننا نكتب:

$$y_t = \beta_0 + \beta_1 t + \varepsilon_t$$

بالتالي اختبار وجود اتجاه عام للسلسلة الزمنية يرجع لاختبار معنوية معلمة الانحدار β_1 باستخدام اختبار

t ستودنت، وقد أشرنا إليه سابقاً عند قياس مركبة الاتجاه العام.

ب. الاختبارات غير الحرة للكشف عن المركبة الفصلية:

يمكن تلخيصها في طريقتين بسيطتين تعتمد الأولى على تقنية الانحدار والثانية على دالة الارتباط الذاتي:

1. طريقة الانحدار:

تتمثل في افتراض وجود المركبة الفصلية في السلسلة الزمنية بـ p من المؤشرات، والتي يُعبر عنها بنفس عدد المتغيرات التمثيلية التي يتم تقدير معالمها بطريقة المربعات الصغرى العادية ثم اختبارها إحصائياً. تمثل تلك المعالم المؤشرات الفصلية الخاصة بالظاهرة المدروسة.

ففي هذه الحالة يتم تقدير نموذج وفق الصيغة التالية:

$$Y_t = \beta_0 + \beta_1 t + \sum_{j=1}^p C_j S_j + \varepsilon_t$$

بحيث: $\beta_0 + \beta_1 t$ تعبر عن مركبة الاتجاه العام.

و $\sum_{j=1}^p C_j S_j = C_1 S_1 + C_2 S_2 + C_3 S_3 + \dots + C_p S_p$ تعبر عن المركبة الفصلية، بحيث تمثل الفصل من 1

إلى P (عدد فصول السنة)، مع C_j تمثل معامل الفصل j و S شعاع يأخذ القيمة 1 إذا كان الفصل المعني j و 0 لغير ذلك.

وبافتراض أن عدد الفصول هو 4، فإن الشكل المصفوفي للنموذج يكون على النحو التالي:

$$Y_t = \beta_0 + \beta_1 t + \sum_{j=1}^4 C_j S_j + \varepsilon_t$$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \\ \vdots \\ y_T \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \\ 1 & 3 \\ 1 & 4 \\ \vdots & \vdots \\ 1 & T \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \beta_0 \\ \beta_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \\ C_3 \\ C_4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \\ \vdots \\ y_T \end{pmatrix}$$

ولتقدير النموذج بطريقة المربعات الصغرى يجب حذف أحد المتغيرات الموسمية أو الحد الثابت من النموذج،

وتكون المعالم C_j هي المعاملات الموسمية التي يجب أخذها بعين الاعتبار في نمذجة السلسلة الزمنية.

مثال 1-6:

بالاستعانة ببيانات المثال (1-4)، ننشئ الأشعة الخاصة بالفصول في شكل متغيرات ثنائية تأخذ القيم 0 و 1، إلى جانب بيانات السلسلة Y والزمن كما هي مبينة في الجدول التالي:

الزمن	Y	C	T	S1	S2	S3	S4
Q12019	120	1	1	1	0	0	0
Q22019	135	1	2	0	1	0	0
Q32019	150	1	3	0	0	1	0
Q42019	200	1	4	0	0	0	1
Q12020	125	1	5	1	0	0	0
Q22020	140	1	6	0	1	0	0
Q32020	155	1	7	0	0	1	0
Q42020	210	1	8	0	0	0	1
Q12021	118	1	9	1	0	0	0
Q22021	132	1	10	0	1	0	0
Q32021	145	1	11	0	0	1	0
Q42021	195	1	12	0	0	0	1
Q12022	130	1	13	1	0	0	0
Q22022	145	1	14	0	1	0	0
Q32022	160	1	15	0	0	1	0
Q42022	220	1	16	0	0	0	1
Q12023	135	1	17	1	0	0	0
Q22023	150	1	18	0	1	0	0
Q32023	165	1	19	0	0	1	0
Q42023	230	1	20	0	0	0	1

في هذه الحالة يجب تقدير نموذج من الشكل:

$$Y_t = \beta_0 + \beta_1 t + \sum_{j=1}^P C_j S_j + \varepsilon_t \quad (*)$$

الفصل الثاني: الاستقرارية، حالة الارتباط الذاتي والارتباط الذاتي الجزئي

وتقدير هذا النموذج بطريقة المربعات الصغرى العادية غير ممكن إلا بعد حذف الحد الثابت ليصبح:

$$Y_t = \beta_1 t + \sum_{j=1}^P \lambda_j S_j + \varepsilon_t \quad (**)$$

$$\sum_{j=1}^4 c_j = 0 \quad \text{تحت فرضية:}$$

تحت هذه الفرضية يمكن إثبات أن:

$$\beta_0 = \frac{\sum_{j=1}^4 \lambda_j}{4}$$

$$C_j = \lambda_j - \beta_0$$

وبناءً على ما سبق، قمنا بتقدير النموذج وفق الصيغة (**) وكانت النتائج على النحو التالي:

$$Y_t = 1,09t + 115,76S_1 + 129,46S_2 + 142,97S_3 + 197,88S_4$$

$$S_e \quad (0,27) \quad (3,94) \quad (4,12) \quad (4,30) \quad (4,5)$$

المعاملات المقدرة لـ λ_j هي التأثيرات الموسمية، وباختبار معنويتها يتم الإقرار بوجود الفصلية من عدمه. بحيث يمكن استخدام القيم (S_e) الواردة في نتائج التقدير أعلاه وهي تمثل الانحراف المعياري المقدر لكل معلمة، لحساب قيم إحصائية ستودنت لكل معلمة كما ذكرنا سابقاً.

$$t^*_{\lambda_1} = \frac{\hat{\lambda}_1}{S_{e(\hat{\lambda}_1)}} = \frac{115,76}{3,95} = 29,38 > 2,09$$

$$t^*_{\lambda_2} = \frac{\hat{\lambda}_2}{S_{e(\hat{\lambda}_2)}} = \frac{129,46}{4,12} = 31,42 > 2,09$$

$$t^*_{\lambda_3} = \frac{\hat{\lambda}_3}{S_{e(\hat{\lambda}_3)}} = \frac{142,97}{4,3} = 33,24 > 2,09$$

$$t^*_{\lambda_4} = \frac{\hat{\lambda}_4}{S_{e(\hat{\lambda}_4)}} = \frac{197,88}{4,5} = 43,97 > 2,09$$

نلاحظ أن القيم المحسوبة لإحصائية t ستودنت للمعاملات الموسمية أكبر من القيمة المجدولة لـ t عند مستوى معنوية 5% مما يقودنا إلى رفض فرضية العدم التي تنص على أن المعاملات المقدرة لا تختلف معنوياً عن الصفر، ونقر بمعنوية المعاملات المقدرة عند مستوى 5%.

الفصل الثاني: الاستقرارية، دالة الارتباط الذاتي والارتباط الذاتي الجزئي

كما يمكن تقدير معاملات النموذج وفق الصيغة (*) أعلاه كما يلي:

انطلاقاً من فرضية أن: $\sum_{j=1}^4 c_j = 0$ يمكن استنتاج مقدار الحد الثابت β_0 والمعاملات C_j كما يلي:

$$\hat{\beta}_0 = \frac{\sum_{j=1}^4 \lambda_j}{4} = \frac{(115,76 + 129,46 + 142,97 + 197,88)}{4} = 146,52$$

وكذلك:

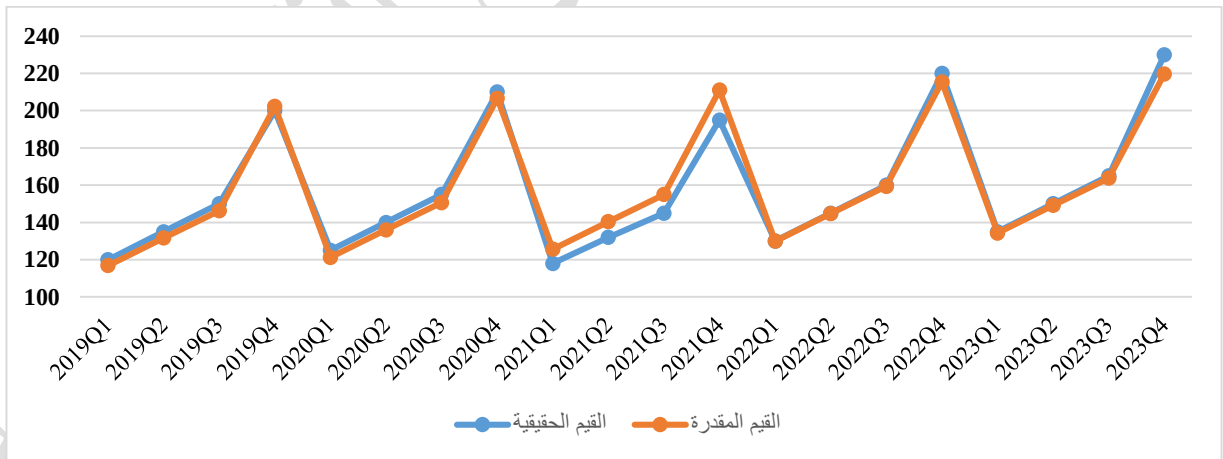
$$\hat{C}_j = \hat{\lambda}_j - \hat{\beta}_0 \Rightarrow \begin{cases} \hat{C}_1 = \hat{\lambda}_1 - \hat{\beta}_0 = 115,76 - 146,52 = -30,76 \\ \hat{C}_2 = \hat{\lambda}_2 - \hat{\beta}_0 = 129,46 - 146,52 = -17,05 \\ \hat{C}_3 = \hat{\lambda}_3 - \hat{\beta}_0 = 142,97 - 146,52 = -3,55 \\ \hat{C}_4 = \hat{\lambda}_4 - \hat{\beta}_0 = 197,88 - 146,52 = 51,36 \end{cases}$$

ومنه يكون النموذج المقدّر على النحو التالي:

$$Y_t = 146,52 + 1,09t - 30,76S_1 - 17,05S_2 - 3,55S_3 + 51,36S_4$$

يمكننا استخدام نتائج تقدير النموذج (*) لتقدير قيم السلسلة Y والتحقق من مدى مطابقة القيم المقدرة بالقيم الحقيقية كما هو مبين في الشكل التالي:

الشكل 1-5: التمثيل البياني للقيم الحقيقية والقيم المقدرة للنموذج الموسمي



لاحظ أنه بالرغم من وجود اختلاف بين القيم المقدرة والقيم الحقيقية للسلسلة Y إلا أن منحنى السلسلة المقدرة يأخذ نفس سلوك السلسلة الأصلية.

2. طريقة الاعتماد على دالة الارتباط الذاتي:

الفصل الثاني: الاستقرارية، دالة الارتباط الذاتي والارتباط الذاتي الجزئي

دالة الارتباط الذاتي تقيس درجة الارتباط الخطي بين قيم السلسلة الزمنية Y_t وقيمها المتأخرة زمنياً Y_{t-k} عند التأخير k ، تعتمد على فكرة الارتباط بين المشاهدات في فترات مختلفة. وتكتسي دالة الارتباط الذاتي أهمية بالغة في إبراز الخصائص الجوهرية للسلسلة الزمنية. بحيث تظهر الفصلية في الرسم البياني لهذه الدالة في شكل قمم وانخفاضات في فترات زمنية تعادل p ، أي أنه تظهر قمة في دورة تعادل p مثلاً $p=12$ ، ونفس الشيء بالنسبة للانخفاضات.

يتم حساب معاملات دالة الارتباط الذاتي للمتغير وفق العلاقة التالية:

$$r_k = \hat{\rho}(k) = \frac{\sum_{t=1}^T (y_t - \bar{y})(y_{t-k} - \bar{y})}{\sum_{t=1}^T (y_t - \bar{y})^2}$$

مع الإشارة إلى أن هذه الطريقة لا يمكن تطبيقها في الوقت الحالي حتى يدرس الطالب في المحور الثاني

دالة الارتباط الذاتي، ماهيتها وطريقة حسابها.

5. سلسلة تمارين الفصل الأول:

التمرين الأول:

لنكن سلسلة مؤشر المبيعات الفصلية لسلعة في مؤسسة معينة معطاة في الجدول المقابل، وذلك خلال ثلاث سنوات كما يلي:

السنة \ الفصل	2021	2022	2023
الفصل 1	118,2	148,6	163,3
الفصل 2	129	154,5	175,3
الفصل 3	138,9	163,3	189,1
الفصل 4	157,1	184	217,9

في الأسطر لدينا الفصول الأربعة 1,2,3,4 وفي الأعمدة لدينا السنوات الثلاث 2021,2022,2023.

1. ما هو الإجراء الذي يسمح لنا بتوضيح أن السلسلة تحتوي على تغيرات موسمية.

2. أوجد معادلة المستقيم الذي يمثل العلاقة بين y (مؤشر المبيعات الفصلي) والزمن t بمعنى $y=f(t)$.

3. كم سيكون مؤشر المبيعات للفصل الأول من سنة 2024.

4. أحسب تقديرات المعاملات الموسمية للبيانات بافتراض أن الشكل الذي يربط مختلف مركبات السلسلة هو الشكل تجميعي.

التمرين الثاني:

ليكن الجدول الموالي، والذي يمثل بيانات عن عدد المواليد (بالآلاف) في إحدى الدول، وفي عدد من السنوات.

السنة	2015	2016	2017	2018	2019	2020
عدد المواليد	15	20	35	30	35	40

المطلوب:

1. أوجد تقدير معادلة الاتجاه العام الخطية.

2. أوجد القيم المقدرة، واحسب أخطاء التقدير.

الفصل الثاني: الاستقرارية، حالة الارتباط الذاتي والارتباط الذاتي الجزئي

3. اختبر معنوية العلاقة بين الظاهرة المدروسة والزمن.

4. تتبأ بقيمة الاتجاه العام لسنة 2021.

5. كَوْن مجال ثقة مناسب لقيمة الاتجاه الحقيقي سنة 2021.

التمرين 3:

لتكن بيانات سلسلة زمنية معينة موضحة في الجدول الموالي:

السنة	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
(Y _i)	20	25	18	22	25	30	33	27	35	28	28	30

المطلوب:

1. بافتراض أن طول الدورة يساوي خمس وحدات زمنية، أوجد المتوسطات المتحركة.

2. أرسم معادلة الاتجاه العام المقدرة في مقابل القيم الحقيقية.

التمرين 4:

تمثل بيانات الجدول التالي، القروض الممنوحة من طرف أحد البنوك خلال ثلاث سنوات موزعة على

أربع فصول:

الفصل السنة	الأول	الثاني	الثالث	الرابع
2021	19	24	34	43
2022	23	28	38	47
2023	23	32	38	43

أحسب المتوسطات المتحركة لهذه البيانات وارسمها في مقابل القيم الأصلية.

التمرين 5:

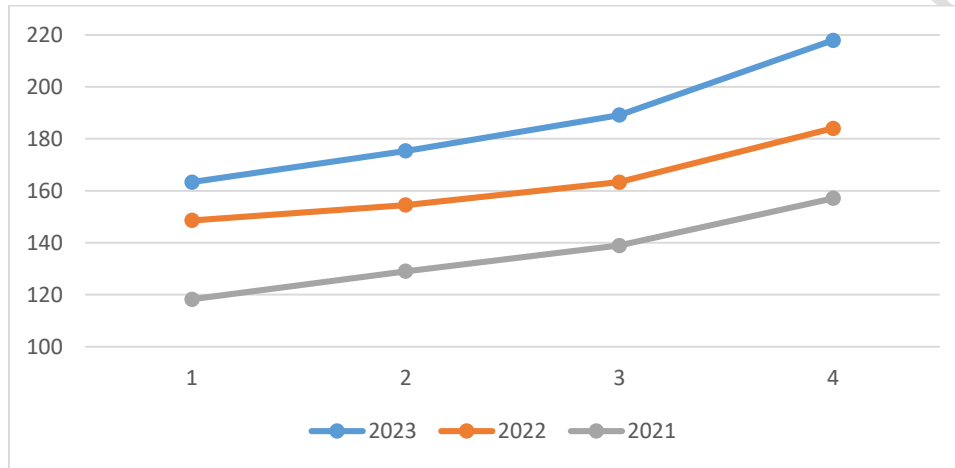
بالاعتماد على معطيات التمرين رقم 4 أعلاه أحسب تقديرات المعاملات الموسمية للبيانات.

6. حلول تمارين الفصل الأول:

حل التمرين الأول:

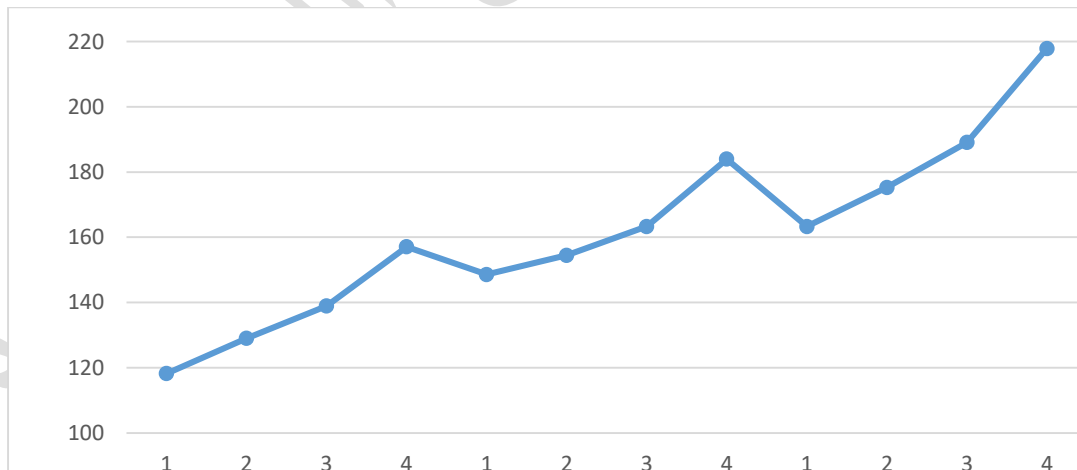
1. الإجراء الذي يسمح لنا بتوضيح أن السلسلة تحتوي على تغيرات موسمية هي الطريقة البيانية، بحيث نقوم برسم المنحنيات الموافقة لمؤشر المبيعات من أجل كل سنة في شكل منحنيات كل على حدى (الشكل الأول) أو في شكل منحنى واحد (الشكل الثاني).

الشكل الأول:



نلاحظ من خلال هذا المنحنى أن مؤشر المبيعات يعيد نفس الشكل في السنوات الثلاث وأعاد نفس السلوك خلال الفصول الأربعة من كل سنة فقط بقيم متزايدة من سنة لأخرى، ما يؤكد لنا وجود المركبة الموسمية.

الشكل الثاني:



في الشكل الثاني قمنا برسم المنحنيات الموافقة للسنوات الثلاث على شكل منحنى واحد بدلالة الفصول الأربعة في محور الترتيب، بالتالي يسمح لنا هذا الشكل من رؤية تكرار نفس السلوك خلال كل فصل من السنة بحيث خلال كل فصل يتكرر نفس السلوك خلال السنوات الثلاث، هذا ما يؤكد وجود المركبة الموسمية.

الفصل الثاني: الاستقرارية، حالة الارتباط الذاتي والارتباط الذاتي الجزئي

2. تقدير المعادلة: $y = f(t) = at + b$ (ملاحظة هامة: بالنسبة لمعاملات النموذج سواء استخدمنا الرموز $a; b$ أو الرموز β_0 و β_1 ، فهذا لا يؤثر لا على النتيجة ولا على الطريقة المستعملة لأنها مجرد رموز لمعاملات فقط)

في هذه الحالة يتعلق الأمر بتقدير معاملات المعادلة بطريقة المربعات الصغرى العادية، بحيث:
تقدير المعلمة a :

$$\hat{a} = \frac{\sum (t_i - \bar{t})(t_i - \bar{y})}{\sum (t_i - \bar{t})^2}$$

تقدير المعلمة b :

$$\hat{b} = \bar{y} - a\bar{t}$$

مع:

$$\bar{t} = \frac{\sum t_i}{N}, \quad \bar{y} = \frac{\sum y_i}{N}$$

إذن حتى نتمكن من حساب قيم المعاملات أعلاه لنتحصل على قيمة المعلمة a ، ومن ثم حساب المعلمة b ، نقوم بإعداد الجدول الموالي والذي قمنا فيه بحساب مختلف المجاميع التي نحتاجها في ذلك:

t_i	y_i	$(t_i - \bar{t})$	$(y_i - \bar{y})$	$(t_i - \bar{t})(y_i - \bar{y})$	$(t_i - \bar{t})^2$
1	118,2	-5,5	-43,4	238,7	30,25
2	129	-4,5	-32,6	146,7	20,25
3	138,9	-3,5	-22,7	79,45	12,25
4	157,1	-2,5	-4,5	11,25	6,25
5	148 ,6	-1,5	-13	19,5	2,25
6	154,5	-0,5	-7,1	3,55	0 ,25
7	163	+0,5	+1,4	0,7	0,25
8	184	+1,5	+22,4	33,6	2,25
9	163,3	+2,5	+1,7	4,25	6,25
10	175,3	+3,5	+13,7	47,95	12,25
11	189,1	+4,5	+27,5	123,75	20,25
12	217,9	+5,5	+56,3	309,65	30,25
78	1938,9			1019,05	143

هذا السطر يمثل قيم المجاميع المحسوبة

من الجدول، يمكننا حساب المتوسط الحسابي لـ t و y :

$$\bar{t} = \frac{78}{12} = 6,5 \quad , \quad \bar{y} = \frac{1938,9}{12} \approx 161,6$$

ومنه نحسب:

- القيمة المقدرة لـ a :

$$\hat{a} = \frac{\sum (t_i - \bar{t})(t_i - \bar{y})}{\sum (t_i - \bar{t})^2} = \frac{1019,05}{143} \approx 7,13$$

- القيمة المقدرة لـ b :

$$\bar{y} = a\bar{t} + b \Rightarrow b = \bar{y} - a\bar{t} = 161,6 - (7,13)(6,5) \approx 115,3$$

ومنه المعادلة $y = f(t) = at + b$ تُكتب على الشكل التالي:

$$\hat{y}_t = at + b = 7,13t + 115,3$$

وهي تقدير معادلة خط الاتجاه العام.

3. من خلال المعادلة المقدرة في السؤال الثاني، يمكننا حساب مؤشر المبيعات للفصل الأول من سنة 2024 وذلك كما يلي:

بما أن المعطيات فصلية ولدينا مشاهدات ثلاث سنوات إذن لدينا مشاهدة 12 فصلا والفصل الأول من السنة الموالية يمثل الفصل 13 (المشاهدة 13) بمعنى $t=13$ وعليه نجد:

$$y = 7,13(13) + 115,3 \approx 208$$

4. تقدير المعاملات الموسمية للبيانات بافتراض أن الشكل الذي يربط مركبات هذه السلسلة الزمنية هو الشكل التجميعي.

الشكل التجميعي: $y_t = t_t + s_t + i$ ، وبافتراض أن التغيرات العشوائية منعدمة ($i=0$) يُمكننا أن نكتب:

$$y_t = t_t + s_t \Rightarrow s_t = y_t - t_t \Rightarrow S_{ij} = y_{ij} - M_{ij}$$

إذن علينا أن نقوم بتقدير الاتجاه العام باستخدام طريقة المتوسطات المتحركة:

المرحلة الأولى: حساب المتوسطات المتحركة لطول الفترة $k=4$ (أن المعطيات فصلية)، بالتالي يمكننا

حساب ثمان متوسطات متحركة. ($n-k=12-4=8$)

وذلك باستعمال الصيغة التالية:

$$Mm_{13} = \frac{1}{4} \left(\frac{y_{11}}{2} + y_{12} + y_{13} + y_{14} + \frac{y_{21}}{2} \right) = \frac{1}{4} \left(\frac{118,2}{2} + 129 + 138,9 + 157,19 + \frac{148,6}{2} \right) = 139,6$$

$$Mm_{14} = \frac{1}{4} \left(\frac{129}{2} + 138,9 + 157,19 + 148,6 + \frac{154,5}{2} \right) = 146,6$$

الفصل الثاني: الاستقرارية، حالة الارتباط الذاتي والارتباط الذاتي الجزئي

ونكمل بنفس الطريقة حتى نحصل على المتوسطات المتحركة الثمانية مع فقدان القيمتين الأوليتين والأخريتين.

الجدول 1: المعطيات الخام (y_{ij})

	1	2	3
1	118,2	148,6	163,3
2	129	154,5	175,3
3	138,9	163	189,1
4	157,1	184	217,9

الجدول 2: المتوسطات المتحركة الموافقة والمحسوبة (M_{ij})

	1	2	3
1	///	152,8	174,7
2	///	159,2	1182,2
3	139,6	164,4	///
4	146,6	168,8	///

المرحلة الثانية: حساب المعاملات الموسمية الخام

نقوم بحساب المعاملات الموسمية الخام وهي $S_{ij} = y_{ij} - M_{ij}$ ، وما هي إلا عملية الطرح بين جدول المعطيات الخام وجدول المتوسطات المتحركة الموافقة والمحسوبة (الجدول 1 و 2) فنحصل على ما يلي:

$$S_{13} = 138,9 - 139,6 = -0,7$$

$$S_{14} = 157,1 - 146,6 = 10,5$$

ونكمل الحساب بنفس الطريقة حتى نتحصل على جميع المعاملات الموسمية الخام في الجدول الموالي:

الجدول 3: المعاملات الموسمية الخام (S_{ij})

	1	2	3
1	///	-4,2	-11,4
2	///	-4,7	-7
3	-0,7	-1,4	///
4	10,5	15,2	///

المرحلة 3: حساب المعاملات الموسمية النهائية

نقوم بحساب المعاملات الموسمية النهائية والتي هي متوسط المعاملات الموسمية الخام:

$$S_1 = \frac{(-4,2) + (-11,4)}{2} = -7,8$$

$$S_2 = \frac{(-4,7) + (-7)}{2} = -5,9$$

$$S_3 = \frac{(-0,7) + (-1,4)}{2} = -1,1$$

$$S_4 = \frac{(10,5) + (15,2)}{2} = 12,9$$

الآن علينا أن نقوم بحساب متوسط هذه المعاملات والتي يجب أن تكون مساوية للصفر (في حالة النموذج التجميعي لمركبات السلسلة الزمنية)، وفي حالة العكس علينا تصحيح المعاملات الموسمية بحساب S'_j والتي تسمى المعاملات الموسمية المُصححة.

في الحالة التي لدينا نلاحظ أن متوسط المعاملات الموسمية هو: $\sum S_j = -1,9 \Rightarrow \frac{\sum S_j}{4} = -0,475$ ، وهو ما يسمى المعامل المصحح. وعليه نقوم بطرح القيمة $-0,475$ من كل المعاملات الموسمية الفصلية.

$$S'_j = S_j - \frac{\sum S_j}{4}$$

على سبيل المثال: $S'_1 = -7,8 - (-0,475) = -7,3$ ، وبإكمال جميع الحسابات نتحصل على الجدول الموالي:

الجدول رقم 4: المعاملات الموسمية الفصلية المصححة

الفصل	1	2	3	4
S_j	-7,8	-5,9	-1,1	+12,9
S'_j	-7,3	-5,4	-0,6	+13,3

نلاحظ أن مجموع S'_j يساوي الصفر. وبالتالي يمكن الآن إيجاد السلسلة منزوعة الفصلية Y_{ij}^* وذلك وفق العلاقة التالية:

$$Y_{ij}^* = Y_{ij} - S'_j$$

الفصل الثاني: الاستقرارية، حالة الارتباط الذاتي والارتباط الذاتي الجزئي

مثلاً لدينا: $Y_{11}^* = 118,2 - (-7,3) = 125,5$ ، ونكمل كل الحسابات لنحصل على السلسلة المحسوبة

في الجدول الموالي:

الجدول رقم 5: السلسلة منزوعة الفصلية

	1	2	3
1	125,5	155,9	170,6
2	134,4	159,9	180,7
3	139,5	163,6	189,7
4	143,8	170,7	204,6

حل التمرين الثاني:

لدينا بيانات عن عدد المواليد (بالآلاف) في إحدى الدول، وفي عدد من السنوات:

السنة	2015	2016	2017	2018	2019	2020
عدد المواليد	15	20	35	30	35	40

1. تقدير معادلة الاتجاه العام الخطية، والتي تُكتب من الشكل $y_t = \beta_0 + \beta_1 t + \varepsilon_t$ مع العلم أنه من

الجدول نلاحظ أن $t = 1, 2, 3, 4, 5, 6$

ينحصر تقدير الاتجاه العام في تقدير معلمتي النموذج β_0 و β_1

الشكل المصفوفي يُكتب كما يلي:

$$Y = X\beta + \varepsilon$$

بحيث:

$$X = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \\ 1 & 3 \\ 1 & 4 \\ 1 & 5 \\ 1 & 6 \end{bmatrix},$$

$$\varepsilon = [\varepsilon_1 \quad \varepsilon_2 \quad \varepsilon_3 \quad \varepsilon_4 \quad \varepsilon_5 \quad \varepsilon_6] \quad , \quad \beta = \begin{bmatrix} \beta_0 \\ \beta_1 \end{bmatrix}$$

$$Y = [y_1 \quad y_2 \quad y_3 \quad y_4 \quad y_5 \quad y_6]$$

$$Y = [15 \quad 20 \quad 35 \quad 30 \quad 35 \quad 40]$$

إذن مقدار شعاع معلمتي معادلة الاتجاه العام $\beta = \begin{bmatrix} \beta_0 \\ \beta_1 \end{bmatrix}$ هو الشعاع $\hat{\beta} = (X'X)^{-1} X'Y$ وذلك

باستعمال طريقة المربعات الصغرى، إذن نقوم بحساب الأطراف اللازمة كما يلي:

$$X'X = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \\ 1 & 3 \\ 1 & 4 \\ 1 & 5 \\ 1 & 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 & 21 \\ 21 & 91 \end{bmatrix}$$

$$(X'X)^{-1} = \frac{1}{105} \begin{bmatrix} 91 & -21 \\ -21 & 6 \end{bmatrix}$$

$$X'Y = \begin{bmatrix} 175 \\ 695 \end{bmatrix}$$

ومنه نستنتج أن:

$$\hat{\beta} = \frac{1}{105} \begin{bmatrix} 91 & -21 \\ -21 & 6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 175 \\ 695 \end{bmatrix} = \frac{1}{105} \begin{bmatrix} 1330 \\ 495 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 12.67 \\ 4.71 \end{bmatrix}$$

إذن

$$\hat{\beta} = \begin{bmatrix} \hat{\beta}_0 \\ \hat{\beta}_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 12.67 \\ 4.71 \end{bmatrix}$$

وبذلك مُقدر معادلة الاتجاه العام هي:

$$\hat{y}_t = 12,67 + 4,71t$$

2. إيجاد القيم المقدرة لمركبة الاتجاه العام والأخطاء المقدرة:

بالتعويض المتتالي عن قيم: $t = 1, 2, 3, 4, 5, 6$ نحصل على القيم المقدرة للاتجاه العام المقدرة التالية:

$$\hat{y}_1 = 12,67 + 4,71(1) = 17,38$$

$$\hat{y}_2 = 22,09; \quad \hat{y}_3 = 26,8; \quad \hat{y}_4 = 31,51; \quad \hat{y}_5 = 36,22; \quad \hat{y}_6 = 40,93$$

ومن ثم فإن الأخطاء المقدرة والتي تحسب وفق العبارة التالية: $\hat{\varepsilon}_t = y_t - \hat{y}_t$ هي على التوالي:

$$\hat{\varepsilon}_1 = y_1 - \hat{y}_1 = 15 - 17,38 = -2,38$$

$$\hat{\varepsilon}_2 = -2,09; \hat{\varepsilon}_3 = 8,2; \hat{\varepsilon}_4 = -1,51; \hat{\varepsilon}_5 = -1,22; \hat{\varepsilon}_6 = -0,93$$

3. اختبار معنوية العلاقة بين الظاهرة والزمن.

هذا الاختبار يرجع أساسا لاختبار معنوية المعلمة $\hat{\beta}_1$ ، فإذا كانت معنويا أي تختلف عن الصفر، فإن العلاقة بين الظاهرة والزمن معنوية، أما إذا كانت غير معنوية، فإن العلاقة بين الظاهرة والزمن غير معنوية.

وفي نفس السياق معنوية المعلمة $\hat{\beta}_1$ تدل على وجود مركبة الاتجاه العام في السلسلة وعليه:

نقوم بحساب قيمة الإحصائية t المعرفة بالصيغة التالية $t = \hat{\beta}_1 / s\sqrt{c_{22}}$ ، مع العلم أن:

$$SSE = \sum_{t=1}^6 \hat{\varepsilon}_t^2 = 81,906$$

وكذلك لدينا:

$$s^2 = \hat{\sigma}^2 = \frac{SSE}{n-2} = \frac{81,906}{6-2} = 20,4765, \quad s = 4,525$$

$$\hat{V}(\hat{\beta}) = s^2(X'X)^{-1} = s^2C$$

$$(X'X)^{-1} = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{bmatrix} = \frac{1}{105} \begin{bmatrix} 91 & -21 \\ -21 & 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{91}{105} & \frac{-21}{105} \\ \frac{-21}{105} & \frac{6}{105} \end{bmatrix}$$

وبالتالي نجد:

$$t^* = \hat{\beta}_1 / s\sqrt{c_{22}} = 4,71 / 4,525\sqrt{6/105} = 4,324$$

وهي قيمة t ستودنت المحسوبة.

في المقابل من خلال جدول القيم الحرجة لإحصائية ستودنت لدينا القيمة المجدولة عند مستوى معنوية

$$\alpha = 5\% \text{ هي: } t_{\frac{\alpha}{2}, n-2} = t_{0,025, 4} = 2,776$$

الفصل الثاني: الاستقرارية، حالة الارتباط الذاتي والارتباط الذاتي الجزئي

ومنه، بما أن القيمة المحسوبة أكبر من القيمة المجدولة عند مستوى 5%، إذن نرفض فرضية عدم القائلة بأن المعلمة $\beta_1 = 0$ ونقر بوجود علاقة خطية معنوية بين قيم الظاهرة والزمن عند مستوى 5%.

4. التنبؤ بقيمة الاتجاه العام لسنة 2021.

السنة 2021 هي سنة توافق القيمة $t = 7$

نعوض في المعادلة المقدرة عند: $t = 7$ نجد:

$$\hat{y}_7 = 12,67 + 4,71(7) = 45,64$$

5. تكوين مجال ثقة مناسب لقيمة الاتجاه الحقيقي سنة 2021.

يمكن إنشاء مجال ثقة للاتجاه العام الحقيقي عند الزمن $t = t_0$ بافتراض أن الأخطاء ε_t تتوزع طبيعياً

كما يلي:

$$\hat{y}_0 \pm t_{\alpha/2, n-1} s [1 + x'_0 (X'X)^{-1} x_0]^{1/2}$$

$$x'_0 = [1 \quad t_0]$$

لدينا من أجل سنة 2001، $t = t_0 = 7$ ،

$$x'_0 (X'X)^{-1} = [1 \quad 7] \frac{1}{105} \begin{bmatrix} 91 & -21 \\ -21 & 6 \end{bmatrix} = \frac{1}{105} [-56 \quad 21]$$

ولدينا كذلك:

$$x'_0 (X'X)^{-1} x = \frac{1}{105} [-56 \quad 21] \begin{bmatrix} 1 \\ 7 \end{bmatrix} = 0.87$$

$$s = 4.525$$

$$t_{\frac{\alpha}{2}, n-2} = t_{0.025, 4} = 2.776$$

الخطأ المعياري للمقدر $\hat{y}_7$ هو:

$$SE(\hat{y}_0) = 4,525 [1 + 0,87]^{1/2} = 6,19$$

إذن بالتعويض العددي في صيغة مجال الثقة نجد:

$$45,64 \pm (2,776)(6,19) = (28,46 , 62,82)$$

وهو مجال الثقة لقيمة الاتجاه المتوقع لسنة 2021، ويُمكن للطالب أن يلاحظ بأنه لا يحتوي القيمة صفر (0) وهذا ما يؤكد معنوية معلمة الاتجاه العام.

حل التمرين 3:

لتكن بيانات سلسلة زمنية في الجدول الموالي:

السنة	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
(Y _i)	20	25	18	22	25	30	33	27	35	28	28	30

بافتراض أن طول الدورة يساوي خمس وحدات زمنية، أوجد المتوسطات المتحركة.

نلاحظ في هذا التمرين أن طول الدورة $k = 5$ عدد فردي بالتالي تُحسب المتوسطات المتحركة وفق الصيغة

التالية:

$$\hat{y}_t = \frac{1}{k} \left[y_{t-\frac{k-1}{2}} + \dots + y_{t-1} + y_t + y_{t+1} + \dots + y_{t+\frac{k-1}{2}} \right]$$

نلاحظ من التمرين أن $(t = n = 12)$ بالتالي عدد المتوسطات المتحركة التي يمكن حسابها هو ثمانية

$$[(n - (k - 1)) = 12 - (5 - 1) = 8] \text{ وهي:}$$

$$\begin{aligned} \hat{y}_3 &= \frac{1}{5} \left[y_{3-\frac{5-1}{2}} + y_{3-1} + y_3 + y_{3+1} + y_{3+\frac{5-1}{2}} \right] \\ &= \frac{1}{5} [y_1 + y_2 + y_3 + y_4 + y_5] \\ &= \frac{1}{5} [20 + 25 + 18 + 22 + 25] = 22 \end{aligned}$$

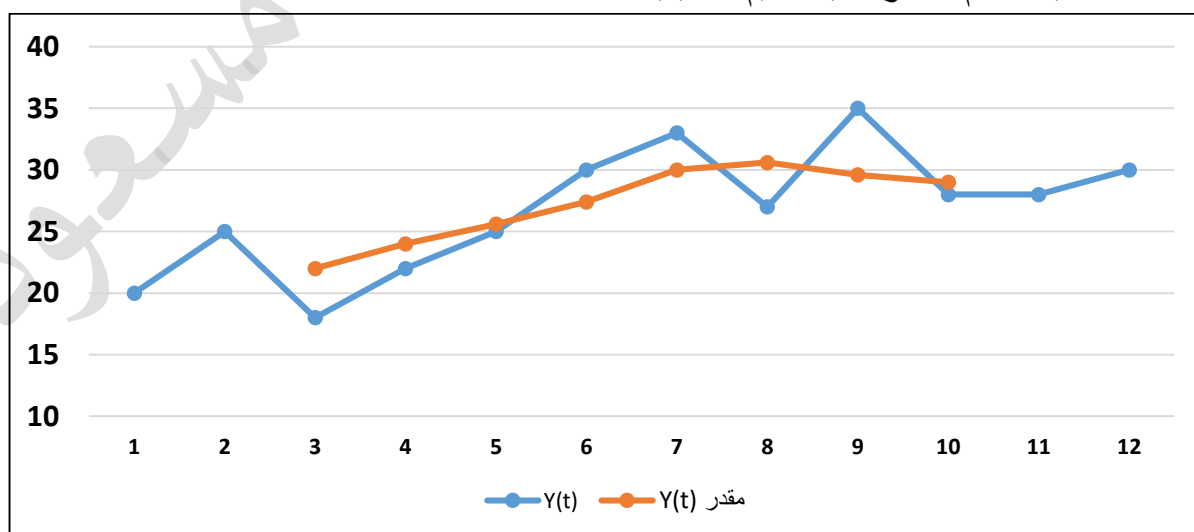
وبنفس الطريقة يتم حساب كل من: $\hat{y}_4, \hat{y}_5, \hat{y}_6, \hat{y}_7, \hat{y}_8, \hat{y}_9$ و $\hat{y}_{10}$

والتي نقدمها في الجدول الموالي:

الفصل الثاني: الاستقرارية، حالة الارتباط الذاتي والارتباط الذاتي الجزئي

t	y_t	المتوسطات المتحركة $\hat{y}_t$
1	20	
2	25	
3	18	$\frac{1}{5}[20 + 25 + 18 + 22 + 25] = 22$
4	22	$\frac{1}{5}[25 + 18 + 22 + 25 + 30] = 24$
5	25	$\frac{1}{5}[18 + 22 + 25 + 30 + 33] = 25.6$
6	30	$\frac{1}{5}[22 + 25 + 30 + 33 + 27] = 27.4$
7	33	$\frac{1}{5}[25 + 30 + 33 + 27 + 35] = 30$
8	27	$\frac{1}{5}[30 + 33 + 27 + 35 + 28] = 30.6$
9	35	$\frac{1}{5}[33 + 27 + 35 + 28 + 25] = 29.6$
10	28	$\frac{1}{5}[27 + 35 + 28 + 25 + 30] = 29$
11	25	
12	30	

رسم معادلة الاتجاه العام المقدرة مقابل القيم الحقيقية.



الفصل الثاني: الاستقرارية، حالة الارتباط الذاتي والارتباط الذاتي الجزئي

من خلال المنحنى أعلاه من السهل ملاحظة أن المتوسطات المتحركة أو تقديرات الاتجاه العام أكثر تمهيدا من منحنى السلسلة الأصلي، والسبب في ذلك أنه بأخذ المتوسطات المتحركة تميل التغيرات غير النمطية أن تتلاشى لأنها تغيرات لا تستمر طويلا، وأحيانا تؤثر على الظاهرة بالزيادة وأحيانا أخرى بالنقصان.

كما نلاحظ أن منحنى الاتجاه العام المقدر قريب من الدرجة الثانية.

كما يجب أن نعلم بأن منحنى الاتجاه المقدر يكون أكثر تمهيدا بزيادة طول الدورة k وذلك إذا كانت التأرجحات حول منحنى الاتجاه العام عشوائية بحتة، أي إذا كانت السلسلة خالية من التغيرات الموسمية.

حل التمرين الرابع:

حساب المتوسطات المتحركة لهذه البيانات ورسمها في مقابل القيم الأصلية.

نأخذ طول الدورة $k = 4$ وذلك للتخلص من التغيرات الموسمية و التغيرات العشوائية. وبما أن k زوجي

نستعمل الصيغة التالية لحساب المتوسطات المتحركة

$$\hat{y}_t = \frac{1}{k} \left[y_{t-\frac{k}{2}} + y_{t-\frac{k}{2}+1} + \dots + y_{t-2} + y_{t-1} + y_t + y_{t+1} + \dots + y_{t+\frac{k}{2}-1} \right]$$

في هذه الحالة يمكن الحصول على $n - k$ متوسط متحرك فقط لأن المتوسطين الأولين و الآخرين لا يمكن حسابهما، وبالتالي نحصل على $(12 - 4 = 8)$ ثمان متوسطات متحركة تبدأ من $\hat{y}_3$ ، والذي يُحسب كما يلي:

$$\hat{y}_3 = \frac{1}{4} \left[y_{3-\frac{4}{2}} + y_{3-\frac{4}{2}+1} + y_3 + y_{t+\frac{k}{2}-1} \right]$$

$$\hat{y}_3 = \frac{1}{4} [y_{3-2} + y_{3-1} + y_3 + y_{3+1}]$$

$$\hat{y}_3 = \frac{1}{4} [19 + 24 + 34 + 43] = 30$$

بالتالي يوضع هذا المتوسط بين القيمتين y_2 و y_3 .

ونقوم بحساب المتوسط المتحرك الموالي بنفس الطريقة، أي مثلا من أجل $t = 4$ نجد:

$$\hat{y}_4 = \frac{1}{4} \left[y_{4-\frac{4}{2}} + y_{4-\frac{4}{2}+1} + y_4 + y_{t+\frac{k}{2}-1} \right]$$

$$\hat{y}_4 = \frac{1}{4} [y_{4-2} + y_{4-1} + y_4 + y_{4+1}]$$

$$\hat{y}_4 = \frac{1}{4} [24 + 34 + 43 + 23] = 31$$

الفصل الثاني: الاستقرارية، حالة الارتباط الذاتي والارتباط الذاتي الجزئي

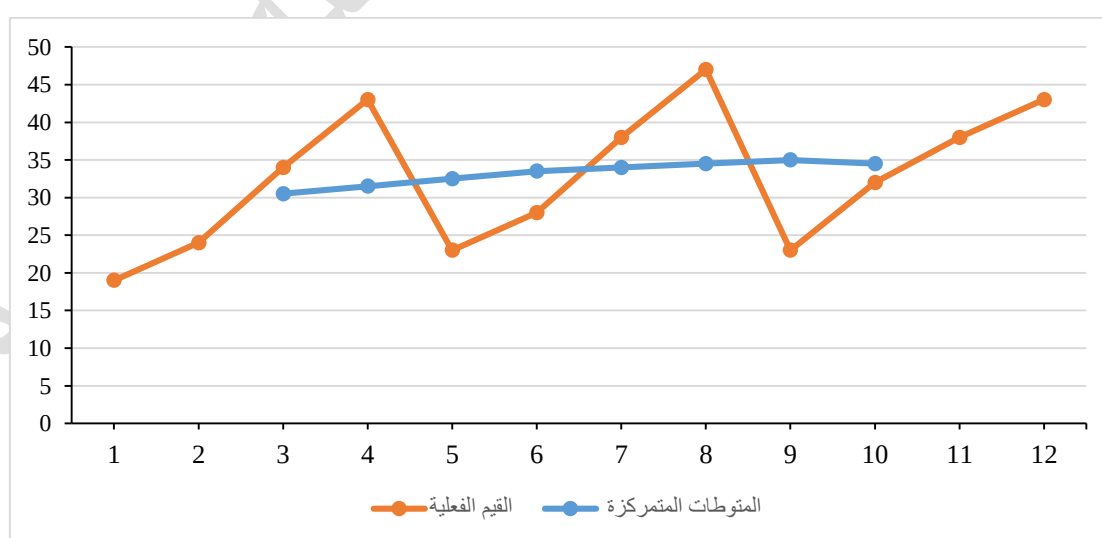
وعليه فإن المتوسط المتمركز الذي يقابل القيمة الفعلية y_3 يتم حسابه بأخذ المتوسط الحسابي للمتوسطين المتحركين كما يلي:

$$\hat{y}_3 = (30 + 31) / 2 = 30.5$$

والجدول الموالي يوضح الحسابات التي تحصلنا عليها:

الزمن	y_t	المتوسطات المتحركة	المتوسطات المتمركزة $\hat{y}_t$
1	19		
2	24		
3	34	$(19+24+34+43)/4=30$	$(30+31)/2=30,5$
4	43	$(24+34+43+23)/4=31$	$(31+32)/2=31,5$
5	23	$(34+43+23+28)/4=32$	$(32+33)/2=32,5$
6	28	$(43+23+28+38)/4=33$	$(33+34)/2=33,5$
7	38	$(23+28+38+47)/4=34$	$(34+34)/2=34$
8	47	$(28+38+47+23)/4=34$	$(34+35)/2=34,5$
9	23	$(38+47+23+32)/4=35$	$(35+35)/2=35$
10	32	$(47+23+32+38)/4=35$	$(35+34)/2=34,5$
11	38	$(23+32+38+43)/4=34$	
12	43		

ويمكن تمثيل ذلك بيانيا في الشكل الموالي الذي يمثل المشاهدات الفعلية والمتوسطات المتحركة الممركزة:



من خلال هذا التمرين يمكن الإشارة إلى ملاحظتين مهمتين:

الفصل الثاني: الاستقرارية، حالة الارتباط الذاتي والارتباط الذاتي الجزئي

- الأولى أن اختيار العدد 4 لكي يكون أساسا لحساب المتوسطات المتحركة هو اختيار أمله علينا طبيعة البيانات، والتي تتميز بوجود نمط موسمي يتكرر كل 4 فترات زمنية (مواسم). بهذا الاختيار نكون قد تخلصنا من نوعين من التغيرات قصيرة الأجل. النوع الأول هو التغيرات العشوائية، والتي لا تستمر طويلا وتميل أن تلاشي بعضها البعض عند أخذ المتوسطات المتحركة. النوع الثاني هو التغيرات الموسمية وذلك لأن كل متوسط متحرك يأخذ في اعتباره كل المواسم (الفصول) بنسب متساوية.

- الملاحظة الثانية أن منحنى الاتجاه العام المقدّر $\hat{y}_t$ لا يمثل خطأ مستقيما بالضبط وهو خال من التعرجات والذبذبات الموسمية التي تعتري البيانات الأصلية.

حل التمرين الخامس:

من أجل حساب تقديرات المعاملات الموسمية نتبع الخطوات التالية، وبعدها نقوم بوضع النتائج الكلية في جدول واحد:

1. بحساب المتوسطات المتحركة الممركزة، نكون قد تخلصنا من مركبتي الموسم وغير المنتظمة، وبالتالي فإن هذه المتوسطات تمثل توليفة من عاملي الاتجاه العام والدوري، أي أن:

$$(MA)_t = (t_t \times c_t)$$

وقد قمنا بحسابها بالتفصيل في التمرين الرابع.

2. بافتراض أن العلاقة التي تربط مركبات السلسلة الزمنية هي علاقة جُذائية فإننا نكتب:

$$y_t = t_t \times s_t \times i \times c_t$$

وبالتالي نجد بأن:

$$s_t \times i_t = \frac{y_t}{t_t \times c_t} = \frac{y_t}{(MA)_t}$$

السنوات	الزمن t	y_t	$(MA)_t = (t_t \times c_t)$	$s_t \times i_t = \frac{y_t}{(MA)_t}$
2021	1	19		
	2	24		
	3	34	30,5	1,11
	4	43	31,5	1,37
2022	5	23	32,5	0,71

الفصل الثاني: الاستقرارية، حالة الارتباط الذاتي والارتباط الذاتي الجزئي

	6	28	33,5	0,84
	7	38	34	1,12
	8	47	34,5	1,36
2023	9	23	35	0,66
	10	32	34,5	0,93
	11	38		
	12	43		

3. يتم حذف أثر العوامل غير المنتظمة من التوليفة (s_t, i_t) بإيجاد المتوسط الحسابي لها، وبالتالي نحصل على متوسطات المعاملات الموسمية $\bar{S}_t$.

بحيث يُمكن تلخيص بيانات العمود $(s_t \times i_t)$ في جدول كالتالي:
بحيث الربع هو الفصل وقيمة كل فصل تقابله القيمة الخاصة به بحيث

	الربع الأول	الربع الثاني	الربع الثالث	الربع الرابع
	0.71	0.84	1.11	1.37
	0.66	0.93	1.12	1.36
المتوسط الحسابي $\bar{s}_t$	0.685	0.885	1.115	1.365

4. بما أن $\sum \bar{s}_t = 0.685 + 0.885 + 1.115 + 1.365 \neq 4$ ، نقوم بحساب معامل التصحيح correction factor وفق الصيغة التالية:

$$CF = \frac{4}{\sum \bar{s}_t} = 0.9877$$

5. في الأخير تُحسب تقديرات المُعاملات الموسمية كما يلي:

$$S_t = CF \times \bar{S}_t$$

إذن تقديرات المعاملات الموسمية تكون على التوالي:

$$S_1 = (0.9877)(0.685) = 0.68$$

$$S_2 = (0.9877)(0.885) = 0.87$$

$$S_3 = (0.9877)(1.115) = 1.1$$

$$S_4 = (0.9877)(1.365) = 1.35$$

مع ملاحظة أن مجموع تقديرات المعاملات الموسمية يساوي الآن 4.

ويمكن كتابة النتائج في الجدول الموالي كتكملة للجدول الأول الممثل أعلاه:

السنوات	الزمن t	s_t	$d_t = y_t / s_t$
2021	1	0,68	27,94
	2	0,87	27,59
	3	1,1	30,91
	4	1,35	31,85
2022	5	0,68	33,82
	6	0,87	32,18
	7	1,1	34,55
	8	1,35	34,81
2023	9	0,68	33,82
	10	0,87	36,78
	11	1,1	34,55
	12	1,35	31,85

تفسير النتائج المُحصل عليها:

- إذا كان المعامل الموسمي المُناظر لموسم معين يساوي الواحد الصحيح فإن هذا يعني أن هذا الموسم ليس له أثر موسمي على الظاهرة.
- وإذا كان المعامل الموسمي أكبر من الواحد الصحيح فإن هذا يعني أن هذا الموسم يؤثر على الظاهرة بالزيادة.
- أما إذا كان المعامل الموسمي أصغر من الواحد الصحيح فهذا يعني أن هذا الموسم يؤثر على الظاهرة بالنقصان.

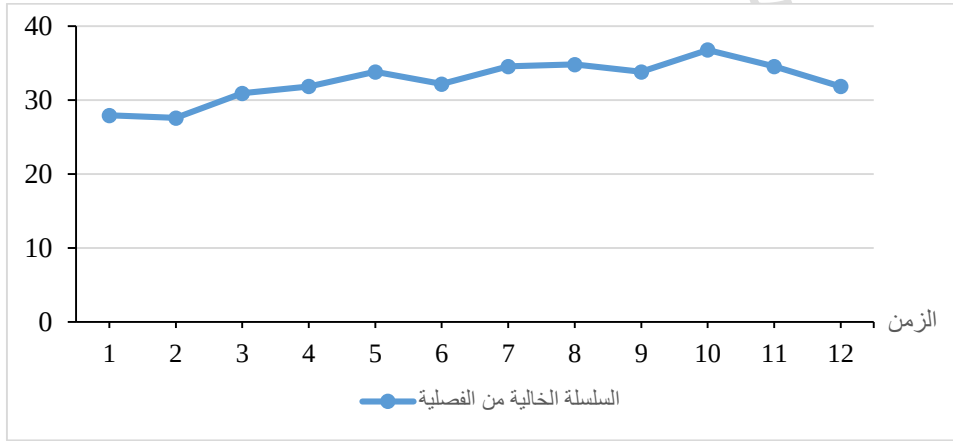
الفصل الثاني: الاستقرارية، حالة الارتباط الذاتي والارتباط الذاتي الجزئي

وفي مثالنا، يمكن القول بأن الموسم الأول (الربع الأول) يُنقص من مستوى السلسلة بنسبة 32% تقريباً، فإذا كانت قيمة الاتجاه العام في هذا الموسم 100 فإن المعامل الموسمي يجذب هذه القيمة إلى أسفل لتصبح 68 فقط.

كما يمكن القول بأن الموسم الرابع (الربع الرابع) يزيد من مستوى السلسلة بنسبة 35%، فإذا كانت قيمة الاتجاه في هذا الموسم 100 فإن المعامل الموسمي s_4 يجذب من هذه القيمة إلى الأعلى لتصبح 135.

إيجاد قيم الظاهرة بعد إزالة أثر الموسمية:

لإيجاد قيم الظاهرة الخالية من أثر الموسم نقوم بقسمة القيمة الحقيقية للظاهرة y_t على العدد s_t لنحصل على القيم المعدلة للظاهرة والتي أشرنا إليها في الجدول أعلاه بالرمز d_t . ويمكن توضيح ذلك بيانياً في الشكل التالي:



لاحظ أن منحنى السلسلة الجديدة $d_t = y_t / s_t$ لا يحتوي على قمم شديدة مما يشير إلى التخلص من التأثير الموسمي.

الفصل الثاني:

الاستقرارية، دالة الارتباط الذاتي
والارتباط الذاتي الجزئي

الفصل الثاني: الاستقرار، دالة الارتباط الذاتي والارتباط الذاتي الجزئي

1. مفهوم الإستقرارية وطرق اختبارها:

1.1 مفهوم الإستقرارية (السكون التام والسكون الضعيف):

يفترض التحليل الحديث للسلاسل الزمنية أن أي مشاهدة معينة y_{t_1} عند نقطة زمنية معينة t_1 هي مفردة واحدة سُحبت عشوائيا من متغير عشوائي Y_{t_1} (يمثل جميع القيم التي يمكن أن تُشاهد عند الزمن t_1) له دالة توزيع احتمال تراكمي $F(y_{t_1})$. وبالمثل يفترض هذا التحليل أن أي مشاهدين (y_{t_1}, y_{t_2}) عند أي نقطتين زمنيتين مختلفتين (t_1, t_2) هي قيمة واحدة ثنائية الأبعاد سُحبت عشوائيا من متغير عشوائي ثنائي الأبعاد Bivariate random variable (Y_{t_1}, Y_{t_2}) - يمثل جميع القيم ثنائية الأبعاد التي يمكن أن تُشاهد عند النقطتين الزمنيتين (t_1, t_2) - له دالة توزيع احتمال تراكمي ثنائية الأبعاد $F(y_{t_1}, y_{t_2})$.

وبصفة عامة يفترض التحليل الحديث أن المشاهدات $(y_{t_1}, y_{t_2}, \dots, y_{t_m})$ عند النقاط الزمنية المختلفة $(t_1, t_2, \dots, t_m)$ هي قيمة واحدة متعددة الأبعاد (m) سُحبت عشوائيا من متغير عشوائي متعدد الأبعاد Multivariate random variable $(Y_{t_1}, Y_{t_2}, \dots, Y_{t_m})$ - يُمثل جميع القيم متعددة الأبعاد التي يمكن أن تُشاهد عند النقاط الزمنية المختلفة $(t_1, t_2, \dots, t_m)$ - له دالة توزيع احتمال مشترك تراكمي متعدد الأبعاد $F(y_{t_1}, y_{t_2}, \dots, y_{t_m})$.

وفي الحالة الخاصة الهامة والتي يكون فيها $m = n$ و $t_i = i$ ، $i = 1, 2, \dots, n$ ، حيث يمثل n طول السلسلة المتاحة، فإن مشاهدات السلسلة المتاحة $(y_1, y_2, \dots, y_n)$ والمرصودة عند النقاط الزمنية $(1, 2, \dots, n)$ يُنظر إليها كقيمة واحدة متعددة الأبعاد سُحبت عشوائيا من متغير عشوائي متعدد الأبعاد $(Y_1, Y_2, \dots, Y_n)$ - يُمثل جميع القيم متعددة الأبعاد (n) التي يمكن أن تُشاهد عند النقاط الزمنية المختلفة $(1, 2, \dots, n)$ - له دالة احتمال مشترك تراكمي متعدد الأبعاد $F(y_1, y_2, \dots, y_n)$. أي أن منهجية بوكس وجينكنز تفترض دائما وجود سيروية عشوائية (نظرية) قادرة على توليد عدد لا نهائي من السلاسل الزمنية وأن السلسلة المتاحة ما هي إلا مجرد إحدى هذه السلاسل a realization وأن هناك توزيع احتمالي معين للمتغيرات $(Y_1, Y_2, \dots, Y_n)$.

ويقال أن السلسلة (السيروية) الزمنية مستقرة إذا كانت الخصائص الإحصائية لها ثابتة خلال الزمن أي أن هذه الخصائص لا تتغير بالإزاحة إلى الأمام أو إلى الخلف أي عدد من الوحدات الزمنية.

والخصائص الإحصائية للسلسلة (السيرورة) يمكن وصفها بشكل مؤكد وكامل عن طريق دالة الاحتمال التراكمي، ويمكن وصفها بشكل جزئي عن طريق بعض المؤشرات الهامة وأهمها التوقع والتباين والتغاير (عزوم الدرجة الأولى والثانية). ولذلك يُفَرَّق الإحصائيون بين نوعين من السكون التام (الكامل) والسكون الضعيف.

السكون التام: Strictly Stationarity

يُقال أن السلسلة الزمنية أو السيرورة العشوائية المتقطعة $\{y_t\}$ مؤكدة السكون إذا كان توزيع الاحتمال التراكمي المشترك لأي مجموعة جزئية من المتغيرات التي تتكون منها السلسلة (السيرورة) لا يتأثر بالإزاحة Shift إلى الأمام أو إلى الخلف أي عدد من الوحدات الزمنية. فإذا كانت $(t_1, t_2, \dots, t_m)$ مجموعة جزئية من الوحدات الزمنية حيث $m=1, 2, \dots$ وكان $k = \pm 1, \pm 2, \dots$ فإن السلسلة (السيرورة) $\{y_t\}$ تامة السكون إذا كانت دالة الاحتمال التراكمي المشتركة للمتغيرات $(Y_{t_1}, Y_{t_2}, \dots, Y_{t_m})$ تساوي دالة الاحتمال التراكمي المشتركة للمتغيرات $(Y_{t_1+k}, Y_{t_2+k}, \dots, Y_{t_m+k})$ لأي مجموعة من النقاط الزمنية $(t_1, t_2, \dots, t_m)$ وأي إزاحة k . وبصورة رياضية فإن السلسلة $\{y_t\}$ تامة السكون إذا كان:

$$P(Y_{t_1} \leq c_1, Y_{t_2} \leq c_2, \dots, Y_{t_m} \leq c_m) = P(Y_{t_1+k} \leq c_1, Y_{t_2+k} \leq c_2, \dots, Y_{t_m+k} \leq c_m) \\ = F(c_1, c_2, \dots, c_m)$$

لأي مجموعة من النقاط الزمنية $(t_1, t_2, \dots, t_m)$ وأي إزاحة k . وتمثل القيم $(c_1, c_2, \dots, c_m)$ أي ثوابت تقع داخل نطاق السيرورة العشوائية.

والسكون التام بمفهومه السابق يعني ببساطة أن آلية التوليد للسيرورة العشوائية تحت الدراسة ثابتة من خلال الزمن، بحيث أن شكل النموذج وقيم معالمه لا تتغير بتغير الزمن.

وفي الحالة الخاصة الهامة التي يكون فيها $m = n$ و $t_i = i$ ، $i = 1, 2, \dots, n$ نجد أن السكون التام يعني أن:

$$F(y_1, y_2, \dots, y_n) = F(y_{1+k}, y_{2+k}, \dots, y_{n+k}) \quad \forall k = \pm 1, \pm 2, \dots$$

ومن التعريف السابق نجد أن السكون التام للسيرورة العشوائية يؤدي بالضرورة إلى ثبات متوسط وتباين السيرورة العشوائية إذا كانت العزوم من الرتبة الأولى والثانية موجودة. أيضا التغاير بين أي متغيرين Y_s, Y_t سيعتمد فقط على الفجوة lag الزمنية التي تفصل بين هذين المتغيرين. أي أن السكون التام يؤدي إلى أن:

$$\mu_t = E(Y_t) = \mu, \quad t = 0, \pm 1, \pm 2, \dots,$$

$$\sigma_t^2 = V(Y_t) = \sigma^2, \quad t = 0, \pm 1, \pm 2, \dots,$$

$$\gamma(s, t) = \text{Cov}(Y_s, Y_t) = E[(Y_s - \mu)(Y_t - \mu)] = \gamma(s - t)$$

أي أن التباين بين (y_s, y_t) سيكون دالة فقط في الفجوة الزمنية $(s - t)$ وبالتالي فإن:

$$\gamma(t, t - k) = \text{Cov}(Y_t, Y_{t-k}) = \gamma(K), \quad t, k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

وتجدر الإشارة إلى أن تباين السلسلة Y_t يمكن اعتباره بمثابة حالة خاصة من دالة التباين الذاتي $\gamma(s, t)$ إذا كان $s = t$. أي أن $V(Y_t) = \gamma(t, t)$ وإذا كانت السلسلة مستقرة فإن:

$$V(Y_t) = \gamma(t, t) = \gamma(0), \quad t = 0, \pm 1, \pm 2$$

السكون الضعيف: Weak Stationarity

لدراسة خصائص السلسلة العشوائية $\{y_t\}$ واختبار سكونها التام يجب معرفة دالة الاحتمال التراكمي المشتركة لأي مجموعة من النقاط الزمنية $(t_1, t_2, \dots, t_m)$ وأي قيمة صحيحة موجبة m ، أو على الأقل تقديرها بشكل جيد إحصائياً. ويُعد هذا الأمر من الأمور الصعبة إن لم يكن مستحيلاً.

ولحسن الحظ أن في موضوعات الإحصاء بصفة عامة، وفي مجال السلاسل الزمنية بصفة خاصة، أن العزوم الأولى والثانية - إذا كانت موجودة - غالباً ما تعكس الملامح الرئيسية للعمليات العشوائية بافتراض خطية هذه العمليات (وعلى الطالب أن يكون على دراية بأنه يوجد عمليات غير خطية والتي سيتعرف عليها في السداسي الثاني أو السنة المقبلة).

وفي حالة السكون الضعيف فإن العزوم من الدرجة الأولى والثانية كافية لتوصيف خصائص التوزيع الاحتمالي للسلسلة العشوائية بشكل كامل إذا افترضنا أنها سلسة جوس (Gaussian Process) أي أن المتغير العشوائي $Y = (Y_{t1}, Y_{t2}, \dots, Y_{tm})$ هو متغير معتمد متعدد Multivariate normal. ويُقال أن السلسلة (السلسلة) المتقطعة $\{y_t\}$ مستقرة سكوناً ضعيفاً إذا كانت العزوم حتى الرتبة الثانية موجودة تحقق الشروط الآتية:

1. التوقع أو متوسط العملية μ_t لا يعتمد على الزمن t ، أي أن:

$$\mu_t = E(Y_t) = \mu \quad ; \quad t = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

2. التباين σ_t^2 لا يعتمد على الزمن t أي أن:

$$\sigma_t^2 = V(Y_t) = \gamma(0) \quad ; \quad t = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

3. التغيرات (التباين المشترك) بين متغيرين يعتمد على الفجوة الزمنية (Lag) التي تفصل بينهما، أي أن:

$$\text{Cov}(Y_{t-k}, Y_t) = \gamma(k) \quad ; \quad t = 0, \pm 1, \pm 2, \dots; \quad k = \pm 1, \pm 2, \dots$$

إن التمثيل البياني للسلسلة يعطينا إشارات عن استقرارية السلسلة من عدمه، غير أن هذا لا يكفي بل يجب الاعتماد على اختبارات إحصائية متخصصة سنتعرف عليها فيما بعد.

سلسلة التشويش الأبيض أو الضجة البيضاء (White Noise Series)

تعرف سلسلة الضجة البيضاء أو التشويش الأبيض على أنها عبارة عن متتابعة من المشاهدات المستقلة فيما بينها، ولها توزيعات متطابقة بمتوسط معدوم، وتباين ثابت، فإذا رمزنا لهذه السلسلة بالرمز ε_t يكون لدينا :

1. متوسط السلسلة منعدم أي $E(\varepsilon_t) = 0, \quad \forall t$

2. ثبات التباين عبر الزمن، $\forall t, \quad \text{Var}(\varepsilon_t) = \sigma^2$

3. التباين المشترك معدوم (التغيرات) $\text{cov}(\varepsilon_t, \varepsilon_s) = 0; \quad \forall t \neq s$

ومن تعريف سلسلة الضجة البيضاء فإن كل العزوم ثابتة، بالتالي فإن الأمل الرياضي، والتباين، والتباين المشترك (التغيرات) هي ثوابت وتختلف عن الزمن، وبالتالي فهي تحقق شروط الاستقرارية، وعليه يمكننا القول أن أي سلسلة تشويش أبيض فهي مستقرة بالتعريف ولا نحتاج لإثبات ذلك.

2.1 الاختبارات الإحصائية لاستقرارية السلاسل الزمنية:

اختبارات الجذر الأحادي أو جذر الوحدة (Unit root test):

اختبارات جذر الوحدة تسمح لنا باختبار استقرارية السلسلة الزمنية من عدمها، وتحديد نوع عدم الإستقرارية، هل هي محددة أي لدينا النموذج (Trend Stationary) TS، أم هي عدم استقرارية عشوائية أي لدينا النموذج (Différencier Stationnaire) DS.

ولا يقتصر دور هذه الاختبارات على الكشف عن استقرارية السلسلة الزمنية فقط، بل لها دور في تحديد نوع عدم الإستقرارية، والطريقة المثلى التي تجعل السلسلة مستقرة، في حالة تأكيد عدم استقراريته.

توصيف النموذج TS ، والنموذج DS:

من أجل فهم هذه الاختبارات نعمل أولاً على توصيف النموذجين:

• النموذج (Trend Stationary) TS:

• النموذج (Différencier Stationnaire) DS :

◀ النموذج (Trend Stationnary) TS :

هذه النماذج غير مستقرة، وتبرز عدم استقراريتها نتيجة وجود اتجاه محدد (Deterministe)، وتكتب على الشكل التالي:

$$Y_t = f(t) + \varepsilon_t$$

حيث : $f(t)$ دالة كثير الحدود للزمن (خطية وغير خطية) .

ε_t : تشويش أبيض.

وأكثر هذه النماذج انتشارا يأخذ شكل كثير الحدود من الدرجة (1)، ويكتب من الشكل:

$$Y_t = a_0 + a_1 t + \varepsilon_t$$

إذن يمكننا حساب المتوسط للسلسلة كما يلي:

$$E(Y_t) = E(a_0 + a_1 t + \varepsilon_t)$$

$$E(Y_t) = a_0 + a_1 t + E(\varepsilon_t)$$

$$E(Y_t) = a_0 + a_1 t$$

هذا النموذج غير مستقر لأن وسطه $E(Y_t)$ مرتبط بالزمن.

كما نلاحظ أن: $Y_t - (a_0 + a_1 t) = \varepsilon_t$

لكننا نجعله مستقر بتقدير المعالم $\hat{a}_0$ و $\hat{a}_1$ بطريقة المربعات الصغرى (كما أشرنا اليه سابقا)، ثم نقوم بنزع مركبة الاتجاه العام من السلسلة الأصلية أي $\hat{Y}_t - (\hat{a}_0 + \hat{a}_1 t) = \varepsilon_t$ ، مع العلم أن ε_t تشويش أبيض مستقر بالتعريف، فإننا نحصل على سلسلة جديدة ولتكن Z مستقرة، مع العلم أن $Z = \hat{Y}_t - (\hat{a}_0 + \hat{a}_1 t) = \varepsilon_t$

◀ النموذج (Differencey stationnary) DS :

هذه النماذج أيضا غير مستقرة، وتبرز عدم استقرارية عشوائية (Stotachastique) وتأخذ الشكل:

$$(1 - B)^d Y_t = \beta + \varepsilon_t$$

β : ثابت حقيقي.

L : عامل التأخير.

d : درجة الفروقات.

ومن أجل $d=1$ ، نقول أنه لدينا نموذج DS من الدرجة الأولى، بحيث تكتب على الشكل:

$$(1-L)^1 Y_t = \beta + \varepsilon_t$$

ويمكن جعلها مستقرة باستعمال الفروقات، أي:

$$Y_t - Y_{t-1} = \beta + \varepsilon_t$$

$$Y_t - LY_{t-1} = \beta + \varepsilon_t$$

فيما يلي، وبحسب قيمة β هناك نموذجين مختلفين

نموذج DS بدون مشتق ($\beta = 0$)، ويكتب من الشكل:

$$Y_t = Y_{t-1} + \varepsilon_t$$

وبما أن ε_t عبارة عن تشويش أبيض، فإن النموذج يسمى "نموذج المشي العشوائي (Random walk model)"، وهو كثير الاستعمال في دراسة الأسواق المالية.

نموذج DS بمشتق ($\beta \neq 0$)، يكتب بشكل عام كما يلي:

$$Y_t = Y_{t-1} + \beta + \varepsilon_t$$

1.2.1 اختبار ديكي فولر (Dickey et Fuller):

ويعتمد اختبار الجذر الوحدة لديكي فولر (Dickey et Fuller) على تقدير ثلاث نماذج أساسية، تختلف من حيث الشكل وطريقة الاختبار باختلاف درجة التأخير (p) للسلسلة، ويميز الاختبار بين حالتين:

الحالة الأولى: اختبار ديكي فولر البسيط (DF) في حالة درجة التأخير $P = 1$:

يستخدم هذا الاختبار في حالة نموذج الانحدار من الدرجة الأولى، والتي يمكن التحقق منها من خلال دوال الارتباط الذاتي والارتباط الذاتي الجزئي. أي من شكل نموذج السير العشوائي:

$$X_t = X_{t-1} + \varepsilon_t$$

مع ε_t يمثل حد الخطأ العشوائي الذي يفترض أنه عبارة عن تشويش أبيض (يتبع التوزيع الطبيعي بمتوسط معدوم وتباين ثابت).

انطلاقاً من هذا النموذج، نلاحظ أن معامل القيمة المؤخرة لـ X بدرجة واحدة يساوي الواحد الصحيح، فإذا كان هذا الأمر محققاً في الواقع فذلك يؤدي إلى وجود مشكلة جذر الوحدة الذي يعني عدم استقرارية بيانات السلسلة X_t نظراً لوجود علاقة اتجاه في هذه البيانات. وعليه إذا قدرنا النموذج: $X_t = \phi_1 X_{t-1} + \varepsilon_t$ وتبين أن قيمة $\phi_1 = 1$ فإن المتغير X_t فيه جذر وحدة، ويعاني من عدم الاستقرار عبر الزمن، فكل قيمة من قيمه تكون محددة بالقيمة السابقة لها عبر الزمن. وتعرف السلسلة X_t عندئذ بسلسلة السير العشوائي وهي من أشهر الأمثلة عن السلسلة غير المستقرة.

وبتطبيق بعض العمليات على السلسلة نجد:

ب طرح X_{t-1} من طرفي المعادلة نجد:

$$\begin{aligned} X_t - X_{t-1} &= \phi_1 X_{t-1} - X_{t-1} + \varepsilon_t \\ \Rightarrow \nabla X_t &= (\phi_1 - 1)X_{t-1} + \varepsilon_t \end{aligned}$$

نضع $\lambda = \phi - 1$ فيصبح لدينا: $\nabla X_t = \lambda X_{t-1} + \varepsilon_t$ مع $\nabla X_t = X_t - X_{t-1}$ ومن هنا اختبار وجود جذر الوحدة في السلسلة يقوم على اختبار الفرضية التالية:

$$\begin{cases} H_0 : \lambda = 0 \\ H_1 : \lambda \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} H_0 : \phi_1 = 1 \\ H_1 : \phi_1 \neq 1 \end{cases}$$

فمن خلال الاختبار، إذا تبين أن $\lambda = 0$ فإن $\Delta X_t = \varepsilon_t$ أي $X_t = X_{t-1} + \varepsilon_t$ سلسلة السير العشوائي وهي غير مستقرة يقال عنها أنها متكاملة من الدرجة الأولى.

وعلى هذا الأساس يقوم اختبار ديكي فولر للكشف عن استقرارية السلسلة الزمنية، من خلال اختبار ثلاث أشكال للنموذج وهي:

$$\Delta X_t = \alpha + \beta T + \lambda X_{t-1} + \varepsilon_t \dots (1)$$

$$\Delta X_t = \alpha + \lambda X_{t-1} + \varepsilon_t \dots \dots \dots (2)$$

$$\Delta X_t = \lambda X_{t-1} + \varepsilon_t \dots \dots \dots (3)$$

حيث : $\lambda = 1 - \phi$ و $\Delta X_t = X_t - X_{t-1}$

ويقوم الاختبار على أساس حساب قيمة إحصائية وفق الصيغة التالية:

$$\tau = \frac{\hat{\lambda}}{\sigma_{\hat{\lambda}}} \text{ ومقارنتها بالقيمة المجدولة في جداول ديكي فولر.}$$

فإذا كانت القيمة المحسوبة للاختبار أكبر من القيمة المجدولة نرفض فرضية العدم (H_0) أي أن المعلمة المقدرة تختلف عن الصفر وبالتالي $\phi \neq 1$ وتكون السلسلة مستقرة. وإذا كانت القيمة المحسوبة للاختبار أقل من القيمة المجدولة فإننا نقبل فرضية العدم وعندها تكون السلسلة غير مستقرة.

مع الإشارة الى أننا نختبر شكل النموذج من خلال اختبار معنوية المعلمات الأخرى حسب كل نموذج من النماذج (1)، (2) و (3)، بحيث:

- يتم اختبار المعنوية الإحصائية لـ β في النموذج رقم (1) ، فإذا كانت معنوية نختبر في نفس النموذج معنوية α و λ . والسلسلة في هذه الحالة تكون باتجاه أي من نوع TS يمكن أن تصبح مستقرة بطريقة الانحدار كما سبق وبيننا سابقا.

- إذا لم يكن كذلك، فيتم تقدير النموذج رقم (2) ثم نختبر معنوية α في هذا النموذج، فإذا كانت معنوية فإن النموذج يكون بحد ثابت ونختبر معنوية λ ، أما إذا لم يكن كذلك فيتم تقدير النموذج رقم (3). وهو نموذج بدون ثابت وبدون اتجاه.

مع الإشارة الى أن القرار النهائي حول استقرارية السلسلة يستوجب التحقق من النماذج الثلاثة. لمعرفة الشكل المناسب لبيانات السلسلة هل هو باتجاه وثابت وما الى ذلك.

الحالة الثانية: اختبار ديكي فولر في حالة $P \geq 2$ (ديكي فولر المطور ADF):

وتعطى هذه النماذج من الشكل:

$$\Delta X_t = \alpha + \beta t + \lambda X_{t-1} + \sum_{j=2}^P \phi_j \Delta X_{t-j+1} + \varepsilon_t \dots (4)$$

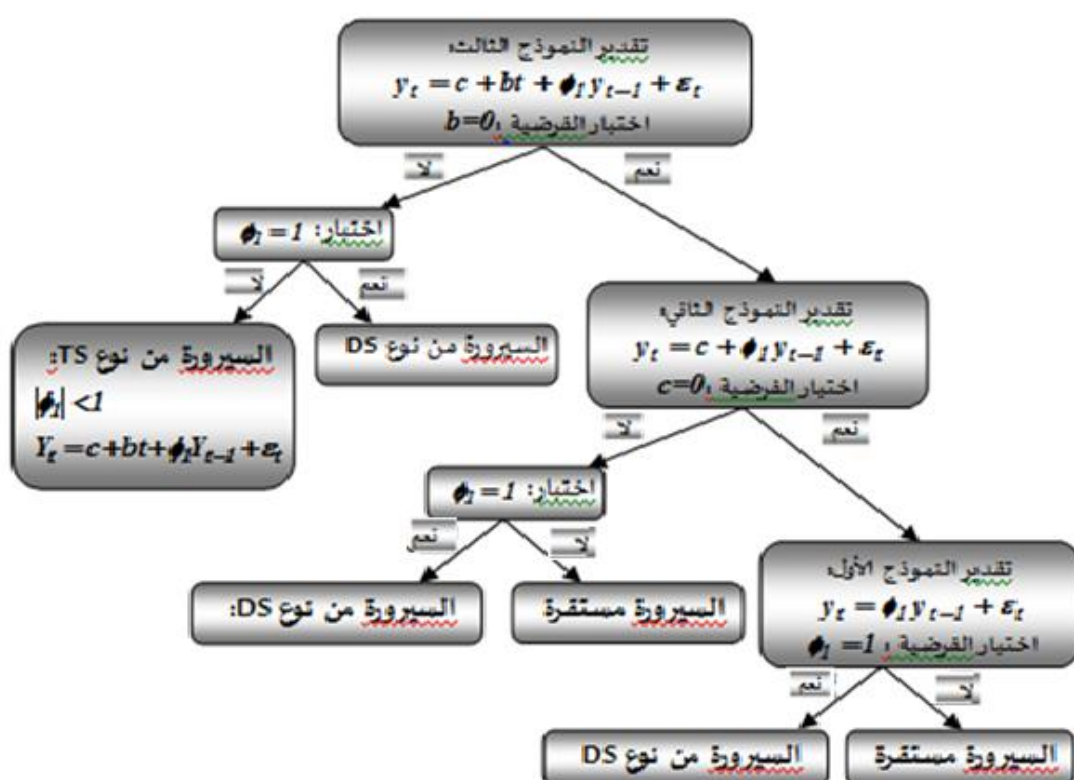
$$\Delta X_t = \alpha + \lambda X_{t-1} + \sum_{j=2}^P \phi_j \Delta X_{t-j+1} + \varepsilon_t \dots (5)$$

$$\Delta X_t = \lambda X_{t-1} + \sum_{j=2}^P \phi_j \Delta X_{t-j+1} + \varepsilon_t \dots (6)$$

واختبار الجذور الأحادية يطبق على النماذج السابقة حيث نقوم في كل مرة باختبار الفرضية الآتية:

$$\begin{cases} H_0 : \lambda = 0 \\ H_1 : \lambda \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} H_0 : \phi_1 = 1 \\ H_1 : \phi_1 \neq 1 \end{cases}$$

مع الإشارة الى اختبار ديكي فولر المطور يحمل نفس خصائص اختبار ديكي فولر البسيط، بحيث يستخدم الفروقات ذات الفجوة الزمنية، بادراج عدد من الفروقات ذات الفجوة الزمنية حتى تختفي مشكلة الارتباط الذاتي، وقيمة التأخير λ يتم تحديده وفق لمعايير المعلومات أكايك (Akaike) وشوارز (Schwarz). ويمكن تلخيص خطوات اجراء اختبار ديكي فولر لاستقرارية السلسلة الزمنية ولتكن Y_t في المخطط التالي:



2.2.1 اختبار Phillips-Perron :

يعتمد على نماذج DF البسيط، إلا أنه يختلف عنه في كونه يأخذ بعين الاعتبار التباين الشرطي للأخطاء، فهو يسمح بإلغاء التحيزات الناتجة عن المميزات الخاصة للتذبذبات العشوائية، حيث اعتمد فيليبس وبيرون نفس التوزيعات المحدودة لاختبار ADF و DF .

يجري الاختبار عبر أربعة مراحل هي:

1. تقدير النماذج الثلاثة لاختبار ديكي فولر بطريقة المربعات الصغرى العادية؛

2. تقدير التباين قصير المدى باستخدام مجموع مربعات البواقي (الأخطاء) في النماذج المقدرة، بحيث:

$$\sigma^2 = \frac{1}{T} \sum_{t=1}^T \hat{\varepsilon}_t^2$$

3. تقدي التباين المصحح δ^2 والذي يسمى بالتباين طويل المدى، بحيث:

$$\delta^2 = \frac{1}{T} \sum_{t=1}^T \hat{\varepsilon}_t^2 + 2 \sum_{i=1}^T \left(1 - \frac{i}{l+1}\right) \frac{1}{T} \sum_{t=i+1}^T \hat{\varepsilon}_t \hat{\varepsilon}_{t-i}$$

ومن أجل تقدير هذا التباين، يجب تحديد عدد التأخيرات (التباطؤات) « / » المقدر بدلالة عدد المشاهدات

$$l = 4 \left(\frac{T}{100} \right)^{\frac{2}{9}} \text{ الكلية } T \text{ بحيث:}$$

4. حساب إحصائية فيليبس وبيرون بالعلاقة التالية:

$$t_{\hat{\phi}_1}^* = \sqrt{k} \cdot \frac{(\hat{\phi}_1 - 1)}{\hat{\sigma}_{\hat{\phi}_1}} + \frac{n(k-1)\hat{\sigma}_{\hat{\phi}_1}}{\sqrt{k}}$$

مع $k = \frac{\hat{\sigma}^2}{\hat{\sigma}_t^2}$ وهي ويساوي الواحد في الحالة التقريبية عندما يكون حد الخطأ العشوائي تشويش أبيض. ويتم

مقارنتها بالقيمة الحرجة في جدول Mackinnon.

تجدر الإشارة الى أن اختبار الاستقرار وفق هذه المنهجية يعتمد على استخدام برامج إحصائية متخصصة لتسهيل عملية التقدير لمختلف النماذج، ويبقى على الطالب معرفة طريقة اتخاذ القرار حول استقرارية السلسلة الزمنية من عدمه.

2. دالة الارتباط الذاتي (المفهوم، الخصائص والأهمية، التقدير)

1-2. دالة الارتباط الذاتي (Autocorrelation Function (ACF)

تقيس دالة التغير الذاتي $\gamma(s, t)$ درجة الاعتماد أو الخطي بين متغيرين من المتغيرات التي تقع على نفس السلسلة الزمنية.

فعلى سبيل المثال يقيس التغير الذاتي $\gamma(1, 2)$ درجة الاعتماد الخطي بين المتغير العشوائي Y_1 والذي يمثل قيمة السلسلة عند النقطة الزمنية الأولى، والمتغير العشوائي Y_2 والذي يمثل قيمة السلسلة عند النقطة الزمنية

الثانية، أي أن $\gamma(1,2)$ تمثل درجة الاعتماد الخطي بين كل القيم التي يمكن أن تولدها السيرورة العشوائية عند اللحظة الزمنية الأولى، وتلك القيم التي يمكن أن تولدها نفس السيرورة العشوائية عند اللحظة الزمنية الثانية. وبصفة عامة فإن التغير الذاتي $\gamma(s,t)$ هو دالة في الدليلين s,t وتجدر الإشارة هنا إلى بعض الملاحظات الهامة:

1. إذا كان $\gamma(s,t)=0$ فهذا يعني أن المتغيرين Y_s, Y_t غير مرتبطين خطيا ولكن قد يكون هناك ارتباط غير خطي بينهما.

2. إذا كان $\gamma(s,t)=0$ وكان المتغيران Y_s, Y_t لهما توزيع معتاد ثنائي Bivariate normal distribution فإن هذا يعني أن المتغيرين مستقلان.

3. يمكن اعتبار تباين العينة كحالة خاصة من دالة التغير $\gamma(s,t)$ بوضع $s=t$ ، وهذا يعني أن $V(Y_t) = \gamma(t,t)$.

4. إذا كانت السلسلة مستقرة فإن دالة التغير $\gamma(s,t)$ تكون دالة في الفجوة الزمنية $k = |s-t|$ فقط وتكتب عادة في هذه الحالة $|s-t|$ أو $\gamma(k)$.

➤ مفهوم الارتباط الذاتي:

من المعروف في علم الإحصاء أن استخدام التغير أو ما يعر بالتباين المشترك لقياس درجة الاعتماد الخطي بين متغيرين يثير بعض المشاكل العملية، أولها عدم وجود حدود مرجعية (دنيا، عليا) يمكن الرجوع إليها لتحديد مدى قوة أو ضعف العلاقة الخطية، وثانيهما أن التغير يعتمد على وحدات القياس المستخدمة. ومن ثم يفضل معايرة التغير الذاتي بالقسمة على حاصل ضرب الانحرافين المعياريين للمتغيرين Y_s و Y_t لنحصل على ما يعرف بالارتباط الذاتي (التسلسلي):

➤ تعريف 1:

يُعرف معامل الارتباط الذاتي $\rho(s,t)$ بأنه معامل الارتباط الخطي بين قيم السلسلة الزمنية في لحظتين متتاليتين من الزمن Y_s, Y_t ويكتب على الشكل العام التالي:

$$\begin{aligned}\rho(s,t) &= \frac{\text{cov}(Y_s, Y_t)}{\sqrt{\text{Var}(Y_s)\text{Var}(Y_t)}} = \frac{\gamma(s,t)}{\sqrt{\text{Var}(Y_s)\text{Var}(Y_t)}} \\ &= \frac{E(Y_s - \bar{Y}_s)(Y_t - \bar{Y}_s)}{\sqrt{E(Y_s - \bar{Y}_s)^2 \cdot E(Y_t - \bar{Y}_s)^2}} : \quad s, t = 0, \pm 1, 2, \dots, n\end{aligned}$$

ويمكن حساب بسط معامل الارتباط من دالة الاحتمال الثنائية للمتغيرين Y_t ، Y_s ، بينما يحسب المقام من دالتي الاحتمال الهامشي للمتغيرين وذلك لكل قيم (s, t) المختلفة. وبالتالي ينشأ لدينا علاقة دالية بين معاملات الارتباط الذاتي والزمنين (s, t) تسمى بدالة الارتباط الذاتي autocorrelation function تقيس درجة الارتباط الخطي بين المتغيرات التي تقع على نفس السلسلة أو السيرورة العشوائية. وتتصف هذه الدالة بعدة خصائص أهمها:

1. الارتباط الذاتي بين المتغير Y_t ونفسه يساوي الواحد، أي أن $\rho(t, t) = 1$.
2. $\rho(t, s) = \rho(s, t)$ وذلك لأن $\gamma(t, s) = \gamma(s, t)$.
3. قيمة $\rho(s, t)$ تقع دائماً في المجال $[-1, 1]$.
4. إذا كان $\rho(s, t) = 0$ فهذا يعني أنه لا توجد علاقة خطية بين Y_s و Y_t ولكن يمكن أن توجد علاقة غير خطية بينهما.
5. إذا كان $\rho(s, t) = \pm 1$ فهذا يعني أنه يوجد علاقة خطية تامة (طردية أو عكسية) بين المتغيرين Y_t ، Y_s أي أنه يمكن التنبؤ بأحد المتغيرين بالضبط باستخدام علاقة خطية يقوم فيها المتغير الآخر بدور المتغير المُفسّر regressor الوحيد في هذه العلاقة.

أما إذا كانت السيرورة العشوائية (السلسلة) مستقرة فإنه يمكن إعادة تعريف معامل الارتباط الذاتي ودالة الارتباط الذاتي كما يلي:

تعريف 2:

يعرف معامل الارتباط الذاتي للسيرورة المستقرة (الساكنة) $\{Y_t\}$ عند الفجوة الزمنية k بأنه معامل الارتباط الخطي بين المتغيرين Y_t و Y_{t-k} ويأخذ الصورة الآتية:

$$\rho(k) = \frac{E(Y_t - \bar{Y})(Y_{t-k} - \bar{Y})}{E(Y_t - \bar{Y})^2}$$

$$= \frac{\gamma(k)}{\gamma(0)}, \quad k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

حيث يرمز $\gamma(0)$ إلى تباين السيرورة المستقرة (الساكنة) ويرمز $\gamma(k)$ إلى التباين الذاتي عند الفجوة k لنفس السيرورة.

ومن ثم يمكن حساب معامل الارتباط الذاتي لكل فجوة من الفجوات الزمنية $k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ فينشأ لدينا علاقة دالية بين معاملات الارتباط الذاتي $\rho(k)$ والفجوة الزمنية k تسمى بدالة الارتباط الذاتي للسيرورة المستقرة

$\{y_t\}$ تقيس الارتباط الخطي بين المتغيرات على نفس السلسلة الزمنية والتي تبعد عن بعضها البعض بفجوة زمنية مقدارها k . فعلى سبيل المثال يقيس $\rho(1)$ درجة الارتباط الخطي بين أي متغيرين الفاصل الزمني بينهما يساوي الوحدة أي درجة الارتباط بين Y_1 و Y_2 ، أو بين Y_2 و Y_3 ... الخ، أو بصفة عامة الارتباط الخطي بين Y_{t-1} و Y_t ، ويقاس $\rho(3)$ درجة الارتباط الخطي بين أي متغيرين الفاصل الزمني بينهما يساوي ثلاث وحدات أي درجة الارتباط الخطي بين Y_1 و Y_4 ، أو بين Y_{10} و Y_{14} ... الخ، أو بصفة عامة درجة الارتباط الخطي بين Y_{t-3} و Y_t ، وتعرض دالة الارتباط الذاتي في شكل رياضي أو جدولي أو بياني كما سنرى لاحقاً.

تعريف 3:

تعرف مصفوفة الارتباط الذاتي للسيرورة العشوائية المستقرة (الساكنة) التي تتكون من عدد n من المتغيرات في الصورة الآتية:

$$R = \begin{pmatrix} 1 & \rho(1) & \rho(2) & \cdots & \rho(n-1) \\ \rho(1) & 1 & \rho(1) & \cdots & \rho(n-2) \\ \rho(2) & \rho(1) & 1 & \cdots & \rho(n-3) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \rho(n-1) & \rho(n-2) & \rho(n-3) & \cdots & 1 \end{pmatrix}$$

خصائص وأهمية دالة الارتباط الذاتي:

تتصف دالة الارتباط الذاتي $\rho(k)$ لأي سيرورة مستقرة بعدة خصائص هامة نذكر منها ما يلي:

1. معامل الارتباط الذاتي عند الفجوة الزمنية صفر يساوي الواحد، أي أن $\rho(0) = 1$ لأي سيرورة مستقرة.
2. قيمة $\rho(k)$ تقع دائماً في المجال المغلق $[-1, 1]$.
3. إذا كان $\rho(k) = 0$ فهذا يعني أنه لا توجد علاقة خطية بين أي متغيرين الفاصل الزمني بينهما k وحدة، ولكن بالطبع قد توجد علاقة غير خطية بينهما.
4. إذا كان $\rho(k) = \pm 1$ فهذا يعني وجود علاقة خطية تامة بين أي متغيرين الفاصل الزمني بينهما k وحدة، أي أنه يمكن التنبؤ بأحدهما بالضبط باستخدام علاقة خطية يقوم فيها المتغير الآخر بدور المتغير المفسر الوحيد في هذه العلاقة.

5. الدالة $\rho(k)$ دالة متماثلة دائماً حول الفجوة $k = 0$ ، أي أن $\rho(-k) = \rho(k)$ ، ولذلك عادة ما نكتفي برسم هذه الدالة لقيم k الموجبة فقط.

6. مصفوفة الارتباط دائما محددة موجبة Positive definite، ولذلك ترتبط معاملات الارتباط المختلفة $\rho(0), \rho(1), \rho(2), \dots$ فيما بينها بعلاقات جبرية يمكن استنتاجها من العلاقة بين المصفوفة المحددة الموجبة والمحددات الرئيسية.

وتلعب دالة الارتباط الذاتي $\rho(k)$ دورا هاما - إن لم يكن أهم دور على الإطلاق - في التحليل الحديث للسلاسل الزمنية بطريقة بوكس وجينكيز. فهي الأداة الرئيسية التي ارتضاها هذان العالمان لإختبار استقرارية السلسلة الزمنية - إلى جانب الطرق التقريبية الأخرى - وهي أحد الأدوات الرئيسية للتعرف على النموذج المبدئي من أجل تحسينه أو تطويره إذا ما طبقت على البواقي *Residuals* الناتجة من هذا النموذج.

٤٤ تقدير دالة الارتباط الذاتي:

وضع شروط الاستقرار على السيرورة العشوائية التي ولدت السلسلة المرصودة (المُتاحة) أمر مهم، ولعل أهميته تكمن خاصة في تخفيض عدد المعالم الرئيسية (العزوم من الدرجة الأولى والثانية) وسهولة تفسيرها، وإمكانية تقديرها باستخدام مشاهدات السلسلة المتاحة $y_1, y_2, \dots, y_n$ ، وبناء على هذه التقديرات يُمكن تقدير دالة الارتباط الذاتي للسيرورة العشوائية المستقرة بأحد التقديرين التاليين:

$$r(k) = \hat{\rho}(k) = \frac{\sum_{t=1}^{n-k} (y_t - \bar{y})(y_{t+k} - \bar{y})}{\sum_{t=1}^n (y_t - \bar{y})^2}$$

$$r_0(k) = \tilde{\rho}(k) = \frac{\frac{1}{n-k} \sum_{t=1}^{n-k} (y_t - \bar{y})(y_{t+k} - \bar{y})}{\frac{1}{n} \sum_{t=1}^n (y_t - \bar{y})^2}$$

هذين التقديرين كلاهما متحيزان biased، ولذلك فليس هناك أية أفضلية لأحدهما على الآخر، وعادة ما يُستخدم التقدير الأول $r(k)$ لتقدير دالة الارتباط الذاتي، ويمكن إثبات أنه إذا كانت السيرورة العشوائية $\{y_t\}$ مستقرة وخطية وأن العزم الرابع $E(Y_t^4)$ محدود فإن تقدير دالة الارتباط الذاتي $r(k)$ يتبع تقاربيا (إذا كانت n كبيرة) توزيع معتاد (طبيعي)، متوسطه $\rho(k)$ وله تباين معين معروف يعتمد على $\rho(k)$ أيضا. ومن ثم يمكن إجراء الاختبارات الإحصائية الخاصة بمعنوية significance معاملات الارتباط الذاتي المختلفة.

والحالة الخاصة الهامة إذا كانت السيرورة العشوائية موضع الدراسة سيرورة تشويش أبيض فإن تباين $r(k)$ يأخذ الصورة البسيطة الآتية:

$$V[r(k)] \approx \frac{1}{n}$$

ومن ثم يُمكن اختبار معنوية الارتباط الذاتي في هذه الحالة بشكل تقريبي كما سنرى عند تشخيص نماذج

. ARIMA

مثال 1-2:

ليكن لدينا بيانات السلسلة الزمنية Y على النحو التالي:

t	1	2	3	4	5	6	7	8	9
Y_t	5	6	7	-5	-1	5	10	25	65

يمكننا حساب دالة الارتباط الذاتي كما يلي:

$$\bar{Y} = \frac{5+6+7-5-1+5+10+25+65}{9} = 13$$

$$r_0 = 1$$

$$r_1 = \frac{\sum_{t=1}^{9-1} (Y_t - \bar{Y})(Y_{t+1} - \bar{Y})}{\sum_{t=1}^9 (Y_t - \bar{Y})^2} = \frac{(Y_1 - 13)(Y_2 - 13) + (Y_2 - 13)(Y_3 - 13) + \dots + (Y_8 - 13)(Y_9 - 13)}{(Y_1 - 13)^2 + (Y_2 - 13)^2 + (Y_3 - 13)^2 + \dots + (Y_9 - 13)^2}$$

$$= \frac{(5-13)(6-13) + (6-13)(7-13) + \dots + (10-25)(25-65)}{(5-13)^2 + (6-13)^2 + (7-13)^2 + \dots + (65-13)^2} = \frac{1282}{3590} = 0,32925$$

$$r_2 = \frac{\sum_{t=1}^{9-2} (Y_t - \bar{Y})(Y_{t+2} - \bar{Y})}{\sum_{t=1}^9 (Y_t - \bar{Y})^2} = \frac{(Y_1 - 13)(Y_3 - 13) + (Y_2 - 13)(Y_4 - 13) + \dots + (Y_7 - 13)(Y_9 - 13)}{(Y_1 - 13)^2 + (Y_2 - 13)^2 + (Y_3 - 13)^2 + \dots + (Y_9 - 13)^2}$$

$$= \frac{(5-13)(7-13) + (6-13)(-5-13) + \dots + (10-13)(65-13)}{(5-13)^2 + (6-13)^2 + (7-13)^2 + \dots + (65-13)^2} = \frac{192}{3590} = 0,053482$$

$$r_3 = \frac{\sum_{t=1}^{9-3} (Y_t - \bar{Y})(Y_{t+3} - \bar{Y})}{\sum_{t=1}^9 (Y_t - \bar{Y})^2} = \frac{(Y_1 - 13)(Y_4 - 13) + (Y_2 - 13)(Y_5 - 13) + \dots + (Y_6 - 13)(Y_9 - 13)}{(Y_1 - 13)^2 + (Y_2 - 13)^2 + (Y_3 - 13)^2 + \dots + (Y_9 - 13)^2}$$

$$= \frac{(5-13)(-5-13) + (6-13)(-1-13) + \dots + (5-13)(65-13)}{(5-13)^2 + (6-13)^2 + (7-13)^2 + \dots + (65-13)^2} = \frac{-240}{3590} = -0,0669$$

وبنفس الطريقة نجد:

$$r_4 = \frac{\sum_{t=1}^{9-4} (Y_t - \bar{Y})(Y_{t+4} - \bar{Y})}{\sum_{t=1}^9 (Y_t - \bar{Y})^2} = \frac{-758}{3590} = -0,2111142$$

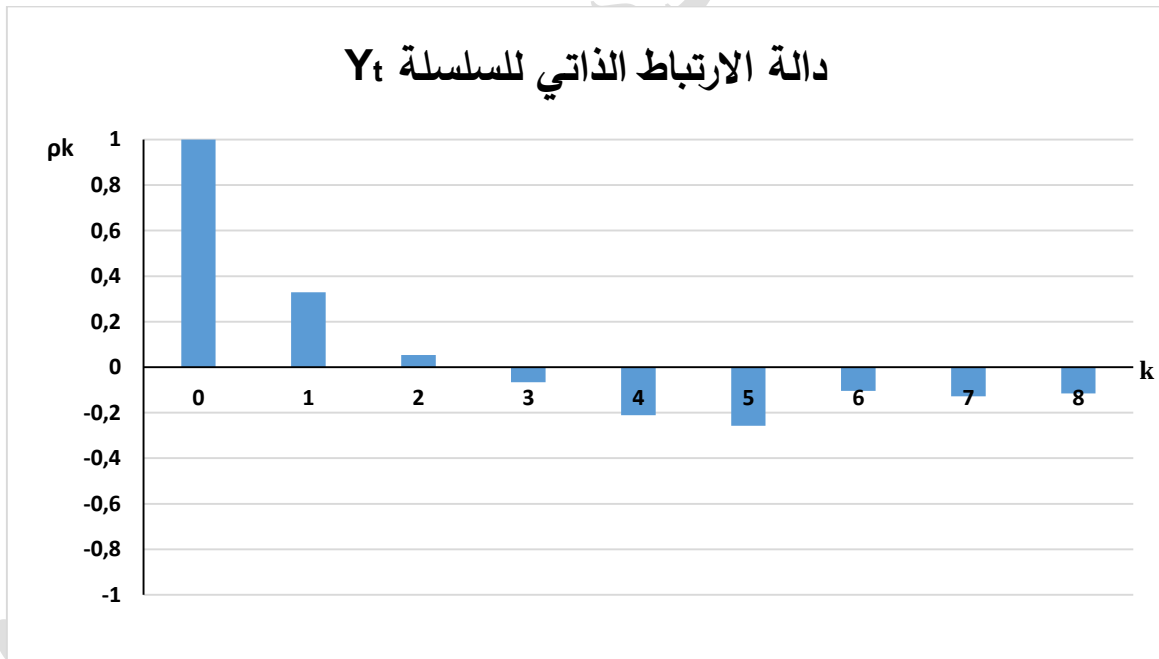
$$r_5 = \frac{\sum_{t=1}^{9-5} (Y_t - \bar{Y})(Y_{t+5} - \bar{Y})}{\sum_{t=1}^9 (Y_t - \bar{Y})^2} = \frac{-923}{3590} = -0,257103$$

$$r_6 = \frac{\sum_{t=1}^{9-6} (Y_t - \bar{Y})(Y_{t+6} - \bar{Y})}{\sum_{t=1}^9 (Y_t - \bar{Y})^2} = \frac{-372}{3590} = -0,103621$$

$$r_7 = \frac{\sum_{t=1}^{9-7} (Y_t - \bar{Y})(Y_{t+7} - \bar{Y})}{\sum_{t=1}^9 (Y_t - \bar{Y})^2} = \frac{-460}{3590} = -0,128134$$

$$r_8 = \frac{\sum_{t=1}^{9-8} (Y_t - \bar{Y})(Y_{t+8} - \bar{Y})}{\sum_{t=1}^9 (Y_t - \bar{Y})^2} = \frac{-416}{3590} = -0,115877$$

وعلى العموم، يتم الاستعانة بالتمثيل البياني لهذه المعاملات في دراسة السلاسل الزمنية، بحيث يكون الشكل على النحو التالي:



3. دالة الارتباط الذاتي الجزئي (المفهوم، الخصائص والأهمية، التقدير، نظام معادلات يول والكر)

في تحليل السلاسل الزمنية تحظى دراسة معامل الارتباط الذاتي الجزئي عند الفجوة الزمنية الثانية بأهمية خاصة حيث يقيس هذا المعامل درجة الارتباط الخطي بين متغيرين يبعدان عن بعضهما البعض وحدتان زمنيتان بعد حذف تأثير المتغير الذي يقع بينهما، أي بافتراض ثبات هذا المتغير. فهذا المعامل يقيس قوة

العلاقة الخطية بين المتغيرين Y_3, Y_1 بعد حذف تأثير المتغير Y_2 ، ويقاس قوة العلاقة الخطية بين المتغيرين Y_2 و Y_4 بعد حذف تأثير المتغير Y_3 ، ... وهكذا. وبصفة عامة يقاس هذا المعامل قوة الارتباط الخطي بين المتغيرين Y_t و Y_{t-2} بعد حذف تأثير المتغير الذي يقع بينهما وهو Y_{t-1} أي بافتراض ثبات هذا المتغير. ويرمز لهذا المعامل عادة بالرمز ϕ_{22} ويُمكن تفسيره على أنه معامل الارتباط الخطي بين المتغير $[Y_t - E(Y_t/Y_{t-1})]$ والمتغير $[Y_{t-2} - E(Y_{t-2}/Y_{t-1})]$ ويمكن حسابه باستخدام دالتي الاحتمال الشرطي $f(y_t/y_{t-1})$ و $f(y_t, y_{t-2}/y_{t-1})$

نظرية (1):

إذا كانت السلسلة $\{y_t\}$ مستقرة وكانت المتغيرات Y_t, Y_{t-1}, Y_{t-2} تتبع توزيعاً معتاداً (معتدلاً) ثلاثياً فإن:

$$\phi_{22} = \frac{\rho(2) - \rho^2(1)}{1 - \rho^2(1)}$$

تعريف 1:

يُعرف معامل الارتباط الجزئي للسلسلة المستقرة $\{y_t\}$ عند الفجوة الزمنية k بأنه معامل الارتباط الخطي بين المتغيرين Y_t, Y_{t-k} بعد حذف تأثير المتغيرات التي تقع بينهما وهي $Y_{t-k}, Y_{t-2}, \dots, Y_{t-k+1}$. ويرمز عادة لمعامل الارتباط الجزئي عند الفجوة k بالرمز ϕ_{kk} ويمكن تفسيره على أنه معامل الارتباط الخطي بين المتغير $[Y_t - E(Y_t/Y_{t-1}, Y_{t-2}, \dots, Y_{t-k+1})]$ والمتغير $[Y_{t-k} - E(Y_{t-k}/Y_{t-1}, Y_{t-2}, \dots, Y_{t-k+1})]$ ويمكن حساب معامل الارتباط الذاتي باستخدام دوال الاحتمال الشرطي المناسبة لجميع قيم $k = 1, 2, \dots$

تعريف 2:

تُعرف دالة الارتباط الذاتي الجزئي بأنها علاقة دالية بين معاملات الارتباط الجزئي ϕ_{kk} و الفجوة الزمنية k . تحسب معاملات الارتباط الذاتي الجزئي بعدة طرق من أشهرها طريقة Yule-Walker وفق العلاقة التكرارية التالية:

$$\phi_{kk} = \frac{\rho_k - \sum_{j=1}^{k-1} \phi_{k-1j} \rho_{k-j}}{1 - \sum_{j=1}^{k-1} \phi_{k-1j} \rho_j}; \quad k = 1, 2, \dots; \quad j = 1, 2, \dots, k-1$$

$$\phi_{kj} = \phi_{k-1j} - \phi_{kk} \phi_{k-1k-1}$$

وتعرض دالة الارتباط الجزئي - شأنها في ذلك شأن دالة الارتباط الذاتي - عادة في شكل رياضي وأحيانا في شكل جدول أو بياني.

خصائص دالة الارتباط الذاتي الجزئي:

تتصف دالة الارتباط بعدة خصائص هامة نذكر منها مايلي:

1. معامل الارتباط الذاتي الجزئي عند الفجوة الزمنية صفر يساوي واحد، أي أن $\phi_{00} = 1$ لأي سيرة مستقرة.
2. قيمة ϕ_{kk} تقع دائما على الفترة المغلقة $[-1, 1]$
3. معامل الارتباط الذاتي الجزئي عند الفجوة الزمنية الأولى دائما يساوي معامل الارتباط الذاتي عند الفجوة الزمنية الأولى، أي أن $\phi_{11} = \rho(1)$ وذلك لعدم وجود متغيرات بين المتغيرين Y_t, Y_{t-1} .
4. إذا كان $\phi_{kk} = 0$ فهذا يعني أنه لا توجد علاقة خطية جزئية بين أي متغيرين الفاصل الزمني بينهما k وحدة، ولكن بالطبع قد توجد علاقة جزئية غير خطية بينهما.

وتأخذ الدالة ϕ_{kk} في التحليل الحديث أشكالا قريبة الشبه من أشكال دالة الارتباط الذاتي $\rho(k)$ ، فتارة تتلاشى بببطء، وتارة تتلاشى بسرعة في صورة أسية وتارة تقترب تدريجيا من الصفر في شكل موجات تحاكي دالة الجيب أو في شكل توليفة من الدوال الأسية، وتارة تتقطع كلية بعد عدد معين من الفجوات الزمنية. وتلعب دالة الارتباط الذاتي الجزئي دورا لا يقل أهمية عن دور دالة الارتباط الذاتي، فتستخدم لإختبار استقرارية السلسلة بجانب الطرق الأخرى، وهي أحد الأدوات الرئيسية التي وُظفت بواسطة بوكس وجينكنز للتعرف على النموذج المبدئي وتشخيص هذا النموذج من أجل تحسينه أو تطويره.

مثال 2-2:

لتكن لدينا البيانات التالية:

t	1	2	3	4	5	6	7	8	9
Xt	158	222	248	216	226	239	206	178	169

لحساب معاملات الارتباط الذاتي الجزئي، يجب أولاً حساب معاملات الارتباط الذاتي، فيكون لدينا:
المتوسط:

$$\bar{X} = \frac{158 + 222 + 248 - 216 - 226 + 239 + 206 + 178 + 169}{9} = 206,89$$

معاملات الارتباط الذاتي تُحسب بنفس الطريقة سابقة الذكر.

$$r_0 = 1$$

$$r_1 = \frac{\sum_{t=1}^{9-k} (X_t - \bar{X})(X_{t+k} - \bar{X})}{\sum_{t=1}^9 (X_t - \bar{X})^2}$$

نجد:

k	ρ_k
0	1
1	0,26512
2	-0,21156
3	-0,07611
4	-0,18277
5	-0,38668
6	-0,24206
7	0,10421
8	0,22985

نحسب معاملات الارتباط الذاتي الجزئي باستخدام العلاقة التكرارية:

$$\phi_{kk} = \frac{\rho_k - \sum_{j=1}^{k-1} \phi_{k-1j} \rho_{k-j}}{1 - \sum_{j=1}^{k-1} \phi_{k-1j} \rho_j}; \quad k = 1, 2, \dots; \quad j = 1, 2, \dots, k-1$$

$$\phi_{kj} = \phi_{k-1j} - \phi_{kk} \phi_{k-1k-1}$$

بحيث:

$$\phi_{00} = 1$$

$$\phi_{11} = r_1 = 0,265$$

$$\phi_{22} = \frac{\rho_2 - \sum_{j=1}^1 \phi_{11}\rho_1}{1 - \sum_{j=1}^{k-1} \phi_{11}\rho_1} = \frac{(-0,212) - (0,265)(0,265)}{1 - (0,265)(0,265)} = \frac{-0,282225}{0,929775} = -0,303354$$

لحساب ϕ_{33} نحتاج ϕ_{21} (من أجل $k=2$ و $j=1$) وتحسب باستخدام العلاقة السابقة الذكر بحيث:

$$\phi_{kj} = \phi_{k-1j} - \phi_{kk}\phi_{k-1k-1} \Rightarrow \phi_{21} = \phi_{11} - \phi_{22}\phi_{11} \Rightarrow 0,265 - (-0,303)(0,256) = 0,345295$$

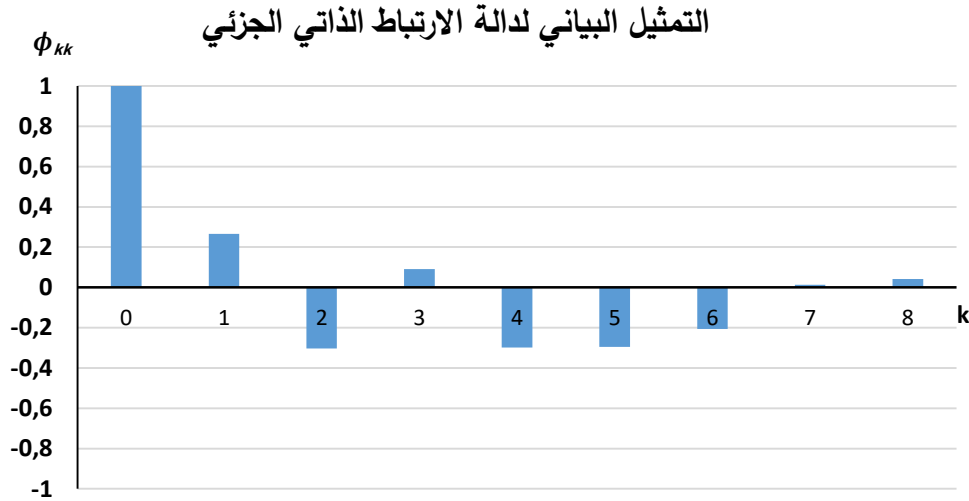
$$\phi_{33} = \frac{\rho_3 - \sum_{j=1}^2 \phi_{2j}\rho_{3-j}}{1 - \sum_{j=1}^{k-1} \phi_{2j}\rho_j} = \frac{\rho_3 - (\phi_{21}\rho_2 + \phi_{22}\rho_1)}{1 - (\phi_{21}\rho_1 + \phi_{22}\rho_2)}$$

$$\frac{(-0,076) - ((0,345)(-0,212) + (-0,303)(0,265))}{1 - ((0,345)(-0,265) + (-0,303)(0,212))} = \frac{0,077435}{0,844339} = -0,09171$$

وبنفس الطريقة نقوم بحساب باقي المعاملات وتكون النتائج كما هي مبينة في الجدول التالي:

k	ρ_k	ϕ_{kk}
0	1	1
1	0,26512	0,265116
2	-0,21156	-0,303151
3	-0,07611	0,091617
4	-0,18277	-0,298000
5	-0,38668	-0,294454
6	-0,24206	-0,206605
7	0,10421	0,013411
8	0,22985	0,042363

والتمثيل البياني لدالة الارتباط الذاتي الجزئي يكون:



بعد عملية حساب معاملات الارتباط الذاتي والارتباط الذاتي الجزئي وتمثيلها بيانياً، يمكن استخدامها لدراسة استقرارية السلسلة الزمنية كما يلي:

من خلال التمثيل البياني لدالة الارتباط الذاتي: إذا تبين أن معاملات الارتباط الذاتي تتلاشى ببطء، فهذا يشير إلى سلسلة غير مستقرة. أما إذا أظهر تلاشيًا سريعًا (بعد تأخيرات قليلة)، فهذا يشير إلى أن السلسلة مستقرة.

أما بالنسبة للتمثيل البياني لدالة الارتباط الذاتي الجزئي، فهو يساعد في تحديد التأخيرات ذات التأثير المباشر على القيم الحالية للسلسلة الزمنية، فإذا كانت معاملات الارتباط الذاتي الجزئي مرتفعة ولا تتلاشى فهذا يشير إلى أن السلسلة ليست مستقرة.

وبعد التحقق من استقرارية السلسلة وتبين أنها ليست مستقرة، يجب إجراء تحويلات على السلسلة حسب طبيعتها (غالباً ما يكون التحويل بإجراء الفروقات من الدرجة الأولى أو بإدخال اللوغاريتم النيبيري على قيم السلسلة) لجعلها مستقرة، ومن ثم إعادة حساب معاملات الارتباط الذاتي والارتباط الذاتي الجزئي للسلسلة الجديد لاختبارها بنفس الطريقة والتحقق من استقراريتها وهكذا.

كما يتم الاستعانة بهذه الأشكال في تحديد عدد التأخيرات المناسبة لبناء نماذج السلاسل الزمنية كما سنراه لاحقاً.

مثال تطبيقي حول دراسة استقرارية السلسلة الزمنية واستعمال دالة الارتباط الذاتي والجزئي:

هذا المثال مستوحى من كتاب «économétrie-cours et exercices corrigés» للمؤلف: Régis Bourbonnais الطبعة 9، الصفحة 252، وهو كتاب متوفر ويمكن تحميله مع المعطيات التي هي أيضا متوفرة على شكل ملفات Excel.

بحيث سنقوم بتطبيق اختبارات الإستقرارية لديكي وفولر على مؤشر يمثل تطور أسعار الأسهم CAC40، وهو من أهم مؤشرات بورصة باريس خلال فترة زمنية محددة بـ 1160 يوم.

1- كيفية إدخال المعطيات:

ط1: وهي طريقة كتابة المشاهدات يدويا وذلك عن طريق:

File → workfile create → dated regular frequency

ط2: طريقة النسخ واللصق

ط3: طريقة تحميل الملف وذلك عن طريق:

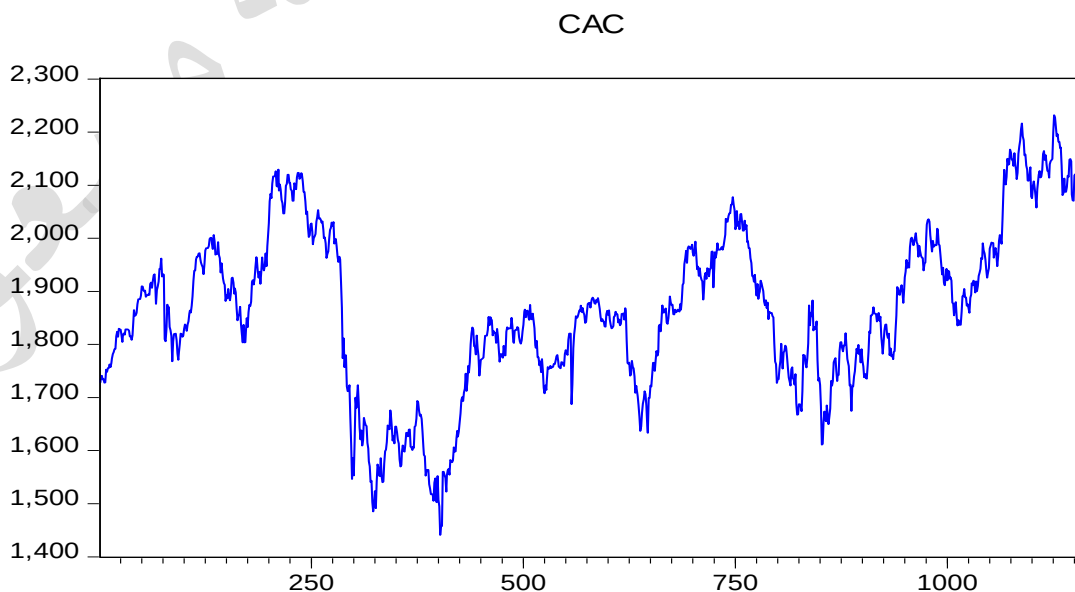
File → import → import from file

2- دراسة السلسلة الزمنية:

أولا نقوم برسم المتغيرات قيد الدراسة في شكل بياني وفق المراحل التالية:

View → graph → Line & symbol

فيظهر لنا المنحنى البياني التالي:



من الشكل ابياني يظهر لنا بأن السلسلة الزمنية هي سلسلة غير مستقرة، لكن لا يكفي الحكم البياني على السلسلة بل يجب التأكد من ذلك عن طريق الاختبارات الإحصائية. عندما نقسم المشاهدات على فترات مختلفة فإننا نجد أن المتوسط يتغير عبر الزمن.

تحليل دالة الارتباط الذاتي ACF :

لتحليل دالة الارتباط الذاتي نقوم برسم المنحنى البياني الموافق لها والذي يسمى correlogramme، وذلك باتباع الخطوات التالية:

View  correlogramme  Lags to include (Level=15)

نلاحظ من خلال التمثيل البياني لدالة الارتباط الذاتي (ممثلة بـ Le corrélogramme في الجدول رقم 1 الممثل أسفله) أن كل معاملات هذه الدالة تقع خارج مجال الثقة، ما يجعلنا نستنتج أنها ليست تشويش أبيض.

كما يمكن تأكيد ذلك من خلال اختبار Q لـ Ljung-Box وهو اختبار مشترك لمعنوية معاملات الارتباط الذاتي كمجموعة.

$$\begin{cases} H_0 : \varphi_1 = \varphi_2 = \dots = \varphi_h = 0 \\ H_1 : \exists \varphi_i \neq 0 \end{cases}$$

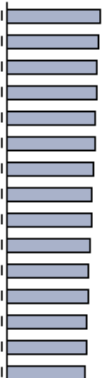
مع العلم أن: $Q-stat$ تتبع توزيع كيدومربع $\chi^2_{(0.05,h)}$.

مثلا عند تأخير $h = 15$ نجد من خلال الجدول رقم 1 الممثل أسفله أن $Q-stat = 14483 \chi^2_{(0.05,15)} \cong 25$.

وبالتالي نرفض H_0 ونقبل H_1 وتكون بهذا السلسلة غير مستقرة.

كما يمكن الاعتماد على عمود الاحتمال (prob) لنلاحظ أنها كلها مساوية للصفر، هذا ما يؤكد أن كل معاملات الارتباط الذاتي معنوية وتختلف عن الصفر.

الجدول رقم 1: مخرجات تطبيق (Eviews)

Autocorrelation	Partial Correlation	AC	PAC	Q-Stat	Prob	
		1	0.989	0.989	1136.6	0.000
		2	0.976	-0.049	2245.7	0.000
		3	0.964	0.020	3329.0	0.000
		4	0.953	0.015	4387.8	0.000
		5	0.941	-0.055	5420.2	0.000
		6	0.929	0.024	6427.5	0.000
		7	0.917	0.009	7411.2	0.000
		8	0.907	0.035	8373.4	0.000
		9	0.896	-0.005	9314.4	0.000
		10	0.885	-0.039	10233.	0.000
		11	0.874	-0.018	11128.	0.000
		12	0.862	0.004	12002.	0.000
		13	0.850	-0.040	12852.	0.000
		14	0.838	0.003	13679.	0.000
		15	0.827	0.000	14483.	0.000

3. استراتيجية إختبار الإستقرارية لديكي فولر:

يهدف اختبار ديكي فولر العادي إلى تقدير ثلاثة نماذج هي:

$$[1] : CAC_t - CAC_{t-1} = DCAC_t = (\phi - 1) CAC_{t-1}$$

$$[2] : CAC_t - CAC_{t-1} = DCAC_t = (\phi - 1) CAC_{t-1} + c$$

$$[3] : CAC_t - CAC_{t-1} = DCAC_t = (\phi - 1) CAC_{t-1} + c + bt$$

أولاً نحتاج إلى توليد متغيرة جديدة وهي $DCAC = CAC - CAC(-1)$ وذلك باتباع الخطوة التالية في برنامج EVIEWS 10 وفق اتباع الخطوة التالية:

Quick → generate series $DCAC = CAC - CAC(-1)$

وبهذا نحصل على السلسلة الجديدة $DCAC$

منهجية ديكي فولر تعتمد على تقدير النموذج رقم 3 أعلاه وذلك باتباع الخطوات التالية في برنامج EVIEWS 10:

Quick → Estimate Equation → $dcac \text{ cac } (-1) \text{ c } @trend$

فنحصل على جدول التقدير التالي:

الجدول رقم 2: نتيجة تقدير النموذج 3 وفق طريقة المربعات الصغرى

Augmented Dickey-Fuller Test Equation
 Dependent Variable: D(CAC)
 Method: Least Squares
 Date: 02/19/24 Time: 20:19
 Sample (adjusted): 2 1160
 Included observations: 1159 after adjustments

Variable	Coefficient	Std. Error	t-Statistic	Prob.
CAC(-1)	-0.008447	0.004113	-2.053788	0.0402
C	14.93911	7.437617	2.008589	0.0448
@TREND("1")	0.002103	0.001896	1.108866	0.2677
R-squared	0.003870	Mean dependent var		0.417204
Adjusted R-squared	0.002147	S.D. dependent var		20.64858
S.E. of regression	20.62640	Akaike info criterion		8.893606
Sum squared resid	491818.4	Schwarz criterion		8.906691
Log likelihood	-5150.845	Hannan-Quinn criter.		8.898543
F-statistic	2.245643	Durbin-Watson stat		1.867318
Prob(F-statistic)	0.106321			

نلاحظ من خلال نتائج التقدير أن معامل خط الاتجاه العام ليس معنوي ($\text{prob}=0.26>0.05$) وبالتالي تأكدنا أن عدم استقرارية السلسلة ليس محدد (TS non stationnarité déterministe).

والآن نقوم بإجراء اختبار ديكي فولر باتباع الخطوات التالية في برنامج **EVIEWS 10**:

Quick series statistics unit root test

مع الإشارة هنا إلى أن اختبار ديكي فولر يُجرى على السلسلة الأصلية CAC وليس DCAC. وكانت النتائج كما يلي:

الجدول رقم 3: نتائج اختبار ديكي فولر للنموذج 3

Null Hypothesis: CAC has a unit root
 Exogenous: Constant, Linear Trend
 Lag Length: 0 (Fixed)

	t-Statistic	Prob.*
Augmented Dickey-Fuller test statistic	-2.053788	0.5705
Test critical values:		
1% level	-3.965984	
5% level	-3.413694	
10% level	-3.128911	

*Mackinnon (1996) one-sided p-values.

Augmented Dickey-Fuller Test Equation

من خلال نتائج اختبار ديكي فولر الممثلة في الجدول أعلاه نلاحظ أن إحصائية ديكي فلر المحسوبة تساوي -2,053 وهي أكبر من ديكي فولر المجدولة عند مستوى معنوية 5% وبالتالي نقبل الفرضية H_0 , أي أن السلسلة ليست مستقرة مع عدم معنوية الاتجاه العام.

بالتالي نقوم بتقدير النموذج 2 وفق نفس المنهجية.

إذن سنقوم بتقدير النموذج من دون اتجاه عام كما يلي:

Quick → Estimate equation → dcac cac (-1) c

والنتائج موضحة في الجدول الموالي:

الجدول رقم 4: نتائج تقدير النموذج 2

Dependent Variable: DCAC
Method: Least Squares
Date: 02/20/24 Time: 18:09
Sample (adjusted): 2 1160
Included observations: 1159 after adjustments

Variable	Coefficient	Std. Error	t-Statistic	Prob.
CAC(-1)	-0.007093	0.003928	-1.805839	0.0712
C	13.63563	7.344864	1.856485	0.0636
R-squared	0.002811	Mean dependent var		0.417204
Adjusted R-squared	0.001949	S.D. dependent var		20.64858
S.E. of regression	20.62845	Akaike info criterion		8.892943
Sum squared resid	492341.5	Schwarz criterion		8.901667
Log likelihood	-5151.461	Hannan-Quinn criter.		8.896235
F-statistic	3.261054	Durbin-Watson stat		1.867860
Prob(F-statistic)	0.071203			

إذن بما أن السلسلة ليست من نوع TS فهي غير مستقرة من نوع DS، وتقدير النموذج 2 يسمح لنا من تحديد هل هي DS بمشتق أو بدون مشتق.

من خلال الجدول رقم 4 أعلاه نلاحظ أن الثابت (القاطع) غير معنوي لأن (prob=0.0636>0.05) ما يجعلنا نستنتج أن السلسلة التي بين أيدينا سلسلة غير مستقرة من نوع DS بدون مشتق.

أما بالنسبة لاختبار ديكي فولر نلاحظ من الجدول رقم 5 الممثل أدناه أن إحصائية ديكي فولر المحسوبة تساوي -1,805 وهي أكبر من ديكي فولر المجدولة (-2.86) عند مستوى معنوية 5% وبالتالي نقبل الفرضية H_0 , أي أن السلسلة ليست مستقرة.

الجدول رقم 5:

Null Hypothesis: CAC has a unit root
Exogenous: Constant
Lag Length: 0 (Fixed)

	t-Statistic	Prob.*
Augmented Dickey-Fuller test statistic	-1.805839	0.3779
Test critical values:		
1% level	-3.435777	
5% level	-2.863824	
10% level	-2.568037	

*Mackinnon (1996) one-sided p-values.

وفي الأخير نقوم باختبار ديكي فولر للنموذج رقم 1 فنجد كذلك أن السلسلة غير مستقرة.

ملاحظة مهمة:

بما أن السلسلة التي بين أيدينا هي غير مستقرة من نوع DS بدون مشتق فإن الفروق الأولى تسمح لنا بإرجاعها مستقرة وسنختبر ذلك برسم منحنى دالة الارتباط الذاتي للسلسلة DCAC بحيث:

$$DCAC_t = CAC_t - CAC_{t-1}$$

من خلال منحنى دالة الارتباط الذاتي الممثل في الأسفل نلاحظ أن جميع معاملات الارتباط الذاتي تقع داخل مجال الثقة (هذا ما يؤكد اختبار $Ljung-Box Q$ بحيث احتمال الثقة يساوي 0,182 من أجل $k=15$ وهو أكبر من 0,05) ما يجعلنا نقبل الفرضية المنعدمة وبالتالي جميع معاملات الارتباط الذاتي منعدمة ، هذا ما يؤكد أن السلسلة CAC40 بعد الفروق الأولى لها خصائص التشويش الأبيض.

Date: 03/29/24 Time: 21:02

Sample: 1 1160

Included observations: 1159

Autocorrelation	Partial Correlation	AC	PAC	Q-Stat	Prob
		1 0.062	0.062	4.4625	0.035
		2 -0.010	-0.014	4.5772	0.101
		3 -0.039	-0.038	6.3597	0.095
		4 0.059	0.064	10.409	0.034
		5 -0.015	-0.024	10.665	0.058
		6 -0.020	-0.018	11.145	0.084
		7 -0.017	-0.010	11.493	0.119
		8 -0.008	-0.012	11.572	0.171
		9 0.044	0.046	13.813	0.129
		10 0.021	0.016	14.347	0.158
		11 0.018	0.016	14.712	0.196
		12 0.040	0.043	16.558	0.167
		13 -0.008	-0.018	16.634	0.217
		14 -0.051	-0.049	19.652	0.141
		15 -0.009	0.001	19.741	0.182

4. سلسلة تمارين الفصل الثاني:

التمرين 1:

إذا كانت السلسلة y_t تتبع النموذج الآتي:

$$y_t = \beta_0 + \varepsilon_t$$

حيث β_0 مقدار ثابت و ε_t سلسلة تشويش أبيض.

إذن في هذه الحالة، هل السلسلة y_t مستقرة؟ اشرح سبب إجابتك

التمرين 2:

إذا كانت السلسلة y_t تتبع النموذج الآتي:

$$y_t = \beta_0 + \beta_1 t + \varepsilon_t, \quad t = 1, 2, \dots, n$$

بحيث β_0 و β_1 مقداران ثابتان، و ε_t سلسلة تشويش أبيض. إذن هل السلسلة y_t مستقرة؟ اشرح سبب ذلك.

التمرين 3:

إذا كانت السلسلة $\{y_t\}$ تتبع النموذج الآتي:

$$y_t = y_{t-1} + \varepsilon_t, \quad t = 1, 2, \dots, n$$

حيث أن ε_t تشويش أبيض.

هل السلسلة $\{y_t\}$ مستقرة؟ اشرح سبب إجابتك.

التمرين 4:

إذا كانت السلسلة $\{y_t\}$ تتبع النموذج الآتي:

$$y_t = \varepsilon_t - \theta \varepsilon_{t-1}, \quad t = 1, 2, \dots, n$$

حيث θ مقدار ثابت و ε_t تشويش أبيض.

هل السلسلة $\{y_t\}$ مستقرة؟ اشرح سبب إجابتك.

التمرين 5:

أوجد دالة الارتباط الذاتي لسيروية التشويش الأبيض ε_t (الضجة البيضاء (White Noise Series)).

التمرين 6:

إذا كانت السيرورة $\{y_t\}$ تتبع النموذج الآتي

$$y_t = \varepsilon_t - \theta \varepsilon_{t-1}, \quad t = 1, 2, \dots, n$$

أوجد دالة الارتباط الذاتي للسيرورة $\{y_t\}$.

التمرين 07:

إذا كانت السلسلة y_t دالة محددة Deterministic (غير عشوائية) تتبع النموذج الآتي:

$$y_t = \beta_0 + \beta_1 t + \varepsilon_t, \quad t = 1, 2, \dots, n$$

أوجد دالة الارتباط الذاتي للسلسلة.

التمرين 08:

تمثل البيانات الآتية متوسط النسبة المئوية السنوية للرطوبة في إحدى المدن:

السنة	2020	2021	2022	2023	2024
الرطوبة (%)	20	30	10	20	20

المطلوب:

رسم دالة الارتباط الذاتي لهذه البيانات.

5. حلول تمارين الفصل الثاني:

حل التمرين 1:

أولا نقوم بحساب التوقع الرياضي للسلسلة y_t كمايلي:

$$E(y_t) = E(\beta_0 + \varepsilon_t) = E(\beta_0) + E(\varepsilon_t) = \beta_0$$

لأن ε_t سلسلة تشويش أبيض، وبالتالي لدينا $E(\varepsilon_t) = 0$ ، ومن خواص التوقع الرياضي للثابت لدينا

$$E(\beta_0) = \beta_0$$

وبالتالي نستنتج أن التوقع الرياضي للسلسلة y_t لا يتغير بتغير الزمن (مستقل عن t).

ثانياً نقوم بحساب التباين للسلسلة الزمنية:

$$\text{Var}(y_t) = V(\beta_0 + \varepsilon_t) = V(\beta_0) + V(\varepsilon_t) + 2\text{cov}(\varepsilon_t, \beta_0) = \sigma^2$$

لأن تباين الثابت معدوم، والتشويش الأبيض من خصائصه أيضاً $\forall t \neq s$ $\text{cov}(\varepsilon_t, \varepsilon_s) = 0$;

بالتالي نجد أن التباين أيضاً لا يتغير بتغير الزمن (مستقل عن t).

$$\begin{aligned} \text{Cov}(Y_t, Y_{t-k}) &= \text{Cov}(\beta_0 + \varepsilon_t, \beta_0 + \varepsilon_{t-k}) = E[(\beta_0 + \varepsilon_t)(\beta_0 + \varepsilon_{t-k})] - E(\beta_0 + \varepsilon_t)E(\beta_0 + \varepsilon_{t-k}) \\ &= E(\beta_0 + \varepsilon_t)E(\beta_0 + \varepsilon_{t-k}) - E(\beta_0 + \varepsilon_t)E(\beta_0 + \varepsilon_{t-k}) \\ &= \beta_0 \times \beta_0 - \beta_0 \times \beta_0 \\ &= 0 \end{aligned}$$

أي أن جميع التغيرات الذاتية لا تتغير بتغير الزمن (مستقل عن t).

بالتالي نستنتج أن السلسلة y_t مستقرة.

حل التمرين 2:

إذن نقوم أولاً بحساب التوقع الرياضي أو الوسط الحسابي (يجب مراجعة الإحصاء الوصفي)

لدينا :

$$\begin{aligned} E(y_t) &= E(\beta_0 + \beta_1 t + \varepsilon_t) \\ &= E(\beta_0 + \beta_1 t) + E(\varepsilon_t) \\ &= \beta_0 + \beta_1 t + 0 \end{aligned}$$

وهذا يعني أن الوسط الحسابي للسلسلة y_t غير ساكن ويزداد بمقدار ثابت مطلق إذا كان $\beta_1 > 0$ ، ويتناقص

بمقدار ثابت مطلق إذا كان $\beta_1 < 0$ ، أي أن السلسلة لها اتجاه عام خطي إذا كان $\beta_1 \neq 0$.

وبالتالي نستنتج أن السلسلة y_t غير مستقرة. وليس هناك داع لاختبار استقرارية التباين والتغاير، حيث أن أحد

شروط الاستقرار غير متحقق.

حل التمرين 3:

أولا نقوم بحساب التوقع الرياضي

$$E(y_t) = E(y_{t-1}) + E(\varepsilon_t) = E(y_{t-1}) + 0 \quad t = 1, 2, \dots, n$$

وبالتالي فإن التوقع ساكن لأنه لا يعتمد على الزمن

ثانياً نقوم بحساب التباين:

$$\begin{aligned} V(y_t) &= V(y_{t-1} + \varepsilon_t) \\ &= V(y_{t-1}) + V(\varepsilon_t) + 2Cov(y_{t-1}, \varepsilon_t) \\ &= V(y_{t-1}) + \sigma^2 + 0 \end{aligned}$$

إذن نلاحظ من خلال حساب تباين السلسلة $\{y_t\}$ ، أن $V(y_t)$ هو $V(y_{t-1})$ زائد قيمة موجبة (σ^2) ، وهذا ما يجعلنا نستنتج أن التباين غير ساكن، وبالتالي السلسلة $\{y_t\}$ غير مستقرة.

حل التمرين 4:

أولا نقوم بحساب التوقع الرياضي

$$\begin{aligned} E(y_t) &= E(\varepsilon_t - \theta \varepsilon_{t-1}) \\ &= E(\varepsilon_t) - \theta E(\varepsilon_{t-1}) \\ &= 0 - \theta 0 \\ &= 0 \end{aligned}$$

بالتالي نستنتج أن التوقع ساكن.

ثانياً نقوم بحساب التباين

$$\begin{aligned} V(y_t) &= V(\varepsilon_t - \theta \varepsilon_{t-1}) \\ &= V(\varepsilon_t) + \theta^2 V(\varepsilon_{t-1}) - 2Cov(\varepsilon_t, \varepsilon_{t-1}) \\ &= \sigma^2 + \theta^2 \sigma^2 = \sigma^2 (1 + \theta^2), \quad t = 1, 2, \dots \end{aligned}$$

بالتالي نستنتج أن التباين لا يتغير بتغير الزمن، وهو ثابت لأي قيمة للثابت θ .

ثالثاً. نقوم بحساب التباين

$$\begin{aligned}
\gamma(t, t+1) &= \text{Cov}(Y_t, Y_{t+1}) \\
&= \text{Cov}(\varepsilon_t - \theta\varepsilon_{t-1}, \varepsilon_{t+1} - \theta\varepsilon_t) \\
&= E(\varepsilon_t - \theta\varepsilon_{t-1})(\varepsilon_{t+1} - \theta\varepsilon_t) + E(\varepsilon_t - \theta\varepsilon_{t-1})E(\varepsilon_{t+1} - \theta\varepsilon_t) \\
&= E(\varepsilon_t \varepsilon_{t+1}) - \theta E(\varepsilon_t \varepsilon_t) - \theta E(\varepsilon_{t-1} \varepsilon_{t+1}) + \theta^2 E(\varepsilon_{t-1} \varepsilon_t) + 0 \\
&= 0 - \theta\sigma^2 - \theta \cdot 0 + \theta^2 \cdot 0 + 0 \\
&= -\theta\sigma^2 \quad t = 1, 2, \dots, n
\end{aligned}$$

وبالتالي نستنتج أن التباين بين Y_t, Y_{t+1} لا يعتمد على الزمن وبالمثل يمكن إثبات أن:

$$\gamma(t, t+2) = \gamma(t, t+3) = \dots = 0$$

وبالتالي فإن:

$$\gamma(t, t+k) = \gamma(k) = \begin{cases} -\theta\sigma^2, & k=1 \\ 0, & k \geq 2 \end{cases}$$

أي أن دالة التباين لا تعتمد على الزمن، وإنما فقط على الفجوة الزمنية k .

ومن كل ما سبق، لا حظنا ثبات الوسط الحسابي والتباين والتباين، وبالتالي نستنتج أن السلسلة $\{y_t\}$ مستقرة.

حل التمرين 5:

بما أن ε_t تشويش أبيض فهو يحقق الخصائص التالية:

$$E(\varepsilon_t) = 0; \quad t = \pm 1, \pm 2, \dots$$

$$\text{Var}(\varepsilon_t) = \sigma^2 \quad t = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

$$\gamma(k) = \text{Cov}(\varepsilon_t, \varepsilon_{t-k}) = 0; \quad k \neq 0; t = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

وبالتالي فإن دالة الارتباط الذاتي تكتب على الشكل التالي:

$$\rho(k) = \frac{\gamma(k)}{\gamma(0)} = 0, \quad k \neq 0$$

وبالتالي ينتج لدينا:

$$\rho(k) = \begin{cases} 1, & k = 0 \\ 0, & k \neq 0 \end{cases}$$

حل التمرين 6:

عند حل التمرين الرابع وجدنا بأن

$$\gamma(0) = V(y_t) = \sigma^2(1 + \theta^2)$$

$$\gamma(t, t+k) = \gamma(k) = \begin{cases} -\theta\sigma^2, & k=1 \\ 0, & k \geq 2 \end{cases}$$

بالتالي يمكن كتابة:

$$\gamma(k) = \begin{cases} \sigma^2(1 + \theta^2), & k=0 \\ -\theta\sigma^2, & k=1 \\ 0, & k \geq 2 \end{cases}$$

وبالتالي فإن:

$$\rho(k) = \frac{\gamma(k)}{\gamma(0)} = \begin{cases} 1 & ; k=0 \\ \frac{-\theta\sigma^2}{\sigma^2(1 + \theta^2)} = -\frac{\theta}{1 + \theta^2} & ; k=1 \\ 0 & ; k \geq 2 \end{cases}$$

حل التمرين 7:

$$\gamma(0) = V(y_t) = V(\beta_0 + \beta_1 t + \varepsilon_t) = V(\varepsilon_t) = \sigma^2$$

ولدينا كذلك: من أجل $s \neq t$ ومع العلم أن ε_t تشويش أبيض فإن $E(\varepsilon_t) = 0$; $E(\varepsilon_s) = 0$

$$\begin{aligned} \gamma(s, t) &= \text{Cov}(\beta_0 + \beta_1 s + \varepsilon_s, \beta_0 + \beta_1 t + \varepsilon_t) \\ &= E[(\beta_0 + \beta_1 s + \varepsilon_s)(\beta_0 + \beta_1 t + \varepsilon_t)] - E(\beta_0 + \beta_1 s + \varepsilon_s)E(\beta_0 + \beta_1 t + \varepsilon_t) \\ &= E(\beta_0^2 + \beta_0\beta_1 t + \beta_0\varepsilon_t + \beta_1\beta_0 s + \beta_1^2 st + \beta_1 s\varepsilon_t + \beta_0\varepsilon_s + \beta_1 t\varepsilon_s + \varepsilon_s\varepsilon_t) \\ &\quad - [(\beta_0 + \beta_1)(\beta_0 + \beta_1 t)] \\ &= 0 \end{aligned}$$

ومن ثم يمكننا إيجاد دالة الارتباط كما يلي:

$$\rho(k) = \begin{cases} 1, & k=0 \\ 0, & k \neq 0 \end{cases}$$

حل التمرين 8:

يمكن من خلال معطيات الجدول أعلاه حساب ما يلي:

$$\bar{y} = \frac{100}{58} = 20 \quad ; \quad \sum_{t=1}^8 (y_t - \bar{y})^2 = 200$$

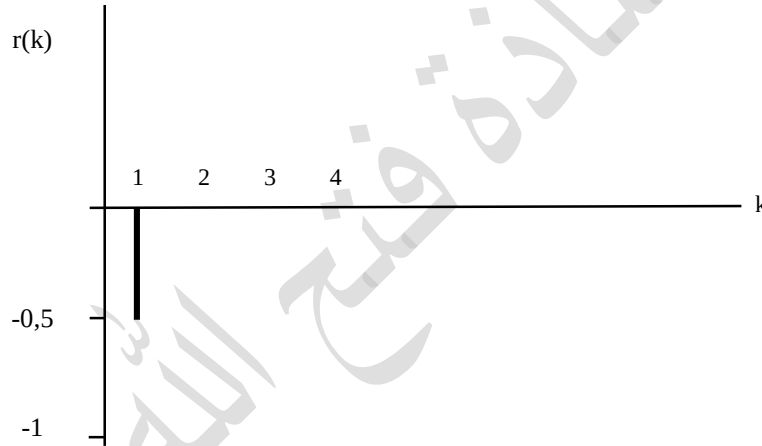
وبالتالي بتطبيق القانون الذي يسمح لنا بتقدير دالة الارتباط الذاتي:

$$r(k) = \hat{\rho}(k) = \frac{\sum_{t=1}^{n-k} (y_t - \bar{y})(y_{t+k} - \bar{y})}{\sum_{t=1}^n (y_t - \bar{y})^2}$$

نجد أن:

$$r(1) = -\frac{1}{2} \quad ; \quad r(2) = r(3) = r(4) = 0$$

ويمكن رسم هذه الدالة في الشكل الموالي:



نلاحظ من خلال الشكل أعلاه أن $r(K)$ تنقطع فجأة بعد الفجوة الزمنية الأولى.

الفصل الثالث:

نماذج التنبؤ باستخدام السلاسل
الزمنية

الفصل الثالث: نماذج التنبؤ باستخدام السلاسل الزمنية

بعد أن تطرقنا إلى الدراسة التحليلية للسلاسل الزمنية خلال الفصلين السابقين، نتناول من خلال هذا الفصل عرض بعض النماذج الخطية للسلاسل الزمنية وفق مقترح منهجية بوكس-جينكينز، وهي عبارة عن نماذج تعتمد أساساً على السلاسل الزمنية المستقرة في بنائها.

1. عرض مختصر لمنهجية بوكس-جينكينز (BOX-JENKINS):

إن عملية اختيار النموذج الموافق للسلسلة الزمنية ليس بالأمر السهل لأنها تخضع إلى قواعد رياضية دقيقة بالإضافة إلى كثرة الاختبارات الإحصائية الواجب إجرائها، لذا وضع العالمان الإحصائيان George-box و Gwilyn-Jenkins سنة 1976 منهجية لتسهيل عملية البحث عن أفضل نموذج معبر عن سلوك الظاهرة المدروسة عبر الزمن، وتعتبر هذه المنهجية واحدة من بين أهم الطرق التحليلية والتنبؤية الكمية التي تعتمد على دراسة السلسلة الزمنية وكشف خصائصها الجوهرية والقيام بتقدير القيم التنبؤية للمتغير الاقتصادي المدروس لمدة معينة مثلاً 12 شهراً¹.

تعد طريقة بوكس-جينكينز (BOX-JENKINS) جد مهمة، حيث أنها وضعت خصيصاً لمعالجة السلاسل الزمنية المعقدة، وبصفة عامة في الحالات التي يكون فيها النموذج الابتدائي غير معروف مسبقاً. هذه الطريقة يمكن اعتبارها من الناحية المنهجية طريقة جد غنية ودقيقة وهي تعميم لتقنيات المتوسطة المتحركة (la moyenne mobile) وهي ما يقال عنها أنها عشوائية (Aléatoire).

مبدأ هذه الطريقة يرتكز على فكرة أن معظم السلاسل الزمنية يمكن اعتبارها كمتوسطات عشوائية (Stochastique)، ويمكن وصفها استناداً إلى نماذج مرجعية. بحيث أنه يفترض في السلسلة الزمنية بأنها مؤلدة بسيرورة عشوائية (processus-stochastique).

وسنحاول التعرف على عناصر هذه الطريقة فيما يلي:

أ- السياق العشوائي: processus stochastique

النموذج العرضي والذي نرمز له بالرمز $[X_t, teT]$ هو عبارة عن عائلة من المتغيرات العشوائية مدرجة في النموذج العرضي والذي نرمز له بالرمز $[X_t, teT]$ هو عبارة عن عائلة من المتغيرات العشوائية مدرجة في

¹ P.GEORGES BRESSON, ALAIN PIROTTE. OP.CIT , P 53.

الفصل الثالث: نماذج التنبؤ باستخدام السلاسل الزمنية

الزمن. ولتحديد قانون الاحتمال لهذا النموذج $[X_t, teT]$ يجب معرفة قوانين الاحتمال لكل العائلات الجزئية المنتهية، وفي غياب الفرضيات نكتب أن عزوم قانون الاحتمال للنموذج التابع للزمن، خاصة المتوسطة:

$$E(X_t) = \mu_t.$$

التباين:

$$V(X_t) = \sigma^2_{X_t}.$$

وللتأخر h :

$$\gamma(t, h) = COV[X_t, X_{t+h}]$$

تابعة للحظة t

- السيرورة المستقرة PROCESSUS STATIONNAIRE :

كما ذكرنا سابقا، نقول عن السلسلة X_t أنها مستقرة بالنسبة للزمن $t_1, \dots, t_n$ إذا كانت المتوالية $X_{t_1}, \dots, X_{t_n}$ لها نفس التوزيع الاحتمالي للمتتالية $X_{t_1+h}, \dots, X_{t_n+h}$ من المشاهدات، وهذا يعني أن جميع عزوم السلسلة مستقلة عن الزمن.

أي:

* ثبات الوسط الحسابي للسلسلة

$$E(X_t) = \mu$$

* ثبات التباين:

$$V(X_t) = \gamma(0) = \sigma^2$$

$$COV[X_t, X_{t+h}] = \gamma(h)$$

وعليه يمكن كتابة معامل الارتباط الذاتي بالشكل:

$$\rho(h) = \gamma(h) / \gamma(0)$$

حيث:

$$\gamma(0) \text{ يبين تباين } X_t \quad \checkmark$$

$$\rho(h) \text{ : الارتباط بين أزواج المشاهدات التي تفصلها } h \text{ فترة زمنية.} \quad \checkmark$$

ونقول عن السلسلة X_t أنها ضعيفة الاستقرار إذا كانت العزوم من درجة معينة مستقلة عن الزمن بينما العزوم الأخرى مرتبطة بالزمن فمثلا الاستقرار من الدرجة 2.

السلسلة X_t مستقرة من الدرجة 2 إذا كان:

$$E(X_t) = \mu \text{ إلى ثابت:}$$

$$V(X_t) = \gamma(0) = \sigma^2 < +\infty \text{ إلى ثابت:}$$

التباين المشترك ليس له دالة للزمن بينما هي دالة للفرق بين فترتين t و $t+h$:

$$COV[X_t, X_{t+h}] = \gamma(h)$$

الاستقرار من الدرجة j : نقول عن السلسلة مستقرة من الدرجة j إذا كان :

$$E[(X_{t_1})^{j_1} \dots \dots \dots (X_{t_n})^{j_n}] = E[(X_{t_1+r})^{j_1} \dots \dots \dots (X_{t_n+r})^{j_n}]$$

حيث:

$$i = 1 \dots \dots \dots n$$

$$t_{1+r} \in T, r \in T, t_i \in T(t_1 \dots \dots t_n)$$

$$j_1 \dots \dots \dots j_n \geq 0, j_1 \dots \dots \dots j_n \leq j$$

ب-التشويش الأبيض (الضجة البيضاء (bruit blanc):

وهي متتالية عشوائية متجانسة ومستقلة عن بعضها البعض أي مرتبطة ولها نفس التباين ونرمز لها بالرمز ε_t ، أو عبارة عن سلسلة عشوائية مستقلة وعن بعضها البعض وذات تزايد غير مرتبطة ، ويمكن تلخيص ما سبق رياضيا بالشكل التالي:

$$\begin{cases} \varepsilon_t \rightarrow N(0, \delta^2) \\ E(\varepsilon_t) = 0 \\ Var(\varepsilon_t) = \delta^2 \\ COV(\varepsilon_t \varepsilon_{t-h}) = 0 \quad \forall t \end{cases}$$

ε_t الخطأ العشوائي.

ج-عمليات التحويل: يعرف عامل الإزاحة الى الخلف كما يلي:

$$BX_t = X_{t-1}$$

وبالتالي فان:

$$X_{t-2} = BX_{t-1} = BB(X_t) = B^2 X_t$$

وعليه:

$$X_{t-j} = B^j X_t$$

ويعرف عامل الإزاحة الى الأمام كما يلي:

$$X_{t+1} = FX_t$$

$$X_{t+2} = F^2 X_t$$

$$X_{t+j} = F^j X_t$$

ومن خصائص هذين العاملين:

$$BF = FB = 1 \Rightarrow B^{-1} = F, F^{-1} = B$$

$$\Delta X_t = (1 - B)X_t$$

$$\Delta' X_t = (1 - B)' X_t$$

2. النماذج الخطية للسلاسل الزمنية:

اقترح بوكس -جينكز من أجل متطلبات نمذجة السلاسل الزمنية، مجموعة من النماذج الخطية نذكرها فيما يلي:

1.2 نماذج الانحدار الذاتي من الدرجة p (AR(p)):

ينطلق هذا النوع من النماذج للمتغير التابع X_t الممثل للظاهرة المراد دراستها، أنه في حالة السلسلة X_t مستقرة يمكن تفسيرها بماضيتها عبر الزمن فقط أي بواسطة قيمها في الماضي فقط، ونسمي الانحدار الذاتي من الدرجة p كل نموذج مستقر يكتب على الشكل: AR(p) ويكتب الشكل العام لهذا النموذج بالعلاقة التالية:

$$X_t = \mu + \Phi_1 X_{t-1} + \Phi_2 X_{t-2} + \dots + \Phi_p X_{t-p} + \mu_t$$

$$X_t = \mu + \sum_{j=1}^p \Phi_j X_{t-j} + \mu_t$$

حيث: μ و $\Phi_1, \Phi_2, \dots, \Phi_p$ ثوابت.

μ_t : هي صدمات عشوائية (bruit blanc).

وعادة ما يكتب نموذج الانحدار الذاتي بالاستعانة بعامل (مُشغل) التأخير B

$$X_t = \mu + \Phi_1 B X_t + \Phi_2 B^2 X_t + \dots + \Phi_p B^p X_t + \mu_t$$

$$\Rightarrow (1 - \Phi_1 B - \Phi_2 B^2 - \dots - \Phi_p B^p) X_t = \mu + \mu_t$$

$$\Rightarrow \Phi(B) X_t = \mu + \mu_t$$

حيث:

$$\Phi(B) = (1 - \Phi_1 B - \Phi_2 B^2 - \dots - \Phi_p B^p)$$

و μ_t عبارة عن صدمات عشوائية.

- شروط استقرارية نموذج AR(p)

بوضع $X_t = X_t - \mu$ وانطلاقاً من المعادلة :

$$X_t = \mu + \Phi_1 B X_t + \Phi_2 B^2 X_t + \dots + \Phi_p B^p X_t + \mu_t$$

يكون لدينا:

$$\Phi(B)X_t = \mu_t \Rightarrow X_t = \Phi(B)^{-1} \mu_t$$

إذن وحتى يكون النموذج $AR(p)$ مستقراً يكفي أن يكون قابلاً للانعكاس، أي يمكن كتابته على شكل نموذج نهائي لصدمة عشوائية.

وبعبارة أخرى يكون النموذج $AR(p)$ نموذجاً مستقراً إذا كانت جذور كثير الحدود $\Phi(B)$ بالقيمة المطلقة أقل من الواحد أي $|G_i| < 1$ حيث:

$$\Phi(B) = (1 - G_1)(1 - G_2 B^2) \dots (1 - G_p B^p)$$

- دالة الارتباط الذاتي (ACF) بالنسبة لـ $AR(p)$:

تتغير معاملات هذه الدالة باتجاه واحد بالنسبة لـ $AR(p)$ ، حيث أنها تتطوّر من الواحدة وتبقى في تناقص مستمر، غير أنها لا تنعدم بسرعة في حالة الاستقرار مما يصعب تحديد درجة النموذج وهي تساعد على:

- الكشف على مدى وجود الارتباط بين المشاهدات من خلال حساب معاملات الارتباط الذاتي بين هذه المشاهدات في فترات مختلفة.

- تحديد مدى استقرارية السلسلة الزمنية، ويتجلى ذلك في تلاشي المعاملات بسرعة أي قبل الدرجة والتي

$$\text{تعاذل } \frac{n}{4}.$$

- كشف أسباب عدم الاستقرار.

لكن ما يميز دالة الارتباط الذاتي في حالة نموذج الانحدار الذاتي أنها تتلاشى بشكل أسي بعد التأخير p .

- دالة الارتباط الذاتي الجزئي بالنسبة لـ $AR(p)$:

الفصل الثالث: نماذج التنبؤ باستخدام السلاسل الزمنية

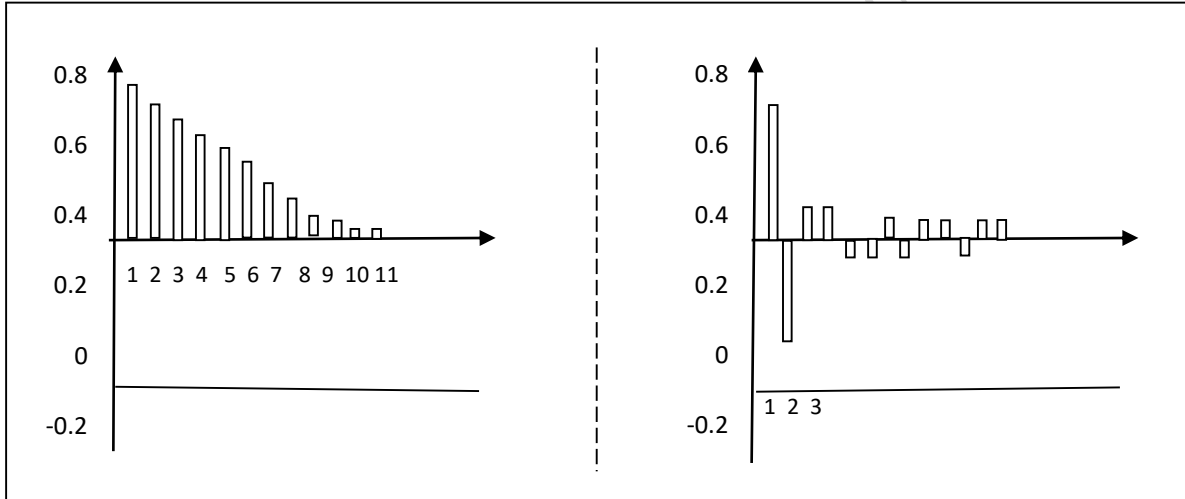
نظرا لصعوبة معرفة شكل النموذج $AR(p)$ بواسطة دالة الارتباط الذاتي ACF، نستعمل الدالة PACF وذلك من خلال معاملاتها التي تتعدم بعد الدرجة P والتي تتبع قانون التوزيع الطبيعي ذو التباين ولهذا يجب التأكد من انعدام هذه المعاملات عندما تكون $(h > p)$.

لنفرض أنه لدينا نموذج من الشكل التالي:

$$X_t = 0,5X_{t-1} + \mu_t$$

التمثيل البياني لدالتي ACF و PACF لـ $AR(3)$ مثلا:

الشكل رقم (10_1) دالتي الارتباط الذاتي و الذاتي الجزئي لـ $AR(3)$



2.2 نماذج المتوسطات المتحركة MA(q)

نقول عن السلسلة الزمنية y_t في سيروية المتوسطات المتحركة من الرتبة $q \geq 1$ التي نرمز لها بالرمز $MA(q)$ إذا كانت مفسرة بواسطة متغيرات لم ندرجها في النموذج أي بالأخطاء العشوائية، ولتحديد هذا النموذج يتم دراسة دالة الارتباط الذاتي و الذاتي الجزئي. نعبر عن هذا النموذج بالصيغة التالية:

$$Y_t = \theta_0 + \varepsilon_t + \theta_1 \varepsilon_{t-1} + \theta_2 \varepsilon_{t-2} + \dots + \theta_q \varepsilon_{t-q}$$

حيث أن:

ε_t - هو تشويش ابيض يخضع للتوزيع الطبيعي، $\varepsilon_t \rightarrow BBN(0, \sigma^2)$.

الفصل الثالث: نماذج التنبؤ باستخدام السلاسل الزمنية

- θ_0 تمثل الحد الثابت و $(\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_q)$ تمثل معاملات النموذج والتي تحدد أثر القيم السابقة للبواقي على القيمة الحالية للسلسلة، أي أثر الصدمات العشوائية على قيم السلسلة المدروسة.

- $q \in R$ ومستقلة عن الزمن t .

دراسة الإستقرارية لنماذج MA(q):

حتى يكون نموذج MA مستقرا، يجب أن يُحقق شروط الإستقرارية، وهي ثبات المتوسط، التباين والتباين المشترك بالنسبة الزمن.

حساب المتوسط:

$$E(Y)_t = \theta_0 - \theta_1 E(\varepsilon_{t-1}) - \theta_2 E(\varepsilon_{t-2}) - \dots - \theta_q E(\varepsilon_{t-q}) + E(\varepsilon_t)$$

$$E(Y)_t = \theta_0 - \theta_1 0 - \theta_2 0 - \dots - \theta_q 0 + 0$$

$$E(Y)_t = \theta_0$$

إذن نستنتج أن المتوسط مستقل عن الزمن

حساب التباين:

$$V(Y_t) = E(Y_t - E(Y_t))^2$$

$$V(Y_t) = E(Y_t - \theta_0)^2$$

$$V(Y_t) = \sigma_\varepsilon^2 (1 + \sum_{j=1}^q \theta_j^2)$$

إذن من خلال حساب التباين نلاحظ أنه ثابت ومستقل عن الزمن

حساب التباين المشترك:

$$\text{Cov}(Y_t, Y_{t-k}) = E[(Y_t - \theta_0)(Y_{t-k} - \theta_0)]$$

$$\text{Cov}(Y_t, Y_{t-k}) = \begin{cases} \sigma_\varepsilon^2 (-\theta_k + \theta_1 \theta_{k+1} + \theta_2 \theta_{k+2} + \dots + \theta_q \theta_{q-k}) & \text{si } k = 1, 2, \dots, q \\ 0 & \text{si } k > q \end{cases}$$

نلاحظ كذلك بأن التباين المشترك ثابت ومستقل عن الزمن

إذن يمكننا القول أن نماذج المتوسطات المتحركة مستقرة بالتعريف لأنها مجموع صدمات عشوائية

نعرف معامل التأخير L كما يلي:

لتكن السلسلة y_t قيمة المشاهدات عند الزمن $t-1$ تساوي حاصل ضرب معامل التأخير في قيمة المشاهدات عند الزمن t أي:

$$L \varepsilon_t = \varepsilon_{t-1}$$

حيث L : عامل التأخير.

وفي الحالة العامة نكتب كما يلي:

$$L^q \varepsilon_t = \varepsilon_{t-q}$$

ويمكننا كتابة نموذج المتوسطات المتحركة باستعمال معامل التأخير L حيث أن:

$$Y_t = \theta_0 - \theta_1 L \varepsilon_t - \theta_2 L^2 \varepsilon_t - \dots - \theta_q L^q \varepsilon_t + \varepsilon_t$$

$$Y_t = \theta_0 + (1 - \theta_1 L - \theta_2 L^2 - \dots - \theta_q L^q) \varepsilon_t$$

$$Y_t = \theta_0 + \theta_q(L) \varepsilon_t$$

حيث أن:

$$\theta_q(L) = 1 - \theta_1 L - \theta_2 L^2 - \dots - \theta_q L^q$$

إذا كانت y_t هي إزاحة Y_t عن المتوسط θ_0 أي $y_t = Y_t - \theta_0$

نكتب

$$Y_t - \theta_0 = \theta_q(L) \varepsilon_t$$

$$y_t = \theta_q(L) \varepsilon_t$$

بالتالي حتى يكون $MA(q)$ قابل للانعكاس يجب أن تكون جذور $\theta(L)$ أصغر من الواحد

نتيجة:

لـ نماذج $MA(q)$ تكون مستقرة دوما كونها عبارة عن ترتيبية خطية للحد العشوائي.

لـ نماذج $MA(q)$ انعكاسية إذا كانت جذور $\theta(L)$ أصغر من الواحد.

لـ إذا كانت نماذج $MA(q)$ انعكاسية فإنها تكون مستقرة والعكس غير صحيح.

تحديد درجة النموذج $MA(q)$:

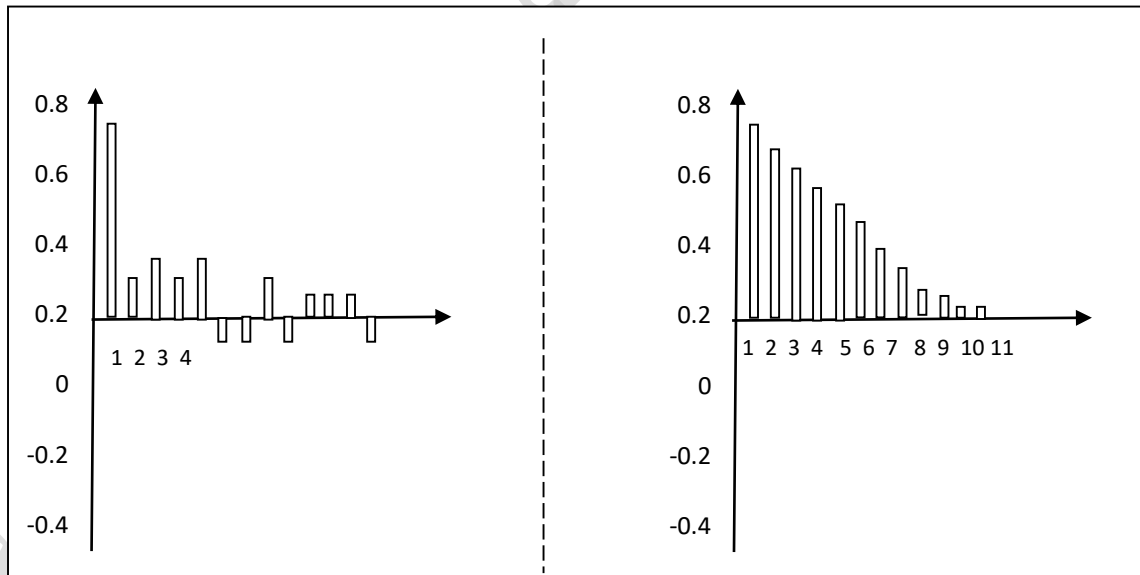
من أجل تحديد درجة النموذج $MA(q)$ نستعمل دالة الارتباط الذاتي حيث تتعدم معاملاتها بعد الفجوة الزمنية q أي $\rho_K=0$ لما $k>q$.

مثال 3-1:

في حالة $MA(2)$ تتعدم معاملات دالة ارتباطها الذاتية بعد الدرجة 2 أي تحدد درجته بعدد الارتباطات الذاتية المعنوية.

أما دالة الارتباط الذاتي الجزئي لـ $MA(q)$ فتتحدد أسيا للصفر بعد الفجوة الزمنية q ، بالإضافة إلى ذلك عندما تكون $q=2$ مثلا يمكن تمثيل دالة الارتباط الذاتي والجزئي لـ $MA(2)$ كما يلي:

الشكل رقم (11_1): دالتي الارتباط الذاتي و الجزئي لـ $MA(2)$



3.2 النماذج المختلطة (ARMA) Auto Régressive Moving-Average Of Order P And q:

في الحياة العملية هناك سلاسل زمنية (ظواهر) لا يمكن نمذجتها على أنها مجرد متوسط متحرك أو انحدار ذاتي فقط، وذلك بسبب احتوائها على خصائص النوعين معا وفي هذه الحالة دمج النوعين منطقيا، وضروريا، حيث في هذه النماذج يفسر المتغير الممثل للظاهرة المدروسة بواسطة ماضيه، وبواسطة السلوك الماضي للمتغيرات الأخرى غير المعروفة والمتمثلة في ماضي المتغير العشوائي. ويكون الشكل العام لهذه النماذج كما يلي:

$$X_t = \delta + \varphi_1 X_{t-1} + \varphi_2 X_{t-2} + \dots + \varphi_p X_{t-p} + \varepsilon_t + \theta_1 \varepsilon_{t-1} + \theta_2 \varepsilon_{t-2} + \dots + \theta_q \varepsilon_{t-q}$$

وبالاعتماد على فكرة معامل التأخير نستطيع كتابة النموذج السابق كما يلي:

$$X_t = \delta + \varphi_1 L X_t + \varphi_2 L^2 X_t + \dots + \varphi_p L^p X_{t-p} + \varepsilon_t + L \varepsilon_{t-1} + \theta_q L^q \varepsilon_{t-q}$$

$$(1 - \varphi_1 L - \varphi_2 L^2 - \dots - \varphi_p L^p) X_t$$

$$= \delta + (1 + \vartheta_1 L + \vartheta_2 L^2 + \dots + \varphi_q L^q) \varepsilon_t$$

$$\beta(L) X_t = \delta + \theta(L) \varepsilon_t \Rightarrow X_t = \frac{\delta}{\beta(L)} + \frac{\theta(L)}{\beta(L)} \varepsilon_t$$

ويكون الشرط الضروري وغير الكافي للاستقرار هو:

$$\sum_{i=1}^p \varphi_i < 1$$

أما الشرط الضروري والكافي للاستقرار هو أن تكون جذور المعادلة المميزة المعطاء بـ :

$$\beta(\mu) = 1 - \varphi_1 \mu_1 + \varphi_2 \mu_2 + \dots + \varphi_p \mu_p = 0$$

موجودة خارج دائرة الوحدة. وهي نفس شروط استقرار نماذج الانحدار الذاتي ، إذ و بتوفر هذه الشروط يكون.

$$E(X_t) = \frac{\delta}{1 - \varphi_1 - \varphi_2 - \dots - \varphi_p}$$

إذا أخذنا X_t في شكل انحرافات عن وسطها (دائما بغرض التبسيط) ووضعنا:

$$X_t = X_t - E(X_t)$$

فإن التباينات المشتركة تكون معطاة كما يلي:

$$\gamma_0 = E(Z_t^2) = \varphi_1\gamma_1 + \varphi_2\gamma_2 + \dots + \varphi_p\gamma_p + \sigma_\varepsilon^2(\vartheta_1\varphi_1 + \theta_1^2 + \vartheta_2\varphi_2 + \theta_2^2 \dots + \vartheta_q\varphi_q + \theta_q^2)$$

وهذا إذا كان $q > p$

$$\gamma_1 = E(Z_t Z_{t-1}) = \varphi_1\gamma_0 + \varphi_2\gamma_1 + \dots + \varphi_p\gamma_{p-1} + \sigma_\varepsilon^2(\vartheta_1 + \vartheta_2\varphi_1 + \dots + \vartheta_q\varphi_{q-1})$$

$$\begin{aligned} \gamma_2 &= E(Z_t Z_{t-2}) \\ &= \varphi_1\gamma_1 + \varphi_2\gamma_0 + \dots \\ &\quad + \varphi_p\gamma_{p-2}\sigma_\varepsilon^2(\vartheta_2 + \vartheta_3\varphi_1 + \vartheta_4\varphi_2 \dots + \vartheta_q\varphi_{q-2}) \end{aligned}$$

$$\gamma_q = \varphi_1\gamma_{q-1} + \varphi_2\gamma_{q-2} + \dots + \sigma_\varepsilon^2\vartheta_q\varphi_{p-q}$$

إما إذا كان:

$$\gamma_h = \varphi_1\gamma_{h-1} + \varphi_2\gamma_{h-2} + \dots + \varphi_p\gamma_{h-p}$$

وبقسمة المعادلات السابقة على γ_0 نحصل على معاملات دالة الارتباط الذاتي كما يلي:

إذا كان $q > h$

$$\rho_h = \varphi_1\gamma_{h-1} + \varphi_2\gamma_{h-2} + \dots + \varphi_p\gamma_{h-p} + \sigma_\varepsilon^2(\vartheta_h + \vartheta_{h+1}\varphi_1 + \dots + \vartheta_q\varphi_{q-h})$$

أما إذا كانت $q < h$

$$\rho_h = \varphi_1\rho_{h-1} + \varphi_2\rho_{h-2} + \dots + \varphi_p\rho_{h-p}$$

إذن الشيء الملاحظ هو أنه لما تكون $q < h$ فإن سلوك معاملات دالة الارتباط الذاتي يكون انحدارياً بحتاً، وهذا لأن نماذج $AM(q)$ لا تتجاوز دالاتها q فترة كما نتوقع أن تكون معاملات دالة الارتباط الذاتي الجزئية مسيرة من طرف المتوسطات المتحركة بعد الفترة p ، ولهذا نجد أنه من الصعب أن نتعرف على القيمتين q ، p في ظل النماذج المختلطة كون معاملات دالتي الارتباط الذاتي الجزئية والارتباط الذاتي تبقى مستمرة الاضمحلال ولهذا تلعب الخبرة والتجربة دوراً كبيراً للتعرف على النماذج المختلطة.

مثال 3-2:

نموذج $ARMA(1,1)$ يكتب كما يلي:

$$Y_t = \phi_0 + \phi_1 Y_{t-1} - \theta_1 \varepsilon_{t-1} + \varepsilon_t$$

نموذج $ARMA(2,1)$ يكتب كما يلي:

$$Y_t = \phi_0 + \phi_1 Y_{t-1} + \phi_2 Y_{t-2} - \theta_1 \varepsilon_{t-1} + \varepsilon_t$$

لاحظ أن: $ARMA(0,1)=MA(1)$.

وكذلك نلاحظ أن: $ARMA(1,0)=AR(1)$.

ويمكن كتابة نموذج الانحدار الذاتي للأوساط المتحركة باستعمال معامل التأخير، كما يلي:

$$Y_t = \phi_0 + \phi_1 Y_{t-1} - \phi_2 Y_{t-2} - \dots - \phi_p Y_{t-p} + \varepsilon_t + \theta_1 \varepsilon_{t-1} + \theta_2 \varepsilon_{t-2} + \dots + \theta_q \varepsilon_{t-q}$$

$$Y_t - \phi_1 Y_{t-1} - \phi_2 Y_{t-2} - \dots - \phi_p Y_{t-p} = \phi_0 + \varepsilon_t - \theta_1 \varepsilon_{t-1} - \theta_2 \varepsilon_{t-2} - \dots - \theta_q \varepsilon_{t-q}$$

$$(1 - \phi_1 - \phi_2 - \dots - \phi_p) Y_t = \phi_0 + (1 - \theta_1 - \theta_2 - \dots - \theta_q) \varepsilon_t$$

$$\phi_p(L) Y_t = \phi_0 + \theta_q(L) \varepsilon_t$$

ملاحظة:

إن شروط الإستقرارية والقابلية للقلب بالنسبة لنماذج $ARMA(p,q)$ ، هي الشروط السابقة للقلب في نماذج $MA(q)$ ، وشروط الإستقرارية في نماذج $AR(p)$.

وعليه يتم تحويل نماذج $ARMA(p,q)$ ، إلى نماذج الانحدار الذاتي $AR(p)$ فقط، مع العلم أن y_t هي إزاحة

$$y_t = Y_t - \theta_0 \text{ أي } \theta_0 \text{ عن المتوسط}$$

ونكتب:

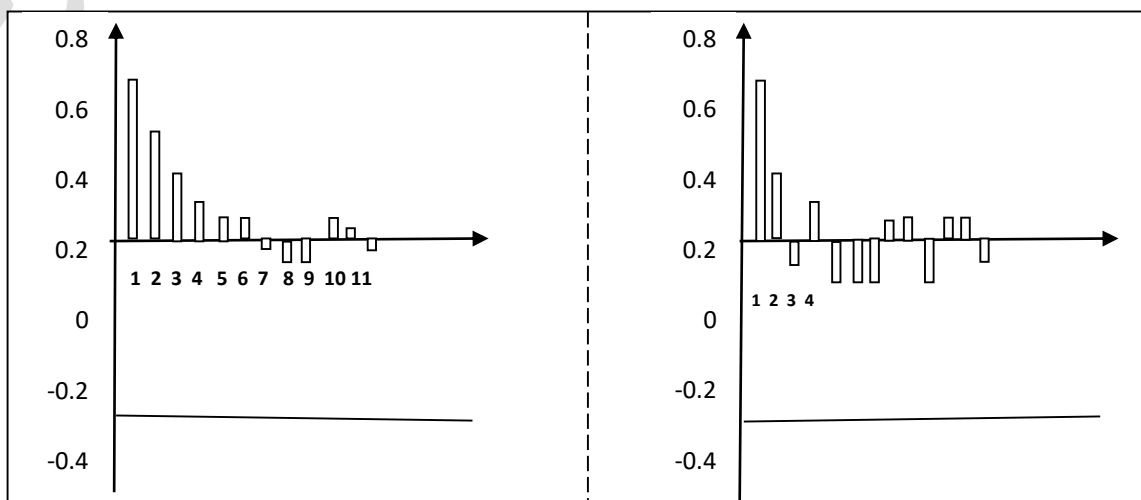
$$\theta_q(L)^{-1} \phi_p(L) Y_t = \varepsilon_t$$

ويمكن توضيح هذه العلاقات بيانياً وذلك بأخذ أبسط مثال $ARMA(1,1)$ والذي يأخذ الشكل

$$X_t = \delta + \phi_1 X_{t-1} + \theta_1 \varepsilon_{t-1} + \varepsilon_t$$

كما يلي:

الشكل رقم (12_1) دالتي الارتباط الذاتي والدالتي الجزئي لـ $ARMA(p,q)$



4.2 النماذج المختلطة المركبة (p, d, q) ARIMA:

تسمى أيضا بالنماذج المتجانسة غير المستقرة أو المختلطة المكاملة (Integrated) من الدرجة d^* ، وهي تختلف عن سابقتها $ARMA(p, q)$ في أن السلسلة غير مستقرة و لجعلها مستقرة نطبق عليها إحدى طرق إزالة عدم الاستقرار من أهمها:

- 1- طريقة الفروقات من الدرجة 1 إذا كان مصدر عدم الاستقرار هو الاتجاه العام.
 - 2- طريقة الفروقات من الدرجة p إذا كان مصدر عدم الاستقرار هو الفصلية t .
 - 3- بإدخال $\log$ على السلسلة في حالة مصدر عدم الاستقرار هو الاتجاه العام في التباين.
- نماذج $ARIMA(p, d, q)$ تكتب على الشكل التالي:

$$ARIMA(p, d, q) \Leftrightarrow \Phi(L)(1-L)^d Y_t = \delta + \Theta(L)\varepsilon_t$$

d : عدد مرات إجراء الفروقات من الدرجة 1 على السلسلة للحصول على أخرى مستقرة.

و نتع نفس أسلوب التحديد لتحديد p و q السلسلة الناتجة إذا كانت مستقرة، فتكون دالة الارتباط الذاتي مؤشر مهما لكشف عدم استقراري السلسلة وهذا عندما لا تنعدم هذه الدالة بعد فترة معينة تعادل $T/4$ (ربع المشاهدات)، كما أنها تعتبر كاشف مهم للفصلية من خلال القمم و النتوءات التي تظهر بشكل منتظم على هذه الدالة¹.

في بعض الأحيان يصعب تحديد النموذج باستعمال الدوال السابقة لذا نتطرق إلى:

5.2 النماذج الفصلية SARIMA(p, d, q):

مقدمة بوكس جينكنز لنماذج $ARIMA$ الفصلية تسمح للإحصائي للعمل مباشرة بالسلاسل الخام وتجنبه كذلك تقدير المعامل الفصلية والنموذج $ARIMA$ انفصاليا.

النماذج الفصلية الأصلية:

تقول أن النموذج $\{X_t, t \in Z\}$ بأنه $ARIMA$ فصلي تماما من الدرجة d إذا حقق العلاقة التالية²:

¹ مولود حشمان ، مرجع سبق ذكره، ص ص 144، 145.

² Amarache .R , Meziani .A , Prévision à court terme, Alger 1997, P 31

$$\Phi(B^s)(1-B^s)^d X_t = \Phi_0 + \theta(B^s)\varepsilon_t$$

$$\Phi(B^s) = 1 - \Phi_1 B^{1s} - \Phi_2 B^{2s} - \dots \dots \dots \Phi_p B^{ps}.$$

$$\theta(B^s) = 1 - \theta_1 B^{1s} - \theta_2 B^{2s} - \dots \dots \dots \theta_q B^{qs}.$$

حيث Φ_0 ثابتة.

3. نماذج التمهيد الأسّي للتنبؤ بالسلاسل الزمنية:

بعدما تعرفنا على طريقة المتوسطات وطريقة المتوسطات المتحركة نتعرف من خلال هذا الجزء على طرق التمهيد الأسّي، وهي عبارة عن أساليب تطبق على سلسلة المشاهدات من أجل التنبؤ قصير المدى، بحيث تحاول التركيز على القيم الأحدث، ولكن عن طريق منح أوزان مختلفة لبيانات السلسلة الزمنية بحيث يتناقص وزن القيمة كلما قدمت. وهي تعطي نتائج جيدة عندما تكون السلسلة الزمنية عرضة لتغيرات بطيئة.

بالتالي من الضروري استخدام طريقة للتنبؤ تنطوي على تجديد وتطوير التنبؤ كلما ظهرت قيمة جديدة، إذا كان لها أن تأخذ أحدث التغيرات في السلسلة الزمنية في الاعتبار.

توجد طرق عديدة للتمهيد الأسّي منها: التمهيد الأسّي الأحادي والتمهيد الأسّي الثنائي لهولت والتمهيد الأسّي الثلاثي لـ "وينترز – Winters"، وفي هذه المطبوعة سنتطرق إلى النوعين الأول والثاني.

1.3 التنبؤ باستخدام التمهيد الأسّي الأحادي:

إذا كانت السلسلة الزمنية غير خاضعة لتأثير الاتجاه العام أو تأثير موسمي، فيمكن اعتبار قيمها ناتجة عن متوسط عام مضافاً إليه خطأ عشوائي تختلف قيمته من زمن لآخر. ويبدو منطقياً في هذه الحالة استخدام مقدر مناسب لهذا المتوسط العام عند التنبؤ بقيمة جديدة للسلسلة. وبما أن المتوسط يمكن أن يتغير ببطء فإن التمهيد الأسّي يقوم بإعطاء وزن أكبر للقيم الأحدث في السلسلة عند حساب المقدّر كما أنه يجدد ويحدث المقدّر كلما ظهرت قيمة جديدة في السلسلة الزمنية. وتأخذ المعادلة الأساسية للتمهيد الأسّي الأحادي الشكل التالي:

$$F_{t+1} = \alpha Y_t + (1 - \alpha)F_t$$

حيث F_t هي قيمة التنبؤ في الزمن t إذا كنا في الزمن $t-1$ ،

الفصل الثالث: نماذج التنبؤ باستخدام السلاسل الزمنية

Y_t هي القيمة الفعلية في السلسلة الزمنية في الزمن t .

أما α والتي تتراوح قيمتها بين الصفر والواحد (0-1) فهي ثابت التمهيد (smoothing constant). وتُحدد قيمة α عادة بمحاولة قيم مختلفة ثم اختيار القيمة التي تعطي أقل مجموع (أو متوسط) مربعات الخطأ.

بعض البرمجيات تختار قيم α بين 0,01 و 0,3 و 0,01 بقرزات.

تتميز المعادلة 1 أعلاه بأننا لا نحتاج للتنبؤ بقيمة جديدة، سوى الاحتفاظ بآخر قيمة مشاهدة وآخر تنبؤ وتحديد قيمة مناسبة لثابت التمهيد α . ولكن ماذا يفعل التمهيد الأسّي تحديداً؟

إذا كتبنا المعادلة (1) أعلاه بالشكل

$$\begin{aligned} F_{t+1} &= \alpha Y_t + (1-\alpha)F_t \\ &= \alpha Y_t + F_t - \alpha F_t \\ &= F_t + \alpha(Y_t - F_t) \\ &= F_t + \alpha(\delta_t) \end{aligned}$$

حيث δ_t هو عبارة عن خطأ التنبؤ في الزمن t ، ويتبين بالتالي أن ما يفعله التمهيد الأسّي عند التنبؤ بالقيمة في الزمن $t+1$ هو أن يأخذ التنبؤ السابق F_t ويصححه مستهدياً بخطأ التنبؤ δ_t في الزمن t .

ويتم التصحيح في اتجاه معاكس لإتجاه الخطأ.

من ناحية أخرى بتكرار استخدام القاعدة في المعادلة (1) أعلاه نجد:

$$\begin{aligned} F_{t+1} &= \alpha Y_t + (1-\alpha)(\alpha Y_{t-1} + (1-\alpha)F_{t-1}) \\ &= \alpha Y_t + \alpha(1-\alpha)Y_{t-1} + (1-\alpha)^2 F_{t-1} \\ &= \alpha Y_t + \alpha(1-\alpha)Y_{t-1} + \alpha(1-\alpha)^2 Y_{t-2} + \alpha(1-\alpha)^3 Y_{t-3} + \dots \\ &\quad \dots + \alpha(1-\alpha)^{n-1} Y_{t-(n-1)} + \dots + (1-\alpha)^n F_{t-(n-1)} \end{aligned}$$

وبما أن α كسر تتراوح قيمته بين الصفر والواحد، يتضح أن التمهيد الأسّي يُعطي وزناً أقل للقيم الأقدم، وهذا التناقص في الأوزان يتبع نمطاً أسياً ولهذا سمي التمهيد الأسّي.

◀ نقطة الانطلاق في التمهيد الأسّي الأحادي:

حتى نتمكن من استخدام المعادلة رقم (1) أعلاه في التنبؤ، نحتاج لنقطة ننطلق منها وتحديدًا نحتاج قيمة F_1

لحساب القيمة التنبؤية في الزمن 1، إذ لا يمكننا استخدام المعادلة (1) في ذلك وذلك لعدم وجود قيمة Y

في الزمن 0، وفي هذا الوضع هناك عدة اقتراحات أهمها:

الفصل الثالث: نماذج التنبؤ باستخدام السلاسل الزمنية

1- استخدام الوسط الحسابي لقيم السلسلة، وهذه الطريقة عادة ما تكون ملائمة إذا كان متوسط السلسلة يتغير ببطء على الفترة الزمنية للدراسة.

2- استخدام الملاحظة الأولى Y_1 كتقدير للقيمة الابتدائية.

3- استخدام الوسط الحسابي لبعض الملاحظات الأولى لتقدير هذه القيمة، وبرمجية Eviews تستعمل الوسط الحسابي للملاحظات الثمانية الأولى (8).

إنشاء مجال الثقة للتنبؤ:

يمكن أيضا إنشاء مجال ثقة تقريبي للتنبؤ بالقيمة في الزمن $t+1$ من الزمن t ، كما يلي:

مجال ثقة بدرجة ثقة $(1-\beta) \times 100\%$ للتنبؤ F_{t+1} من الزمن t هي: $F_{t+1} \pm Z_{\frac{\beta}{2}} 1,25\delta(t+1)$

بحيث: $\delta(t+1) = \frac{\sum_{t=1}^{t+1} |Y_t - F_t|}{t+1}$ و $Z_{\frac{\beta}{2}}$ القيمة في التوزيع الطبيعي المعياري التي تليها مساحة $\frac{\beta}{2}$.

مثال 3-3:

لتكن لدينا بيانات السلسلة X_t :

t	1	2	3	4	5	6
X_t	2700	2950	2660	2980	3010	3140

ونريد حساب القيم التنبؤية للحظة الزمنية $t=7$ من أجل قيمة $\alpha = 0,3$.

$$\hat{X}_1 = \hat{X}_0(1) = X_1 = 2700$$

$$\hat{X}_2 = \hat{X}_1(1) = (1-0,3) \times 2700 + 0,3 \times 2700 = 2700$$

$$\hat{X}_3 = \hat{X}_2(1) = (1-0,3) \times 2950 + 0,3 \times 2700 = 2875$$

$$\hat{X}_4 = \hat{X}_3(1) = (1-0,3) \times 2660 + 0,3 \times 2875 = 2724,5$$

$$\hat{X}_5 = \hat{X}_4(1) = (1-0,3) \times 2980 + 0,3 \times 2724,5 = 2903,5$$

$$\hat{X}_6 = \hat{X}_5(1) = (1-0,3) \times 3010 + 0,3 \times 2903,5 = 2978,005$$

$$\hat{X}_7 = \hat{X}_6(1) = (1-0,3) \times 3140 + 0,3 \times 2978,005 = 3091,402$$

الفصل الثالث: نماذج التنبؤ باستخدام السلاسل الزمنية

وبذلك تكون القيم المقدرة باستخدام نموذج التمهيد الأسّي على النحو التالي:

t	1	2	3	4	5	6
$\hat{X}$	2700	2700	2875	2724,5	2903,35	2978,005

أما بالنسبة للحظة الزمنية 7، فالقيمة المتوقعة هي 3091,402.

2.3 التنبؤ باستخدام التمهيد الأسّي الثنائي (المزدوج):

تستخدم هذه الطريقة طريقة التمهيد الأسّي الأحادي مرتين (باستخدام نفس المعامل) وهي مناسبة للسلاسل الزمنية ذات الاتجاه الخطي.

نفرض أن السلسلة يمكن تقريبها بخط مستقيم في جوار T ولنعتبر النموذج وفق الصيغة التالية:

$$X_t = a + b(t - T) + \varepsilon_t$$

من أجل كل قيمة لـ h نلاحظ أن a و b تعتمدان على الزمن t. نبحث عن تحديد قيم المعلمتين بتقليل الدالة التالية:

$$\sum_{j=0}^{T-1} \beta^j (X_{T-j}(h) - (a - bj))^2$$

التنبؤ للسلسلة في الأفق h، $\hat{X}_t(h)$ ، المقدم بواسطة طريقة التمهيد الأسّي الثنائي (المزدوج) يُعطى بـ:

$$\hat{X}_T(h) = \hat{a}(T) + \hat{b}(T)h$$

بحيث: β^j تمثل ثابت التمهيد، والتوليفة $\hat{a}(T)$ و $\hat{b}(T)$ يتم تقديرها انطلاقاً من:

$$S_1(t) = (1 - \beta) X_{t-1} \sum_{j=0}^{t-1} \beta^j X_{t-j},$$

$$S_2(t) = (1 - \beta) \sum_{j=0}^{t-1} \beta^j S_1(t - j)$$

يمكن إثبات أن مقدر المربعات الصغرى لمقدر $a(T)$ و $b(T)$ يتم تحديده انطلاقاً من تدنئة المقدار Q على الشكل التالي:

$$Q(a(T), b(T)) = \sum_{j=0}^{T-1} \beta^j (X_{T-j} - a(T) + b(T)j)^2$$

بحيث ينتج:

$$\begin{cases} \hat{a}(T) = 2S_1(T) - S_2(T) \\ \hat{b}(T) = \frac{(1-\beta)}{\beta}(S_1(T) - S_2(T)) \end{cases}$$

◀ صيغة التجديد (التحيين):

بما أن $S_1(t)$ و $S_2(t)$ هي عبارة عن التمهيد الأسّي الأحادي الأول لكل من $\hat{X}_T$ و $S_1(t)$ على التوالي، فإن صيغة التحيين للتمهيد الأسّي يمكن تحديدها فيما يلي:

$$\begin{aligned} S_1(t) &= (1-\beta)X_T + \beta S_1(T-1) \\ S_2(t) &= (1-\beta)S_1(T) + \beta S_2(T-1) \\ &= \beta S_2(T-1) + (1-\beta)[\beta S_1(T-1) + (1-\beta)X_T] \\ &= \beta S_2(T-1) + \beta(1-\beta)S_1(T-1) + (1-\beta)^2 X_T \end{aligned}$$

وانطلاقاً من:

$$\begin{aligned} \hat{a}(T) &= 2S_1(T) - S_2(T) \\ &= (1-\beta^2)X_T + \beta^2[\hat{a}(T-1) + \hat{b}(T-1)] \\ &= (1-\beta^2)X_T + \beta^2(X_{T-1}) \\ &= \hat{a}(T-1) + \hat{a}(T-1) + (1-\beta^2)[X_T - \hat{X}_{T-1}] \end{aligned}$$

مثال 4-3:

لنكن لدينا بيانات متوسط سعر منتج معين خلال أشهر سنة 2022، المبينة في الجدول التالي:

الشهر	جانفي	فيفري	مارس	أفريل	ماي	جوان	جويلية	أوت	سبتمبر	أكتوبر	نوفمبر	ديسمبر
X	54,23	51,51	55,6	55,72	58,71	58,82	58,41	64,92	63,95	72,98	70,25	68,24

المطلوب: باعتبار ثابت التمهيد الأسّي $\beta = 0,7$ أحسب القيمة التنبؤية لشهر جانفي 2023؟

الحل:

أولاً، نقوم بالتحيين الأول باستخدام الصيغة:

$$S_1(t) = (1-\beta)X_T + \beta S_1(T-1)$$

نعتبر القيمة الابتدائية: $S_1(1) = X_1$ ، بحيث:

الفصل الثالث: نماذج التنبؤ باستخدام السلاسل الزمنية

$$S_1(1) = X_1 = 54,23$$

ثم نحسب باقي القيم باستخدام العلاقة، ينتج لدينا:

$$S_1(2) = (1 - \beta)X_2 + \beta S_1(1) = (0,3 \times 51,51) + (0,7 \times 54,23) = 53,414$$

$$S_1(3) = (1 - \beta)X_3 + \beta S_1(2) = (0,3 \times 55,6) + (0,7 \times 53,41) = 54,07$$

وبنفس الطريقة نحسب باقي القيم، فنحصل على:

$$S_1(4) = 54,56, \quad S_1(5) = 55,81, \quad S_1(6) = 56,71, \quad S_1(7) = 57,22, \quad S_1(8) = 59,53, \quad S_1(9) = 60,86,$$

$$S_1(10) = 64,49, \quad S_1(11) = 66,83, \quad S_1(12) = 66,83$$

ومن ثم نقوم بتمهيد السلسلة الناتجة $S_1(T)$ باستخدام صيغة التمهيد التالية:

$$S_2(t) = (1 - \beta)S_1(T) + \beta S_2(T - 1)$$

مع افتراض القيمة الأولية $S_2(1) = S_1(1) = X_1$ ، وتكون النتائج على النحو التالي:

$$S_2(1) = S_1(1) = X_1 = 54,23$$

$$S_2(2) = (1 - \beta)S_1(2) + \beta S_2(1) = (0,3 \times 51,51) + (0,7 \times 54,23) = 53,99$$

$$S_2(3) = (1 - \beta)S_1(3) + \beta S_2(2) = (0,3 \times 55,6) + (0,7 \times 53,99) = 54,01$$

وبنفس الطريقة نحسب باقي القيم، فنحصل على:

$$S_2(4) = 54,18, \quad S_2(5) = 54,67, \quad S_2(6) = 55,28, \quad S_2(7) = 55,86, \quad S_2(8) = 56,96, \quad S_2(9) = 58,13,$$

$$S_2(10) = 60,04, \quad S_2(11) = 61,89, \quad S_2(12) = 63,37$$

ثم نقوم بتقدير كل من $a(T)$ و $b(T)$ باستخدام الصيغة المذكورة أعلاه:

$$\begin{cases} \hat{a}(T) = 2S_1(T) - S_2(T) \\ \hat{b}(T) = \frac{(1 - \beta)}{\beta} (S_1(T) - S_2(T)) \end{cases}$$

بالنسبة لمقدرات $a(T)$:

$$\hat{a}(1) = 2S_1(1) - S_2(1) = S_1(1) = 54,23$$

$$\hat{a}(2) = 2S_1(2) - S_2(2) = (2 \times 53,41) + 53,99 = 52,84$$

ونواصل بنفس الطريقة.

كذلك الأمر بالنسبة لتقدير $b(T)$:

الفصل الثالث: نماذج التنبؤ باستخدام السلاسل الزمنية

$$\hat{b}(1) = \frac{(1-\beta)}{\beta} (S_1(1) - S_2(1)) = 0$$

$$\hat{b}(2) = \frac{(1-\beta)}{\beta} (S_1(2) - S_2(2)) = \frac{0,3}{0,7} (53,41 - 53,99) = -0,24$$

$$\hat{b}(3) = \frac{(1-\beta)}{\beta} (S_1(3) - S_2(3)) = \frac{0,3}{0,7} (54,01 - 54,13) = 0,025$$

ونواصل بنفس الطريقة في حساب باقي المقدرات.

وأخيرا نحسب قيم X المقدرة بالعلاقة:

$$\hat{X}_T(h) = \hat{a}(T) + \hat{b}(T)h$$

بحيث نجمع القيم المقدرة لـ $a(T)$ و $b(T)$ عند كل لحظة زمنية t (كل شهر):

$$\hat{X}_T(1) = \hat{a}(1) + \hat{b}(1) = 54,23 + 0 = 54,23$$

مثلا:

$$\hat{X}_T(2) = \hat{a}(2) + \hat{b}(2) = 52,843 - 0,245 = 52,6$$

وننتج كل العمليات موضحة في الجدول التالي:

الشهر	X_T	$S1(T)$	$S2(T)$	$a(T)$	$b(T)$	$\hat{X}_T$
جانفي	54,23	54,23	54,23	54,23	0	54,23
فيفري	51,51	53,41	53,99	52,843	-0,245	52,60
مارس	55,6	54,07	54,01	54,129	0,025	54,15
أفريل	55,72	54,56	54,18	54,953	0,166	55,12
ماي	58,71	55,81	54,67	56,950	0,489	57,44
جوان	58,82	56,71	55,28	58,144	0,614	58,76
جويلية	58,41	57,22	55,86	58,580	0,582	59,16
أوت	64,92	59,53	56,96	62,099	1,101	63,20
سبتمبر	63,95	60,86	58,13	63,582	1,168	64,75
أكتوبر	72,98	64,49	60,04	68,947	1,909	70,86
نوفمبر	70,25	66,22	61,89	70,547	1,854	72,40
ديسمبر	68,24	66,83	63,37	70,279	1,480	71,76

وبناء على هذه النتائج نجد قيمة متوسط السعر المتوقع لشهر جانفي 2023 هي 85,97.

قائمة المراجع:

1. جوني دانييل، أساسيات اختيار العينة في البحوث العلمية، مبادئ توجيهية عملية لإجراء اختيارات العينة البحثية، ترجمة وتحقيق: طارق عطية عبد الرحمن، معهد الإدارة العامة، المملكة العربية السعودية، 2015.
2. سمير مصطفى شعراوي، مقدمة في التحليل الحديث للسلاسل الزمنية، كلية العلوم، جامعة الملك عبد العزيز، المملكة العربية السعودية، الطبعة الأولى، 2005.
3. عامر قنديلجي، إيمان السامرائي، البحث العلمي الكمي والنوعي، دار اليازوري العلمية للنشر والتوزيع، عمان، الأردن، 2009.
4. غيث البحر، معن التتجي: " التحليل الإحصائي للاستبيانات باستخدام برنامج IBM SPSS Statistics"، مركز سبر للدراسات الإحصائية و السياسات العامة، تركيا، 2014.
5. محمد بلال الزعبي، عباس الطلافحة: "النظام الإحصائي SPSS فهم وتحليل البيانات الإحصائية"، دار وائل للنشر، عمان، الأردن، الطبعة الثالثة 2012.
6. محمد شامل بهاء الدين فهمي: "الاحصاء بلا معاناة المفاهيم مع التطبيقات باستخدام البرنامج SPSS" مركز البحوث بمعهد الإدارة العامة، المملكة العربية السعودية، الجزء الأول والثاني، 2005.
7. مولود حشمان، نماذج وتقنيات التنبؤ على المدى القصير، ديوان المطبوعات، الجامعية، ط4 الجزائر، 1998.
8. ARTHUR CHARPENTIER, « COURS DE SERIES TEMPORELLES THEORIE ET APPLICATIONS –Introduction à la théorie des processus en temps discret, Modèles ARIMA et méthode Box & Jenkins», ENSAE, Université Paris Dauphine.
9. Bourbonnais. R, Terraza. « Analyse des séries temporelles » Applications à l'économie et à la gestion, 3e édition , Paris, 1998.
10. Daudin, JJ, Duby. C, Robin.S et P. Trécourt. (1996). « Analyse des Séries Chronologiques ». INAPG, Mathématiques.
11. Delignieres. D, (Janvier 2001) « L'analyse des processus stochastiques ». EA 2991 "Sport performance, santé", Université de Montpellier 1.
12. Hamilton. J-D (2016). "Time Series Analysis". Princeton University Press, 2016
13. Maddala.G.S, (1988) "Introduction to econometrics", Mac Millan publishing company, New York, USA, 1988.