وزارة التعليم العالي والبحث العلمي

جامعة الجزائر -3-

كلية العلوم الاقتصادية والعلوم التجارية وعلوم التسيير

قسم مالية ومحاسبة

مطبوعة مقدمة تحت عنوان:

محاضرات في الإحصاء الاستدلالي

-- الإحصاء 3 --

موجهة لطلبة السنة الثانية ليسانس (كل الشعب)

من إعداد :

الأستاذة برج نزيهة

أستاذة محاضرة " ب "

السنة الجامعية : 2022-2023

فهرس المحتويات

المقدمة: 1

الفصل الأول: التوزيعات الاحتمالية Probability Distribution.....2

تمهيد: 2

1. المتغير العشوائي: Random variable 2

1.1.تعريف المتغير العشوائي: 2

2.1.الأنواع المختلفة للمتغيرات العشوائية: .....Erreur ! Signet non défini.

2. قانون التوزيع الإحتمالي The probability Function.....3

1.2.تعريف قانون التوزيع الإحتمالي.....3

2.2.دالة التوزيع Distribution function 4

3.2. التوقع الرياضي و التباين Mathematical expectation and variance.....4

3. التوزيعات الاحتمالية الشهيرة 5

1.3. التوزيع الثنائي الحد او ذو الحدين The Binomial Distribution 5

2.3. التوزيع بواسون *The Poisson Distribution* 7

3.3.التوزيع الطبيعي *The Normal Distribution* 8

4.3. التوزيع كاي مربع $\chi 2$ *The Khi-square Distribution* 11

5.3. توزيع ستيودنت *The Student Distribution* 13

6.3. التوزيع فيشر- سنيديكور *The Fisher-Snedecor Distribution*.....14

الفصل الثاني: المعاينة Sampling 15

تمهيد: 15

1. تعريف للبعض المصطلحات 15

1.1.المجتمع الإحصائي: Population 15

2.1. العينة: Echantillon ..... 15..

3.1. المعاينة: Echantillonnage 17

4.1. الإحصاءة (الإحصائية): The Statistics 17

2.توزيعات المعاينة: Sampling Distribution.....18

1.2. تعريف توزيع المعاينة:... 18
2.2. توزيع المعاينة للمتوسط العينة : 18
3.2. توزيع المعاينة للفرق بين متوسطي عينتين: 31
4.2. توزيع المعاينة للنسبة: The sampling distribution of a proportion 38
5.2. توزيع المعاينة للفرق بين نسبتي عينتين:.. 40
6.2. توزيع المعاينة لتباين: The sampling distribution of a variance 42
7.2. توزيع المعاينة للنسبة بين تبايني العينتين:..... 47
الفصل الثالث: التقديرات و مجالات الثقة..... 49
تمهيد: 49
1. عموميات 49
1.1. المقدر: Estimator..... 49
2.1. التقدير: Estimation 49
3.1. خواص المقدر: 50
2. التقدير النقطي: Punctual Estimation..... 51
1.2. التقدير النقطي لمتوسط المجتمع : 51
2.2. التقدير النقطي لتباين المجتمع : 52
3.2. التقدير النقطي لنسبة المجتمع : 55
3. التقدير بمجالات الثقة : Estimation by a Confidence Interval..... 56
3.1. تعريف مجال الثقة: 56
2.3. تقدير مجال الثقة لمتوسط المجتمع:..... 57
3.3. تقدير مجال الثقة للفرق بين متوسطي مجتمعين مستقلين: 66
4.3. تقدير مجال الثقة للنسبة المجتمع: 77
5.3. تقدير مجال الثقة لتباين المجتمع:..... Erreur ! Signet non défini.81
6.3. تقدير مجال الثقة لنسبة بين تباين مجتمعين:..... 83
2 المراجع..... 122
7. إختبار للمقارنة بين تباين مجتمعين: 115
المراجع..... 122

الملاحق.....**123**

المقدمة

الإحصاء (Statistics) هو فرع من فروع الرياضيات التطبيقية. وهو العلم الذي يدرس الظواهر من خلال جمع البيانات ومعالجتها وتحليلها وتفسير النتائج وعرضها من أجل جعل هذه البيانات مفهومة من قبل الجميع، ويساعد بذلك على إتخاد القرار. ويعتمد علم الإحصاء على نظرية الاحتمالات مما يجعله مؤهلا لتحليل ودراسة الظواهر العشوائية. وهو يستخدم في جميع المجالات : في الاقتصاد، في الاجتماع، في الفيزياء، في علم الأحياء، وعلوم الكمبيوتر...إلخ. وهناك مجموعتان رئيسيتان من الأساليب الإحصائية وهما: **الإحصاء الوصفي** وهو فرع الإحصاء الذي يجمع بين العديد من التقنيات المستخدمة لوصف مجموعة كبيرة نسبيًا من البيانات من خلال مخططات البيانية والإحصاءات والذي تم دراسته من طرف الطلبة في مقياس الإحصاء 1 في السنة الأولى جذع مشترك، أما **الإحصاء الاستدلالي** هو مجموعة من الأساليب لاستنتاج خصائص مجموعة عامة (المجتمع الاحصائي) من تلك الخاصة بمجموعة معينة (العينة)، من خلال توفير مقياس اليقين في التنبؤ.

ففي غالب الأحيان عند دراسة ظواهر معينة، سواءا اقتصادية أو اجتماعية أو غيرها، يستحيل لنا معرفة أو الحصول على كل المعلومات التي تميز الوحدات المعنية بالدراسة. مما يتوجب إجراء دراسة إلا على جزء من هذه الوحدات وتعميم النتائج بعد ذلك. وهدف الاحصاء الاستدلالي استنتاج خصائص المجتمع من خصائص عينة سحبت منه. وهذا ما سيتم تدريسه لطلبة في مقياس الإحصاء 3 لسنة الثانية جذع مشترك بكلية العلوم الاقتصادية والعلوم التجارية وعلوم التسيير بالدرجة الأولى، وإلى كل التخصصات التي تتناول هذا المقياس في مقرراتها الوزارية.

وقد حرصنا عند إعداد هذه المطبوعة على أنها تتضمن البرنامج المجسد في المقرر الوزاري وهو إلمام بمبادئ الاحصاء التطبيقي بدءا بالمعاينة، التقديرات وصولا إلى الإختبارات الإحصائية، مع استخدام أسلوب سهل ومختصر يعتمد على أمثلة وتمارين محلولة. ولقد تضمنت هذه المطبوعة أربعة فصول، كالتالي:

- **الفصل الأول: التوزيعات الإحتمالية.**
- **الفصل الثاني: توزيعات المعاينة.**
- **المحور الثالث: التقديرات و مجالات الثقة.**
- **المحور الرابع: إختبار الفرضيات الاحصائية.**

الفصل الأول: التوزيعات الاحتمالية

Probability Distribution

تمهيد

نظرا لاعتماد الإحصاء الاستدلالي على نظرية الاحتمالات، فسوف نستعرض فيما يلي أهم التوزيعات والقوانين الإحتمالية وأكثرها إستخداما للمتغيرات العشوائية المنقطعة و المستمرة.

1. المتغير العشوائي: Random variable

1.1. تعريف المتغير العشوائي:

المتغير العشوائي هو متغير يتم تحديد قيمته بعد حدوث ظاهرة أو تجربة أو حدث عشوائي. والقيم الممكنة للمتغير عشوائي يمكن أن تمثل النتائج المحتملة للتجربة العشوائية. بحيث تعرف:

- التجربة العشوائية على أنها تجربة لا يمكن التنبؤ بنتائجها.
- المجموعة الأساسية أو الفضاء (أو الفراغ) العينات Ω هي مجموعة النتائج المحتملة لتجربة عشوائية.
- الحدث يمثل مجموعة فرعية أو جزءًا من Ω.

وبالتالي، رياضيا يعرف المتغير العشوائي و يرمز له بالرمز X على أنه دالة رياضية تنسب كل عنصر من عناصر المجموعة الأساسية $\boldsymbol{\Omega}$ قيمة في $\mathbb{R}$:

$$\mathbf{X}: \boldsymbol{\omega} \in \Omega \rightarrow \mathbf{X}(\boldsymbol{\omega}) \in \mathbb{R}.$$

2.1. الأنواع المختلفة للمتغيرات العشوائية:

اعتمادًا على طبيعة التجربة العشوائية، نميز نوعين من المتغيرات العشوائية:

المتغيرات العشوائية المنفصلة أو المنقطعة **Discret variable**

نقول عن متغير عشوائي X أنه منقطع، إذا كانت القيم المحتمل أن يأخذها تنتمي إلى مجموعة الأعداد الصحيحة. مثال: عدد الاطفال في الأسرة الواحدة، عدد حوادث المرور، عدد السيارات التي تدخل مرأب معين، ...إ لخ.

المتغيرات العشوائية المستمرة **Continuous variable**

نقول عن متغير عشوائي X أنه مستمر، إذا كانت القيم المحتمل أن يأخذها تنتمي إلى مجال من مجموعة الأعداد الحقيقية. مثال: طول قطعة منتجة، الوزن ...إ لخ.

2. قانون التوزيع الإحتمالي The probability Function

1.2. تعريف قانون التوزيع الإحتمالي

يسمح قانون احتمالي للمتغير العشوائي X من معرفة فرص ظهور القيم المختلفة لهذا المتغير. ليكن Ω فراغ العينات مزود باحتمال P ، وليكن X المتغير العشوائي. نسمي قانون الاحتمالي للمتغير X و نرمز له بـ P_X ، التطبيق الذي لكل جزء A من $\mathbb{R}$ يرفق $P_X(A)$ بحيث:

$$\boldsymbol{P_X\,(A)\;=\;P\,(\{\omega\;\in\;\Omega\colon X\,(\omega)\;\in\;A\})}$$

فيمايلي سوف نستعمل الكتابة:

$$\boldsymbol{P\,(\{\omega\;\in\;\Omega:\;X(\omega)\in\;A\})}\ \textbf{بدلا من}\ \boldsymbol{P(X\;\in\;A)}$$

$$\boldsymbol{P\,(\{\omega\;\in\;\Omega\colon X\,(\omega)=x\})}\ \textbf{بدلا من}\ \boldsymbol{P(X=x)}\quad \textbf{و}$$

- في حالة X متغير عشوائي منفصل يأخذ القيم $\{x_1, x_2, \dots, x_i, \dots\}$ ، دالة الاحتمال $P(X)$ يجب أن تحقق الشروط التالية :

$$\begin{cases} \boldsymbol{P(X=x_i)\geq 0\ ,i=1,2,\dots} \\ \boldsymbol{\sum_{i\geq 1} P(X=x_i)=1} \end{cases}$$

- أما في حالة X متغير عشوائي مستمر، دالة الاحتمال تسمى دالة الكثافة ويرمز لها ب $\boldsymbol{f_X(x)}$ ويجب أن تحقق الشروط التالية :

$$\begin{cases} \boldsymbol{f_X(x)\geq 0\,,} \quad \forall\, x\in\mathbb{R} \\ \boldsymbol{\int_{\mathbb{R}} f_X(x)\,dx=1} \end{cases}$$

2.2. دالة التوزيع: Distribution function

دالة التوزيع المتغير العشوائي $\boldsymbol{X}$ ، هي دالة متزايدة تأخذ قيمها في المجال $[0,1]$، يرمز لها ب F_X والمعرفة ب:

$$\boldsymbol{F_X(x)=P(X\leq x)\ ,x\in\mathbb{R}}$$

- في حالة المتغير العشوائي المنفصل، دالة التوزيع تكون من الشكل :

$$F_X(x) = P(X \leq x) = \sum_{x_i \leq x} P(X = x_i)$$

- أما في حالة المتغير العشوائي المستمر، دالة التوزيع تكون من الشكل :

$$F_X(x) = P(X \leq x) = \int_{-\infty}^{x} f_X(t)\, dt$$

3.2. التوقع الرياضي و التباين: Mathematical expectation and variance

التوقع الرياضي للمتغير العشوائي X ، يرمز له برمز $E(X)$، أما التباين فيرمز له برمز $V(X)$. بحيث:

- في حالة المتغير العشوائي المنفصل، إذا اعتبرنا أن X يأخذ القيم $x_1, x_2, \ldots, x_n$، فإن:

$$E(X) = \sum_{i=1}^{n} x_i\, P(X = x_i)$$

$$V(X) = E\big(X - E(X)\big)^2 = E(X^2) - \big(E(X)\big)^2 = \left(\sum_{i=1}^{n} x_i^2\, P(X = x_i)\right) - \big(E(X)\big)^2$$

- أما في حالة المتغير العشوائي المستمر، فإن:

$$E(X) = \int_{\mathbb{R}} x\, f_X(x)\, dx$$

$$V(X) = E\big(X - E(X)\big)^2 = E(X^2) - \big(E(X)\big)^2 = \left(\int_{\mathbb{R}} x^2\, f_X(x)\, dx\right) - \big(E(X)\big)^2$$

3. التوزيعات الاحتمالية الشهيرة:

1.3. التوزيع الثنائي الحد او ذو الحدين: The Binomial Distribution

التوزيع الثنائي الحد هو توزيع لتجربة عشوائية لها ناتجتان فقط أحدهما نجاح التجربة والآخر فشلها، ويكون الشرط الأساسي أن احتمال النجاح لا يتأثر بتكرار التجربة. مثال : رمي قطعة نقود للحصول على الصورة، رمي زهرة نرد مرة واحدة للحصول على رقم محدد...إلخ.

نقول أن متغير عشوائي $\mathbf{X}$ الذي يأخذ القيم $\{\mathbf{0, 1, \dots, n}\}$ يتبع قانون ثنائي الحد، ذو المعلمتين $(\boldsymbol{n.p})$ مع $\boldsymbol{p} \in]\mathbf{0},\ \mathbf{1}[$ و $\boldsymbol{n} \in \mathbb{N}^*$. ويُشار إليه ب$\boldsymbol{B(n.p)}$ ، بحيث:

$$\boldsymbol{P(X = x) = C_n^x\, p^x\, (1-p)^{n-x} = \frac{n!}{x!\ (n-x)!}\, p^x\, (1-p)^{n-x},\quad x = \{0, 1, \dots, n\}}$$

بعض القيم المميزة لتوزيع الثنائي الحد :

- **التوقع الرياضي :** $\boldsymbol{E(X) = n\, p}$
- **التباين:** $\boldsymbol{V(X) = n\ (1-p)}$
- **الانحراف المعياري:** $\boldsymbol{\sigma_X = \sqrt{n\, p\, (1-p)}}$

<u>مثال:</u>

إذا رميت قطعة نقد 6 مرات ، ولنفرض أننا نهتم لظهور الصورة.

أ. ما هو احتمال عدم ظهور الصورة ؟

ب. ما هو احتمال ظهور الصورة مرتين ؟

ت. ما هو احتمال ظهور الصورة على الأقل 4 مرات ؟

ث. أحسب التوقع الرياضي والتباين لهذا المتغير.

<u>الحل:</u>

لدينا $\boldsymbol{X}$ متغير عشوائي يمثل عدد مرات ظهور الصورة عند رمي قطعة نقد 6 مرات، ويتبع التوزيع ثنائي الحد.

$$\boldsymbol{X \to B(6,\ 0.5)}$$

أ. إيجاد احتمال عدم ظهور الصورة :

$$\mathbf{P(X = 0) = C_6^0\, 0.5^0\, (1-0.5)^{6-0} = \frac{6!}{0!\ (6-0)!}\, 0.5^0\, (1-0.5)^{6-0} = 0.0156.}$$

ب. إيجاد احتمال ظهور الصورة مرتين:

$$\boldsymbol{P(X = 2) = C_6^2\, 0.5^2\, (1-0.5)^{6-2} = \frac{6!}{2!\ (6-2)!}\, 0.5^2\, (1-0.5)^{6-2} = 0.2343.}$$

ت. إيجاد احتمال ظهور الصورة على الأقل 4 مرات:

$$P(X \geq 4) = P(X = 4) + P(X = 5) + P(X = 6)$$

$$= C_6^4\, 0.5^4\, (1 - 0.5)^{6-4} + C_6^5\, 0.5^5\, (1 - 0.5)^{6-5} + C_6^6\, 0.5^6 (1 - 0.5)^{6-6}$$

$$= \frac{6!}{4!\ (6-4)!}\, 0.5^4\, (1 - 0.5)^{6-4} + \frac{6!}{5!\ (6-5)!}\, 0.5^5\, (1 - 0.5)^{6-5} + \frac{6!}{6!\ (6-6)!}\, 0.5^6\, (1 - 0.5)^{6-6}$$

$$= 0.2343 + 0.0937 + 0.0156 = 0.3437$$

ث. حساب التوقع الرياضي والتباين:

– التوقع الرياضي:

$$\mathrm{E}(X) = n\, p = 6 \times 0.5 = 3$$

– التباين:

$$V(X) = n\, p\, q = 6 \times 0.5 \times 0.5 = 1.5.$$

2.3. التوزيع بواسون: *The Poisson Distribution*

هو توزيع احتمالي منفصل يعبر عن احتمالية حدوث عدد من الأحداث ضمن فترة زمنية محددة، مع العلم أن حدوث هذه الأحداث يكون وفقا لمعدل وسطي معروف. وعادة ما يستخدم قانون بواسون لنمذجة وعد الأحداث النادرة، أي الأحداث ذات الاحتمالية المنخفضة لحدوثها، مثل: الأمراض النادرة، الحوادث المميتة النادرة، معايرة المحلول الفيروسي، عدد المكالمات التي يتم تلقيها مركز خدمة الزبائن خلال دقيقة، عدد الحوادث المرور خلال يوم، أعطال الأجهزة، ...إلخ.

نقول أن المتغير العشوائي X بقيم في $\mathbb{N}$ يتبع توزيع بواسون ذو معلمة $(\lambda > 0)$ ، والمشار إليه ب $\mathcal{P}(\lambda)$ ، إذا:

$$P(X = x) = \frac{\lambda^x\, e^{-\lambda}}{x!} \quad , \quad x = \{0, 1, 2, \dots\}$$

بعض القيم المميزة لتوزيع الثنائي الحد :

- **التوقع الرياضي** : $E(X) = \lambda$
- **التباين**: $V(X) = \lambda$
- **الانحراف المعياري**: $\sigma_X = \sqrt{\lambda}$

مثال:

يستقبل شخص مكالمات بمعدل مكالمتين في الدقيقة.

أ. ماهو احتمال أن يستقبل 5 مكالمات في الدقيقة ؟

ب. ماهو احتمال أن يستقبل على الأقل مكالمة واحدة في الدقيقة ؟

الحل:

لدينا، X متغير عشوائي يمثل عدد المكالمات في الدقيقة، ويتبع التوزيع بواسون ذو معلمة $\boldsymbol{\lambda = 2}$.

$$\boldsymbol{X \rightarrow \mathcal{P}(2)}$$

أ. إيجاد احتمال أن يستقبل الشخص 5 مكالمات في الدقيقة:

$$\boldsymbol{P(X = 5) = \frac{2^5\, e^{-2}}{5!} = 0.036}$$

ب. إيجاد احتمال أن يستقبل الشخص على الأقل مكالمة واحدة في الدقيقة:

$$\boldsymbol{P(X \geq 1) = 1 - P(X = 0) = 1 - \frac{2^0\, e^{-2}}{0!} = 1 - 0.135 = 0.865}$$

3.3. التوزيع الطبيعي: *The Normal Distribution*

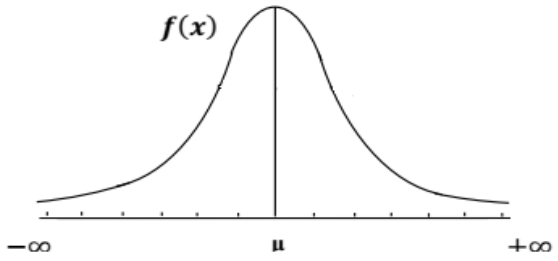
التوزيع الطبيعي يعرف كذلك بقانون **Gauss** أو قانون **Laplace–Gauss** وهو يعتبر من أهم التوزيعات الاحتمالية وأكثرها استخداما في نظرية الاحتمالات والإحصاء الرياضي. وفي ظروف معينة نجد ان معظم التوزيعات الاحتمالية تؤول إلى هذا التوزيع.

إذا كان $\boldsymbol{X}$ متغيرا عشوائيا مستمرا ويتبع التوزيع الطبيعي بمتوسط $\boldsymbol{\mu}$ وإنحراف معياري $\boldsymbol{\sigma}$ فإن الدالة الكثافة الاحتمالية ل $\boldsymbol{X}$ هي :

$$\boldsymbol{X \rightarrow N(\mu, \sigma^2)}$$

$$\boldsymbol{f_X(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\, e^{-\frac{1}{2\sigma^2}(x-\mu)^2} \;\; ; \; x, \mu \in \mathbb{R}, \sigma > 0}$$

والشكل أدناه يوضح التمثيل البياني لمنحنى دالة الكثافة لمتغير عشوائي يتبع التوزيع الطبيعي.



ومن خلال هذا التمثيل البياني يتضح أن منحنى دالة الكثافة يأخذ شكل ناقوس وأن توزيع الطبيعي هو توزيع متناظر بالنسبة للمحور $x = \mu$. وكذلك المساحة الكلية تحت هذا المنحنى تساوي الواحد:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f_X(x)\, dx = 1$$

ودالة توزيعه تكون من الشكل :

$$F_X(x) = P(X \leq x) = \int_{-\infty}^{x} f_X(t)\, dt$$

ولكن بسبب صعوبة حساب الاحتمال في حالة متغير يتبع التوزيع الطبيعي، فنستعين بالتوزيع الطبيعي المعياري.

<u>التوزيع الطبيعي المعياري:</u>

إذا كان X متغيرا عشوائيا يتبع التوزيع الطبيعي بمتوسط μ وإنحراف معياري σ فإن المتغير Z :

$$Z = \frac{X - \mu}{\sigma} \rightarrow N(0, 1)$$

بمعنى أن Z متغيرا عشوائيا يتبع التوزيع الطبيعي المعياري بمتوسط يساوي الصفر وانحراف معياري يساوي الواحد و دالة الكثافته الاحتمالية هي:

$$f_Z(z) \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{(-z^2/2)} \; ; \; z \in \mathbb{R}.$$

ودالة توزيعه تكون من الشكل :

$$\varphi(z) = P(Z \leq z) = \int_{-\infty}^{z} f_Z(t)\, dt$$

بحيث لدينا :

$$\boldsymbol{\varphi(z) = P(Z \leq z)}$$

$$\boldsymbol{P(Z \geq z) = 1 - P(Z \leq z) = 1 - \varphi(z)}$$

$$\boldsymbol{P(Z \leq -z) = 1 - P(Z \leq z) \Rightarrow \varphi(-z) = 1 - \varphi(z)}$$

$$\boldsymbol{P(a \leq Z \leq b) = \varphi(b) - \varphi(a)}$$

ولحساب الإحتمال نستعين بالجدول التوزيع الطبيعي المعياري لاستخراج قيمة $\boldsymbol{\varphi(z)}$ (النظر إلى الملحق رقم 1). فللحصول على قيمة الاحتمال نستعمل جدول هذا التوزيع والذي نحدد فيه أولا قيمة $\boldsymbol{z}$ في الجدول من خلال تفكيك قيمتها إلى قيمتين على المحورين الافقي و العمودي و نقوم بالإسقاط هاتين القيمتين على القيم الموجودة بداخل الجدول ونستخرج بعدها قيمة الاحتمال الموافق لتقاطع هاتين القيمتين.

<u>مثال:</u>

ليكن $\boldsymbol{X}$ متغيرا عشوائيا يتبع التوزيع الطبيعي بمتوسط $\boldsymbol{6}$ وإنحراف معياري $\boldsymbol{2}$. أحسب الاحتمال:

$$\boldsymbol{P(X = 7)}, \quad \boldsymbol{P(X \leq 7.5)}, \quad \boldsymbol{P(X > 8)}, \quad \boldsymbol{P(X > 4)}, \quad \boldsymbol{P(7.5 \leq X \leq 8)}.$$

<u>الحل:</u>

لدينا: $\boldsymbol{X \to N(6,2^2)}$

1. حساب $\boldsymbol{P(X = 7)}$:

بما أن X يتبع التوزيع الطبيعي وهو توزيع مستمر فإن:

$$\boldsymbol{P(X = 7) = 0}$$

2. حساب $\boldsymbol{P(X \leq 7.5)}$:

$$\boldsymbol{P(X \leq 7.5) = P\left(\frac{X - \mu}{\sigma} \leq \frac{7.5 - \mu}{\sigma}\right) = P\left(Z \leq \frac{7.5 - 6}{2}\right) = P(Z \leq 0.75)}$$
$$\boldsymbol{= \varphi(0.75) = 0.7734}$$

3. حساب $\boldsymbol{P(X > 8)}$:

$$\boldsymbol{P(X > 8) = P\left(\frac{X - \mu}{\sigma} > \frac{8 - \mu}{\sigma}\right) = P\left(Z > \frac{8 - 6}{2}\right) = P(Z > 1) = 1 - P(Z < 1)}$$

$$= 1 - \varphi(1) = 1 - 0.8413 = 0.1587.$$

4. حساب $P(X > 4)$:

$$P(X > 4) = P\left(\frac{X-\mu}{\sigma} > \frac{4-\mu}{\sigma}\right) = P\left(Z > \frac{4-6}{2}\right) = P(Z > -1)$$

$$= 1 - P(Z < -1) = 1 - \varphi(-1) = 1 - [1 - \varphi(1)] = \varphi(1) = 0.8413.$$

5. حساب $P(7.5 \leq X \leq 8)$:

$$P(7.5 \leq X \leq 8) = P\left(\frac{7.5-\mu}{\sigma} \leq \frac{X-\mu}{\sigma} \leq \frac{8-\mu}{\sigma}\right) = P\left(\frac{7.5-6}{2} \leq Z \leq \frac{8-6}{2}\right)$$

$$= P(0.75 \leq Z \leq 1) = \varphi(1) - \varphi(0.75) = 0.8413 - 0.7734$$

$$= 0.0679.$$

4.3. التوزيع كاي مربع χ^2 : *The Khi-square Distribution*

لدينا n متغيرة عشوائية $X_1, X_2, \ldots, X_n$ مستقلة فيما بينها وتتبع التوزيع الطبيعي المعياري أي التوزيع الطبيعي $N(0,1)$ فإن المتغيرة U المعرفة ب:

$$U = \sum_{i=1}^{n} X_i^2 = X_1^2 + X_2^2 + \cdots + X_n^2$$

تتبع التوزيع كاي مربع χ^2 بدرجة الحرية n ونرمز له ب $\chi^2(n)$ ، ودالة كثافتها:

$$f_U(u) = \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{n}{2}}}{\Gamma(\frac{n}{2})} u^{(\frac{n}{2})-1} e^{-\frac{u}{2}} \quad ; u > 0.$$

مع Γ دالة قاما (Gamma) المعرفة ب:

$$\Gamma(\alpha) = \int_0^{+\infty} t^{\alpha-1} e^{-t}\, dt \;\; ; \; \alpha > 0 \, .$$

بعض القيم المميزة لتوزيع كاي مربع :

- **التوقع الرياضي :** $E(U) = n$
- **التباين :** $V(U) = 2n$
- **الانحراف المعياري** $\sigma_U = \sqrt{2n}$

لحساب الاحتمال نستعين بالجدول التوزيع كاي مربع (النظر إلى الملحق رقم 2). فللحصول على قيمة الاحتمال نستعمل جدول هذا التوزيع والذي نحدد فيه أولا درجة الحرية n على المحور العمودي للجدول. وبعدها نبحث عند هذه درجة الحرية، عن القيمة u ونقوم بالإسقاط على المحور الأفقي للجدول لاستخراج قيمة الاحتمال.

مثال:

ليكن U متغير عشوائي يتبع التوزيع كاي مربع :

- أحسب الاحتمالات التالية:

- $n = 10 ; P(U < 18.3)$
- $n = 4 ; P(U > 11.1)$
- $n = 15 ; P(8.55 < U < 25)$

- استخرج القيم الجدولية u في الحالات التالية:

- $n = 6 ; P(U < u) = 0.9$
- $n = 9 ; P(U > u) = 0.995$
- $n = 13 ; \ P(u_1 < U < u_2) = 0.05$

الحل:

- حساب الاحتمالات:

- $n = 10 ; P(U < 18.3) = 0.95$
- $n = 4 ; P(U > 11.1) = 1 - P(U < 11.1) = 1 - 0.975 = 0.025$
- $n = 15 ; P(8.55 < U < 25) = P(U < 25) - P(U < 8.55)$

$$= 0.95 - 0.10 = 0.85$$

- استخرج القيم الجدولية u في الحالات التالية:

- $n = 6 ; P(U < u) = 0.9 \ \Rightarrow u = 10.6$
- $n = 9 ; P(U > u) = 0.995 \Leftrightarrow 1 - P(U < u) = 0.995$

$$\Leftrightarrow P(U < u) = 0.005 \Rightarrow \ u = 1.73$$

- $n = 13 ; \ P(u_1 < U < u_2) = 0.05.$

$$\Leftrightarrow \ P(U < u_2) - P(U < u_1) = 0.05 = 0.95 - 0.9$$

$$\Rightarrow \begin{cases} P(U < u_2) = 0.95 \Rightarrow u_2 = 22.4 \\ P(U < u_1) = 0.9 \Rightarrow u_1 = 19.8 \end{cases}$$

5.3. توزيع ستيودنت *The Student Distribution*

إذا كان لدينا متغيران عشوائيان X و U مستقلان بحيث X يتبع التوزيع الطبيعي المعياري $N(0,1)$ و U يتبع التوزيع كاي مربع χ^2 بدرجة الحرية n فإن المتغير T المعرف ب :

$$T = \frac{X}{\sqrt{\frac{U}{n}}}$$

يتبع التوزيع ستيودنت بدرجة الحرية n و نرمز له ب $t(n)$ ، و دالة كثافته:

$$f_T(t) = \frac{\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)}{\sqrt{n\pi}\ \Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}\left(1+\frac{t^2}{n}\right)^{-\left(\frac{n+1}{2}\right)} \quad ; t \in \mathbb{R}.$$

مع Γ دالة قاما (Gamma) المعرفة ب:

$$\Gamma(\alpha) = \int_0^{+\infty} t^{\alpha-1}\ e^{-t}\, dt \ ;\ \alpha > 0\,.$$

بعض القيم المميزة لتوزيع ستيودنت :

- **التوقع الرياضي :** $E(T) = 0$
- **التباين:** $V(T) = \frac{n}{n-2}$; $n > 2$
- **الانحراف المعياري** $\sigma_T = \sqrt{\frac{n}{n-2}}$; $n > 2$

لحساب الاحتمال نستعين بالجدول التوزيع ستيودنت (النظر إلى الملحق رقم 3). فللحصول على قيمة الاحتمال نستعمل جدول هذا التوزيع والذي نحدد فيه أولا درجة الحرية n على المحور العمودي للجدول. وبعدها نبحث عند هذه درجة الحرية، عن القيمة t ونقوم بالإسقاط على المحور الأفقي للجدول لاستخراج قيمة الاحتمال.

مثال:

ليكن T متغير عشوائي يتبع التوزيع ستيودنت

- أحسب الاحتمالات التالية:

- $\boldsymbol{n = 19}$; $\boldsymbol{P(T \leq 0.688)}$
- $\boldsymbol{n = 3}$; $\boldsymbol{P(T > 1.64)}$
- $\boldsymbol{n = 13}$; $\boldsymbol{P(0.870 < T < 3.012)}$

الحل:

- $\boldsymbol{n = 19}$; $\boldsymbol{P(T \leq 0.688) = 0.75}$
- $\boldsymbol{n = 3}$; $\boldsymbol{P(T > 1.64) = 1 - P(T < 1.64) = 1 - 0.90 = 0.1}$
- $\boldsymbol{n = 13}$; $\boldsymbol{P(0.870 < T < 3.012) = P(T < 3.012) - P(T < 0.870)}$

$$= \mathbf{0.995 - 0.80 = 0.195}$$

6.3. التوزيع فيشر – سنيديكور : *The Fisher–Snedecor Distribution*

إذا كان لدينا متغيران عشوائيان $\boldsymbol{U_1}$ و $\boldsymbol{U_2}$ يتبعا التوزيع كاي مربع $\boldsymbol{\chi^2}$ بدرجة الحرية على التوالي $\mathbf{n_1}$ و $\mathbf{n_2}$ ، فإن المتغير $\boldsymbol{F}$ المعرف ب :

$$\boldsymbol{F = \frac{\frac{U_1}{n_1}}{\frac{U_2}{n_2}}}$$

يتبع التوزيع فيشر بدرجة الحرية $\mathbf{n_1}$ و $\mathbf{n_2}$ ، و نرمز له ب $\boldsymbol{F \rightarrow \mathrm{F}(n_1, n_2)}$، و دالة كثافته:

$$\boldsymbol{f_F(x) = \frac{\Gamma\left(\frac{n_1 + n_2}{2}\right)}{\Gamma(\frac{n_1}{2})\,\Gamma(\frac{n_2}{2})} {n_1}^{\frac{n_1}{2}}\, {n_2}^{\frac{n_2}{2}}\, x^{\left(\frac{n_1}{2}-1\right)}\, (n_1 x + n_2)^{-\left(\frac{n_1+n_2}{2}\right)} \; ; x > 0.}$$

مع $\boldsymbol{\Gamma}$ دالة قاما (Gamma) المعرفة ب:

$$\boldsymbol{\Gamma(\alpha) = \int_0^{+\infty} t^{\alpha-1}\, e^{-t}\, dt \; ; \; \alpha > 0\,.}$$

بعض القيم المميزة لتوزيع فيشر :

- **التوقع الرياضي :** $E(F) = \frac{n_2}{n_2-2}$; $n_2 > 2$
- **التباين:** $V(F) = \left(\frac{n_2}{n_2-2}\right)^2 \frac{2\,(n_1+n_2-2)}{n_1(n_2-4)}$; $n_2 > 4$
- **الانحراف المعياري** $\sigma_T = \sqrt{\left(\frac{n_2}{n_2-2}\right)^2 \frac{2\,(n_1+n_2-2)}{n_1(n_2-4)}}$; $n_2 > 4$

إن جدول التوزيع فيشر (النظر إلى الملحق رقم 4) يسمح لنا باستخراج القيم الحرجة للمتغيرة F عند احتمال معين P وبدرجتي الحرية n_1, n_2. ويمكن أن نجد عدة جداول مختلفة لتوزيع فيشر، تعطي قيم حرجة على حسب الاحتمال المحدد، $P = 0.90$ أو $P = 0.90$ أو $P = 0.99$.....

مثال:

ليكن F متغير عشوائي يتبع التوزيع فيشر .استخرج القيم الحرجة أو الجدولية التي تعطي الاحتمالات التالية:

- $n_1 = 15,\ n_2 = 17$; $P(F < f) = 0.95$
- $n_1 = 4,\ n_2 = 10$; $P(F \geq f) = 0.05$
- $n_1 = 6,\ n_2 = 10$; $P(F \geq f) = 0.99$

الحل:

- $n_1 = 15,\ n_2 = 17$; $P(F < f) = 0.95 \Rightarrow f = 2.31$
- $n_1 = 4,\ n_2 = 10$; $P(F \geq f) = 0.05 \Leftrightarrow 1 - P(F \leq f) = 0.05$

$$\Leftrightarrow P(F \leq f) = 1 - 0.05 = 0.95 \Rightarrow f = 3.48$$

- $n_1 = 6,\ n_2 = 10$; $P(F \leq f) = 0.99 \Rightarrow f = 5.39$.

الفصل الثاني: المعاينة

Sampling

تمهيد

تفترض النظرية الرياضية الاحتمالية أنه من أجل معرفة الأحداث التي يمكن أن تحدث في مجتمع معين، سوف تكون إلا بدراسة أو استجواب جزء صغير منه، بشرط احترام قواعد الاختيار الصارمة لهذا الجزء من المجتمع مع ضمان تمثيله. ويهدف الاحصاء الاستدلالي لاستنتاج خصائص المجتمع من خصائص عينة سحبت منه، ويسمح بتحديد القيم لمعالم المجتمع من خلال بيانات العينة المسحوبة منه عشوائيا، وينقسم إلى قسمين: التقديرات و مجالات الثقة و اختبارات الفروضيات الإحصائية، وهذا ما سوف نتطرق إليه في الفصول الموالية.

1. تعريف للبعض المصطلحات

1.1. المجتمع الإحصائي: Population

هو عبارة عن مجموعة من العناصر التي تشترك في خاصية معينة أو أكثر. ويُطلق على كل عنصر من المجتمع الإحصائي اسم فرد أو وحدة إحصائية. و يجب أن يكون المجتمع محل الدراسة معرف تعريفا جيدا من حيت المفردات المكونة له أو من حيث الظاهرة المدروسة، فقد يكون مجموعة منتهية (مجتمع محدود) أو غير منتهية (مجتمع غير محدود) من المفردات أو الأحداث التي تكون محل اهتمامنا. و يعبر إحصائيا عن المجتمع الإحصائي بمتغير عشوائي، والذي يتميز بتوزيع احتمالي معين و ببعض المعلمات الإحصائية.

لنعتبر مجتمع إحصائي X المكون من N مفردة والذي يتميز بتوقع الرياضي μ والتباين σ^2، بحيث:

$$\mu = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} X_i$$

$$\sigma^2 = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} (X_i - \mu)^2$$

2.1. العينة: Echantillon

هي مجموعة جزئية من مشاهدات المجتمع الاحصائي والتي تتميز بنفس صفاته، بحيث تسحب منه بعناية لتعكس جميع خصائص المجتمع من اجل الاستدلال بها على المجتمع ككل من خلال التقدير الإحصائي والتنبؤ واتخاذ القرار.

فإذا إعتبرنا مجتمع إحصائي X المكون من N مفردة و سحبت منه عينة مكونة من n مفردة $\{X_1, X_2, \dots, X_n\}$ و التي تتميز بتوقع الرياضي $\overline{X}$ و التباين S^2 ، فإن:

$$\overline{X} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$$

$$S^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \overline{X})^2$$

1.2.1. أنواع العينات:

هناك نوعان من العينات هما العينات العشوائية (الإحتمالية) و العينات غير عشوائية (غير إحتمالية):

أ- **العينات العشوائية (الإحتمالية):** **Random Samples**

تعرف العينة العشوائية على انها العينات التي يتم اختيار مفرداتها باستخدام أساليب معينة تلعب الصدفة الدور الأول في إختيارها وذلك باستعمال احتمال ثابت ومحدود عند إختيار العينة بحيث كل وحدة من وحدات المجتمع لها نفس الاحتمال للظهور في العينة. وتنقسم العينات العشوائية إلى:

- **العينات العشوائية البسيطة:**

يتم الاعتماد على العينات العشوائية البسيطة في المجتمعات التي تبدي تجانسا في مشاهداتها، بحيث كل وحدات المجتمع الإحصائي لها نفس الفرصة في الظهور ضمن العينة المقرر سحبها، وهذا باستخدام الأسلوب العشوائي وكذلك الاحتمال الثابت والمحدد والأكبر من الصفر عند إختيار المفردات.
ولتحديد عينة عشوائية بسيطة حجمها n من مجتمع إحصائي حجمه N يجب :

- يجب توفير الإطار وهو قائمة أو خريطة أو أي وسيلة أخرى التي تحتوي على جميع وحدات المعاينة للمجتمع الإحصائي.
- نقوم بترقيم المفردات المجتمع الإحصائي من 1 إلى N.
- سحب n مفردة من المجتمع الإحصائي بحيث $(1 < n < N)$ وذلك باستخدام الاحتمال ثابت لسحب كل مفردات العينة.

- **العينات العشوائية الطبقية:**

يتم الاعتماد على العينات العشوائية الطبقية في المجتمعات غير المتجانسة بحيث يتم تقسيم المجتمع إلى عدة مجتمعات جزئية (الطبقات)، إذ الطبقة الواحدة تتضمن مجموعة من المشاهدات المتجانسة. وبعد تحديد إطار كل طبقة يتم اختيار المفردات باستخدام مبدأ العينة العشوائية البسيطة.

- **العينات العشوائية المنتظمة:**

يتم الاعتماد على العينات العشوائية المنتظمة في المجتمعات الكبيرة الحجم و التي يتعذر تحديد حجم المجتمع الإحصائي أو صعوبة حصر مفرداته، بحيث نقوم بسحب عشوائي للفرد الأول ومن تم تحقيق قفزة معينة وصولا للوحدة الموالية، وهكذا إلى غاية تحديد كل عناصر العينة.

- **العينات العشوائية العنقودية:**

يتم الاعتماد على العينات العشوائية العنقودية في المجتمعات غير المتجانسة و كبيرة الحجم و التي يصعب حصر مفرداتها، بحيث نقوم بتقسيم المجتمع الإحصائي إلى مجموعات جزئية واضحة (العناقيد) ثم نقوم بسحب عينة عشوائية بسيطة من بين تلك العناقيد، و بالتالي نشكل العينة من كل أفراد المجموعات الجزئية المسحوبة .

ب- العينات غير عشوائية (غير إحتمالية): Non Random Samples

هي العينات التي يتم إختيارها بطريقة مقصودة ولا نستعمل مبدأ الصدفة ولا احتمالا ثابتا لاختيار مفرداتها، فغالبا ما يتدخل الباحث في عملية تحديد عناصرها. ومن أنواعها العينة العمدية أو القصدية، العينة الحصصية...إلخ.

3.1. المعاينة: Echantillonnage

هي عملية اختيار جزء من المجتمع الإحصائي أي هي الطريقة التي يتم من خلالها الحصول على العينة للاستدلال على خواص المجتمع بأكمله عن طريق تعميم نتائج العينة.

إذا اعتبرنا مجتمع إحصائي حجمه N سحبت منه عينة حجمها n. فتكون :

- **المعاينة غير نفادية** إذا تم اختيار مفردات العينة من المجتمع الإحصائي باستخدام السحب بإرجاع، ويكون في هذه الحالة عدد العينات الممكن سحبها هو N^n.
- **المعاينة النفادية** إذا تم اختيار مفردات العينة من المجتمع الإحصائي باستخدام السحب بدون إرجاع، و يكون عدد العينات الممكن سحبها هو C_N^n. بحيث:

$$C_N^n = \frac{N!}{n!\,(N-n)!}$$

4.1. الإحصاءة (الإحصائية): The Statistics

تسمى المقاييس التي نستخدمها لوصف عينة مسحوبة من مجتمع إحصائي بالإحصاءات. بحيث الإحصاءة هي كل خاصية من خاصيات العينة مثل الوسط الحسابي $\bar{X}$، التباين S^2، الإنحراف المعياري S ...إلخ. و بما أننا

نستطيع سحب أكثر من عينة ذات الحجم n من نفس المجتمع إحصائي بالحجم N ، فان الإحصاءات $\bar{X}$ ، S^2 و S التي يمكن حسابها لكل هذه العينات ستتغير قيمتها من عينة إلى أخرى وبالتالي هذه الإحصاءات سوف تأخذ صفة متغير عشوائي.

2. توزيعات المعاينة: Sampling Distribution

1.2. تعريف توزيع المعاينة:

بما أن إحصاءات العينة، مثل: $\bar{X}$، S^2 و S تأخذ صفة متغير عشوائي فان لهذا المتغير توزيع احتمالي، ويعرف توزيع المعاينة بأنه توزيع احتمالي لكل القيم الممكنة التي تأخذها إحصاءة معينة لدى جميع العينات العشوائية الممكن سحبها من نفس المجتمع الإحصائي والتي لها نفس الحجم. ولتحديد توزيع المعاينة لإحصاءة معينة يجب تحديد توزيعها الإحتمالي ومتوسطها الحسابي وتباينها.

2.2. توزيع المعاينة للمتوسط العينة : The sampling distribution of a mean

إذا كانت ($X_1, X_2, X_3, \dots, X_n$) *عينة عشوائية حجمها* n *سحبت من مجتمع حجمه* N، متوسطه μ و تباينه σ^2 ، فإن $\bar{X}$ المتغير العشوائي الذي يمثل المتوسط الحسابي للعينة يخضع لتوزيع معين مستمدا من توزيع المجتمع، متوسطه $\mu_{\bar{X}}$ وتباينه $\sigma^2_{\bar{X}}$. بحيث :

$$\bar{X} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$$

- **التوقع الرياضي لمتوسط العينة $\bar{X}$:**

$$\mu_{\bar{X}} = E(\bar{X}) = E\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i\right) = \frac{1}{n}E\left(\sum_{i=1}^{n} X_i\right) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} E(X_i) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \mu = \frac{1}{n}.n\,\mu = \mu$$

وبالتالي فإن التوقع الرياضي لمتوسط العينة يساوي متوسط المجتمع:

$$.\mu_{\bar{X}} = \mu$$

- **التباين لمتوسط العينة $\overline{X}$:**

- **في حالة السحب بالإرجاع أي في حالة إستقلالية X_i:**

$$\sigma_{\overline{X}}^2 = V(\overline{X}) = V\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i\right) = \frac{1}{n^2}V\left(\sum_{i=1}^{n} X_i\right) = \frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^{n} V(X_i) = \frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^{n} \sigma^2 = \frac{1}{n^2}.n\,\sigma^2 = \frac{\sigma^2}{n}$$

وبالتالي فإن التباين لمتوسط العينة في حالة السحب بالإرجاع :

$$\sigma_{\overline{X}}^2 = \frac{\sigma^2}{n}$$

ومنه يكون الانحراف المعياري لمتوسط العينة $\overline{X}$:

$$\sigma_{\overline{X}} = \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

- **أما في حالة السحب بدون إرجاع فإن التباين لمتوسط العينة:**

$$\sigma_{\overline{X}}^2 = \frac{\sigma^2}{n}\left(\frac{N-n}{N-1}\right)$$

بحيث $\left(\frac{N-n}{N-1}\right)$ يمثل معامل التصحيح (أو الإرجاع)، ويكون الانحراف المعياري لمتوسط العينة $\overline{X}$:

$$\sigma_{\overline{X}} = \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\sqrt{\frac{N-n}{N-1}}$$

مثال:

ليكن المجتمع مكون من المفردات التالية : $\{2, 3, 4, 7\}$.

1. أوجد متوسط وتباين المجتمع.
2. أوجد توزيع المعاينة للوسط الحسابي للعينات ذات الحجم $n=2$ التي يمكن سحبها من هذا المجتمع، مع حساب المتوسط والتباين للمتغير العشوائي $\overline{X}$ في كل من الحالات التالية:

أ- إذا كان السحب بإرجاع. ب- إذا كان السحب بدون إرجاع.

الحل :

المجتمع: $\{2, 3, 4, 7\}$ ، $N = 4$

1. إيجاد متوسط وتباين المجتمع:

- حساب متوسط المجتمع μ :

$$\mu = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} X_i = \frac{1}{4}[2 + 3 + 4 + 7] = \frac{16}{4} = 4$$

إذن $\mu = 4$

- حساب تباين المجتمع σ^2 :

$$\sigma^2 = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}(X_i - \mu)^2 = \frac{1}{4}\sum_{i=1}^{4}(X_i - 4)^2$$

$$= \frac{1}{4}[(2-4)^2 + (3-4)^2 + (4-4)^2 + (7-4)^2] = \frac{14}{4} = 3.5$$

إذن $\sigma^2 = 3.5$

2. إيجاد توزيع المعاينة للوسط الحسابي للعينات ذات الحجم n=2 التي يمكن سحبها من هذا المجتمع مع حساب المتوسط والتباين للمتغير العشوائي $\bar{X}$:

❖ **إذا كان السحب بإرجاع**

عدد العينات الممكن سحبها بحجم $n = 2$: $N^n = 4^2 = 16$ *عينة*

الجدول التالي يوضح كل العينات الممكن سحبها ومتوسطاتها الحسابية:

العينات	$\bar{X}$
(2 , 2)	2
(2 , 3)	2.5
(2 , 4)	3
(2 , 7)	4.5
(3, 2)	2.5
(3 , 3)	3
(3 , 4)	3.5

(3 , 7)	5
(4 , 2)	3
(4 , 3)	3.5
(4 , 4)	4
(4 , 7)	5.5
(7, 2)	4.5
(7 , 3)	5
(7 , 4)	5.5
(7 , 7)	7

- التوزيع الاحتمالي للمتغير العشوائي $\overline{X}$ للعينات ذات الحجم $n=2$:

$\overline{x}_k$	2	2.5	3	3.5	4	4.5	5	5.5	7	$\sum$
$P(\overline{x}_k)$	1/16	2/16	3/16	2/16	1/16	2/16	2/16	2/16	1/16	16/16=1

- إيجاد المتوسط الحسابي والتباين لتوزيع المعاينة ل $\overline{X}$:

- متوسط توزيع المعاينة ل $\overline{X}$:

$$\mu_{\overline{X}} = E(\overline{X}) = \sum_{k=1}^{9} \overline{X}_k\, p(\overline{X}_k)$$

$$= \left[2\frac{1}{16} + 2.5\,\frac{2}{16} + 3\frac{3}{16} + 3.5\,\frac{2}{16} + 4\,\frac{1}{16} + 4.5\,\frac{2}{16} + 5\frac{2}{16} + 5.5\,\frac{2}{16} + 7\,\frac{1}{16}\right] = \frac{64}{16} = 4$$

إذن :

$$\mu_{\overline{X}} = 4$$

- تباين توزيع المعاينة ل $\overline{X}$:

$$\sigma^2_{\overline{X}} = V(\overline{X}) = E(\overline{X}^2) - \mu^2_{\overline{X}} = \left[\sum_{k=1}^{9} \overline{X}^{\,2}_k p(\overline{X}_k)\right] - \mu^2_{\overline{X}}$$

$$= \left[(2)^2\frac{1}{16} + (2.5)^2\frac{2}{16} + (3)^2\frac{3}{16} + (3.5)^2\,\frac{2}{16} + (4)^2\,\frac{1}{16} + (4.5)^2\,\frac{2}{16} + (5)^2\frac{2}{16} + (5.5)^2\,\frac{2}{16} + (7)^2\,\frac{1}{16}\right] - (4)^2 = \frac{284}{16} - 16 = 1.75$$

إذن $\sigma^2_{\overline{X}} = 1.75$

لتأكد:

$$\sigma_{\bar{X}}^2 = \frac{\sigma^2}{n} = \frac{3.5}{2} = 1.75$$

❖ **إذا كان السحب بدون إرجاع**

عدد العينات الممكن سحبها بحجم $n = 2$: $C_N^n = C_4^2 = \frac{4!}{2!(4-2)!} = 6$ *عينة*

الجدول التالي يوضح كل العينات الممكن سحبها ومتوسطاتها الحسابية:

العينات	$\bar{X}$
(2 , 3)	2.5
(2 , 4)	3
(2 , 7)	4.5
(3 , 4)	3.5
(3 , 7)	5
(4 , 7)	5.5

- التوزيع الاحتمالي للمتغير العشوائي $\bar{X}$ للعينات ذات الحجم ***n=2***:

$\bar{x}_k$	2.5	3	3.5	4.5	5	5.5	$\sum$
$P(\bar{x}_k)$	1/6	1/6	1/6	1/6	1/6	1/6	6/6=1

- إيجاد المتوسط الحسابي والتباين لتوزيع المعاينة ل $\bar{X}$:

- متوسط توزيع المعاينة ل $\bar{X}$:

$$\mu_{\bar{X}} = E(\bar{X}) = \sum_{k=1}^{6} \bar{X}_k\, p(\bar{X}_k)$$

$$= \left[2.5\,\frac{1}{6} + 3\frac{1}{6} + 3.5\,\frac{1}{6} + 4.5\,\frac{1}{6} + 5\frac{1}{6} + 5.5\,\frac{1}{6}\right] = \frac{24}{6} = 4$$

إذن $\mu_{\bar{X}} = 4$

- تباين توزيع المعاينة ل $\overline{X}$:

$$\sigma_{\overline{X}}^2 = V(\overline{X}) = E(\overline{X}^2) - \mu_{\overline{X}}^2 = \left[\sum_{k=1}^{6} \overline{X}_k^2 p(\overline{X}_k)\right] - \mu_{\overline{X}}^2$$

$$= \left[(2.5)^2\frac{1}{6} + (3)^2\frac{1}{6} + (3.5)^2\frac{1}{6} + (4.5)^2\frac{1}{6} + (5)^2\frac{1}{6} + (5.5)^2\frac{1}{6}\right] - (4)^2$$

$$= \frac{103}{6} - 16 = 1.167$$

إذن $\sigma_{\overline{X}}^2 = 1.167$

لتأكد:

$$\sigma_{\overline{X}}^2 = \frac{\sigma^2}{n}\left(\frac{N-n}{N-1}\right) = \frac{3.5}{2}\left(\frac{4-2}{4-1}\right) = 1.167$$

ومنه نستنتج أنه:

- **في حالة المعاينة غير النفادية أو المجتمع غير محدود:**

$$\begin{cases} \mu_{\overline{X}} = \mu \\ \sigma_{\overline{X}}^2 = \dfrac{\sigma^2}{n} \end{cases}$$

- **أما في حالة المعاينة النفادية:**

$$\begin{cases} \mu_{\overline{X}} = \mu \\ \sigma_{\overline{X}}^2 = \dfrac{\sigma^2}{n}\left(\dfrac{N-n}{N-1}\right) \end{cases}$$

<u>ملاحظة:</u>

إذا كان لدينا مجتمع محدود حجمه N و سحبت منه عينة حجمها n ، و لكن لم يتم تحديد طريقة السحب، ففي هذه الحالة نقوم بحساب النسبة $\frac{n}{N}$ ومقارنتها مع القيمة 0.05، بحيث :

- إذا كان $\frac{n}{N} < 0.05$ ، فنعتبر أن السحب بالإرجاع ؛
- أما إذا كان $\frac{n}{N} \geq 0.05$ ، فنعتبر أن السحب بدون إرجاع.

❖ **توزيع المعاينة للمتوسط لما يكون توزيع المجتمع يتبع توزيع طبيعي وتباينه معلوم.**

نظرية1: في الحالة التي يكون فيها المجتمع الإحصائي المسحوبة منه العينة مجتمعا طبيعيا $N(\mu, \sigma^2)$ وتباينه معلوم فإن توزيع المعاينة للمتوسط الحسابي $\overline{X}$ يتبع التوزيع طبيعي أيضاً بحيث :

$$X \to N(\mu, \sigma^2) \Rightarrow \overline{X} \to N(\mu_{\overline{X}}, \sigma^2_{\overline{X}})$$

مثال:

إذا كانت نقاط 300 طالب في امتحان الإحصاء تتبع التوزيع الطبيعي بمتوسط 10.5 والانحراف معياري 3.6. سحبنا عينة عشوائية مكونة من 40 طالبا. حيث $\overline{X}$ هو المتغير العشوائي لمتوسط نقاط الطلبة في العينة.

1. أحسب $\sigma_{\overline{X}}$ و $\mu_{\overline{X}}$ في حالة المعاينة غير النفادية و حالة المعاينة النفادية.

2. ما هي طبيعة توزيع متوسط نقاط الطلبة في العينة $\overline{X}$؟

3. أحسب احتمال أن يقع متوسط النقاط في العينة بين 10 و 11.5؟

الحل:

X: متغير عشوائي يمثل نقاط الطلبة.

- المجتمع حجمه $N = 300$ ويتبع التوزيع الطبيعي، متوسطه: $\mu = 10.5$ وإنحرافه المعياري: $\sigma = 3.6$
- سحبت منه عينة حجمها $n = 40$.

$\overline{X}$: المتغير العشوائي لمتوسط نقاط الطلبة في العينة.

1. **حساب $\mu_{\overline{X}}$ و $\sigma_{\overline{X}}$:**

- في حالة المعاينة غيرالنفادية

$$\mu_{\overline{X}} = \mu = 10.5$$

$$\sigma^2_{\overline{X}} = \frac{\sigma^2}{n} = \frac{(3.6)^2}{40} = 0.324 \Rightarrow \sigma_{\overline{X}} = 0.5692$$

- في حالة المعاينة النفادية

$$\mu_{\overline{X}} = \mu = 10.5$$

$$\sigma^2_{\overline{X}} = \frac{\sigma^2}{n}\left(\frac{N-n}{N-1}\right) = \frac{(3.6)^2}{40}\left(\frac{300-40}{300-1}\right) = 0.2817 \Rightarrow \sigma_{\overline{X}} = 0.5307$$

2. توزيع المعاينة للمتوسط :

بما أن توزيع المجتمع طبيعي فإن المتوسط $\overline{X}$ يتبع التوزيع الطبيعي

$$\overline{X} \to N(\mu_{\overline{X}}, \sigma^2_{\overline{X}})$$

- في حالة المعاينة غيرالنفادية

$$\overline{X} \to N(10.5\,, (0.5692)^2)$$

- في حالة المعاينة النفادية

$$\overline{X} \to N(10.5, (0.5307)^2)$$

3. حساب الاحتمال أن يقع متوسط النقاط في العينة بين 10 و 11.5:

- في حالة المعاينة غيرالنفادية:

$$P(10 \le \overline{X} \le 11.5) = P\left(\frac{10-\mu_{\overline{X}}}{\sigma_{\overline{X}}} \le \frac{\overline{X}-\mu_{\overline{X}}}{\sigma_{\overline{X}}} \le \frac{11.5-\mu_{\overline{X}}}{\sigma_{\overline{X}}}\right)$$
$$= P\left(\frac{10-10.5}{0.5692} \le \frac{\overline{X}-\mu_{\overline{X}}}{\sigma_{\overline{X}}} \le \frac{11.5-10.5}{0.5692}\right)$$
$$= P(-0.88 \le Z \le 1.76) = P(Z \le 1.76) - p(Z \le -0.88)$$
$$= P(Z \le 1.76) - 1 + p(Z \le 0.88) = 0.9608 - 1 + 0.8106$$
$$= 0.7714.$$

- في حالة المعاينة النفادية :

$$P(10 \le \overline{X} \le 11.5) = P\left(\frac{10-\mu_{\overline{X}}}{\sigma_{\overline{X}}} \le \frac{\overline{X}-\mu_{\overline{X}}}{\sigma_{\overline{X}}} \le \frac{11.5-\mu_{\overline{X}}}{\sigma_{\overline{X}}}\right)$$

$$= P\left(\frac{10-10.5}{0.5307} \le \frac{\overline{X}-\mu_{\overline{X}}}{\sigma_{\overline{X}}} \le \frac{11.5-10.5}{0.5307}\right) = P(-0.94 \le Z \le 1.88)$$
$$= P(Z \le 1.88) - p(Z \le -0.94) = P(Z \le 1.88) - 1 + p(Z \le 0.94)$$
$$= 0.9699 - 1 + 0.8264 = 0.7963.$$

❖ **توزيع المعاينة للمتوسط لما المجتمع لا يتبع توزيع طبيعي وحجم العينة ($n \ge 30$)**

نظرية 2: إذا كان المجتمع غير طبيعي متوسطه μ وتباينه σ^2 وسحبت منه عينة حجمها $(n \ge 30)$ فإن حسب نظرية النهاية المركزية $\overline{X}$ يتبع توزيع قريباً من التوزيع الطبيعي بحيث:

$$\overline{X} \xrightarrow[n \to +\infty]{asymptotically} N(\mu_{\overline{X}}, \sigma^2_{\overline{X}})$$

و بالتالي:

$$Z = \frac{\overline{X} - \mu_{\overline{X}}}{\sigma_{\overline{X}}} \xrightarrow[n \to +\infty]{asymptotically} N(0,1)$$

بحيث $\mu_{\overline{X}} = \mu$ و $\sigma_{\overline{X}}$ تحدد عباراتهما على حسب نوع السحب و المجتمع إذا كان محدود أم لا .

ملاحظة:

نظرية النهاية المركزية **Central Limit Theorem** تنص على أنه في حالة العينات الكبيرة الحجم فإن المتوسط الحسابي $\overline{X}$ يخضع للتوزيع قريباً من التوزيع الطبيعي.

مثال:

ليكن مجتمع إحصائي حجمه 1000 متوسطه 30 وانحرافه المعياري قدره 12. سحبت منه عينة عشوائية حجمها 40. أوجد توزيع المعاينة لمتوسط العينة وأحسب احتمال أن يكون متوسط العينة اقل من 35.

الحل:

- المجتمع حجمه $N = 1000$ ، متوسطه: $\mu = 30$ وإنحرافه المعياري : $\sigma = 12$
- عينة حجمها $n = 40$.

$\overline{X}$: المتغير العشوائي يمثل المتوسط في العينة.

1. تحديد توزيع المعاينة لمتوسط العينة:

حسب نظرية النهاية المركزية فإن توزيع المتغير العشوائي $\overline{X}$ هو توزيع يقارب التوزيع طبيعي لأن حجم العينة $n = 40 \geq 30$ والانحراف المعياري للمجتمع معلوم (اذن التباين معلوم أيضا). فالمتغيرة Z لها توزيع طبيعي معياري و نكتب :

$$Z = \frac{\overline{X} - \mu_{\overline{X}}}{\sigma_{\overline{X}}} \xrightarrow[n \to +\infty]{asymptotically} N(0,1)$$

بحيث:

$$\mu_{\overline{X}} = \mu = 30$$

وبما أن طريقة السحب لم تحدد هنا، فالتحديد الصيغة المستعملة في حساب التباين نقوم بحساب النسبة $\frac{n}{N}$:

$$\frac{n}{N} = \frac{40}{1000} = 0.04 \leq 0.05$$

و بالتالي نعتبر أن المعاينة غير نفادية أي أن السحب بالإرجاع، و منه:

$$\sigma_{\overline{X}}^2 = \frac{\sigma^2}{n} = \frac{(12)^2}{40} = 3.6 \quad \Rightarrow \sigma_{\overline{X}} = 1.897$$

2. حساب الاحتمال أن يكون متوسط العينة اقل من 35:

$$P(\overline{X} < 35) = P\left(\frac{\overline{X} - \mu_{\overline{X}}}{\sigma_{\overline{X}}} < \frac{35 - \mu_{\overline{X}}}{\sigma_{\overline{X}}}\right) = P\left(Z < \frac{35 - 30}{1.897}\right) = P\,(Z < 2.64) = 0.995$$

مثال:

إذا كان عدد حوادث المرور في أحد الطرقات السريعة يتبع توزيع بواسون بمتوسط حادثين يوميا. فما هو الاحتمال أن لا يتجاوز متوسط عدد الحوادث خلال 60 يوم ثلاثة حوادث؟

الحل:

X: متغير عشوائي يمثل عدد حوادث المرور في اليوم.

- المجتمع غير محدود ، يتبع التوزيع بواسون $X \to P(2)$ ، متوسطه: $\mu = 2$ ، تباينه: $\sigma^2 = 2$.
- عينة حجمها: يوم $n = 60$.

$\overline{X}$: المتغير العشوائي يمثل متوسط عدد الحوادث المرور في العينة.

حساب إحتمال أن لا يتجاوز متوسط عدد الحوادث في العينة ثلاثة حوادث:

$$P(\overline{X} \leq 3) = ?$$

قبل حساب الإحتمال $P(\overline{X} \leq 3)$ يجب تحديد توزيع $\overline{X}$.

أ. تحديد توزيع المعاينة لمتوسط العينة:

حسب نظرية النهاية المركزية، فإن توزيع المتغير العشوائي $\overline{X}$ هو توزيع يقارب التوزيع طبيعي، لأن حجم العينة $n = 60 \geq 30$ و تباين المجتمع معلوم. فالمتغيرة Z لها توزيع طبيعي معياري و نكتب :

$$Z = \frac{\overline{X} - \mu_{\overline{X}}}{\sigma_{\overline{X}}} \xrightarrow[n \to +\infty]{asymptotically} N(0,1)$$

بحيث:

$$\mu_{\overline{X}} = \mu = 2$$

وبما أن المجتمع غير محدود فإن:

$$\sigma_{\overline{X}}^2 = \frac{\sigma^2}{n} = \frac{2}{60} = 0.033 \quad \Rightarrow \sigma_{\overline{X}} = 0.183$$

ب. حساب الاحتمال $P(\overline{X} \leq 3)$:

$$P(\overline{X} \leq 3) = P\left(\frac{\overline{X} - \mu_{\overline{X}}}{\sigma_{\overline{X}}} \leq \frac{3 - \mu_{\overline{X}}}{\sigma_{\overline{X}}}\right) = P\left(Z \leq \frac{3-2}{0.183}\right) = P(Z \leq 5.46)$$
$$= 0.99999921$$

❖ **توزيع المعاينة للمتوسط لما يكون المجتمع طبيعي و تباينه σ^2 مجهول وحجم العينة ($n \geq 30$).**

نظرية 3: إذا كان المجتمع طبيعي متوسطه μ و تباينه σ^2 مجهول وسحبت منه عينة حجمها أكبر أو يساوي **30** ($n \geq 30$)، فإنه يتم تعويض الانحراف المعياري للمجتمع σ المجهول بالانحراف المعياري للعينة S و يكون توزيع المعاينة للمتوسط $\overline{X}$ هو التوزيع طبيعي أيضاً بحيث:

$$\overline{X} \to N(\mu_{\overline{X}}, \sigma^2_{\overline{X}})$$

و

$$\mu_{\overline{X}} = \mu \quad , \quad \sigma^2_{\overline{X}} = \frac{S^2}{n-1}$$

إذن

$$\overline{X} \to N\left(\mu, \frac{S^2}{n-1}\right)$$

مع

$$S^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \overline{X})^2$$

ملاحظة:

إذا كان المجتمع الذي سحبت منه العينة غير طبيعي متوسطه μ و تباينه σ^2 مجهول، ولكن كان حجم العينة ($n \geq 30$)، فإن حسب نظرية النهاية المركزية $\overline{X}$ يتبع توزيع قريباً من التوزيع الطبيعي. بحيث:

$$\overline{X} \to N(\mu_{\overline{X}}, \sigma^2_{\overline{X}}) \Leftrightarrow \overline{X} \to N\left(\mu, \frac{S^2}{n-1}\right)$$

مثال:

من مجتمع إحصائي يتبع التوزيع الطبيعي بمتوسط $\mu = 30$. سحبت عينة حجمه **50** وتباينها **16**.

1. ما هو توزيع المعاينة للمتوسط العينة ؟

2. أحسب احتمال $P(\overline{X} > 32)$.

الحل:

- المجتمع يتبع التوزيع الطبيعي، متوسطه: $\mu = 30$ وتباينه: σ^2 **مجهول.**
- سحبت عينة حجمها $n = 50$ و تباينها $S^2 = 16$ إذن $S = 4$

$\overline{X}$: المتغير العشوائي يمثل متوسط الحسابي للعينة.

1. **تحديد توزيع المعاينة لمتوسط العينة:**

بما أن المجتمع طبيعي و تباينه σ^2 مجهول وسحبت منه عينة حجمها $n = 50 \geq 30$ ، فإنه يتم تعويض الانحراف المعياري للمجتمع σ المجهول بالانحراف المعياري للعينة S و يكون توزيع المعاينة للمتوسط $\overline{X}$ هو التوزيع طبيعي أيضاً بحيث:

$$\overline{X} \to N(\mu_{\overline{X}}, \sigma^2_{\overline{X}})$$

بحيث:

$$\mu_{\overline{X}} = \mu = 30$$

$$\sigma^2_{\overline{X}} = \frac{S^2}{n-1} = \frac{16}{50-1} = 0.326 \Rightarrow \sigma_{\overline{X}} = 0.571$$

2. **حساب الاحتمال أن يكون متوسط العينة أكبر من 32:**

$$P(\overline{X} > 32) = P\left(\frac{\overline{X} - \mu_{\overline{X}}}{\sigma_{\overline{X}}} < \frac{32 - \mu_{\overline{X}}}{\sigma_{\overline{X}}}\right) = P\left(Z > \frac{32-30}{0.571}\right) = P(Z > 3.50)$$
$$= 1 - P(Z < 3.50) = 1 - 0.9998 = 0.0002.$$

❖ **توزيع المعاينة للمتوسط لما يكون المجتمع يتبع توزيع طبيعي وتباينه σ^2 مجهول وحجم العينة $(n < 30)$.**

نظرية 4: إذا كان المجتمع طبيعي متوسطه μ و تباينه σ^2 مجهول وسحبت منه عينة حجمها أقل من 30 $(n < 30)$، فإنه يتم تعويض الانحراف المعياري للمجتمع σ المجهولة بالانحراف المعياري للعينة S و يكون توزيع المعاينة للإحصاءة T التوزيع الستيودنت بدرجة حرية $(n-1)$ بحيث:

$$T = \frac{\overline{X} - \mu}{S/\sqrt{n-1}} \to t(n-1)$$

مع

$$S^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \overline{X})^2$$

مثال:

لدى مصنع لإنتاج أكياس السميد، تخضع أوزان الأكياس السميد لتوزيع الطبيعي بمتوسط 10 كغ. أخذنا عينة حجمها 20 كيس من إنتاج هذا المصنع، فوجد أن إنحرافها المعياري 1كغ. أوجد الإحتمال أن يزيد متوسط أوزان الأكياس السميد في العينة على 10.2 كغ.

الحل:

X: متغير عشوائي يمثل أوزان أكياس السميد.

- المجتمع غير محدود ، يتبع التوزيع الطبيعي، متوسطه: كغ $\boldsymbol{\mu = 10}$ ، تباينه: $\boldsymbol{\sigma^2}$ **مجهول**.
- سحبت عينة حجمها $\boldsymbol{n = 20}$ وإنحرافها المعياري كغ $\boldsymbol{S = 1}$

$\boldsymbol{\overline{X}}$: المتغير العشوائي يمثل متوسط أوزان أكياس السميد في العينة.

حساب إحتمال أن يزيد متوسط أوزان أكياس السميد في العينةعلى $\boldsymbol{10.2}$ كغ:

$$\boldsymbol{P}(\overline{\boldsymbol{X}} > 10.2) = ?$$

قبل حساب الإحتمال $\boldsymbol{P}(\overline{\boldsymbol{X}} > 10.2)$ يجب تحديد توزيع $\boldsymbol{\overline{X}}$.

أ. تحديد توزيع المعاينة لمتوسط العينة:

بما أن المجتمع طبيعي و تباينه $\boldsymbol{\sigma^2}$ مجهول وسحبت منه عينة حجمها $\boldsymbol{n = 20 < 30}$ ، فإنه يتم تعويض الانحراف المعياري للمجتمع $\boldsymbol{\sigma}$ المجهولة بالانحراف المعياري للعينة $\boldsymbol{S}$ و يكون توزيع المعاينة للإحصاءة $\boldsymbol{T}$ التوزيع الستيودنت بدرجة حرية $\boldsymbol{(n-1)}$ بحيث:

$$\boldsymbol{T = \frac{\overline{X} - \mu}{S/\sqrt{n-1}} \rightarrow t(n-1)}$$

ب. حساب الاحتمال $\boldsymbol{P}(\overline{\boldsymbol{X}} > 10.2)$:

درجة الحرية: $\boldsymbol{n - 1 = 20 - 1 = 19}$

$$\boldsymbol{P}(\overline{\boldsymbol{X}} > 10.2) = \boldsymbol{P}\left(\frac{\overline{X} - \mu}{S/\sqrt{n-1}} > \frac{10.2 - \mu}{S/\sqrt{n-1}}\right) = \boldsymbol{P}\left(T > \frac{10.2 - 10}{1/\sqrt{20-1}}\right) = \boldsymbol{P}(T > 0.872)$$
$$= 1 - \boldsymbol{P}(T < 0.872) = 1 - 0.85 = 0.15$$

نلاحظ أن في جدول توزيع ستيودنت عند درجة الحرية 19 أن القيمة 0.871 غير موجودة ، ولكن محصورة ما بين 0.861 و 1.33 و للحصول على الإحتمال المقابل للقيمة 0.871، نأخد القيمة المتوسطة لاحتمالين اللذين يقابلان القيمتين. أي:

$$\frac{0.80 + 0.90}{2} = 0.85$$

و منه: $P\,(T < 0.871) = 0.85.$

3.2. توزيع المعاينة للفرق بين متوسطي عينتين:

The sampling distribution of comparing two means

عند السحب لعينتين عشوائيتين مستقلتين حجمهما n_1 و n_2 على التوالي، من مجتمعين (غير محدودين) متوسطهما الحسابي μ_1 و μ_2 وتباينهما σ_1^2 و σ_2^2 على التوالي. فإذا كان $\bar{X}_1$ و $\bar{X}_2$ يمثلان المتوسط الحسابي للعينتين على التوالي، فإن توزيع المعاينة للفرق بين متوسطيهما $(\bar{X}_1 - \bar{X}_2)$:

❖ **في حالة معلومية تباين مجتمعين طبيعيين (σ_1^2 و σ_2^2 معلومين)**

بما أن المجتمعين طبيعيين فإن توزيع المعاينة للفرق بين متوسطين $(\bar{X}_1 - \bar{X}_2)$ يتبع التوزيع الطبيعي، بحيث حسب **النظرية 1** فإن:

$$\bar{X}_1 \rightarrow N\left(\mu_1, \frac{\sigma_1^2}{n_1}\right)$$
$$\bar{X}_2 \rightarrow N\left(\mu_2, \frac{\sigma_2^2}{n_2}\right)$$

وبماأن العينتين مستقلتين، إذن:

$$\bar{X}_1 - \bar{X}_2 \rightarrow N\left(\mu_1 - \mu_2, \frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}\right)$$

$$\Rightarrow \quad Z = \frac{(\bar{X}_1 - \bar{X}_2) - (\mu_1 - \mu_2)}{\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}}} \quad \rightarrow \quad N(0,1)$$

ملاحظة: الإحصاءة Z يمكن إستعمالها أيضا في حالة **مجتمعين غير طبيعيين أو مجهولي التوزيع** تباينهما σ_1^2 و σ_2^2 **معلومين** وحجم العينتين $n_1, n_2 \geq 30$ و ذلك بتطبيق **نظرية 2** إستنادا إلى **نظرية النهاية المركزية.**

❖ **في حالة مجهولية تباين المجتمعين الطبيعيين (σ_1^2 و σ_2^2) و حجم العينتين $n_1, n_2 \geq 30$.**

يتم تعويض تباين المجتمع الأول σ_1^2 المجهول بالتباين العينة الأولى S_1^2 ويتم تعويض تباين المجتمع الثاني σ_2^2 المجهول بالتباين العينة الثانية S_2^2، ويكون توزيع المعاينة للفرق بين متوسطين $(\bar{X}_1 - \bar{X}_2)$ يتبع التوزيع الطبيعي، بحيث حسب **النظرية 3** لدينا:

$$\bar{X}_1 \rightarrow N\left(\mu_1, \frac{S_1^2}{n_1 - 1}\right)$$
$$\bar{X}_2 \rightarrow N\left(\mu_2, \frac{S_2^2}{n_2 - 1}\right)$$

وبما أن العينتين مستقلتين، إذن:[1]

$$\bar{X}_1 - \bar{X}_2 \rightarrow N\left(\mu_1 - \mu_2, \frac{S_1^2}{n_1 - 1} + \frac{S_2^2}{n_2 - 1}\right)$$

$$\Rightarrow \quad Z = \frac{(\bar{X}_1 - \bar{X}_2) - (\mu_1 - \mu_2)}{\sqrt{\frac{S_1^2}{n_1 - 1} + \frac{S_2^2}{n_2 - 1}}} \quad \rightarrow \quad N(0, 1)$$

<u>ملاحظة</u>: الإحصاءة Z يمكن إستعمالها أيضا في حالة **مجتمعين غير طبيعيين أو مجهولي التوزيع** تباينهما σ_1^2 و σ_2^2 **مجهولين** وحجم العينتين $n_1, n_2 \geq 30$ و ذلك بتطبيق **نظرية 3** إستنادا إلى **نظرية النهاية المركزية.**

❖ **في حالة مجهولية تباين المجتمعين الطبيعيين (σ_1^2 و σ_2^2) وحجم العينتين $n_1 < 30$ أو $n_2 < 30$**

هنا نميز حالتين:

- إذا كان $\sigma_1^2 = \sigma_2^2 = \sigma^2$ تباين المجتمعين الطبيعيين متساويين فإن في هذه الحالة نعوض σ^2 بتباين المشترك المرجح S_P^2 ويكون توزيع المعاينة للفرق بين متوسطين $(\bar{X}_1 - \bar{X}_2)$ يتبع التوزيع الستيودنت بدرجة الحرية $(n_1 + n_2 - 2)$:[2][3][4]

$$T = \frac{(\bar{X}_1 - \bar{X}_2) - (\mu_1 - \mu_2)}{\sqrt{\frac{S_p^2}{n_1} + \frac{S_p^2}{n_2}}} \quad \rightarrow \quad t(n_1 + n_2 - 2)$$

[1] Rousson, V., Statistique appliquée aux sciences de la vie, Collection Statistique et probabilités appliquées, Springer, 2013. page 71.
[2] Saporta, G., Probabilités, analyse des données et statistique, Edition, Technip, 2006. page 343.
[3] Protassov, K., Analyse statistique des données expérimentales, Collection Grenoble Sciences, EDP Sciences, 2002. page 97.
[4] Rousson, V., page 72.

حيث:

$$S_p^2 = \frac{n_1 S_1^2 + n_2 S_2^2}{n_1 + n_2 - 2}$$

<u>ملاحظة</u>: الإحصاءة T ستيودنت تستعمل إلا في حالة توفر شرطين أساسيين هما أن يكون المجتمعين كلاهما طبيعيين و تباينهما متساويين و مجهولين و هذا بغض النظر عن حجمي العينتين أن يكونا كبيرين أو صغيرين.

- إذا كان $\sigma_1^2 \neq \sigma_2^2$ تباين المجتمعين مختلفين فإن في هذه الحالة نعوض تباين المجتمع الأول σ_1^2 المجهول بالتباين العينة الأولى S_1^2 ونعوض تباين المجتمع الثاني σ_2^2 المجهول بالتباين للعينة الثانية S_2^2، ويكون توزيع المعاينة للفرق بين متوسطين $(\overline{X}_1 - \overline{X}_2)$ يتبع التوزيع الستيودنت بدرجة الحرية (v):[5]

$$T = \frac{(\overline{X}_1 - \overline{X}_2) - (\mu_1 - \mu_2)}{\sqrt{\frac{S_1^2}{n_1 - 1} + \frac{S_2^2}{n_2 - 1}}} \rightarrow t(v)$$

بحيث

$$v = \frac{\left(\frac{S_1^2}{n_1 - 1} + \frac{S_2^2}{n_2 - 1}\right)^2}{\left(\frac{S_1^2}{n_1 - 1}\right)^2 + \left(\frac{S_2^2}{n_2 - 1}\right)^2}$$

<u>ملاحظة</u>: هذه الإحصاءة T ستيودنت يمكن إستعمالها في حالة المجتمعين غير طبيعيين عند تساوي أو إختلاف التباينها لكن إلا إذا كانتا العينتين كبيرتين في الحجم $n_1, n_2 \geq 30$. أما إذا كنا في حالة المجتمعين طبيعيين فيمكن إستعمال هذه الإحصاءة في حالة تساوي او إختلاف تباييني المجتمعين وهذا بغض النظر عن حجم العينتين (كبيرتين أو صغيرتين).

[5] Rousson, V., (cité précédemment) page 73.

مثال:

إذا كانت أجور العمال لفئة معينة في القطاع العام تخضع إلى التوزيع الطبيعي بمتوسط 23000 دج وبانحراف معياري 3200 دج، أما أجور العمال لنفس الفئة في القطاع الخاص فإنها تتبع كذلك التوزيع الطبيعي بمتوسط 21000 دج وانحراف معياري 1500دج. أخذنا عينتين عشوائيتين من العمال لهذه الفئة لكلا القطعين على التوالي، فكان حجم العينة الأولى 49 عامل أما حجم العينة الثانية 64 عامل.

1. ماهو احتمال أن يزيد متوسط أجر العمال في العينة للقطاع العام بـ 3000 دج عن متوسط أجر العمال في العينة للقطاع الخاص؟

2. نفس السؤال الأول، إذا إفترضنا أن تباين المجتمعين مجهولين وأنه تم حساب الإنحراف المعياري لكل عينة بحيث وجد أندج $S_1 = 2800$ في العينة الأولى للقطاع العام و وجد أن دج $S_2 = 1800$ في العينة الثانية للقطاع الخاص.

3. نفس السؤال الأول، إذا إفترضنا أن تباين المجتمعين مجهولين ومتساويين وأنه تم سحب عينة الاولى حجمها $\boldsymbol{n_1 = 25}$ من القطاع العام فوجد أندج $S_1 = 2800$ وتم سحب عينة الثانية حجمها $\boldsymbol{n_2 = 20}$ من القطاع الخاص فوجد أن دج $S_2 = 1800$.

4. نفس السؤال الثالث، إذا إفترضنا أن تباين المجتمعين مجهولين وغير متساويين.

الحل:

$\boldsymbol{X_1}$: متغير عشوائي يمثل أجور العمال في القطاع العام.

$\boldsymbol{X_2}$: متغير عشوائي يمثل أجور العمال في القطاع الخاص.

- **المجتمع 1 : غير محدود، يتبع التوزيع الطبيعي،** $\boldsymbol{\mu_1 = 23000}$ ، $\boldsymbol{\sigma_1 = 3200}$ ، $\boldsymbol{n_1 = 49}$
- **المجتمع 2 : غير محدود، يتبع التوزيع الطبيعي،** $\boldsymbol{\mu_2 = 21000}$ ، $\boldsymbol{\sigma_2 = 1500}$ ، $\boldsymbol{n_2 = 64}$

$\overline{\boldsymbol{X}}_1$: المتغير العشوائي يمثل متوسط الأجور في العينة 1.

$\overline{\boldsymbol{X}}_2$: المتغير العشوائي يمثل متوسط الأجور في العينة 2.

1. حساب إحتمال أن يزيد متوسط أجر العمال في العينة للقطاع العام بـ 3000 دج عن متوسط أجر العمال في العينة للقطاع الخاص:

$\boldsymbol{P(\overline{X}_1 - \overline{X}_2 \geq 3000)} = ?$

- تحديد توزيع المعابنة $\overline{X}_1 - \overline{X}_2$:

بما أن المجتمعين طبيعيين فإن توزيع المعاينة للفرق بين متوسطين $(\overline{X}_1 - \overline{X}_2)$ يتبع التوزيع الطبيعي، بحيث:

$$\overline{X}_1 \rightarrow N\left(\mu_1, \frac{\sigma_1^2}{n_1}\right)$$

$$\overline{X}_2 \rightarrow N\left(\mu_2, \frac{\sigma_2^2}{n_2}\right)$$

- وبما أن العينتين مستقلتين، إذن:

$$\overline{X}_1 - \overline{X}_2 \rightarrow N\left(\mu_1 - \mu_2, \frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}\right)$$

إذن

$$P(\overline{X}_1 - \overline{X}_2 \geq 3000) = P\left(\frac{(\overline{X}_1 - \overline{X}_2) - (\mu_1 - \mu_2)}{\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}}} \geq \frac{3000 - (\mu_1 - \mu_2)}{\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}}}\right)$$

$$= P\left(Z \geq \frac{3000 - (23000 - 21000)}{\sqrt{\frac{(3200)^2}{49} + \frac{(1500)^2}{64}}}\right) = P(Z \geq 2.02)$$

$$= 1 - P(Z \leq 2.02) = 1 - 0.9783 = 0.0217.$$

2. إذا إفترضنا أن تباين المجتمعين مجهولين و أنه تم حساب الإنحراف المعياري لكل عينة بحيث وجد أن دج $S_1 = 2800$ في العينة الأولى للقطاع العام وجد أن دج $S_2 = 1800$ في العينة الثانية للقطاع الخاص. حساب :

$P(\overline{X}_1 - \overline{X}_2 \geq 3000) = ?$

تحديد توزيع المعابنة $\overline{X}_1 - \overline{X}_2$:

بما أن تباين المجتمعيين σ_1^2 و σ_2^2 مجهولين و حجم العينتين $n_2 = 64 \geq 30, n_1 = 49 \geq 30$ فإنه سوف يتم تعويض تباين المجتمع الأول σ_1^2 بالتباين العينة الأولى S_1^2 ويتم تعويض تباين المجتمع الثاني σ_2^2 بالتباين العينة الثانية S_2^2، ويكون توزيع المعاينة للفرق بين متوسطين $(\overline{X}_1 - \overline{X}_2)$ يتبع التوزيع الطبيعي و ذلك بتطبيق نظرية النهاية المركزية، بحيث حسب **النظرية 3** لدينا:

$$\overline{X}_1 \rightarrow N\left(\mu_1, \frac{S_1^2}{n_1 - 1}\right)$$

$$\overline{X}_2 \rightarrow N\left(\mu_2, \frac{S_2^2}{n_2 - 1}\right)$$

وبما أن العينتين مستقلتين، إذن:

$$\bar{X}_1 - \bar{X}_2 \rightarrow N\left(\mu_1 - \mu_2, \frac{S_1^2}{n_1 - 1} + \frac{S_2^2}{n_2 - 1}\right)$$

إذن:

$$P(\bar{X}_1 - \bar{X}_2 \geq 3000) = P\left(\frac{(\bar{X}_1 - \bar{X}_2) - (\mu_1 - \mu_2)}{\sqrt{\frac{S_1^2}{n_1 - 1} + \frac{S_2^2}{n_2 - 1}}} \geq \frac{3000 - (\mu_1 - \mu_2)}{\sqrt{\frac{S_1^2}{n_1 - 1} + \frac{S_2^2}{n_2 - 1}}}\right)$$

$$= P\left(Z \geq \frac{3000 - (23000 - 21000)}{\sqrt{\frac{(2800)^2}{49 - 1} + \frac{(1800)^2}{64 - 1}}}\right) = P(Z \geq 2.16)$$

$$= 1 - P(Z \leq 2.16) = 1 - 0.9846 = 0.0154.$$

3. نفس السؤال الأول، إذا إفترضنا أن تباين المجتمعين مجهولين و متساويين وأنه تم سحب عينة الاولى حجمها $n_1 = 25$ من القطاع العام فوجد أندج $S_1 = 2800$ وتم سحب عينة الثانية حجمها $n_2 = 20$ من القطاع الخاص فوجد أن دج $S_2 = 1800$. حساب:

$P(\bar{X}_1 - \bar{X}_2 \geq 3000)$ =?

- تحديد توزيع المعابنة $\bar{X}_1 - \bar{X}_2$:

بما أن تباين المجتمعيين الطبيعيين σ_1^2 و σ_2^2 مجهولين و متساويين $(\sigma_1^2 = \sigma_2^2 = \sigma^2)$ وحجم العينتين $n_1 = 25 \leq 30, n_2 = 20 \leq 30$ فإنه سوف يتم تعويض σ^2 بتباين المشترك المرجح S_P^2 ويكون توزيع المعاينة للفرق بين متوسطين $(\bar{X}_1 - \bar{X}_2)$ يتبع التوزيع الستيودنت بدرجة الحرية $(n_1 + n_2 - 2)$:

$$T = \frac{(\bar{X}_1 - \bar{X}_2) - (\mu_1 - \mu_2)}{\sqrt{\frac{S_p^2}{n_1} + \frac{S_p^2}{n_2}}} \quad \rightarrow \quad t(n_1 + n_2 - 2)$$

حيث:

$$S_p^2 = \frac{n_1 S_1^2 + n_2 S_2^2}{n_1 + n_2 - 2} = \frac{25 \cdot (2800)^2 + 20 \cdot (1800)^2}{25 + 20 - 2} = 6065116,28$$

درجة الحرية:

$$(n_1 + n_2 - 2) = 25 + 20 - 2 = 43$$

إذن:

$$P(\bar{X}_1 - \bar{X}_2 \geq 3000) = P\left(\frac{(\bar{X}_1 - \bar{X}_2) - (\mu_1 - \mu_2)}{\sqrt{\frac{S_p^2}{n_1} + \frac{S_p^2}{n_2}}} \geq \frac{3000 - (\mu_1 - \mu_2)}{\sqrt{\frac{S_p^2}{n_1} + \frac{S_p^2}{n_2}}}\right)$$

$$= P\left(T \geq \frac{3000 - (23000 - 21000)}{\sqrt{\frac{6065116.28}{25} + \frac{6065116.28}{20}}}\right) = P(T \geq 1.353)$$

$$= 1 - P(T \leq 1.353) = 1 - 0.925 = 0.075.$$

بحيث:

$$P(T \leq 1.353) = \frac{0.90 + 0.95}{2} = 0.925.$$

4. نفس السؤال الثالث، إذا إفترضنا أن تباين المجتمعين مجهولين وغير متساويين.

- تحديد توزيع المعاينة $\bar{X}_1 - \bar{X}_2$:

بما أن تباين المجتمعيين الطبيعيين σ_1^2 و σ_2^2 مجهولين وغير متساويين $(\sigma_1^2 \neq \sigma_2^2)$ وحجم العينتين $n_1 = 25 \leq 30, n_2 = 20 \leq 30$ فإنه سوف يتم تعويض تباين المجتمع الأول σ_1^2 بالتباين العينة الأولى S_1^2 ويتم تعويض تباين المجتمع الثاني σ_2^2 بالتباين العينة الثانية S_2^2، ويكون توزيع المعاينة للفرق بين متوسطين $(\bar{X}_1 - \bar{X}_2)$ يتبع التوزيع الستيودنت بدرجة الحرية (v):

$$T = \frac{(\bar{X}_1 - \bar{X}_2) - (\mu_1 - \mu_2)}{\sqrt{\frac{S_1^2}{n_1 - 1} + \frac{S_2^2}{n_2 - 1}}} \rightarrow t(v)$$

بحيث

$$v = \frac{\left(\frac{S_1^2}{n_1 - 1} + \frac{S_2^2}{n_2 - 1}\right)^2}{\left(\frac{S_1^2}{n_1 - 1}\right)^2 + \left(\frac{S_2^2}{n_2 - 1}\right)^2} = \frac{\left(\frac{(2800)^2}{25 - 1} + \frac{(1800)^2}{20 - 1}\right)^2}{\left(\frac{(2800)^2}{25 - 1}\right)^2 + \left(\frac{(1800)^2}{20 - 1}\right)^2} = 1.82 \approx 2$$

و منه: $v = 2$ ، إذن:

$$P(\bar{X}_1 - \bar{X}_2 \geq 3000) = P\left(\frac{(\bar{X}_1 - \bar{X}_2) - (\mu_1 - \mu_2)}{\sqrt{\frac{S_1^2}{n_1 - 1} + \frac{S_2^2}{n_2 - 1}}} \geq \frac{3000 - (\mu_1 - \mu_2)}{\sqrt{\frac{S_1^2}{n_1 - 1} + \frac{S_2^2}{n_2 - 1}}}\right)$$

$$= P\left(T \geq \frac{3000 - (23000 - 21000)}{\sqrt{\frac{(2800)^2}{25 - 1} + \frac{(1800)^2}{20 - 1}}}\right) = P(T \geq 1.42)$$

$$= 1 - P(T \leq 1.42) = 1 - 0.85 = 0.15$$

بحيث:

$$P(T \leq 1.42) = \frac{0.8 + 0.9}{2} = 0.85.$$

4.2. توزيع المعاينة للنسبة:

The sampling distribution of a proportion

ليكن مجتمع إحصائي ما حجمه N، ولتكن p نسبة الأفراد الذين يحملون صفة معينة مراد دراستها في هذا المجتمع، و نسبة q نسبة باقي أفراد المجتمع الذين لا يحملون هذه صفة بحيث $(q = 1 - p)$. إذا تم سحب عينة حجمها n من هذا المجتمع، فإن p' تمثل نسبة الأفراد في العينة الذي يحملون الصفة المراد دراستها. وإذا أخدنا بعين الإعتبار كل العينات التي حجمها n الممكن سحبها من هذا المجتمع، فإن p' هو المتغير العشوائي الذي يمثل نسبة الأفراد في العينة الحاملين لصفة المراد دراستها، يخضع لتوزيع معين متوسطه $\mu_{P'}$ وتباينه $\sigma_{P'}^2$ بحيث :

- متوسط توزيع المعاينة للنسبة p' :

$$\mu_{P'} = p$$

- والتباين توزيع المعاينة للنسبة p' :

- في حالة السحب بالإرجاع أو حالة المجتمع غير محدود :

$$\sigma^2_{p'} = \frac{p\,q}{n}$$

و منه يكون الانحراف المعياري للنسبة p' :

$$\sigma_{p'} = \sqrt{\frac{p\,q}{n}}$$

- أما في حالة السحب بدون إرجاع فإن:

$$\sigma^2_{p'} = \frac{p\,q}{n}\left(\frac{N-n}{N-1}\right)$$

و منه يكون الانحراف المعياري **للنسبة** p' :

$$\sigma_{p'} = \sqrt{\frac{p\,q}{n}}\sqrt{\frac{N-n}{N-1}}$$

بحيث $\left(\frac{N-n}{N-1}\right)$ يمثل معامل التصحيح (أو معامل الإرجاع).

مثال:

في شركة ما، يفترض أن 15 % من البطاقات الذكية التي تنتجها هذه الشركة تالفة. أخذ عينة بحجم 200 بطاقة من إنتاجها. ماهو الإحتمال أن تكون نسبة البطاقات الذكية التالفة في هذه العينة أقل من 10 % ؟

الحل:

p : تمثل نسبة البطاقات الذكية التالفة في المجتمع الإحصائي.

p' : تمثل نسبة البطاقات الذكية التالفة في العينة.

$$p = 0.15 \;\Rightarrow\; q = 1 - p = 1 - 0.15 = 0.85$$

تحديد توزيع المعاينة للنسبة p' :

حسب نظرية النهاية المركزية فإن توزيع المتغير العشوائي p' هو توزيع يقارب التوزيع طبيعي لان حجم العينة $n = 200 \geq 30$ و بالتالي :

$$p' \rightarrow N(\mu_{p'}, \sigma^2_{p'})$$

$$Z = \frac{p' - \mu_{p'}}{\sigma_{p'}} \xrightarrow[n \to +\infty]{asymptotically} N(0,1)$$

بحيث:

$$\mu_{p'} = p = 0.15$$

و بما أن المجتمع غير محدود فإننا نعتبر السحب بالإرجاع أي أن المعاينة غير نفادية:

$$\sigma^2_{p'} = \frac{pq}{n} = \frac{0.15 \times 0.85}{200} = 0.00064 \;\Rightarrow \sigma_{p'} = 0.025$$

إذن :

$$\mathbf{p'} \rightarrow \mathbf{N(0.15, (0.025)^2)}$$

حساب إحتمال أن تكون نسبة البطاقات الذكية التالفة في هذه العينة أقل من 10 % :

$$\mathbf{P}(p' < 0.1) = \mathbf{P}\left(\frac{p' - \mu_{p'}}{\sigma_{p'}} < \frac{0.1 - \mu_{p'}}{\sigma_{p'}}\right) = \mathbf{P}\left(Z < \frac{0.1 - 0.15}{0.025}\right) = \mathbf{P}(Z < -2)$$
$$= 1 - \mathbf{P}(Z < 2) = 1 - 0.9772 = 0.0228.$$

5.2. توزيع المعاينة للفرق بين نسبتي عينتين:

إذا كان لدينا مجتمعين و أردنا دراسة خاصية مشتركة فيهما، بحيث p_1 ، p_2 تمثلان نسبة الأفراد الذين يحملون خاصية مراد دراستها في المجتمع الأول و في المجتمع الثاني على التوالي. إذا سحبت عينتين عشوائيتين مستقلتين و كبيرتين حجمهما n_1 و n_2 من المجتمعين المستقلين الأول والثاني على التوالي، إذا كان p'_1 و p'_2 تمثلان نسبة الأفراد الذي يحملون الخاصية المراد دراستها في العينة الاولى و العينة الثانية على التوالي.

فإن توزيع المعاينة للفرق بين النسبتين $(p'_1 - p'_2)$ يتبع التوزيع الطبيعي إذا كانت العينتين كبيرتين في حجم أي أن $n_1 \geq 30$ و $n_2 \geq 30$ و ذلك بحسب نظرية النهاية المركزية. بحيث:

$$p'_1 \rightarrow N\left(\mu_{p'_1}, \sigma^2_{p'_1}\right)$$

$$p'_2 \rightarrow N\left(\mu_{p'_2}, \sigma^2_{p'_2}\right)$$

وبما أن العينتين مستقلتين، إذن:

$$p'_1 - p'_2 \rightarrow N\left(\mu_{p'_1} - \mu_{p'_2}, \sigma^2_{p'_1} + \sigma^2_{p'_2}\right)$$

مثال :

في مدرسة ما، إذا كانت نسبة النجاح الطلبة السنة الثانية في تخصص الأول هي 85 % و كانت نسبة النجاح الطلبة السنة الثانية في تخصص الثاني هي 78%. فإذا تم سحب عينتين عشوائيتين حجمها على التوالي 100 طالب من الطلبة السنة الثانية في تخصص الأول و 90 طالب من الطلبة السنة الثانية في تخصص الثاني. أوجد احتمال أن تزيد نسبة النجاح الطلبة في التخصص الأول عن نسبة النجاح الطلبة في التخصص 2 بمقدار 10 % على الأكثر.

الحل:

p_1 : تمثل نسبة النجاح الطلبة السنة الثانية في تخصص الأول في المجتمع الإحصائي الأول .

p_2: تمثل نسبة النجاح الطلبة السنة الثانية في تخصص الثاني في المجتمع الإحصائي الثاني.

p'_1 : تمثل نسبة النجاح الطلبة السنة الثانية في تخصص الأول في العينة الأولى .

p'_2: تمثل نسبة النجاح الطلبة السنة الثانية في تخصص الثاني في العينة الثانية .

$n_1 = 100$ ، $n_2 = 90$ حجم العينتين على التوالي.

$p_1 = 0.85,\ q_1 = 0.15, p_2 = 0.78,\ q_2 = 0.22.$

احتمال أن تزيد نسبة النجاح الطلبة في التخصص الأول عن نسبة النجاح الطلبة في التخصص2 بمقدار 10 % على الأكثر :

$P(p'_1 - p'_2 \leq 0.1) = ?$

تحديد توزيع المعاينة للفرق $p'_1 - p'_2$:

حسب نظرية النهاية المركزية فإن توزيع المتغيرين العشوائيين p'_1 و p'_2 هو توزيع يقارب التوزيع طبيعي لان حجم العينتين على التوالي $n_1 = 100 \geq 30$ ، $n_2 = 90 \geq 30$ و بما أن المجتمعين غير محدودين فإن:

$$p'_1 \to N\left(\mu_{p'_1}, \sigma^2_{p'_1}\right) \Rightarrow p'_1 \to N\left(p_1, \frac{p_1 q_1}{n_1}\right)$$

$$p'_2 \to N\left(\mu_{p'_2}, \sigma^2_{p'_2}\right) \Rightarrow p'_2 \to N\left(p_2, \frac{p_2 q_2}{n_2}\right)$$

وبما أن العينتين مستقلتين، إذن :

$$p'_1 - p'_2 \to N\left(p_1 - p_2, \frac{p_1 q_1}{n_1} + \frac{p_2 q_2}{n_2}\right)$$

حساب إحتمال $P(p'_1 - p'_2 \leq 0.1)$:

$$P(p'_1 - p'_2 \leq 0.1)$$

$$= \mathrm{P}\left(\frac{(p'_1 - p'_2) - (p_1 - p_2)}{\sqrt{\frac{p_1 q_1}{n_1} + \frac{p_2 q_2}{n_2}}} \leq \frac{0.1 - (p_1 - p_2)}{\sqrt{\frac{p_1 q_1}{n_1} + \frac{p_2 q_2}{n_2}}} \right)$$

$$= \mathrm{P}\left(Z \leq \frac{0.1 - (0.85 - 0.78)}{\sqrt{\frac{0.85 \,.\, 0.15}{100} + \frac{0.78 \,.\, 0.22}{90}}} \right) = \mathrm{P}(Z < 0.53) = 0.7019.$$

6.2. توزيع المعاينة لتباين: The sampling distribution of a variance

عند سحب عينة عشوائية ذات حجم n من مجتمع إحصائي حجمه N متوسطه μ وتباينه σ^2، وقمنا بحساب تباين S^2 لهذه العينة، فسوف نجده مختلف تماما عن باقي التباينات للعينات الأخرى الممكن سحبها من هذا المجتمع. و بالتالي يمكننا إعتبار S^2 متغيرا عشوائيا يمثل تباين العينة، يخضع لتوزيع معين، متوسطه μ_{S^2} وتباينه $\sigma^2_{S^2}$ بحيث :

$$S^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \bar{X})^2$$

❖ **التوقع الرياضي لتباين العينة**

- في حالة المجتمع غير محدود أو السحب بإرجاع:

$$\mu_{S^2} = \left(\frac{n-1}{n}\right)\sigma^2$$

- في حالة المجتمع المحدود و السحب بدون إرجاع:

$$\mu_{S^2} = \left(\frac{n-1}{n}\right)\left(\frac{N}{N-1}\right)\sigma^2$$

برهان:

لدينا:

$$X_i - \mu = X_i - \bar{X} + \bar{X} - \mu \Leftrightarrow (X_i - \mu)^2 = \left((X_i - \bar{X}) + (\bar{X} - \mu)\right)^2$$

$$\Leftrightarrow (X_i - \mu)^2 = (X_i - \bar{X})^2 + (\bar{X} - \mu)^2 - 2(X_i - \bar{X})(\bar{X} - \mu)$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\mu)^2=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\bar{X})^2+\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(\bar{X}-\mu)^2-\frac{2}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\bar{X})(\bar{X}-\mu)$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\mu)^2=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\bar{X})^2+\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(\bar{X}-\mu)^2-\frac{2}{n}(\bar{X}-\mu)\sum_{i=1}^{n}(X_i-\bar{X})$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\mu)^2=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\bar{X})^2+\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(\bar{X}-\mu)^2-\frac{2}{n}(\bar{X}-\mu)\left(\sum_{i=1}^{n}X_i-\sum_{i=1}^{n}\bar{X}\right)$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\mu)^2=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\bar{X})^2+\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(\bar{X}-\mu)^2-\frac{2}{n}(\bar{X}-\mu)(n\bar{X}-n\bar{X})$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\mu)^2=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\bar{X})^2+\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(\bar{X}-\mu)^2-0$$

و بالتالي

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\bar{X})^2=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\mu)^2-\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(\bar{X}-\mu)^2$$

إذن:

$$\begin{aligned}\mu_{S^2}=E(S^2)&=E\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\bar{X})^2\right)=E\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\mu)^2-\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(\bar{X}-\mu)^2\right)\\&=E\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\mu)^2\right)-E\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(\bar{X}-\mu)^2\right)\\&=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}E(X_i-\mu)^2-\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}E(\bar{X}-\mu)^2=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}V(X_i)-\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}V(\bar{X})\\&=V(X)-V(\bar{X})\end{aligned}$$

$$\Rightarrow \quad \mu_{S^2}=V(X)-V(\bar{X})$$

بالتالي :

- إذا كان المجتمع غير محدود أو السحب بالإرجاع:

$$\mu_{S^2}=V(X)-V(\bar{X})=\sigma^2-\frac{\sigma^2}{n}=\frac{(n-1)}{n}\sigma^2$$

$$\Rightarrow \quad \mu_{S^2}=\left(\frac{n-1}{n}\right)\sigma^2$$

- إذا كان المجتمع بدون إرجاع:

$$\mu_{S^2} = V(X) - V(\bar{X}) = \sigma^2 - \left(\frac{N-n}{N-1}\right)\frac{\sigma^2}{n} = \frac{n(N-1)\sigma^2 - (N-n)\sigma^2}{n(N-1)}$$
$$= \frac{n\,N\,\sigma^2 - n\,\sigma^2 - N\sigma^2 + n\sigma^2}{n(N-1)} = \frac{nN\sigma^2 - N\sigma^2}{n(N-1)} = \frac{(n-1)N\sigma^2}{n(N-1)}$$
$$= \left(\frac{n-1}{n}\right)\left(\frac{N}{N-1}\right)\sigma^2$$

$$\Rightarrow \quad \mu_{S^2} = \left(\frac{n-1}{n}\right)\left(\frac{N}{N-1}\right)\sigma^2$$

❖ **التباين لتباين العينة**

$$\sigma^2_{S^2} = V(S^2) = \frac{(n-1)}{n^3}[(n-1)\mu_4 - (n-3)\,\sigma^4]$$

بحيث μ_4 هو العزم الرابع المعرف ب

$$\mu_4 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \mu)^4$$

❖ إذا كان المجتمع غير محدود وسحبت منه عينة حجمها $n \geq 30$، فحسب نظرية النهاية المركزية فإن توزيع المعاينة لتباين S^2 يتبع توزيع قريب من التوزيع الطبيعي:

$$S^2 \xrightarrow[n \to +\infty]{asymptotically} N(\mu_{S^2}, \sigma^2_{S^2})$$

بحيث بما أن $n \geq 30$:

$$\mu_{S^2} = \left(\frac{n-1}{n}\right)\sigma^2 \xrightarrow[n\to+\infty]{} \mu_{S^2} = \sigma^2$$

$$\sigma^2_{S^2} = \frac{(n-1)}{n^3}[(n-1)\mu_4 - (n-3)\,\sigma^4] \xrightarrow[n\to+\infty]{} \sigma^2_{S^2} = \frac{\mu_4 - \sigma^4}{n}$$

و بالتالي فإن:

$$S^2 \to N\left(\sigma^2, \frac{\mu_4 - \sigma^4}{n}\right)$$

❖وإذا كان المجتمع الإحصائي غير محدود ويتبع التوزيع الطبيعي وسحبت منه عينة حجمها $\boldsymbol{n}$، فإن توزيع المعاينة لتباين $\boldsymbol{S^2}$ يتبع التوزيع الطبيعي:

$$\boldsymbol{S^2 \rightarrow N(\mu_{S^2}, \sigma^2_{S^2})}$$

و يكون في حالة التوزيع الطبيعي $\boldsymbol{\mu_4 = 3\,\sigma^4}$ ، إذن:

$$\boldsymbol{\mu_{S^2} = \sigma^2}$$

$$\boldsymbol{\sigma^2_{S^2} = \frac{(n-1)}{n^3}[(n-1)\mu_4 - (n-3)\,\sigma^4] = \frac{(n-1)}{n^3}[(n-1)\,3\,\sigma^4 - (n-3)\,\sigma^4]}$$

$$\boldsymbol{= \frac{2(n-1)\sigma^4}{n^2}}$$

و بالتالي فإن

$$\boldsymbol{S^2 \rightarrow N\left(\sigma^2, \frac{2(n-1)\sigma^4}{n^2}\right)}$$

❖وإذا كان المجتمع الإحصائي غير محدود ويتبع التوزيع الطبيعي $\boldsymbol{(\mu_4 = 3\,\sigma^4)}$ وسحبت منه عينة حجمها n يفوق 30 وكبير جدا $\left(\frac{n-1}{n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1\right)$، فإن توزيع المعاينة لتباين S^2 يتبع التوزيع الطبيعي مع:

$$\boldsymbol{\mu_{S^2} = \sigma^2}$$

$$\boldsymbol{\sigma^2_{S^2} = \frac{2\sigma^4}{n}}$$

و بالتالي فإن

$$\boldsymbol{S^2 \rightarrow N\left(\sigma^2, \frac{2\sigma^4}{n}\right)}$$

❖ عند سحب عينة عشوائية ذات حجم $\boldsymbol{n}$ من مجتمع إحصائي طبيعي حجمه $\boldsymbol{N}$ متوسطه $\boldsymbol{\mu}$ وتباينه $\boldsymbol{\sigma^2}$، إذا كان $\boldsymbol{S^2}$ تباين العينة فإن المتغير العشوائي $\frac{n\,S^2}{\sigma^2}$ يخضع إلى التوزيع كاي مربع بدرجة الحرية $\boldsymbol{(n-1)}$:

$$\boldsymbol{\frac{n\,S^2}{\sigma^2} = \frac{\sum_{i=1}^{n}(X_i - \bar{X})^2}{\sigma^2} \rightarrow \chi^2_{n-1}}$$

ملاحظة:

إن المتغير العشوائي S^2 يعتبر مقدر متحيز لتباين σ^2 بحيث في حالة المجتمعات الكبيرة أو غير محدود لدينا:

$$\mu_{S^2} = E(S^2) = \left(\frac{n-1}{n}\right)\sigma^2$$

وبالتالي فإن المتغيرالعشوائي $\widehat{S}^2$ المعرف ب: $\widehat{S}^2 = \left(\frac{n}{n-1}\right)S^2$ *هو يعتبر المقدر غير متحيز لتباين* σ^2 و بالتالي هو المقدر الجيد لتقدير قيمة σ^2 ، بحيث: $\mu_{\widehat{S}^2} = E(\widehat{S}^2) = \sigma^2$.

إذ أن:

$$\widehat{S}^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=}^{n}(X_i - \overline{X})^2$$

و المتغير العشوائي $\frac{(n-1)\,\widehat{S}^2}{\sigma^2}$ يخضع إلى التوزيع كاي مربع بدرجة الحرية $(n-1)$:

$$\frac{(n-1)\,\widehat{S}^2}{\sigma^2} \rightarrow \chi^2_{n-1}$$

مثال:

في مصنع لإنتاج المصابح، يتبع عمر المصابيح توزيع الطبيعي بمتوسط 1600 ساعة وإنحراف معياري يقدر ب 200 ساعة. إذا سحبت عينة حجمها 100 مصباح. ما هو متوسط و تباين توزيع المعاينة لتباين؟ و ماهو إحتمال أن يكون تباين العينة أقل من 100؟

الحل:

- المجتمع غير محدود، يتبع التوزيع الطبيعي، متوسطه: $\mu = 1600$ ،إنحرافه المعياري $\sigma = 10$.
- سحبت عينة حجمها $n = 100$.

S^2 :المتغير العشوائي يمثل تباين العينة.

- **إيجاد μ_{S^2} و $\sigma^2_{S^2}$:**

بما أن توزيع المجتمع هو التوزيع الطبيعي، و كذلك بمأأن حجم العينة هو 100 كبير جدا، فإن :

$$\mu_{S^2} = \sigma^2 = (10)^2 = 100$$

$$\sigma^2_{S^2} = \frac{2\sigma^4}{n} = \frac{2\,(10)^4}{100} = 20$$

- حساب إحتمال أن يكون تباين العينة أقل من 100:

بما أن المجتمع طبيعي فإن الإحصائية :

$$\frac{n\,S^2}{\sigma^2} = \frac{\sum_{i=1}^{n}(X_i - \overline{X})^2}{\sigma^2} \rightarrow \chi^2_{n-1}$$

بحيث $(n-1)$ درجة الحرية.

$$P(S^2 < 100) = P\left(\frac{n\,S^2}{\sigma^2} < \frac{n\,100}{\sigma^2}\right) = P\left(\chi^2_{100-1} < \frac{100\,.\,100}{(10)^2}\right) = P\left(\chi^2_{99} < 100\right)$$
$$= 0.625$$

إذ أن:

$$P\left(\chi^2_{99} < 100\right) = \frac{0.5 + 0.75}{2} = 0.625$$

7.2. توزيع المعاينة للنسبة بين تبايني العينتين:

من مجتمعين طبيعيين مستقلين تباينهما σ_1^2 و σ_2^2 على التوالي، سحبت منهما عينتين عشوائيتين مستقلتين حجمهما n_1 و n_2 على التوالي، فوجد أن تبايني العينتين S_1^2 و S_2^2 على التوالي. فإن توزيع المعاينة للنسبة بين تبايني العينتين S_1^2 و S_2^2 يتبع التوزيع فيشر بدرجة الحرية $(n_2 - 1, n_1 - 1)$، بحيث:

$$\left(\frac{n_1\,S_1^2}{\sigma_1^2}\right) \rightarrow \chi^2_{n_1-1}$$

$$\left(\frac{n_2\,S_2^2}{\sigma_2^2}\right) \rightarrow \chi^2_{n_2-1}$$

وبالتالي:

$$F = \frac{\left(\frac{n_1\,S_1^2}{\sigma_1^2}\right)}{\frac{n_1 - 1}{\left(\frac{n_2\,S_2^2}{\sigma_2^2}\right)}} = \frac{\frac{n_1}{n_1 - 1}\frac{S_1^2}{\sigma_1^2}}{\frac{n_2}{n_2 - 1}\frac{S_2^2}{\sigma_2^2}} = \frac{\frac{\hat{S}_1^2}{\sigma_1^2}}{\frac{\hat{S}_2^2}{\sigma_2^2}} = \frac{\hat{S}_1^2}{\hat{S}_2^2}\,.\,\frac{\sigma_2^2}{\sigma_1^2} \rightarrow F(n_2 - 1, n_1 - 1)$$

مثال:

تم سحب عينتين عشوائيتين مستقلتين حجمهما على التوالي $n_1 = 13$ و $n_2 = 21$ من مجتمعين طبيعيين مستقلين تباينهما هو على التوالي $\sigma_1^2 = 9$ و $\sigma_2^2 = 25$. أحسب الإحتمال أن تكون النسبة بين تباييني العينتين S_1^2 و S_2^2 أقل من 0.8.

الحل:

- المجتمع الاول الطبيعي وغير محدود، تباينه $\sigma_1^2 = 9$ سحبت منه عينة حجمها $n_1 = 13$.
- المجتمع الثاني الطبيعي وغير محدود، تباينه $\sigma_2^2 = 25$ سحبت منه عينة حجمها $n_2 = 21$.

حساب الاحتمال أن تكون النسبة بين تباييني العينتين S_1^2 و S_2^2 أقل من 0.8:

إن توزيع المعاينة للنسبة بين تباييني العينتين S_1^2 وS_2^2 يتبع التوزيع فيشر بدرجة الحرية $(n_1 - 1, n_2 - 1)$:

$$\left(\frac{n_1 S_1^2}{\sigma_1^2}\right) \rightarrow \chi^2_{n_1-1}$$

$$\left(\frac{n_2 S_2^2}{\sigma_2^2}\right) \rightarrow \chi^2_{n_2-1}$$

$$\Rightarrow \quad F = \frac{\frac{\left(\frac{n_1 S_1^2}{\sigma_1^2}\right)}{n_1 - 1}}{\frac{\left(\frac{n_2 S_2^2}{\sigma_2^2}\right)}{n_2 - 1}} = \frac{\frac{n_1}{(n_1-1)}\frac{S_1^2}{\sigma_1^2}}{\frac{n_2}{(n_2-1)}\frac{S_2^2}{\sigma_2^2}} \rightarrow F(n_1 - 1, n_2 - 1)$$

لدينا:

$$P\left(\frac{S_1^2}{S_2^2} < 0.8\right) = P\left(\frac{\frac{n_1}{(n_1-1)\sigma_1^2}S_1^2}{\frac{n_2}{(n_2-1)\sigma_2^2}S_2^2} < \frac{\frac{n_1}{(n_1-1)\sigma_1^2}}{\frac{n_2}{(n_2-1)\sigma_2^2}}.0.8\right)$$

$$= P\left(F_{(n_1-1, n_2-1)} < \frac{\frac{n_1}{(n_1-1)\sigma_1^2}}{\frac{n_2}{(n_2-1)\sigma_2^2}}.0.8\right)$$

$$= P\left(F_{(13-1,\ 21-1)} < \frac{\frac{13}{(13-1)9}}{\frac{21}{(21-1)25}}.0.8\right) = P\left(F_{(12,\ 20)} < \frac{0.12}{0.042}.0.8\right)$$

$$= P\left(F_{(12,\ 20)} < 2.293\right) = 0.951$$

$$\Rightarrow P\left(\frac{S_1^2}{S_2^2} < 0.8\right) = 0.951.$$

الفصل الثالث: التقديرات و مجالات الثقة

The Estimation and Confidence Interval

تمهيد:

عند القيام بدراسة إحصائية ما لظاهرة معينة، غالبا ما تكون معالم المجتمع الإحصائي المدروس مجهولة، وهذا ما يدفعنا إلى إستخدام أحد أساليب الإحصاء الإستدلالي وهو التقدير، والذي يتمثل في إعطاء قيم تقريبية لمعالم مجهولة لمجتمع إحصائي ما $\left(\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\sigma^2}, \dots \text{إلخ}\right)$ وذلك استنادا إلى معطيات عينة سحبت منه عشوائيا، والتي يتم من خلالها حساب المقدر للمعلمة المطلوبة.

1. عموميات

1.1. المقدر: Estimator

هو إحصاءة من العينة، تستخدم لتقدير معلمة المجتمع مجهولة. مثل: الإحصاءة $\overline{\boldsymbol{X}}$ التي تمثل متوسط العينة تعتبر المقدر لمتوسط المجتمع $\boldsymbol{\mu}$. بحيث، إذا كان لدينا مجتمع إحصائي $\boldsymbol{X}$ المكون من $\boldsymbol{N}$ مفردة والذي يتبع توزيع معين ذو معلمة $\boldsymbol{\theta}$ **مجهولة**، وسحبت منه عينة حجمها $\boldsymbol{n}$ مكونة من المفردات $(\boldsymbol{X_1, X_2, \dots, X_n})$ ذات المشاهدات $\{\boldsymbol{x_1, x_2, \dots, x_n}\}$، فإن:

المقدر $\boldsymbol{T}$ للمعلمة $\boldsymbol{\theta}$ هو متغير عشوائي بدلالة $(\boldsymbol{X_i, i = 1, .., n})$. و تكتب الإحصاءة $\boldsymbol{T}$ *على شكل*:

$$\boldsymbol{T = f(X_1, X_2, \dots, X_n)}$$

ومن خلال مشاهدات العينة $\{\boldsymbol{x_1, x_2, \dots, x_n}\}$ فإن المقدر $\boldsymbol{T}$ سوف يعطي تقدير $\widehat{\boldsymbol{\theta}}$ للمعلمة $\boldsymbol{\theta}$:

$$\widehat{\boldsymbol{\theta}} = \boldsymbol{f(x_1, x_2, \dots, x_n)}$$

2.1. التقدير: Estimation

يقصد بالتقدير $\widehat{\boldsymbol{\theta}}$ القيمة العددية التي نحصل عليها من المقدر $\boldsymbol{T}$ وذلك بإستخدام مشاهدات العينة $\{\boldsymbol{x_1, x_2, \dots, x_n}\}$، ويتم ذلك إما بالتقدير النقطي أو التقدير بمجالات الثقة.

3.1. خواص المقدر:

يجب على المقدر T للمعلمة θ أن يتميز ببعض الخصائص كي يعتبر مقدر جيد لهذه المعلمة. وتتمثل هذه الخصائص في:

- **المقدر غير المتحيز :** **An Unbiased Estimator**

يعتبر المقدر T مقدرا غير متحيز للمعلمة θ، إذا كان توقع الرياضي للمقدر T مساوي للمعلمة θ بحيث :

$$E(T) = \theta \Rightarrow E(T) - \theta = 0$$

ملاحظة:

إذا كان المقدر T مقدر متحيز، فإن المقدار $[E(T) - \theta]$ هو قيمة تحيز هذا المقدر.

- **المقدر غير متحيز تقاربيًا:** **Asymptotically Unbiased Estimator**

يعتبر المقدر T مقدرا غير متحيز تقاربيا للمعلمة θ ، إذا كان :

$$\lim_{n \to +\infty} E(T) = \theta$$

- **المقدر المتقارب (المتسق):** **Convergent Estimator**

يكون المقدر T مقدرا متقارب للمعلمة θ، إذا كان المقدر T يؤول نحو قيمة θ كلما إزداد حجم العينة n *أي*:

$$T \xrightarrow[n \to +\infty]{} \theta$$

إذا كان:

$$\lim_{n \to +\infty} E(T) = \theta \quad \text{و} \quad \lim_{n \to +\infty} V(T) = 0.$$

- **المقدر الكفء:** **Efficient Estimator**

إذا كان هناك مقدران متسقان وغير متحيزين T_1 و T_2 ، فإن المقدر الأكثر كفاءة هو الذي لديه أدنى تباين، وبالتالي نعتبر أن T_1 أكثر كفاءة من T_2 إذا كان:

$$V(T_1) \leq V(T_2)$$

2. التقدير النقطي: Punctual Estimation

يعرف التقدير النقطي على أنه يتم تقدير معلمة المجتمع المجهولة بنقطة واحدة فقط، أي بقيمة واحدة لإحصاءة المقابلة لها في العينة. وذلك بإستعمال إحدى الطرق التقدير النقطي، من بينها يوجد:

- **طريقة العزوم :** The Moments Method

إن طريقة العزوم هي أداة تقدير بديهية تعود إلى بداية الإحصاء. هذه الطريقة تتمثل في تقدير معلمات المجتمع من خلال مساواة عزوم المجتمع بعزوم العينة، مما يؤدي إلى الحصول على جملة معادلات التي يتوجب حلها لإستخراج مقدرات المعلمات المجتمع المجهولة.

- **طريقة الجوازية العظمى:** The Maximum Likelihood Method

مقدر الجوازية العظمى هو مقدر إحصائي يستخدم لاستنتاج معلمات التوزيع الاحتمالي لعينة معينة، من خلال إيجاد قيم المعلمات التي تعظم من دالة الجوازية. بحيث تعرف هذه الأخيرة على أنها دالة كثافة إحتمالية المشتركة لمتغيرات مستقلة للعينة $(X_1, X_2, \dots, X_n)$ سحبت من مجتمع إحصائي له توزيع إحتمالي بدلالة المعلمة θ .

1.2. التقدير النقطي لمتوسط المجتمع :

ليكن لدينا مجتمع إحصائي X المكون من N مفردة والذي يتبع توزيع معين بمتوسط μ مجهول وتباين σ^2. سحبت منه عينة حجمها n مكونة من المفردات $(X_1, X_2, \dots, X_n)$ ذات المشاهدات $\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$، فوجد أن متوسط هذه المشاهدات $\overline{x}$ و تباينها S^2. بحيث:

$$\overline{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i$$

$$S^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \overline{x})^2$$

المقدر النقطي لمتوسط المجتمع μ هو متوسط العينة $\bar{X}$. بحيث الإحصاءة $\bar{X}$ هي مقدر غير متحيز للمعلمة μ ، بحيث:

$$\bar{X} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$$

إذ أن:

$$E(\bar{X}) = E\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i\right) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} E(X_i) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \mu = \frac{1}{n}\, n\mu = \mu$$

ومن خلال مشاهدات العينة $\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ فإن المقدر $\bar{X}$ سوف يعطي التقدير النقطي $\hat{\mu} = \bar{x}$ للمعلمة μ . ويتميز المقدر $\bar{X}$ بالتباين $V(\bar{X})$:

- في حالة السحب بالإرجاع أو المجتمع غير محدود :

$$V(\bar{X}) = \frac{\sigma^2}{n}$$

- في حالة السحب بدون إرجاع :

$$V(\bar{X}) = \frac{\sigma^2}{n}\left(\frac{N-n}{N-1}\right)$$

2.2. <u>التقدير النقطي لتباين المجتمع</u> :

لنعتبر أن المقدر النقطي لتباين المجتمع σ^2 هو تباين العينة S^2. بحيث:

- **إذا كان المجتمع غير محدود أو السحب بالإرجاع، لدينا (تطرقنا إليه في الفصل الثاني):**

$$E(S^2) = \left(\frac{n-1}{n}\right)\sigma^2$$

لكن بما أن $E(S^2) \neq \sigma^2$ فإن S^2 هو مقدر نقطي متحيز، ويكون بالتالي المقدر $\left(\frac{n}{n-1}S^2\right)$ هو المقدر غير متحيز، بحيث :

$$E\left(\frac{n}{n-1}S^2\right) = \frac{n}{n-1}E(S^2) = \frac{n}{n-1}\left(\frac{n-1}{n}\right)\sigma^2 = \sigma^2$$

إذن:

$$\widehat{S}^2 = \frac{n}{n-1}S^2 = \frac{n}{n-1}\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\overline{X})^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\overline{X})^2$$

و بالتالي في حالة السحب بإرجاع أو حالة المجتمع غير محدود فإن $\widehat{S}^2$ هو المقدر النقطي غير متحيز لتباين المجتمع σ^2 .

- **أما إذا كان المجتمع بدون إرجاع، فإن:**

$$E(S^2) = \left(\frac{n-1}{n}\right)\left(\frac{N}{N-1}\right)\sigma^2$$

لكن بما أن $E(S^2) \neq \sigma^2$ إذن فإن في هذه الحالة S^2 هو مقدر نقطي متحيز ل σ^2، ويكون بالتالي المقدر $\left(\left(\frac{n}{n-1}\right)\left(\frac{N-1}{N}\right)S^2\right)$ هو المقدر غير متحيز، بحيث :

$$E\left(\left(\frac{n}{n-1}\right)\left(\frac{N-1}{N}\right)S^2\right) = \left(\frac{n}{n-1}\right)\left(\frac{N-1}{N}\right)E(S^2)$$
$$= \left(\frac{n}{n-1}\right)\left(\frac{N-1}{N}\right)\left(\frac{n-1}{n}\right)\left(\frac{N}{N-1}\right)\sigma^2 = \sigma^2$$

نضع:

$$\tilde{S}^2 = \left(\frac{n}{n-1}\right)\left(\frac{N-1}{N}\right)S^2 = \left(\frac{n}{n-1}\right)\left(\frac{N-1}{N}\right)\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\overline{X})^2$$
$$= \left(\frac{N-1}{N}\right)\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\overline{X})^2 = \left(\frac{N-1}{N}\right)\widehat{S}^2$$
$$\Leftrightarrow \tilde{S}^2 = \left(\frac{n}{n-1}\right)\left(\frac{N-1}{N}\right)S^2 = \left(\frac{N-1}{N}\right)\widehat{S}^2$$

وبالتالي في حالة السحب بدون إرجاع فإن $\tilde{S}^2$ هو المقدر النقطي غير متحيز لتباين المجتمع σ^2 .

إذن من خلال مشاهدات العينة $\{ x_1, x_2, \dots, x_n \}$ فإن:

- **في حالة المعاينة غير النفاذية أو المجتمع غير محدود،** المقدر النقطي $\widehat{S}^2$ سوف يعطي تقدير النقطي $\widehat{\sigma}^2$ للمعلمة σ^2، إذ:[1]

$$\widehat{\sigma}^2 = \widehat{S}^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \overline{x})^2 = \left(\frac{n}{n-1}\right) S^2$$

- **وفي حالة المعاينة النفاذية،** المقدر النقطي $\tilde{S}^2$ سوف يعطي تقدير النقطي $\widehat{\sigma}^2$ للمعلمة σ^2، إذ:

$$\widehat{\sigma}^2 = \tilde{S}^2 = \left(\frac{N-1}{N}\right)\widehat{S}^2 = \left(\frac{N-1}{N}\right)\left(\frac{n}{n-1}\right) S^2$$

مثال:

في مصنع لإنتاج قطع الغيار نقوم بدراسة اطوال هذه القطع من خلال سحب عينة عشوائية من أصل 200 قطعة بحيث تحصلنا على النتائج التالية (بالمليمتر mm): 432- 435- 438- 440 - 435 - 436.

- قدر نقطيا متوسط وتباين المجتمع في حالة المعاينة النفادية والمعاينة غير نفاذية.

الحل :

لدينا مجتمع إحصائي لقطع الغيار حجمه $N = 200$ متوسطه μ مجهول و تباينه σ^2 مجهول أيضا.

سحبت منه عينة $n = 6$ مكونة من أطوال قطع الغيار (mm).

- إيجاد تقدير نقطي لمتوسط وتباين المجتمع في حالة المعاينة النفادية و المعاينة غير نفاذية:

أ. حساب المتوسط العينة $\overline{x}$ و تباينها S^2. بحيث:

$$\overline{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i = \frac{1}{6}\,[432 + 435 + 438 + 440 + 435 + 436] = 436$$

$$S^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \overline{x})^2 = \left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i^2\right) - \overline{x}^2$$

$$= \frac{1}{6}\,[432^2 + 435^2 + 438^2 + 440^2 + 435^2 + 436^2] - (436)^2 = 6.33$$

1 Saporta, G., (cité précédemment) page 310.

ب. إيجاد تقدير نقطي لمتوسط وتباين المجتمع:

ليكن $\widehat{\boldsymbol{\mu}}$ و $\widehat{\boldsymbol{\sigma}}^{\boldsymbol{2}}$ التقديرات النقطية على التوالي للمعلمة المجتمع $\boldsymbol{\mu}$ و $\boldsymbol{\sigma}^{\boldsymbol{2}}$.

- **في حالة المعاينة غير النفاذية :**

$$\widehat{\boldsymbol{\mu}} = \overline{\boldsymbol{x}} = \mathbf{436}$$

$$\widehat{\boldsymbol{\sigma}}^{\boldsymbol{2}} = \widehat{\boldsymbol{S}}^{\boldsymbol{2}} = \left(\frac{\boldsymbol{n}}{\boldsymbol{n-1}}\right)\boldsymbol{S}^{\boldsymbol{2}} = \left(\frac{\mathbf{6}}{\mathbf{6-1}}\right)\mathbf{6.33} = \mathbf{7.596}$$

- **وفي حالة المعاينة النفاذية:**

$$\widehat{\boldsymbol{\mu}} = \overline{\boldsymbol{x}} = \mathbf{436}$$

$$\widehat{\boldsymbol{\sigma}}^{\boldsymbol{2}} = \widetilde{\boldsymbol{S}}^{\boldsymbol{2}} = \left(\frac{\boldsymbol{N-1}}{\boldsymbol{N}}\right)\left(\frac{\boldsymbol{n}}{\boldsymbol{n-1}}\right)\boldsymbol{S}^{\boldsymbol{2}} = \left(\frac{\mathbf{200-1}}{\mathbf{200}}\right)\left(\frac{\mathbf{6}}{\mathbf{6-1}}\right)\mathbf{6.33} = \mathbf{7.558}.$$

3.2. التقدير النقطي لنسبة المجتمع :

ليكن مجتمع إحصائي ما حجمه $\boldsymbol{N}$، ولتكن $\boldsymbol{p}$ نسبة الأفراد الذين يحملون صفة معينة مراد دراستها في هذا المجتمع ولتكن مجهولة. ونسبة $\boldsymbol{q}$ نسبة باقي أفراد المجتمع الذين لا يحملون هذه صفة بحيث $(\boldsymbol{q = 1 - p})$.
وإذا تم سحب عينة حجمها $\mathbf{n}$ من هذا المجتمع، فإن $\boldsymbol{p'}$ تمثل نسبة الأفراد في العينة الذي يحملون الصفة المراد دراستها.

المقدر النقطي لنسبة المجتمع $\boldsymbol{p}$ المجهولة هو متوسط العينة $\boldsymbol{p'}$. بحيث الإحصاءة $\boldsymbol{p'}$ هي مقدر نقطي غير متحيز للمعلمة $\boldsymbol{p}$ ،إذ أن:

$$\boldsymbol{E(p') = p}$$

ومن خلال مشاهدات العينة $\{\boldsymbol{x_1, x_2, \dots, x_n}\}$ فإن المقدر $\boldsymbol{p'}$ سوف يعطي تقدير النقطي $\widehat{\boldsymbol{p}} = \boldsymbol{p'}$ للمعلمة المجتمع $\boldsymbol{p}$. ويتميز المقدر النقطي $\boldsymbol{p'}$ بالتباين $\boldsymbol{V(p')}$ [2]:

- في حالة المعاينة غير النفاذية أو المجتمع غير محدود :

$$\boldsymbol{V(p') = \frac{p\,q}{n}}$$

- أما في حالة المعاينة النفاذية:

$$\boldsymbol{V(p') = \frac{p\,q}{n}\left(\frac{N-n}{N-1}\right)}$$

2 Même auteur, page 310.

مثال:

في شركة لإنتاج البطاقات الذكية. أخذ عينة بحجم 200 بطاقة من إنتاجها، فوجد من بينها 20 بطاقة تالفة. فماهي نسبة البطاقات الذكية التالفة في هذه الشركة ؟.

الحل:

نقوم بحساب نسبة البطاقات الذكية التالفة في العينة، و التي نرمز لها ب p'، بحيث :

$$p' = \frac{20}{200} = 0.1$$

ولدينا الإحصاءة p' تمثل المقدر النقطي للنسبة P في المجتمع، إذ أن التقدير النقطي $\widehat{P}$ لنسبة البطاقات الذكية التالفة في هذه الشركة، هي:

$$\widehat{P} = p' = 0.1$$

ومنه نسبة البطاقات الذكية التالفة في هذه الشركة أي في المجتمع الإحصائي هو :10 %.

3. التقدير بمجالات الثقة : Estimation by a Confidence Interval

إن التقديرات النقطية لا تقدم معلومات عن دقة النتائج، بحيث لا تأخذ بعين الاعتبار الأخطاء الناتجة عن تغيير العينات. ولتقييم الثقة التي يمكن الحصول عليها في قيمة ما مقدرة، من الضروري تحديد مجال يحتوي، مع احتمال معين محدد مسبقًا، على القيمة الحقيقية للمعلمة المقدرة، هذا هو التقدير بمجالات الثقة.

1.3. تعريف مجال الثقة:

ليكن $\alpha \in]0,1[$ ، نقول أن المجال $I_C = [a,b]$، المحدد بإستعمال بيانات العينة المسحوبة، مجالا لثقة للمعلمة المجهولة θ عند درجة الثقة $(1-\alpha)$، **إذا:**

$$P(\theta \in I_C) = 1 - \alpha$$

بحيث:

- $I_C = [a,b]$: هو **مجال الثقة.**
- a : **الحد الأدنى للمجال الثقة.**
- b : **الحد الأعلى للمجال الثقة.**

- α : هي درجة الخطأ، و التي تأخذ عادة القيم: 1%، 2%، 5%، 10% ، 20% .
- $(1-\alpha)$: هي درجة الثقة.

2.3. تقدير مجال الثقة لمتوسط المجتمع:

ليكن لدينا مجتمع إحصائي X المكون من N مفردة والذي يتبع توزيع معين بمتوسط μ مجهول وتباين σ^2، سحبت منه عينة حجمها n مكونة من المفردات $(X_1, X_2, \dots, X_n)$ ذات المشاهدات $\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$، فوجد أن متوسط هذه المشاهدات $\bar{x}$ و تباينها S^2.

ويتوجب علينا هنا تحديد المجال الثقة $I_C = [a, b]$ المتضمن القيمة الحقيقية للمتوسط μ عند درجة الثقة $(1-\alpha)$ أي تحديد قيم b و a، مع العلم أن المقدر النقطي لمتوسط المجتمع μ هو متوسط العينة $\bar{X}$. فإذا كان:

❖ **المجتمع يتبع التوزيع الطبيعي وتباينه σ^2 معلوم :**

إذا كانت العينة مسحوبة من مجتمع طبيعي تباينه معلوم فإن:

$$X \to N(\mu, \sigma^2) \Rightarrow \bar{X} \to N(\mu_{\bar{X}}, \sigma^2_{\bar{X}})$$

بحيث $\mu_{\bar{X}} = \mu$ و عبارة $\sigma^2_{\bar{X}}$ تحدد على أساس النفادية وإذا كان المجتمع محدود أم لا. وبالتالي:

$$Z = \frac{\bar{X} - \mu}{\sigma_{\bar{X}}} \to N(0, 1)$$

و يتم تحديد مجال الثقة للمتوسط μ كالأتي :

$$P(\mu \in I_C = [a, b]) = 1 - \alpha$$
$$\Leftrightarrow P(a \le \mu \le b) = 1 - \alpha$$
$$\Leftrightarrow P(-b \le -\mu \le -a) = 1 - \alpha$$
$$\Leftrightarrow P\left(\frac{\bar{X} - b}{\sigma_{\bar{X}}} \le \frac{\bar{X} - \mu}{\sigma_{\bar{X}}} \le \frac{\bar{X} - a}{\sigma_{\bar{X}}}\right) = 1 - \alpha$$
$$\Leftrightarrow P\left(\frac{\bar{X} - b}{\sigma_{\bar{X}}} \le Z \le \frac{\bar{X} - a}{\sigma_{\bar{X}}}\right) = 1 - \alpha$$

وبما أن التوزيع الطبيعي هو توزيع متناظر إذن سوف نضع: $z = \frac{\bar{X}-a}{\sigma_{\bar{X}}}$ و $-z = \frac{\bar{X}-b}{\sigma_{\bar{X}}}$ فنتحصل على:

$$P(-z \le Z \le z) = 1-\alpha \Leftrightarrow P(Z \le z) - P(Z \le -z) = 1-\alpha$$

$$\Leftrightarrow P(Z \le z) - [1 - P(Z \le z)] = 1-\alpha \Leftrightarrow 2\,P(Z \le z) - 1 = 1-\alpha$$

$$\Leftrightarrow 2\,P(Z \le z) = 2-\alpha \quad \Leftrightarrow \quad P(Z \le z) = \frac{2-\alpha}{2} = 1 - \frac{\alpha}{2} \Rightarrow z = z_{\left(1-\frac{\alpha}{2}\right)}$$

بحيث قيمة $z_{\left(1-\frac{\alpha}{2}\right)}$ تستخرج من الجدول التوزيع الطبيعي، إذن :

$$\begin{cases} \dfrac{\overline{X}-a}{\sigma_{\overline{X}}} = z_{\left(1-\frac{\alpha}{2}\right)} \Rightarrow a = \overline{X} - z_{\left(1-\frac{\alpha}{2}\right)}\,\sigma_{\overline{X}} \\ \dfrac{\overline{X}-b}{\sigma_{\overline{X}}} = -z_{\left(1-\frac{\alpha}{2}\right)} \Rightarrow b = \overline{X} + z_{\left(1-\frac{\alpha}{2}\right)}\,\sigma_{\overline{X}} \end{cases}$$

إذن مجال الثقة للمتوسط μ هو:

$$I_C = \left[\overline{X} - z_{\left(1-\frac{\alpha}{2}\right)}\,\sigma_{\overline{X}}\,;\ \overline{X} + z_{\left(1-\frac{\alpha}{2}\right)}\,\sigma_{\overline{X}}\right]_{(1-\alpha)}$$

وخطأ التقدير هو :

$$e = z_{\left(1-\frac{\alpha}{2}\right)}\,\sigma_{\overline{X}}$$

- **في حالة المعاينة غير نفادية أو المجتمع غير محدود فإن:**

مجال الثقة للمتوسط μ هو:

$$I_C = \left[\overline{X} - z_{\left(1-\frac{\alpha}{2}\right)}\ \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\ ;\ \overline{X} + z_{\left(1-\frac{\alpha}{2}\right)}\ \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right]_{(1-\alpha)}$$

و خطأ التقدير هو :

$$e = z_{\left(1-\frac{\alpha}{2}\right)}\ \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

- **وفي حالة المعاينة النفادية فإن :**

مجال الثقة للمتوسط μ هو:

$$I_C = \left[\overline{X} - z_{\left(1-\frac{\alpha}{2}\right)}\ \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\sqrt{\frac{N-n}{N-1}};\ \overline{X} + z_{\left(1-\frac{\alpha}{2}\right)}\ \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\ \sqrt{\frac{N-n}{N-1}}\right]_{(1-\alpha)}$$

وخطأ التقدير هو :

$$e = z_{\left(1-\frac{\alpha}{2}\right)} \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \sqrt{\frac{N-n}{N-1}}$$

ملاحظة: إذا كان المجتمع الذي سحبت منه العينة غير طبيعي متوسطه $\boldsymbol{\mu}$ مجهول وتباينه $\boldsymbol{\sigma^2}$ معلوم، ولكن كان حجم العينة $(\mathbf{n} \geq \mathbf{30})$، فإن حسب نظرية النهاية المركزية $\overline{X}$ يتبع توزيع قريباً من التوزيع الطبيعي. ففي هذه الحالة نتحصل على نفس مجال الثقة للمتوسط $\boldsymbol{\mu}$ الذي تحصلنا عليه في حالة المجتمع طبيعي. ويكون:

$$I_C = \left[\overline{X} - z_{\left(1-\frac{\alpha}{2}\right)} \sigma_{\overline{X}} \; ; \; \overline{X} + z_{\left(1-\frac{\alpha}{2}\right)} \sigma_{\overline{X}}\right]_{(1-\alpha)}$$

مثال :

ليكن مجتمع طبيعي تباينه $\mathbf{25}$، سحبت منه عينة عشوائية حجمها $\mathbf{49}$ ووسطها الحسابي $\bar{x} = \mathbf{45}$. أوجد مجال الثقة لمتوسط المجتمع $\boldsymbol{\mu}$ عند مستوى المعنوية $\alpha = 5\%$.

الحل :

المجتمع الطبيعي متوسطه $\boldsymbol{\mu}$ مجهول و تباينه $\sigma^2 = \mathbf{25}$.

العينة حجمها $n = \mathbf{49}$ متوسطها $\bar{x} = \mathbf{45}$.

- **إيجاد مجال الثقة لمتوسط المجتمع μ عند مستوى المعنوية $\alpha = 5\%$:**

مستوى المعنوية يقصد به درجة الخطأ و هو $\alpha = 5\%$ ، إذن درجة الثقة تقدر ب:

$$1 - \alpha = 1 - 0.05 = 0.95$$

يتم تحديد مجال الثقة للمتوسط $\boldsymbol{\mu}$ باستعمال مقدره النقطي الذي هو متوسط العينة $\overline{X}$:

$$X \to N(\mu, \sigma^2) \;\Rightarrow\; \overline{X} \to N(\mu_{\overline{X}}, \sigma^2_{\overline{X}})$$

و مجال الثقة:

$$P(\mu \in I_C = [a, b]) = 1 - \alpha$$

$$\Rightarrow I_C = \left[\overline{X} - z_{\left(1-\frac{\alpha}{2}\right)} \sigma_{\overline{X}} \; ; \; \overline{X} + z_{\left(1-\frac{\alpha}{2}\right)} \sigma_{\overline{X}}\right]_{(1-\alpha)}$$

$$\sigma_{\bar{X}}^2 = \frac{\sigma^2}{n} \Rightarrow \sigma_{\bar{X}} = \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \rightarrow$$ و لأن المجتمع غير محدود

إذن

$$I_C = \left[\bar{X} - z_{\left(1-\frac{\alpha}{2}\right)} \frac{\sigma}{\sqrt{n}} ; \bar{X} + z_{\left(1-\frac{\alpha}{2}\right)} \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right]_{(1-\alpha)}$$

$$I_C = \left[\bar{x} - z_{\left(1-\frac{0.05}{2}\right)} \frac{\sigma}{\sqrt{n}} ; \bar{x} + z_{\left(1-\frac{0.05}{2}\right)} \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right]_{(1-0.05)}$$

$$\Leftrightarrow I_C = \left[\bar{x} - z_{(0.975)} \frac{\sigma}{\sqrt{n}} ; \bar{x} + z_{(0.975)} \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right]_{(0.95)}$$

ومن الجدول التوزيع الطبيعي نجد: $1.96 = z_{(0.975)}$

$$\Leftrightarrow I_C = \left[45 - 1.96 \frac{5}{\sqrt{49}} ; 45 + 1.96 \frac{5}{\sqrt{49}}\right]_{(0.95)}$$

$$\Leftrightarrow I_C = [45 - 1.4 ; 45 + 1.4]_{(0.95)}$$

ومنه مجال الثقة لمتوسط المجتمع μ هو:

$$\Leftrightarrow I_C = [43.6 ; 46.4]_{95\%}$$

و بالتالي فإن القيمة الحقيقية ل μ متواجدة في هذا المجال بإحتمال % 95 مع خطأ التقدير يقدر ب:

$$e = z_{\left(1-\frac{\alpha}{2}\right)} \sigma_{\bar{X}} = z_{(0.975)} \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 1.96 \frac{5}{\sqrt{49}} = 1.4$$

❖ المجتمع يتبع التوزيع الطبيعي و تباينه σ^2 مجهول وحجم العينة ($n \geq 30$).

إذا كان المجتمع الإحصائي يتبع التوزيع الطبيعي متوسطه μ مجهول و تباينه σ^2 مجهول وسحبت منه عينة حجمها أكبر أو يساوي 30 ($n \geq 30$)، فإنه يتم تعويض تباين المجتمع σ^2 المجهول بالمقدر النقطي $\hat{\sigma}^2$ ويتم تحديد مجال الثقة للمتوسط μ باستعمال مقدره النقطي الذي هو متوسط العينة $\bar{X}$ الذي يتبع التوزيع طبيعي:

$$\bar{X} \rightarrow N\left(\mu_{\bar{X}}, \sigma_{\bar{X}}^2\right)$$

و بالتالي فالإحصائية المستعملة هنا هي :

$$Z = \frac{\bar{X} - \mu_{\bar{X}}}{\sigma_{\bar{X}}} \rightarrow N(0,1)$$

و يتم تحديد مجال الثقة للمتوسط $\boldsymbol{\mu}$ من :

$$\boldsymbol{P(\mu \in I_C = [a,b]) = 1-\alpha \ \Leftrightarrow P(a \leq \mu \leq b) = 1-\alpha}$$

فنتحصل على مجال الثقة للمتوسط $\boldsymbol{\mu}$:

$$\boldsymbol{I_C = \left[\overline{X} - z_{\left(1-\frac{\alpha}{2}\right)}\,\sigma_{\overline{X}}\ ;\ \overline{X} + z_{\left(1-\frac{\alpha}{2}\right)}\,\sigma_{\overline{X}}\right]_{(1-\alpha)}}$$

و بما أن المجتمع غير محدود فإن:

$$\boldsymbol{I_C = \left[\overline{X} - z_{\left(1-\frac{\alpha}{2}\right)}\ \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\ ;\ \overline{X} + z_{\left(1-\frac{\alpha}{2}\right)}\ \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right]_{(1-\alpha)}}$$

و بما أن تباين المجتمع $\boldsymbol{\sigma^2}$ المجهول فيتم تعويضه بمقدره النقطي غير محيز $\boldsymbol{\widehat{S}^2}$:

$$\boldsymbol{\widehat{S}^2 = \left(\frac{n}{n-1}\right) S^2}$$

مع

$$\boldsymbol{S^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \overline{X})^2}$$

$$\boldsymbol{\Rightarrow I_C = \left[\overline{X} - z_{\left(1-\frac{\alpha}{2}\right)}\ \frac{\widehat{S}}{\sqrt{n}}\ ;\ \overline{X} + z_{\left(1-\frac{\alpha}{2}\right)}\ \frac{\widehat{S}}{\sqrt{n}}\right]_{(1-\alpha)}}$$

$$\boldsymbol{\Leftrightarrow I_C = \left[\overline{X} - z_{\left(1-\frac{\alpha}{2}\right)}\ \frac{S}{\sqrt{n-1}}\ ;\ \overline{X} + z_{\left(1-\frac{\alpha}{2}\right)}\ \frac{S}{\sqrt{n-1}}\right]_{(1-\alpha)}}$$

و خطأ التقدير هو :

$$\boldsymbol{e = z_{\left(1-\frac{\alpha}{2}\right)}\,\sigma_{\overline{X}} = z_{\left(1-\frac{\alpha}{2}\right)}\ \frac{S}{\sqrt{n-1}}}$$

ملاحظة: إذا كان المجتمع الذي سحبت منه العينة غير طبيعي متوسطه مجهول و تباينه σ^2 مجهول، ولكن كان حجم العينة $(n \geq 30)$، فإن حسب نظرية النهاية المركزية $\overline{X}$ يتبع توزيع قريباً من التوزيع الطبيعي. ففي هذه الحالة نتحصل على نفس مجال الثقة للمتوسط μ الذي تحصلنا عليه في حالة المجتمع طبيعي ويكون المجال كالأتي :

$$\Leftrightarrow I_C = \left[\overline{X} - z_{\left(1-\frac{\alpha}{2}\right)} \frac{S}{\sqrt{n-1}} \; ; \; \overline{X} + z_{\left(1-\frac{\alpha}{2}\right)} \frac{S}{\sqrt{n-1}}\right]_{(1-\alpha)}$$

وخطأ التقدير هو :

$$e = z_{\left(1-\frac{\alpha}{2}\right)} \sigma_{\overline{X}} = z_{\left(1-\frac{\alpha}{2}\right)} \frac{S}{\sqrt{n-1}}$$

مثال:

سحبت عينة من مجتمع إحصائي حجمها **36** فوجد أن متوسطها **45** وتباينها **49**. أوجد مجال الثقة ب **95%** لمتوسط المجتمع μ .

الحل :

المجتمع يتبع توزيع غير محدد متوسطه μ مجهول و تباينه σ^2 مجهول.

العينة حجمها $n = 36$ متوسطها $\overline{x} = 45$ و تباينها $S^2 = 49$.

إيجاد مجال الثقة 95% لمتوسط المجتمع μ :

إذا كانت درجة الثقة تقدر ب: $1 - \alpha = 0.95$ إذن درجة الخطأ $\alpha = 5\%$.

بما أن المجتمع تباينه σ^2 مجهول وسحبت منه عينة حجمها $n = 36 \geq 30$، فإنه يتم تعويض تباين المجتمع σ^2 المجهول بالمقدر النقطي $\hat{\sigma}^2$ ويتم تحديد مجال الثقة للمتوسط μ باستعمال مقدره النقطي الذي هو متوسط العينة $\overline{X}$. بحيث، حسب نظرية النهاية المركزية فإن $\overline{X}$ يتبع التوزيع طبيعي:

$$\overline{X} \rightarrow N\left(\mu_{\overline{X}}, \sigma^2_{\overline{X}}\right)$$

و بالتالي فالإحصائية المستعملة هنا هي :

$$Z = \frac{\overline{X} - \mu_{\overline{X}}}{\sigma_{\overline{X}}} \rightarrow N(0,1)$$

فإن:

$$I_C = \left[\overline{X} - z_{\left(1-\frac{\alpha}{2}\right)}\,\sigma_{\overline{X}}\,;\,\overline{X} + z_{\left(1-\frac{\alpha}{2}\right)}\,\sigma_{\overline{X}}\right]_{(1-\alpha)}$$

و بما أن المجتمع غير محدود فإن:

$$I_C = \left[\overline{X} - z_{\left(1-\frac{\alpha}{2}\right)}\ \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\,;\,\overline{X} + z_{\left(1-\frac{\alpha}{2}\right)}\ \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right]_{(1-\alpha)}$$

و بما أن تباين المجتمع σ^2 المجهول فيتم تعويضه بالمقدره النقطي $\widehat{S}^2$:

$$I_C = \left[\overline{X} - z_{\left(1-\frac{\alpha}{2}\right)}\ \frac{\widehat{S}}{\sqrt{n}}\,;\,\overline{X} + z_{\left(1-\frac{\alpha}{2}\right)}\ \frac{\widehat{S}}{\sqrt{n}}\right]_{(1-\alpha)}$$

$$\Leftrightarrow I_C = \left[\overline{X} - z_{\left(1-\frac{\alpha}{2}\right)}\ \frac{S}{\sqrt{n-1}}\,;\,\overline{X} + z_{\left(1-\frac{\alpha}{2}\right)}\ \frac{S}{\sqrt{n-1}}\right]_{(1-\alpha)}$$

إذن التقدير بمجال الثقة هو:

$$I_C = \left[\overline{x} - z_{\left(1-\frac{0.05}{2}\right)}\ \frac{S}{\sqrt{n-1}}\,;\,\overline{x} + z_{\left(1-\frac{0.05}{2}\right)}\ \frac{S}{\sqrt{n-1}}\right]_{(95\%)}$$

$$\Leftrightarrow I_C = \left[\overline{x} - z_{(0.975)}\ \frac{S}{\sqrt{n-1}}\,;\,\overline{x} + z_{(0.975)}\ \frac{S}{\sqrt{n-1}}\right]_{(95\%)}$$

ومن الجدول التوزيع الطبيعي نجد: $1.96 = z_{(0.975)}$

$$\Leftrightarrow I_C = \left[45 - 1.96\ \frac{7}{\sqrt{36-1}}\,;\,45 + 1.96\ \frac{7}{\sqrt{36-1}}\right]_{(95\%)}$$

$$\Leftrightarrow I_C = [42.68\,;\,47.32]_{(95\%)}$$

وخطأ التقدير هو :

$$e = z_{\left(1-\frac{\alpha}{2}\right)}\ \frac{S}{\sqrt{n-1}} = 1.96\ \frac{7}{\sqrt{36-1}} = 2.32$$

❖ **المجتمع يتبع توزيع طبيعي و تباينه σ^2 مجهول وحجم العينة $(n < 30)$.**

إذا كان المجتمع طبيعي متوسطه μ مجهول و تباينه σ^2 مجهول وسحبت منه عينة حجمها أقل من 30 $(n < 30)$، فإنه يتم تعويض تباين المجتمع σ^2 المجهول بالمقدر النقطي $\widehat{\sigma}^2$ ويتم تحديد المجال الثقة للمتوسط μ باستعمال الإحصاءة T التي تتبع التوزيع الستيودنت بدرجة حرية $(n-1)$ بحيث:

$$T = \frac{\overline{X} - \mu}{S/\sqrt{n-1}} \rightarrow t(n-1)$$

و يتم تحديد مجال الثقة للمتوسط $\boldsymbol{\mu}$ من :

$$\boldsymbol{P(\mu \in I_C = [a,b]) = 1-\alpha}$$

$$\boldsymbol{\Leftrightarrow P(a \le \mu \le b) = 1-\alpha}$$

$$\boldsymbol{\Leftrightarrow P(-b \le -\mu \le -a) = 1-\alpha}$$

$$\boldsymbol{\Leftrightarrow P\left(\frac{\bar{X}-b}{S/\sqrt{n-1}} \le \frac{\bar{X}-\mu}{S/\sqrt{n-1}} \le \frac{\bar{X}-a}{S/\sqrt{n-1}}\right) = 1-\alpha}$$

$$\boldsymbol{\Leftrightarrow P\left(\frac{\bar{X}-b}{S/\sqrt{n-1}} \le T \le \frac{\bar{X}-a}{S/\sqrt{n-1}}\right) = 1-\alpha}$$

وبما أن التوزيع ستيودنت هو توزيع متناظر إذن سوف نضع: $\boldsymbol{t = \frac{\bar{X}-a}{S/\sqrt{n-1}}}$ و $\boldsymbol{-t = \frac{\bar{X}-b}{S/\sqrt{n-1}}}$ ونتحصل على:

$$\boldsymbol{P(-t \le T \le t) = 1-\alpha \Leftrightarrow P(T \le t) - P(T \le -t) = 1-\alpha}$$

$$\boldsymbol{\Leftrightarrow P(T \le t) - [1 - P(T \le t)] = 1-\alpha \Leftrightarrow 2\,P(T \le t) - 1 = 1-\alpha}$$

$$\boldsymbol{\Leftrightarrow 2\,P(T \le t) = 2-\alpha \quad \Leftrightarrow \quad P(T \le t) = \frac{2-\alpha}{2} = 1-\frac{\alpha}{2}}$$

$$\boldsymbol{\Rightarrow t = t_{\left(n-1,\ 1-\frac{\alpha}{2}\right)}}$$

بحيث قيمة $\boldsymbol{t_{\left(n-,1-\frac{\alpha}{2}\right)}}$ تستخرج من الجدول التوزيع إذن :

$$\begin{cases} \boldsymbol{\dfrac{\bar{X}-a}{S/\sqrt{n-1}} = t_{\left(n-1,\ 1-\frac{\alpha}{2}\right)} \Rightarrow a = \bar{X} - t_{\left(n-1,\ 1-\frac{\alpha}{2}\right)} \dfrac{S}{\sqrt{n-1}}} \\ \boldsymbol{\dfrac{\bar{X}-b}{S/\sqrt{n-1}} = -t_{\left(n-1,\ 1-\frac{\alpha}{2}\right)} \Rightarrow b = \bar{X} + t_{\left(n-1,\ 1-\frac{\alpha}{2}\right)} \dfrac{S}{\sqrt{n-1}}} \end{cases}$$

إذن مجال الثقة للمتوسط $\boldsymbol{\mu}$ هو:

$$\boldsymbol{I_C = \left[\bar{X} - t_{\left(n-1,\ 1-\frac{\alpha}{2}\right)} \frac{S}{\sqrt{n-1}}\ ;\ \bar{X} + t_{\left(n-1,\ 1-\frac{\alpha}{2}\right)} \frac{S}{\sqrt{n-1}}\right]_{(1-\alpha)}}$$

وخطأ التقدير هو :

$$\boldsymbol{e = t_{\left(n-1,\ 1-\frac{\alpha}{2}\right)} \frac{S}{\sqrt{n-1}}}$$

مثال:

سحبت عينة من مجتمع إحصائي حجمها **25** فوجد أن متوسطها **45** و تباينها **49**. أوجد مجال الثقة ب **95%** لمتوسط المجتمع μ.

الحل :

المجتمع الطبيعي متوسطه μ مجهول و تباينه σ^2 مجهول.

العينة حجمها $n = 25$ متوسطها $\bar{x} = 45$ و تباينها $S^2 = 49$.

إيجاد مجال الثقة 95% لمتوسط المجتمع μ :

إذا كان المجتمع طبيعي متوسطه μ مجهول وتباينه σ^2 مجهول وسحبت منه عينة حجمها $(n= 25 < 30)$، فإنه يتم تعويض تباين المجتمع σ^2 المجهول بالمقدر النقطي $\hat{\sigma}^2$ ويتم تحديد المجال الثقة للمتوسط μ باستعمال الإحصاءة T التي تتبع التوزيع الستيودنت بدرجة حرية $(n-1)$ بحيث:

$$T = \frac{\bar{X} - \mu}{S/\sqrt{n-1}} \rightarrow t(n-1)$$

و بما أن درجة الثقة تقدر ب: $1 - \alpha = 0.95$ إذن درجة الخطأ $\alpha = 5\%$. و يتم تحديد المجال:

$$P(\mu \in I_C = [a, b]) = 1 - \alpha$$

$$\Rightarrow I_C = \left[\bar{X} - t_{\left(n-1,\ 1-\frac{\alpha}{2}\right)} \frac{S}{\sqrt{n-1}} \ ; \ \bar{X} + t_{\left(n-1,\ 1-\frac{\alpha}{2}\right)} \frac{S}{\sqrt{n-1}}\right]_{(1-\alpha)}$$

$$\Rightarrow I_C = \left[\bar{x} - t_{\left(n-1,\ 1-\frac{\alpha}{2}\right)} \frac{S}{\sqrt{n-1}} \ ; \ \bar{x} + t_{\left(n-1,\ 1-\frac{\alpha}{2}\right)} \frac{S}{\sqrt{n-1}}\right]_{(1-\alpha)}$$

$$\Rightarrow I_C = \left[\bar{X} - t_{\left(25-1,\ 1-\frac{0.05}{2}\right)} \frac{S}{\sqrt{25-1}} \ ; \ \bar{X} + t_{\left(25-1,\ 1-\frac{0.05}{2}\right)} \frac{S}{\sqrt{25-1}}\right]_{(1-\alpha)}$$

ومن الجدول التوزيع ستيودنت نجد:

$$t_{\left(25-1,\ 1-\frac{0.05}{2}\right)} = t_{(24,\ 0.975)} = 2.064$$

$$\Leftrightarrow I_C = \left[45 - 2.064 \ \frac{7}{\sqrt{25-1}} \ ; \ 45 + 2.064 \ \frac{7}{\sqrt{25-1}}\right]_{(95\%)}$$

$$\Leftrightarrow I_C = [42.05 \ ; \ 47.95]_{(95\%)}$$

و خطأ التقدير هو :

$$e = z_{\left(1-\frac{\alpha}{2}\right)} \frac{S}{\sqrt{n-1}} = 2.064 \ \frac{7}{\sqrt{25-1}} = 2.95$$

3.3. تقدير مجال الثقة للفرق بين متوسطي مجتمعين مستقلين:

عند السحب لعينتين عشوائيتين مستقلتين حجمهما n_1 و n_2 على التوالي، من مجتمعين (غير محدودين) متوسطهما الحسابي μ_1 و μ_2 مجهولين وتباينهما σ_1^2 و σ_2^2 على التوالي. فإذا كان $\bar{X}_1$ و $\bar{X}_2$ يمثلان المتوسط الحسابي للعينتين على التوالي و S_1^2 و S_2^2 تباينهما. ومجال الثقة للفرق بين متوسطي مجتمعين $I_C = [a, b]$ المتضمن القيمة الحقيقية ل $(\mu_1 - \mu_2)$ عند درجة الثقة $(1 - \alpha)$، يتم تحديده بالمقدر النقطي للفرق بين متوسطي مجتمعين $(\mu_1 - \mu_2)$ والذي هو الفرق بين متوسطي العينة $(\bar{X}_1 - \bar{X}_2)$:

❖ في حالة معلومية تباين مجتمعيين طبيعيين (σ_1^2 و σ_2^2 معلومين)

بما أن المجتمعين طبيعيين فإن توزيع المعاينة للفرق بين متوسطين $(\bar{X}_1 - \bar{X}_2)$ يتبع التوزيع الطبيعي، بحيث:

$$\begin{cases} \bar{X}_1 \to N\left(\mu_1, \dfrac{\sigma_1^2}{n_1}\right) \\ \bar{X}_2 \to N\left(\mu_2, \dfrac{\sigma_2^2}{n_2}\right) \end{cases} \Rightarrow \quad \bar{X}_1 - \bar{X}_2 \to N\left(\mu_1 - \mu_2, \frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}\right)$$

و عند إيجاد المجال الثقة لمتوسطي المجتمع $(\mu_1 - \mu_2)$ نستعمل الإحصاءة Z :

$$\Rightarrow \quad Z = \frac{(\bar{X}_1 - \bar{X}_2) - (\mu_1 - \mu_2)}{\sqrt{\dfrac{\sigma_1^2}{n_1} + \dfrac{\sigma_2^2}{n_2}}} \quad \to \quad N(0, 1)$$

بحيث:

$$P(\mu_1 - \mu_2 \in I_C = [a, b]) = 1 - \alpha$$

$$\Leftrightarrow P(a \le \mu_1 - \mu_2 \le b) = 1 - \alpha$$

$$\Leftrightarrow P(-b \le -(\mu_1 - \mu_2) \le -a) = 1 - \alpha$$

$$\Leftrightarrow P\left(\frac{(\bar{X}_1 - \bar{X}_2) - b}{\sqrt{\dfrac{\sigma_1^2}{n_1} + \dfrac{\sigma_2^2}{n_2}}} \le \frac{(\bar{X}_1 - \bar{X}_2) - (\mu_1 - \mu_2)}{\sqrt{\dfrac{\sigma_1^2}{n_1} + \dfrac{\sigma_2^2}{n_2}}} \le \frac{(\bar{X}_1 - \bar{X}_2) - a}{\sqrt{\dfrac{\sigma_1^2}{n_1} + \dfrac{\sigma_2^2}{n_2}}}\right) = 1 - \alpha$$

$$\Leftrightarrow P\left(\frac{(\bar{X}_1-\bar{X}_2)-b}{\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1}+\frac{\sigma_2^2}{n_2}}}\leq Z\leq\frac{(\bar{X}_1-\bar{X}_2)-a}{\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1}+\frac{\sigma_2^2}{n_2}}}\right)=1-\alpha$$

وبما أن التوزيع الطبيعي هو توزيع متناظر إذن سوف نضع: $z=\frac{(\bar{X}_1-\bar{X}_2)-a}{\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1}+\frac{\sigma_2^2}{n_2}}}$ و $-z=\frac{(\bar{X}_1-\bar{X}_2)-b}{\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1}+\frac{\sigma_2^2}{n_2}}}$ ونتحصل على:

$$P(-z\leq Z\leq z)=1-\alpha\Leftrightarrow P(Z\leq z)-P(Z\leq -z)=1-\alpha$$

$$\Leftrightarrow\quad P(Z\leq z)=1-\frac{\alpha}{2}\Rightarrow z=z_{\left(1-\frac{\alpha}{2}\right)}$$

بحيث قيمة $z_{\left(1-\frac{\alpha}{2}\right)}$ تستخرج من الجدول التوزيع الطبيعي، إذن :

$$\begin{cases}\dfrac{(\bar{X}_1-\bar{X}_2)-a}{\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1}+\frac{\sigma_2^2}{n_2}}}=z_{\left(1-\frac{\alpha}{2}\right)}\Rightarrow a=(\bar{X}_1-\bar{X}_2)-z_{\left(1-\frac{\alpha}{2}\right)}\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1}+\frac{\sigma_2^2}{n_2}}\\ \dfrac{(\bar{X}_1-\bar{X}_2)-b}{\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1}+\frac{\sigma_2^2}{n_2}}}=-z_{\left(1-\frac{\alpha}{2}\right)}\Rightarrow b=(\bar{X}_1-\bar{X}_2)+z_{\left(1-\frac{\alpha}{2}\right)}\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1}+\frac{\sigma_2^2}{n_2}}\end{cases}$$

إذن مجال الثقة للفرق بين متوسطي مجتمعين $(\mu_1-\mu_2)$ هو:

$$I_C=\left[(\bar{X}_1-\bar{X}_2)-z_{\left(1-\frac{\alpha}{2}\right)}\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1}+\frac{\sigma_2^2}{n_2}}\ ;\ (\bar{X}_1-\bar{X}_2)+z_{\left(1-\frac{\alpha}{2}\right)}\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1}+\frac{\sigma_2^2}{n_2}}\right]_{(1-\alpha)}$$

و خطأ التقدير هو :

$$e=z_{\left(1-\frac{\alpha}{2}\right)}\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1}+\frac{\sigma_2^2}{n_2}}$$

<u>ملاحظة</u>: نتحصل على نفس المجال الثقة للمتوسط $(\mu_1-\mu_2)$ ، إذا كان المجتمعان اللذان سحبت منهما العينتان **غير طبيعيين أو مجهولي التوزيع** تباينهما σ_1^2 و σ_2^2 **معلومين** وحجم العينتين $n_1,n_2\geq 30$ ، و ذلك حسب نظرية النهاية المركزية،فالإحصاءة $(\bar{X}_1-\bar{X}_2)$ تتبع توزيع قريباً من التوزيع الطبيعي.

❖ **في حالة مجهولية تباين المجتمعيين الطبيعيين (σ_1^2 و σ_2^2 مجهولين) و حجم العينتين $n_1, n_2 \geq 30$.**

يتم تعويض تباين المجتمع الأول σ_1^2 المجهول بالتباين العينة الأولى S_1^2 ويتم تعويض تباين المجتمع الثاني σ_2^2 المجهول بالتباين العينة الثانية S_2^2، ويكون توزيع الفرق بين متوسطي العينتين $(\bar{X}_1 - \bar{X}_2)$ يتبع التوزيع الطبيعي لأن حجم العينتين $n_1, n_2 \geq 30$. بحيث:

$$\begin{cases} \bar{X}_1 \rightarrow N\left(\mu_1, \dfrac{S_1^2}{n_1 - 1}\right) \\ \bar{X}_2 \rightarrow N\left(\mu_2, \dfrac{S_2^2}{n_2 - 1}\right) \end{cases} \Rightarrow \bar{X}_1 - \bar{X}_2 \rightarrow N\left(\mu_1 - \mu_2, \frac{S_1^2}{n_1 - 1} + \frac{S_2^2}{n_2 - 1}\right)$$

وعند إيجاد المجال الثقة للفرق بين متوسطي المجتمع $(\mu_1 - \mu_2)$ نستعمل الإحصاءة Z :

$$\Rightarrow \quad Z = \frac{(\bar{X}_1 - \bar{X}_2) - (\mu_1 - \mu_2)}{\sqrt{\dfrac{S_1^2}{n_1 - 1} + \dfrac{S_2^2}{n_2 - 1}}} \quad \rightarrow \quad N(0, 1)$$

$$P(\mu_1 - \mu_2 \in I_C = [a, b]) = 1 - \alpha$$

و مجال الثقة للفرق بين متوسطي مجتمعين $(\mu_1 - \mu_2)$ هو:

$$I_C = \left[(\bar{X}_1 - \bar{X}_2) - z_{\left(1-\frac{\alpha}{2}\right)} \sqrt{\frac{S_1^2}{n_1 - 1} + \frac{S_2^2}{n_2 - 1}} \; ; \; (\bar{X}_1 - \bar{X}_2) + z_{\left(1-\frac{\alpha}{2}\right)} \sqrt{\frac{S_1^2}{n_1 - 1} + \frac{S_2^2}{n_2 - 1}} \right]_{(1-\alpha)}$$

و خطأ التقدير هو :

$$e = z_{\left(1-\frac{\alpha}{2}\right)} \sqrt{\frac{S_1^2}{n_1 - 1} + \frac{S_2^2}{n_2 - 1}}$$

<u>ملاحظة</u>:

نفس المجال الثقة للفرق بين متوسطي المجتمع $(\mu_1 - \mu_2)$ يمكن إستعماله أيضا، في حالة مجتمعيين غير طبيعيين أو مجهولي التوزيع تباينهما σ_1^2 و σ_2^2 مجهولين وحجم العينتين $n_1, n_2 \geq 30$ و ذلك بتطبيق نظرية النهاية المركزية.

❖ **في حالة مجهولية تباين المجتمعيين الطبيعيين (σ_1^2 و σ_2^2 مجهولين) وحجم العينتين $n_1 < 30$ أو $n_2 < 30$**

هنا نميز حالتين:

- إذا كان $\sigma_1^2 = \sigma_2^2 = \sigma^2$ تباين المجتمعين الطبيعيين متساويين فإن في هذه الحالة نعوض σ^2 بتباين المشترك المرجح S_P^2 ويكون توزيع الفرق بين متوسطي العينتين $(\overline{X}_1 - \overline{X}_2)$ يتبع التوزيع الستيودنت بدرجة الحرية $(n_1 + n_2 - 2)$:[543]

$$T = \frac{(\overline{X}_1 - \overline{X}_2) - (\mu_1 - \mu_2)}{\sqrt{\frac{S_p^2}{n_1} + \frac{S_p^2}{n_2}}} \quad \rightarrow \quad t(n_1 + n_2 - 2)$$

حيث:

$$S_p^2 = \frac{n_1 S_1^2 + n_2 S_2^2}{n_1 + n_2 - 2}$$

ويتم تحديد مجال الثقة كالأتي :

$$P\big((\mu_1 - \mu_2) \in I_C = [a, b]\big) = 1 - \alpha$$

$$\Leftrightarrow P(a \leq \mu_1 - \mu_2 \leq b) = 1 - \alpha$$

$$\Leftrightarrow P(-b \leq -(\mu_1 - \mu_2) \leq -a) = 1 - \alpha$$

$$\Leftrightarrow P\left(\frac{(\overline{X}_1 - \overline{X}_2) - b}{\sqrt{\frac{S_p^2}{n_1} + \frac{S_p^2}{n_2}}} \leq \frac{(\overline{X}_1 - \overline{X}_2) - (\mu_1 - \mu_2)}{\sqrt{\frac{S_p^2}{n_1} + \frac{S_p^2}{n_2}}} \leq \frac{(\overline{X}_1 - \overline{X}_2) - a}{\sqrt{\frac{S_p^2}{n_1} + \frac{S_p^2}{n_2}}}\right) = 1 - \alpha$$

$$\Leftrightarrow P\left(\frac{(\overline{X}_1 - \overline{X}_2) - b}{\sqrt{\frac{S_p^2}{n_1} + \frac{S_p^2}{n_2}}} \leq T \leq \frac{(\overline{X}_1 - \overline{X}_2) - b}{\sqrt{\frac{S_p^2}{n_1} + \frac{S_p^2}{n_2}}}\right) = 1 - \alpha$$

3 Saporta, G., page 343.
4 Protassov, K., page 97.
5 Rousson, V., 72

وبما أن التوزيع ستيودنت هو توزيع متناظر إذن سوف نضع: $t = \frac{(\bar{X}_1 - \bar{X}_2) - a}{\sqrt{\frac{s_p^2}{n_1} + \frac{s_p^2}{n_2}}}$ و $-t = \frac{(\bar{X}_1 - \bar{X}_2) - b}{\sqrt{\frac{s_p^2}{n_1} + \frac{s_p^2}{n_2}}}$ ونتحصل على:

$$P(-t \le T \le t) = 1 - \alpha \Leftrightarrow P(T \le t) - P(T \le -t) = 1 - \alpha$$

$$\Leftrightarrow P(T \le t) - [1 - P(T \le t)] = 1 - \alpha \Leftrightarrow 2\,P(T \le t) - 1 = 1 - \alpha$$

$$\Leftrightarrow 2\,P(T \le t) = 2 - \alpha \quad \Leftrightarrow \quad P(T \le t) = \frac{2 - \alpha}{2} = 1 - \frac{\alpha}{2}$$

$$\Rightarrow t = t_{\left(n_1 + n_2 - 2,\ 1 - \frac{\alpha}{2}\right)}$$

بحيث قيمة $t_{\left(n-,1-\frac{\alpha}{2}\right)}$ تستخرج من جدول توزيع ستيودنت إذن :

$$\begin{cases} \dfrac{(\bar{X}_1 - \bar{X}_2) - a}{\sqrt{\dfrac{S_p^2}{n_1} + \dfrac{S_p^2}{n_2}}} = t_{\left(n_1 + n_2 - 2,\ 1 - \frac{\alpha}{2}\right)} \Rightarrow a = (\bar{X}_1 - \bar{X}_2) - t_{\left(n_1 + n_2 - 2,\ 1 - \frac{\alpha}{2}\right)} \sqrt{\dfrac{S_p^2}{n_1} + \dfrac{S_p^2}{n_2}} \\ \dfrac{(\bar{X}_1 - \bar{X}_2) - b}{\sqrt{\dfrac{S_p^2}{n_1} + \dfrac{S_p^2}{n_2}}} = -t_{\left(n_1 + n_2 - 2,\ 1 - \frac{\alpha}{2}\right)} \Rightarrow b = (\bar{X}_1 - \bar{X}_2) + t_{\left(n_1 + n_2 - 2,\ 1 - \frac{\alpha}{2}\right)} \sqrt{\dfrac{S_p^2}{n_1} + \dfrac{S_p^2}{n_2}} \end{cases}$$

إذن مجال الثقة عند درجة $(1 - \alpha)$ هو :

$$I_C = \left[(\bar{X}_1 - \bar{X}_2) - t_{\left(n_1 + n_2 - 2,\ 1 - \frac{\alpha}{2}\right)} \sqrt{\frac{S_p^2}{n_1} + \frac{S_p^2}{n_2}} \ ; \ (\bar{X}_1 - \bar{X}_2) + t_{\left(n_1 + n_2 - 2,\ 1 - \frac{\alpha}{2}\right)} \sqrt{\frac{S_p^2}{n_1} + \frac{S_p^2}{n_2}} \right]$$

وخطأ التقدير هو :

$$e = t_{\left(n_1 + n_2 - 2,\ 1 - \frac{\alpha}{2}\right)} \sqrt{\frac{S_p^2}{n_1} + \frac{S_p^2}{n_2}}$$

- إذا كان $\sigma_1^2 \neq \sigma_2^2$ تباين المجتمعين مختلفين فإن في هذه الحالة نعوض تباين المجتمع الأول σ_1^2 المجهول بالتباين العينة الأولى S_1^2 ونعوض تباين المجتمع الثاني σ_2^2 المجهول بالتباين للعينة الثانية S_2^2، ويكون توزيع الفرق بين متوسطي العينتين $(\overline{X}_1 - \overline{X}_2)$ يتبع التوزيع الستيودنت بدرجة الحرية (v):6

$$T = \frac{(\bar{X}_1 - \bar{X}_2) - (\mu_1 - \mu_2)}{\sqrt{\frac{S_1^2}{n_1 - 1} + \frac{S_2^2}{n_2 - 1}}} \rightarrow t(v)$$

بحيث

$$v = \frac{\left(\frac{S_1^2}{n_1 - 1} + \frac{S_2^2}{n_2 - 1}\right)^2}{\left(\frac{S_1^2}{n_1 - 1}\right)^2 + \left(\frac{S_2^2}{n_2 - 1}\right)^2}$$

ويكون مجال الثقة عند درجة الثقة $(1 - \alpha)$ كالأتي :

$$P\left((\mu_1 - \mu_2) \in I_C = [a, b]\right) = 1 - \alpha$$

$$I_C = \left[(\bar{X}_1 - \bar{X}_2) - t_{\left(v,\ 1-\frac{\alpha}{2}\right)} \sqrt{\frac{S_1^2}{n_1 - 1} + \frac{S_2^2}{n_2 - 1}}; (\bar{X}_1 - \bar{X}_2) + t_{\left(v,\ 1-\frac{\alpha}{2}\right)} \sqrt{\frac{S_1^2}{n_1 - 1} + \frac{S_2^2}{n_2 - 1}}\right]$$

وخطأ التقدير هو :

$$e = t_{\left(v,\ 1-\frac{\alpha}{2}\right)} \sqrt{\frac{S_1^2}{n_1 - 1} + \frac{S_2^2}{n_2 - 1}}$$

<u>مثال:</u>

إذا كان لدينا مجتمعان إحصائيان طبيعيان مستقلان متوسطاهما مجهولان μ_1 و μ_2 على التوالي وتباينهما σ_1^2 و σ_2^2 على التوالي، سحبت منهما عينتان عشوائيتان:

-العينة الأولى: حجمها $n_1 = 40$ ، متوسطها الحسابي $\bar{x}_1 = 58$ وتباينها $S_1^2 = 4$.

- العينة الثانية : حجمها $n_2 = 35$ ، متوسطها الحسابي $\bar{x}_2 = 47$ وتباينها $S_2^2 = 3$.

6 Rousson, V., page 73.

1. إيجاد مجال الثقة ب **95%** للفرق بين متوسطي المجتمعين $(\mu_1 - \mu_2)$ إذا كان تباينهما $\sigma_1^2 = 10$ و $\sigma_2^2 = 5$.

2. إيجاد مجال الثقة ب **95%** للفرق بين متوسطي المجتمعين $(\mu_1 - \mu_2)$ إذا كان تباينهما مجهولان.

3. إيجاد مجال الثقة ب **95%** للفرق بين متوسطي المجتمعين $(\mu_1 - \mu_2)$ إذا كان تباينهما متساويان ولكن مجهولان وكان حجم العينتين: $n_1 = 20$ و $n_2 = 14$.

4. إيجاد مجال الثقة ب **95%** للفرق بين متوسطي المجتمعين $(\mu_1 - \mu_2)$ إذا كان تباينهما غير متساويان ومجهولان وكان حجم العينتين: $n_1 = 20$ و $n_2 = 14$.

الحل:

المجتمع 1 : غير محدود وتوزيعه طبيعي، سحبت منه العينة الأولى: $\begin{cases} n_1 = 40 \\ \bar{x}_1 = 58 \\ S_1^2 = 4 \end{cases}$

المجتمع 2 : غير محدود وتوزيعه طبيعي، سحبت منه العينة اثانية: $\begin{cases} n_2 = 35 \\ \bar{x}_2 = 47 \\ S_2^2 = 3 \end{cases}$

1. **إيجاد مجال الثقة ب 95% للفرق بين متوسطي المجتمعين $(\mu_1 - \mu_2)$، إذا كان تباينهما $\sigma_1^2 = 10$ و $\sigma_2^2 = 5$:**

إذا كانت درجة الثقة تقدر ب: $1 - \alpha = 0.95$ إذن درجة الخطأ $\alpha = 0.05$.

ومجال الثقة للفرق بين متوسطي مجتمعين يتم تحديده بمقدره النقطي الذي هو الفرق بين متوسطي العينة $(\bar{X}_1 - \bar{X}_2)$. وبما أن المجتمعين طبيعيين فإن توزيع المعاينة للفرق بين متوسطين $(\bar{X}_1 - \bar{X}_2)$ يتبع التوزيع الطبيعي، بحيث:

$$\begin{cases} \bar{X}_1 \to N\left(\mu_1, \dfrac{\sigma_1^2}{n_1}\right) \\ \bar{X}_2 \to N\left(\mu_2, \dfrac{\sigma_2^2}{n_2}\right) \end{cases} \Rightarrow \quad \bar{X}_1 - \bar{X}_2 \to N\left(\mu_1 - \mu_2, \frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}\right)$$

ومجال الثقة للفرق بين متوسطي مجتمعين $(\mu_1 - \mu_2)$ هو:

$$I_C = \left[(\bar{X}_1 - \bar{X}_2) - z_{\left(1-\frac{\alpha}{2}\right)} \sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}} \; ; \; (\bar{X}_1 - \bar{X}_2) + z_{\left(1-\frac{\alpha}{2}\right)} \sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}} \right]_{(1-\alpha)}$$

من جدول التوزيع الطبيعي يتم تحديد قيمة $z_{\left(1-\frac{\alpha}{2}\right)}$:

$$z_{\left(1-\frac{\alpha}{2}\right)} = z_{\left(1-\frac{0.05}{2}\right)} = z_{(0.975)} = 1.96$$

$$I_C = \left[(\overline{x}_1 - \overline{x}_2) - z_{(0.975)}\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1}+\frac{\sigma_2^2}{n_2}} \;;\; (\overline{x}_1 - \overline{x}_2) + z_{(0.975)}\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1}+\frac{\sigma_2^2}{n_2}}\right]_{(95\%)}$$

$$\Leftrightarrow I_C = \left[(58-47) - 1.96\sqrt{\frac{10}{40}+\frac{5}{35}} \;;\; (58-47) + 1.96\sqrt{\frac{10}{40}+\frac{5}{35}}\right]_{(95\%)}$$

$$\Leftrightarrow I_C = [9.772 \;;\; 12.228]_{(95\%)}$$

وخطأ التقدير هو :

$$e = z_{\left(1-\frac{\alpha}{2}\right)}\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1}+\frac{\sigma_2^2}{n_2}} = 1.96\sqrt{\frac{10}{40}+\frac{5}{35}} = 1.228$$

2. <u>إيجاد مجال الثقة ب 95% للفرق بين متوسطي مجتمعين $(\mu_1 - \mu_2)$ إذا كان تباينهما مجهولان:</u>

إذا كانت درجة الثقة تقدر ب: $1-\alpha = 0.95$ إذن درجة الخطأ $\alpha = 0.05$. مجال الثقة للفرق بين متوسطي مجتمعين يتم تحديده بمقدره النقطي الذي هو الفرق بين متوسطي العينة $(\overline{X}_1 - \overline{X}_2)$.

وبما أن تباين المجتمعان مجهولان، فيتم تعويض تباين المجتمع الأول σ_1^2 المجهول بالتباين العينة الأولى S_1^2 ويتم تعويض تباين المجتمع الثاني σ_2^2 المجهول بالتباين العينة الثانية S_2^2، ويكون توزيع الفرق بين متوسطي العينتين $(\overline{X}_1 - \overline{X}_2)$ يتبع التوزيع الطبيعي لأن حجم العينتين: $n_1 = 40 \geq 30, n_2 = 35 \geq 30$. بحيث:

$$\begin{cases} \overline{X}_1 \rightarrow N\left(\mu_1, \frac{S_1^2}{n_1-1}\right) \\ \overline{X}_2 \rightarrow N\left(\mu_2, \frac{S_2^2}{n_2-1}\right) \end{cases} \Rightarrow \overline{X}_1 - \overline{X}_2 \rightarrow N\left(\mu_1-\mu_2, \frac{S_1^2}{n_1-1}+\frac{S_2^2}{n_2-1}\right)$$

ومجال الثقة للفرق بين متوسطي مجتمعين $(\mu_1 - \mu_2)$ هو:

$$I_C = \left[(\overline{X}_1 - \overline{X}_2) - z_{\left(1-\frac{\alpha}{2}\right)}\sqrt{\frac{S_1^2}{n_1-1}+\frac{S_2^2}{n_2-1}} \;;\; (\overline{X}_1 - \overline{X}_2) + z_{\left(1-\frac{\alpha}{2}\right)}\sqrt{\frac{S_1^2}{n_1-1}+\frac{S_2^2}{n_2-1}}\right]_{(1-\alpha)}$$

من جدول التوزيع الطبيعي يتم تحديد قيمة $z_{\left(1-\frac{\alpha}{2}\right)}$:

$$z_{\left(1-\frac{\alpha}{2}\right)} = z_{\left(1-\frac{0.05}{2}\right)} = z_{(0.975)} = 1.96$$

$$I_C = \left[(\bar{x}_1 - \bar{x}_2) - z_{(0.975)}\sqrt{\frac{S_1^2}{n_1-1}+\frac{S_2^2}{n_2-1}}; (\bar{x}_1 - \bar{x}_2) + z_{(0.975)}\sqrt{\frac{S_1^2}{n_1-1}+\frac{S_2^2}{n_2-1}}\right]_{(95\%)}$$

$$\Leftrightarrow I_C = \left[(58-47) - 1.96\sqrt{\frac{4}{40-1}+\frac{3}{35-1}}\ ;\ (58-47) + 1.96\sqrt{\frac{4}{40-1}+\frac{3}{35-1}}\right]_{(95\%)}$$

$$\Leftrightarrow I_C = [10.144\ ;\ 11.856]_{(95\%)}$$

وخطأ التقدير هو :

$$e = z_{\left(1-\frac{\alpha}{2}\right)}\sqrt{\frac{S_1^2}{n_1-1}+\frac{S_2^2}{n_2-1}} = 1.96\sqrt{\frac{4}{40-1}+\frac{3}{35-1}} = 0.856$$

3. <u>إيجاد مجال الثقة ب 95% للفرق بين متوسطي مجتمعين $(\mu_1 - \mu_2)$ إذا كان تباينهما متساويان و لكن مجهولان و كان حجم العينتين $n_1 = 20$ و $n_2 = 14$.</u>

إذا كانت درجة الثقة تقدر ب: $1-\alpha = 0.95$ إذن درجة الخطأ $\alpha = 0.05$. مجال الثقة للفرق بين متوسطي مجتمعين يتم تحديده بمقدره النقطي الذي هو الفرق بين متوسطي العينة $(\bar{X}_1 - \bar{X}_2)$. وبما أن تباين المجتمعيين الطبيعيين σ_1^2 وσ_2^2 مجهولين ومتساويين $(\sigma_1^2 = \sigma_2^2 = \sigma^2)$ وحجم العينتين

$n_1 = 20 \leq 30, n_2 = 14 \leq 30$ فإنه سوف يتم تعويض σ^2 بتباين المشترك المرجح S_P^2 ويكون توزيع المعاينة للفرق بين متوسطين $(\bar{X}_1 - \bar{X}_2)$ يتبع التوزيع الستيودنت بدرجة الحرية $(n_1 + n_2 - 2)$:

$$T = \frac{(\bar{X}_1 - \bar{X}_2) - (\mu_1 - \mu_2)}{\sqrt{\frac{S_p^2}{n_1}+\frac{S_p^2}{n_2}}} \quad \rightarrow \quad t(n_1 + n_2 - 2)$$

حيث:

$$S_p^2 = \frac{n_1 S_1^2 + n_2 S_2^2}{n_1 + n_2 - 2} = \frac{20*4 + 14*3}{20+14-2} = 3.81$$

درجة الحرية:

$$(n_1 + n_2 - 2) = 20 + 14 - 2 = 32$$

ويكون مجال الثقة عند درجة $(1-\alpha)$ هو :

$$I_C = \left[(\bar{X}_1 - \bar{X}_2) - t_{\left(n_1+n_2-2,\ 1-\frac{\alpha}{2}\right)}\sqrt{\frac{S_p^2}{n_1}+\frac{S_p^2}{n_2}}\ ;\ (\bar{X}_1 - \bar{X}_2) + t_{\left(n_1+n_2-2,\ 1-\frac{\alpha}{2}\right)}\sqrt{\frac{S_p^2}{n_1}+\frac{S_p^2}{n_2}}\right]$$

$$I_C = \left[(\bar{x}_1 - \bar{x}_2) - t_{\left(n_1+n_2-2,\ 1-\frac{\alpha}{2}\right)}\sqrt{\frac{S_p^2}{n_1}+\frac{S_p^2}{n_2}}\ ;\ (\bar{x}_1 - \bar{x}_2) + t_{\left(n_1+n_2-2,\ 1-\frac{\alpha}{2}\right)}\sqrt{\frac{S_p^2}{n_1}+\frac{S_p^2}{n_2}}\right]$$

$$I_C = \left[(58-47) - t_{(32,\ 0.975)}\sqrt{\frac{3.81}{20}+\frac{3.81}{14}}\ ;(58-47) + t_{(32,\ 0.975)}\sqrt{\frac{3.81}{20}+\frac{3.81}{14}}\right]$$

ومن جدول التوزيع ستيودنت لدينا: $t_{(32,\ 0.975)} = 2.04$

$$I_C = \left[(58-47) - 2.04\sqrt{\frac{3.81}{20}+\frac{3.81}{14}}\ ;(58-47) + 2.04\sqrt{\frac{3.81}{20}+\frac{3.81}{14}}\right]$$

$$\Rightarrow I_C = [9.613\ ;12.387]$$

وخطأ التقدير هو :

$$e = t_{\left(n_1+n_2-2,\ 1-\frac{\alpha}{2}\right)}\sqrt{\frac{S_p^2}{n_1}+\frac{S_p^2}{n_2}} = 2.04\sqrt{\frac{3.81}{20}+\frac{3.81}{14}} = 1.387$$

4. إيجاد مجال الثقة ب 95% للفرق بين متوسطي مجتمعين $(\mu_1 - \mu_2)$ إذا كان تباينهما غير متساويان ومجهولان وكان حجم العينتين $n_1 = 20$ و $n_2 = 14$.

إذا كانت درجة الثقة تقدر ب: $1-\alpha = 0.95$ إذن درجة الخطأ $\alpha = 0.05$.

مجال الثقة للفرق بين متوسطي مجتمعين يتم تحديده بمقدره النقطي الذي هو الفرق بين متوسطي العينتين $(\bar{X}_1 - \bar{X}_2)$. وبما أن تباين المجتمعين الطبيعيين σ_1^2 و σ_2^2 مجهولين وغير متساويين $(\sigma_1^2 \neq \sigma_2^2)$ وحجم العينتين $n_1 = 20 \leq 30, n_2 = 14 \leq 30$ فإنه سوف يتم تعويض تباين المجتمع الأول σ_1^2 بالتباين العينة الأولى S_1^2 ويتم تعويض تباين المجتمع الثاني σ_2^2 بالتباين العينة الثانية S_2^2، ويكون توزيع المعاينة للفرق بين متوسطين $(\bar{X}_1 - \bar{X}_2)$ يتبع التوزيع الستيودنت بدرجة الحرية (v):

$$T = \frac{(\bar{X}_1 - \bar{X}_2) - (\mu_1 - \mu_2)}{\sqrt{\frac{S_1^2}{n_1-1}+\frac{S_2^2}{n_2-1}}} \rightarrow t(v)$$

بحيث:

$$v = \frac{\left(\frac{S_1^2}{n_1-1} + \frac{S_2^2}{n_2-1}\right)^2}{\left(\frac{S_1^2}{n_1-1}\right)^2 + \left(\frac{S_2^2}{n_2-1}\right)^2} = \frac{\left(\frac{4}{20-1} + \frac{3}{14-1}\right)^2}{\left(\frac{4}{20-1}\right)^2 + \left(\frac{3}{14-1}\right)^2} = 1.9958 \approx 2$$

إذن درجة الحرية: $v = 2$

والمجال الثقة عند درجة $(1-\alpha)$ هو :

$$I_C = \left[(\bar{X}_1 - \bar{X}_2) - t_{\left(v,\ 1-\frac{\alpha}{2}\right)}\sqrt{\frac{S_1^2}{n_1-1} + \frac{S_2^2}{n_2-1}}; (\bar{X}_1 - \bar{X}_2) + t_{\left(v,\ 1-\frac{\alpha}{2}\right)}\sqrt{\frac{S_1^2}{n_1-1} + \frac{S_2^2}{n_2-1}}\right]$$

$$I_C = \left[(\bar{x}_1 - \bar{x}_2) - t_{\left(v,\ 1-\frac{\alpha}{2}\right)}\sqrt{\frac{S_1^2}{n_1-1} + \frac{S_2^2}{n_2-1}}\ ;\ (\bar{x}_1 - \bar{x}_2) + t_{\left(v,\ 1-\frac{\alpha}{2}\right)}\sqrt{\frac{S_1^2}{n_1-1} + \frac{S_2^2}{n_2-1}}\right]$$

$$I_C = \left[(58-47) - t_{(2,\ 0.975)}\sqrt{\frac{4}{20-1} + \frac{3}{14-1}}\ ; (58-47) + t_{(2,\ 0.975)}\sqrt{\frac{4}{20-1} + \frac{3}{14-1}}\right]$$

و من جدول التوزيع ستيودنت لدينا: $t_{(2,\ 0.975)} = 4.30$

$$I_C = \left[(58-47) - 4.30\sqrt{\tfrac{4}{19} + \tfrac{3}{13}}\ ; (58-47) + 4.30\sqrt{\tfrac{4}{19} + \tfrac{3}{13}}\right]$$

$$\Rightarrow I_C = [8.144\ ; 13.856]$$

وخطأ التقدير هو :

$$e = t_{\left(v,\ 1-\frac{\alpha}{2}\right)}\sqrt{\frac{S_1^2}{n_1-1} + \frac{S_2^2}{n_2-1}} = t_{(2,0.975)}\sqrt{\frac{S_1^2}{n_1-1} + \frac{S_2^2}{n_2-1}} = 4.30\sqrt{\frac{4}{19} + \frac{3}{13}} = 2.856.$$

4.3. تقدير مجال الثقة للنسبة المجتمع:

ليكن لدينا مجتمع إحصائي ولتكن p نسبة الأفراد الذين يحملون صفة معينة مراد دراستها في هذا المجتمع، و q نسبة باقي أفراد المجتمع الذين لا يحملون هذه صفة $(q=1-p)$. وإذا تم سحب عينة حجمها n من هذا المجتمع، فإن p' تمثل نسبة الأفراد في العينة الذي يحملون الصفة المراد دراستها.

ويتوجب علينا هنا تحديد المجال الثقة $I_C = [a, b]$ المتضمن القيمة الحقيقية لنسبة p عند درجة الثقة $(1-\alpha)$ أي تحديد قيم b و a، مع العلم أن المقدر النقطي لنسبة المجتمع p هي نسبة العينة p'.

إذا كانت العينة حجمها $n \geq 30$ ، فحسب نظرية النهاية المركزية فإن توزيع المتغير العشوائي p' هو توزيع يقارب التوزيع طبيعي وبالتالي :

$$p' \rightarrow N\left(\mu_{p'}, \sigma_{p'}^2\right)$$

وبتطبيق نظرية النهاية المركزية فإن:

$$Z = \frac{p' - \mu_{p'}}{\sigma_{p'}} \xrightarrow[n \to +\infty]{asymptotically} N(0,1)$$

بحيث $\mu_{p'} = p$ و عبارة $\sigma_{p'}$ تحدد على أساس نفادية المعاينة وإذا كان المجتمع محدود أم لا. وبالتالي:

$$Z = \frac{p' - p}{\sigma_{p'}} \xrightarrow[n \to +\infty]{asymptotically} N(0,1)$$

ويتم تحديد مجال الثقة لنسبة p كالأتي :

$$P(p \in I_C = [a,b]) = 1-\alpha$$

$$\Leftrightarrow P(a \leq p \leq b) = 1-\alpha$$

$$\Leftrightarrow P(-b \leq -p \leq -a) = 1-\alpha$$

$$\Leftrightarrow P\left(\frac{p'-b}{\sigma_{p'}} \leq \frac{p'-p}{\sigma_{p'}} \leq \frac{p'-a}{\sigma_{p'}}\right) = 1-\alpha$$

$$\Leftrightarrow P\left(\frac{p'-b}{\sigma_{p'}} \leq Z \leq \frac{p'-a}{\sigma_{p'}}\right) = 1-\alpha$$

وبما أن التوزيع الطبيعي هو توزيع متناظر إذن سوف نضع: $z = \frac{p'-a}{\sigma_{p'}}$ و $-z = \frac{p'-b}{\sigma_{p'}}$ ونتحصل على:

$$P(-z \leq Z \leq z) = 1-\alpha \Leftrightarrow P(Z \leq z) - P(Z \leq -z) = 1-\alpha$$

$$\Leftrightarrow P(Z \leq z) - [1 - P(Z \leq z)] = 1 - \alpha \Leftrightarrow 2\,P(Z \leq z) - 1 = 1 - \alpha$$

$$\Leftrightarrow 2\,P(Z \leq z) = 2 - \alpha \quad \Leftrightarrow \quad P(Z \leq z) = \frac{2-\alpha}{2} = 1 - \frac{\alpha}{2} \Rightarrow z = z_{\left(1-\frac{\alpha}{2}\right)}$$

بحيث قيمة $z_{\left(1-\frac{\alpha}{2}\right)}$ تستخرج من الجدول التوزيع الطبيعي، إذن :

$$\begin{cases} \dfrac{p' - a}{\sigma_{p'}} = z_{\left(1-\frac{\alpha}{2}\right)} \Rightarrow a = p' - z_{\left(1-\frac{\alpha}{2}\right)}\,\sigma_{p'} \\ \dfrac{p' - b}{\sigma_{p'}} = -z_{\left(1-\frac{\alpha}{2}\right)} \Rightarrow b = p' + z_{\left(1-\frac{\alpha}{2}\right)}\sigma_{p'} \end{cases}$$

إذن مجال الثقة لنسبة p هو:

$$I_C = \left[p' - z_{\left(1-\frac{\alpha}{2}\right)}\,\sigma_{p'};\; p' + z_{\left(1-\frac{\alpha}{2}\right)}\,\sigma_{p'}\right]_{(1-\alpha)}$$

وخطأ التقدير هو :

$$e = z_{\left(1-\frac{\alpha}{2}\right)}\;\sigma_{p'}$$

- **في حالة المعاينة غير نفادية أو المجتمع غير محدود فإن مجال الثقة لنسبة p هو:**

$$I_C = \left[p' - z_{\left(1-\frac{\alpha}{2}\right)}\sqrt{\frac{pq}{n}};\; p' + z_{\left(1-\frac{\alpha}{2}\right)}\sqrt{\frac{pq}{n}}\right]_{(1-\alpha)}$$

وبما أن النسبة p مجهولة فيتم تعويضها بمقدرها النقطي p' ، إذن:

$$\Leftrightarrow I_C = \left[p' - z_{\left(1-\frac{\alpha}{2}\right)}\sqrt{\frac{p'q'}{n}}; p' + z_{\left(1-\frac{\alpha}{2}\right)}\sqrt{\frac{p'q'}{n}}\right]_{(1-\alpha)}$$

وخطأ التقدير هو :

$$e = z_{\left(1-\frac{\alpha}{2}\right)}\sqrt{\frac{p'q'}{n}}$$

- **وفي حالة المعاينة النفادية فإن مجال الثقة لنسبة p هو:**

$$I_C = \left[p' - z_{\left(1-\frac{\alpha}{2}\right)} \sqrt{\frac{pq}{n}} \sqrt{\frac{N-n}{N-1}};\ p' + z_{\left(1-\frac{\alpha}{2}\right)} \sqrt{\frac{pq}{n}} \sqrt{\frac{N-n}{N-1}} \right]_{(1-\alpha)}$$

وبما أن النسبة p مجهولة فيتم تعويضها بمقدرها النقطي p'، إذن:

$$I_C = \left[p' - z_{\left(1-\frac{\alpha}{2}\right)} \sqrt{\frac{p'q'}{n}} \sqrt{\frac{N-n}{N-1}};\ p' + z_{\left(1-\frac{\alpha}{2}\right)} \sqrt{\frac{p'q'}{n}} \sqrt{\frac{N-n}{N-1}} \right]_{(1-\alpha)}$$

وخطأ التقدير هو :

$$e = z_{\left(1-\frac{\alpha}{2}\right)} \sqrt{\frac{p'q'}{n}} \sqrt{\frac{N-n}{N-1}}$$

مثال :

في شركة ما لإنتاج قطع الغيار. أخذ عينة بحجم 200 قطعة من إنتاجها، فوجد بينها 5 % من قطع الغيار تالفة. أوجد مجال الثقة لنسبة p لقطع الغيار التالفة التي يمكن إنتاجها في هذه الشركة عند مستوى المعنوية $\alpha = 1\%$.

الحل:

p : تمثل نسبة قطع الغيار التالفة في الشركة.

p' : تمثل نسبة قطع الغيار التالفة في العينة.

$$p' = 0.05 \Rightarrow q' = 1 - p' = 1 - 0.05 = 0.95$$

-إيجاد مجال الثقة لنسبة القطع الغيار التالفة التي يمكن إنتاجها في هذه الشركة عند مستوى المعنوية $\alpha = 1\%$:

مستوى المعنوية يقصد به درجة الخطأ وهو $\alpha = 1\%$ ، إذن درجة الثقة تقدر ب:

$$1 - \alpha = 1 - 0.01 = 0.99$$

يتم تحديد مجال الثقة لنسبة p باستعمال مقدره النقطي الذي هو نسبة العينة p' . وحسب نظرية النهاية المركزية فإن توزيع المتغير العشوائي p' هو توزيع يقارب التوزيع طبيعي لأن حجم العينة $n = 200 \geq 30$ و بالتالي :

$$p \to N(\mu_{p'}\ ,\ \sigma^2_{p'}\ )$$

$$Z = \frac{p' - \mu_{p'}}{\sigma_{p'}} = \frac{p' - p}{\sigma_{p'}} \quad \xrightarrow[n \to +\infty]{asymptotically} \quad N(0,1\ )$$

ومجال الثقة:

$$P(p \in I_C = [a,b]) = 1 - \alpha$$

$$\Leftrightarrow \ I_C = \left[p' - z_{\left(1-\frac{\alpha}{2}\right)}\ \sigma_{p'};\ p' + z_{\left(1-\frac{\alpha}{2}\right)}\ \sigma_{p'}\right]_{(1-\alpha\ )}$$

وبما أن المجتمع غير محدود فإننا نعتبر المعاينة غير نفادية، وبما أن النسبة p مجهولة فيتم تعويضها بتقديرها النقطي $\hat{p} = p'$ المتحصل عليه من مشاهدات العينة، إذن:

$$\Leftrightarrow \ I_C = \left[p' - z_{\left(1-\frac{\alpha}{2}\right)}\sqrt{\frac{p'q'}{n}}\ ; p' + z_{\left(1-\frac{\alpha}{2}\right)}\sqrt{\frac{p'q'}{n}}\right]_{(1-\alpha\ )}$$

$$\Leftrightarrow \ I_C = \left[p' - z_{\left(1-\frac{0.01}{2}\right)}\sqrt{\frac{p'q'}{n}}\ ; p' + z_{\left(1-\frac{0.01}{2}\right)}\sqrt{\frac{p'q'}{n}}\right]_{(1-0.01\ )}$$

$$\Leftrightarrow \ I_C = \left[0.05 - z_{(0.995)}\sqrt{\frac{0.05\ .\ 0.95}{200}}; 0.05 + z_{(0.995)}\sqrt{\frac{0.05\ .\ 0.95}{200}}\right]_{(99\%\ )}$$

ومن الجدول التوزيع الطبيعي نجد: $z_{(0.995)} = 2.58$

$$\Leftrightarrow \ I_C = \left[0.05 - 2.58\sqrt{\frac{0.05\ .\ 0.95}{200}}; 0.05 + 2.58\sqrt{\frac{0.05\ .\ 0.95}{200}}\right]_{(99\%\ )}$$

$$\Leftrightarrow \ I_C = [0.05 - 0.04; 0.05 + 0.04\ ]_{(99\%\ )}$$

$$\Leftrightarrow \ I_C = [0.01; 0.09\ ]_{(99\%\ )}$$

وخطأ التقدير هو :

$$e = z_{\left(1-\frac{\alpha}{2}\right)}\sqrt{\frac{p'q'}{n}} = z_{(0.995)}\sqrt{\frac{p'q'}{n}} = 2.58\sqrt{\frac{0.05\ .\ 0.95}{200}} = 0.04$$

5.3. تقدير مجال الثقة لتباين المجتمع:

ليكن لدينا مجتمع إحصائي X المكون من N مفردة والذي يتبع توزيع طبيعي بمتوسط μ وتباين σ^2 مجهولين، سحبت منه عينة حجمها n مكونة من المفردات $(X_1, X_2, \dots, X_n)$ ذات المشاهدات $\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$، فوجد أن متوسط هذه المشاهدات $\overline{x}$ وتباينها S^2.

ويتوجب علينا هنا تحديد المجال الثقة $I_C = [a, b]$ المتضمن القيمة الحقيقية لتباين σ^2 عند درجة الثقة $(1-\alpha)$ أي تحديد قيم b و a، وذلك بإستعمال الإحصائية التالية $\frac{nS^2}{\sigma^2}$ التي تخضع إلى التوزيع كاي مربع بدرجة الحرية $(n-1)$ بحيث :

$$\frac{nS^2}{\sigma^2} = \frac{\sum_{i=1}^{n}(X_i - \overline{X})^2}{\sigma^2} \rightarrow \chi^2_{n-1}$$

و يتم تحديد مجال الثقة لتباين المجتمع σ^2 كالأتي :

$$P(\sigma^2 \in I_C = [a, b]) = 1-\alpha$$

$$\Leftrightarrow P(a \leq \sigma^2 \leq b) = 1-\alpha$$

$$\Leftrightarrow P\left(\frac{1}{b} \leq \frac{1}{\sigma^2} \leq \frac{1}{a}\right) = 1-\alpha$$

$$\Leftrightarrow P\left(\frac{nS^2}{b} \leq \frac{nS^2}{\sigma^2} \leq \frac{nS^2}{a}\right) = 1-\alpha$$

$$\Leftrightarrow P\left(\frac{nS^2}{b} \leq \chi^2_{n-1} \leq \frac{nS^2}{a}\right) = 1-\alpha$$

$$\Leftrightarrow P\left(\frac{nS^2}{b} \leq \chi^2_{n-1} \leq \frac{nS^2}{a}\right) = 1-\alpha$$

$$\Leftrightarrow P\left(\chi^2_{n-1} \leq \frac{nS^2}{a}\right) - P\left(\chi^2_{n-1} \leq \frac{nS^2}{b}\right) = 1-\alpha$$

وبما أن التوزيع كاي مربع هو توزيع غير متناظر إذن سوف نضع: $x_{\left(1-\frac{\alpha}{2}\right)} = \frac{nS^2}{a}$ و $x_{\left(\frac{\alpha}{2}\right)} = \frac{nS^2}{b}$ ونتحصل على:

$$\Leftrightarrow P\left(\chi^2_{n-1} \leq x_{\left(1-\frac{\alpha}{2}\right)}\right) - P\left(\chi^2_{n-1} \leq x_{\left(\frac{\alpha}{2}\right)}\right) = 1-\alpha$$

بحيث قيمتي $x_{\left(\frac{\alpha}{2}\right)}$ و $x_{\left(1-\frac{\alpha}{2}\right)}$ تستخرج من الجدول التوزيع كاي مربع عند درجة الحرية $(n-1)$، إذن :

$$\begin{cases} x_{\left(\frac{\alpha}{2}\right)} = \dfrac{n\,S^2}{b} \quad \Rightarrow b = \dfrac{n\,S^2}{x_{\left(\frac{\alpha}{2}\right)}} \\ x_{\left(1-\frac{\alpha}{2}\right)} = \dfrac{n\,S^2}{a} \quad \Rightarrow a = \dfrac{n\,S^2}{x_{\left(1-\frac{\alpha}{2}\right)}} \end{cases}$$

إذن مجال الثقة لتباين المجتمع σ^2 هو:

$$I_C = \left[\frac{n\,S^2}{\chi^2_{\left(n-1,\ 1-\frac{\alpha}{2}\right)}}; \quad \frac{n\,S^2}{\chi^2_{\left(n-1,\ \frac{\alpha}{2}\right)}}\right]_{(1-\alpha)}$$

مثال

تم سحب عينة حجمها 20 مشاهدة من مجتمع طبيعي، فوجد أن تباينها هو 60. أوجد مجال الثقة بدرجة 95 % لتباين المجتمع الذي تم منه سحب العينة.

الحل:

- المجتمع غير محدود، يتبع التوزيع الطبيعي.
- سحبت منه عينة حجمها $n = 20$ تباينها $S^2 = 60$.

إيجاد مجال الثقة لتباين المجتمع μ عند درجة الثقة 95% :

درجة الثقة تقدر ب $1 - \alpha = 95\ \%$ إذن $\alpha = 5\ \%$.

ويتم تحديد مجال الثقة لتباين المجتمع σ^2 بالإعتماد على الإحصائية $\frac{n\,S^2}{\sigma^2}$ التي تخضع إلى التوزيع كاي مربع بدرجة الحرية $(n-1)$ بحيث :

$$\frac{n\,S^2}{\sigma^2} = \frac{\sum_{i=1}^{n}(X_i - \overline{X})^2}{\sigma^2} \rightarrow \chi^2_{n-1}$$

ومجال الثقة:

$$P(\sigma^2 \in I_C = [a, b]) = 1 - \alpha$$

$$\Leftrightarrow I_C = \left[\frac{n\,S^2}{\chi^2_{\left(n-1,\ 1-\frac{\alpha}{2}\right)}}; \quad \frac{n\,S^2}{\chi^2_{\left(n-1,\ \frac{\alpha}{2}\right)}}\right]_{(1-\alpha)}$$

$$\Leftrightarrow \ I_C = \left[\frac{n\,S^2}{\chi^2_{\left(20-1,\ 1-\frac{0.05}{2}\right)}};\qquad \frac{n\,S^2}{\chi^2_{\left(20-1,\ \frac{0.05}{2}\right)}}\right]_{95\,\%}$$

$$\Leftrightarrow \ I_C = \left[\frac{20\,.\,60}{\chi^2_{(19,\ 0.975)}};\qquad \frac{20\,.60}{\chi^2_{(19,\ 0.025)}}\right]_{95\,\%}$$

بحيث من الجدول التوزيع كاي مربع لدينا :

$$\chi^2_{(19,\ 0.025)} = 8.91 \qquad \text{و} \qquad \chi^2_{(19,\ 0.975)} = 32.9$$

$$\Rightarrow \ I_C = \left[\frac{20\,.\,60}{32.9};\qquad \frac{20\,.60}{8.91}\right]_{95\,\%}$$

إذن :

$$I_C = [36.47;\ 134.68]_{95\,\%}$$

6.3. تقدير مجال الثقة لنسبة بين تباييني مجتمعين:

عند السحب لعينتين عشوائيتين مستقلتين حجمهما n_1 و n_2 على التوالي، من مجتمعين طبيعيين مختلفين و غير محدودين، متوسطهما الحسابي μ_1 و μ_2 مجهولين وتباينهما σ_1^2 و σ_2^2 مجهولين على التوالي. وكان S_1^2 و S_2^2 يمثلان تباييني العينتين على التوالي. يتم تحديد مجال الثقة لنسبة بين تباييني مجتمعين $I_C = [a, b]$ المتضمن القيمة الحقيقية ل $\frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2}$ عند درجة الثقة $(1-\alpha)$، باستعمال مقدرها النقطي وهو النسبة بين تباييني العينتين $\frac{S_1^2}{S_2^2}$ الذي يتبع التوزيع فيشر، بحيث لدينا:

$$F = \frac{\dfrac{\left(\frac{n_2\,S_2^2}{\sigma_2^2}\right)}{n_2-1}}{\dfrac{\left(\frac{n_1\,S_1^2}{\sigma_1^2}\right)}{n_1-1}} = \frac{\left(\frac{n_2}{n_2-1}\right)\frac{S_2^2}{\sigma_2^2}}{\left(\frac{n_1}{n_1-1}\right)\frac{S_1^2}{\sigma_1^2}} = \frac{\left(\frac{n_2}{n_2-1}\right)}{\left(\frac{n_1}{n_1-1}\right)}\cdot\frac{S_2^2}{S_1^2}\cdot\frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2} \ \rightarrow F(n_2-1, n_1-1\,)$$

ويتم تحديد مجال الثقة لنسبة بين تباييني مجتمعين كالأتي :

$$P\left(\frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2} \in I_C = [a, b]\right) = 1-\alpha$$

$$\Leftrightarrow \ P\left(a \le \frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2} \le b\right) = 1-\alpha$$

$$\Leftrightarrow P\left(\frac{\left(\frac{n_2}{n_2-1}\right)}{\left(\frac{n_1}{n_1-1}\right)}\frac{S_2^2}{S_1^2}\,a \le \frac{\left(\frac{n_2}{n_2-1}\right)}{\left(\frac{n_1}{n_1-1}\right)}\frac{S_2^2}{S_1^2}\cdot\frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2} \le \frac{\left(\frac{n_2}{n_2-1}\right)}{\left(\frac{n_1}{n_1-1}\right)}\frac{S_2^2}{S_1^2}\,b\right) = 1-\alpha$$

$$\Leftrightarrow P\left(\frac{\left(\frac{n_2}{n_2-1}\right)}{\left(\frac{n_1}{n_1-1}\right)}\frac{S_2^2}{S_1^2}\,a \le F_{(n_2-1,n_1-1)} \le \frac{\left(\frac{n_2}{n_2-1}\right)}{\left(\frac{n_1}{n_1-1}\right)}\frac{S_2^2}{S_1^2}\,b\right) = 1-\alpha$$

$$\Leftrightarrow P\left(F_{(n_2-1,n_1-1)} \le \frac{\left(\frac{n_2}{n_2-1}\right)}{\left(\frac{n_1}{n_1-1}\right)}\frac{S_2^2}{S_1^2}\,b\right) - P\left(F_{(n_2-1,n_1-1)} \le \frac{\left(\frac{n_2}{n_2-1}\right)}{\left(\frac{n_1}{n_1-1}\right)}\frac{S_2^2}{S_1^2}\,a\right) = 1-\alpha$$

وبما أن التوزيع فيشر هو توزيع غير متناظر إذن سوف نضع:

$$f_{\left(1-\frac{\alpha}{2}\right)} = \frac{\left(\frac{n_2}{n_2-1}\right)}{\left(\frac{n_1}{n_1-1}\right)}\frac{S_2^2}{S_1^2}\,b \quad \text{و} \quad f_{\left(\frac{\alpha}{2}\right)} = \frac{\left(\frac{n_2}{n_2-1}\right)}{\left(\frac{n_1}{n_1-1}\right)}\frac{S_2^2}{S_1^2}\,a$$

ونتحصل على:

$$P\left(F_{(n_2-1,n_1-1)} \le f_{\left(1-\frac{\alpha}{2}\right)}\right) - P\left(F_{(n_2-1,n_1-1)} \le f_{\left(\frac{\alpha}{2}\right)}\right) = 1-\alpha$$

وقيمتي $f_{\left(\frac{\alpha}{2}\right)}$ و $f_{\left(1-\frac{\alpha}{2}\right)}$ تستخرج من الجدول التوزيع فيشرعند درجة الحرية (n_2-1, n_1-1) ، إذن :

$$\begin{cases} f_{\left(\frac{\alpha}{2}\right)} = \dfrac{\left(\frac{n_2}{n_2-1}\right)}{\left(\frac{n_1}{n_1-1}\right)}\dfrac{S_2^2}{S_1^2}\,a \quad \Rightarrow a = f_{\left(\frac{\alpha}{2}\right)}\dfrac{\left(\frac{n_1}{n_1-1}\right)}{\left(\frac{n_2}{n_2-1}\right)}\dfrac{S_1^2}{S_2^2} \\ f_{\left(1-\frac{\alpha}{2}\right)} = \dfrac{\left(\frac{n_2}{n_2-1}\right)}{\left(\frac{n_1}{n_1-1}\right)}\dfrac{S_2^2}{S_1^2}\,b \quad \Rightarrow b = f_{\left(1-\frac{\alpha}{2}\right)}\dfrac{\left(\frac{n_1}{n_1-1}\right)}{\left(\frac{n_2}{n_2-1}\right)}\dfrac{S_1^2}{S_2^2} \end{cases}$$

إذن مجال الثقة لنسبة بين تبايني مجتمعين إذا استعملنا تبايني العينتين S_1^2 و S_2^2 الذان يعتبران مقدران المتحيزان على التوالي لتبايني المجتمعين σ_1^2 و σ_2^2 هو :

$$I_C = \left[F_{\left(n_2-1,\, n_1-1;\ \frac{\alpha}{2}\right)}\frac{\left(\frac{n_1}{n_1-1}\right)}{\left(\frac{n_2}{n_2-1}\right)}\frac{S_1^2}{S_2^2};\quad F_{\left(n_2-1,\, n_1-1;\ 1-\frac{\alpha}{2}\right)}\frac{\left(\frac{n_1}{n_1-1}\right)}{\left(\frac{n_2}{n_2-1}\right)}\frac{S_1^2}{S_2^2}\right]_{(1-\alpha)}$$

مثال:

تم سحب عينتين عشوائيتين مستقلتين حجمهما على التوالي $n_1 = 25$ و $n_2 = 21$ ، من مجتمعين طبيعيين مختلفين. فوجد أن تباييني العينتين هو على التوالي $S_1^2 = 64$ و $S_2^2 = 36$.

- أوجد مجال الثقة لنسبة بين تباييني مجتمعين σ_1^2 و σ_2^2 عند درجة الثقة $95\ \%$.

الحل:

- المجتمع الاول الطبيعي وغير محدود، سحبت منه عينة حجمها $n_1 = 25$ وتباينها $S_1^2 = 64$.
- المجتمع الثاني الطبيعي وغير محدود، سحبت منه عينة حجمها $n_2 = 21$ وتباينها $S_2^2 = 36$.

إيجاد مجال الثقة لنسبة بين تباييني مجتمعين عند درجة الثقة 95 %:

درجة الثقة تقدر ب $1 - \alpha = 95\ \%$ إذن $\alpha = 5\ \%$.

ويتم تحديد مجال الثقة لنسبة بين تباييني مجتمعين σ_1^2 و σ_2^2 بالإعتماد على الإحصائية :

$$F = \frac{\frac{\left(\frac{n_2\, S_2^2}{\sigma_2^2}\right)}{n_2 - 1}}{\frac{\left(\frac{n_1\, S_1^2}{\sigma_1^2}\right)}{n_1 - 1}} = \frac{\left(\frac{n_2}{n_2 - 1}\right)\frac{S_2^2}{\sigma_2^2}}{\left(\frac{n_1}{n_1 - 1}\right)\frac{S_1^2}{\sigma_1^2}} = \frac{\left(\frac{n_2}{n_2 - 1}\right)}{\left(\frac{n_1}{n_1 - 1}\right)} \cdot \frac{S_2^2}{S_1^2} \cdot \frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2} \quad \rightarrow F(n_2 - 1, n_1 - 1)$$

ومجال الثقة هو:

$$P\left(\frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2} \in I_C = [a, b]\right) = 1 - \alpha$$

$$\Leftrightarrow I_C = \left[F_{\left(n_2-1,\, n_1-1;\ \frac{\alpha}{2}\right)} \frac{\left(\frac{n_1}{n_1 - 1}\right)}{\left(\frac{n_2}{n_2 - 1}\right)} \frac{S_1^2}{S_2^2};\quad F_{\left(n_2-1,\, n_1-1;\ 1-\frac{\alpha}{2}\right)} \frac{\left(\frac{n_1}{n_1 - 1}\right)}{\left(\frac{n_2}{n_2 - 1}\right)} \frac{S_1^2}{S_2^2} \right]_{(1-\alpha)}$$

$$\Leftrightarrow I_C = \left[F_{\left(21-1,\ 25-1;\ \frac{0.05}{2}\right)} \frac{\left(\frac{n_1}{n_1 - 1}\right)}{\left(\frac{n_2}{n_2 - 1}\right)} \frac{S_1^2}{S_2^2};\quad F_{\left(21-1,\ 25-1;\ 1-\frac{0.05}{2}\right)} \frac{\left(\frac{n_1}{n_1 - 1}\right)}{\left(\frac{n_2}{n_2 - 1}\right)} \frac{S_1^2}{S_2^2} \right]_{95\ \%}$$

$$\Leftrightarrow I_C = \left[F_{(20,\ 24;\ 0.025)} \frac{\left(\frac{25}{25 - 1}\right)}{\left(\frac{21}{21 - 1}\right)} \frac{64}{36};\quad F_{(20,\ 24;\ 0.975)} \frac{\left(\frac{25}{25 - 1}\right)}{\left(\frac{21}{21 - 1}\right)} \frac{64}{36} \right]_{95\ \%}$$

بحيث من الجدول التوزيع فيشر لدينا :

$$F_{(20,\ 24;\ 0.025)} = 0.415 \quad \text{و} \quad F_{(20,\ 24;\ 0.975)} = 2.327$$

$$\Rightarrow\ I_C = \left[0.415 \cdot \frac{\left(\frac{25}{25-1}\right)}{\left(\frac{21}{21-1}\right)} \cdot \frac{64}{36};\ \ 2.327 \cdot \frac{\left(\frac{25}{25-1}\right)}{\left(\frac{21}{21-1}\right)} \cdot \frac{64}{36}\right]_{95\,\%}$$

إذن :

$$I_C = [0.732\ ;\ 4.104]_{95\,\%}$$

الفصل الرابع: اختبار الفرضيات الإحصائية

Testing of Statistical Hypothesis

تمهيد:

يعد الاختبار الفرضيات زيادة على التقديرات، أحد أساليب الإحصاء الاستدلالي، فهو يعتبر تكملة للتقدير الإحصائي. إذ بعد الحصول على تقدير تقريبي للمعلمة المجتمع محل دراستنا، من الضروري مقارنتها بمعايير أو مقارنة المجتمعات الإحصائية من وجهة نظر هذه المعلمة. فالاختبار الفرضيات يطبق عند الرغبة في التحقق من ادعاء ما أو من معلومة معينة عن المجتمع الإحصائي، وذلك من خلال سحب عينة عشوائية من المجتمع وحساب بعض المؤشرات والمعايير التي تؤدي إلى إتخاذ القرار لقبول أو رفض ذلك الادعاء.

1. مفاهيم أساسية لتطبيق إختبار الفرضيات:

1.1. اختبار الفرضية: Hypothesis Test

هو عملية استدلال تسمح بالإختبار (القبول أو الرفض) من دراسة عينة عشوائية واحدة أو أكثر، صحة الفرضيات المتعلقة بمجتمع واحد أو أكثر. بحيث نميز نوعان من الإختبارات:

- **الاختبار المعلمي:** هو اختبار يتم فيه وضع فرضية معلمية على توزيع البيانات (في حالة التوزيع الطبيعي، توزيع بواسون ...) ؛ إذن في هذه الحالة فرضيات الاختبار تتعلق بمعالم هذا التوزيع مثل المتوسط $\boldsymbol{\mu}$ و التباين $\boldsymbol{\sigma^2}$ ...إلخ.

- **الاختبار اللامعلمي:** هو اختبار لا يتطلب افتراضًا حول توزيع البيانات. إذ يتم استبدال البيانات الأولية بإحصاءات مثل إحصاءات الرتب والتي لا تعتمد ولا تتعلق بمعالم هذا التوزيع.

2.1. الفرضية الإحصائية: Statistical Hypothesis

هي ادعاء أو اعتقاد يتعلق بقيمة غير معلومة للمؤشر يراد اختبار مدى صحتها. ويرمز للفرضية بالرمز **H** . بحيث يقال أن **الفرضية بسيطة** إذا تم تلخيصها في نقطة واحدة مثل: $\boldsymbol{\theta = \theta_0}$ ($\boldsymbol{\theta_0}$ معطاة)، وإلا يقال عنها أنها **فرضية مركبة** مثل: $\boldsymbol{\theta > \theta_0}$ أو $\boldsymbol{\theta < \theta_0}$ أو $\boldsymbol{\theta \neq \theta_0}$ ($\boldsymbol{\theta_0}$ معطاة) . وهناك نوعان من الفرضيات:

- **الفرضية الصفرية أو الفرض العدم:** ويرمز إليها بـ H_0، وهي الفرضية التي نريد اختبارها والتي يتم فيها تحديد قيمة معلمة المجتمع مسبقًا بقيمة معينة. ويتم التأكد من صحة هذه الفرضية بتنفيذ عملية الاختبار من خلال اعتبار هذه الفرضية صحيحة.

- **الفرضية البديلة أو الفرضية المضادة:** ويرمز إليها بH_1 ، وهي الفرضية التكميلية والمضادة للفرضية الصفرية. وإذا رفضنا الفرضية العدم فإن الفرضية البديلة هي التي نقبلها ونعتبرها صحيحة.

3.1. الإختبار ثنائي الجوانب و الإختبار أحادي الجانب:

The Two-Tailed Test and the One-Tailed Test

إن الفرضية البديلة H_1 هي التي تحدد جهة الإختبار، إذا كان من جانب واحد او من جانبين. بحيث إذا كنا في حالة الفرضية الصفرية البسيطة $\theta = \theta_0$ وكانت الفرضية البديلة H_1 على الشكل:

- $\theta \neq \theta_0$: تشير على أن الاختبار من جانبين، لأنه قد يكون $\theta < \theta_0$ أو $\theta > \theta_0$.
- $\theta < \theta_0$: تشير على أن الاختبار آحادي الجانب من اليسار.
- $\theta > \theta_0$: تشير على أن الاختبار آحادي الجانب من اليمين.

4.1. الخطأ و قوة الإختبار: Error and Power of a Test

عند اتخاذ قرار قبول أو رفض الفرضية الصفرية (أي رفض او قبول الفرضية البديلة)،قد يعرضنا هذا القرار إلى الوقوع في الخطأ. بحيث:

- **الخطأ من النوع الأول:** هو خطأ يحدث عند رفض الفرضية الصفرية H_0، وهي فرضية صحيحة. ويكون إحتمال وقوع في الخطأ من النوع الأول هو α ، ويسمى بمستوى المعنوية.

$$\alpha = P\left(\text{رفض } H_0 \text{ / صحيحة } H_0 \right)$$

$$1 - \alpha = P\left(\text{قبول } H_0 \text{ / صحيحة } H_0 \right)$$

- **الخطأ من النوع الثاني:** وهو خطأ يحدث عند قبول الفرضية الصفرية H_0 ، وهي فرضية غير صحيحة، ويكون إحتمال وقوع في الخطأ من النوع الثاني هو β.

$$\beta = P\left(\text{قبول } H_0 \text{ / خاطئة } H_0 \right)$$

- **قوة الإختبار**: هو الإحتمال رفض الفرضية الصفرية H_0 عندما تكون خاطئة ويقدر هذا الإحتمال ب $1-\beta$ ، بحيث:

$$1-\beta = P\left(H_0 \text{ رفض } / \text{ خاطئة } H_0\right)$$

ويمكن تلخيص الأخطاء في الجدول التالي :

الحقيقة / القرار	الفرضية H_0 صحيحة	الفرضية H_0 خاطئة
رفض H_0	الخطأ من النوع الأول $\alpha = P\left(H_0 \text{ رفض } / \text{ صحيحة } H_0\right)$	قرار صحيح $1-\beta = P\left(H_0 \text{ رفض } / \text{ خاطئة } H_0\right)$
قبول H_0	قرار صحيح $1-\alpha = P\left(H_0 \text{ قبول } / \text{ صحيحة } H_0\right)$	الخطأ من النوع الثاني $\beta = P\left(H_0 \text{ قبول } / \text{ خاطئة } H_0\right)$

ملاحظة:

عند قبول الفرضية الصفرية H_0 فإننا نرفض الفرضية البديلة H_1 ، وعند رفض الفرضية الصفرية H_0 فإننا نقبل الفرضية البديلة H_1 .

5.1. المنطقة الحرجة أو منطقة الرفض للاختبار:

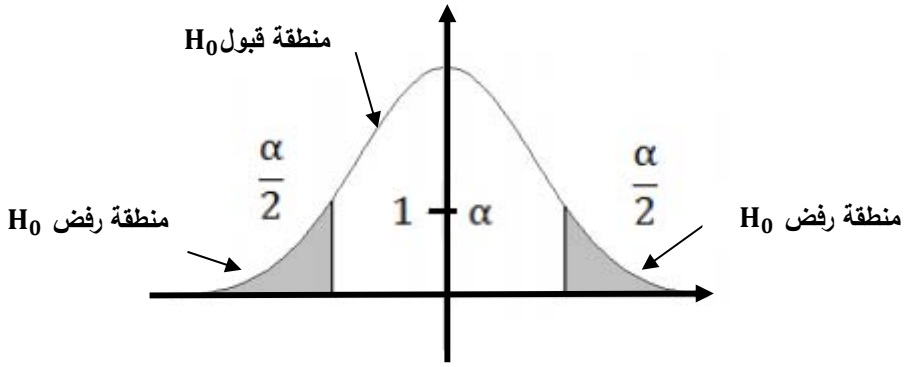
Critical Region (Rejection Region) for Statistical Tests

المنطقة الحرجة هي مجموعة قيم العينة التي نرفض من أجلها فرضية الصفرية عند مستوى المعنوية α، ونقول إنها منطقة رفض الفرضية الصفرية المصاحبة للاختبار، وهي تمثل المساحة ذات المقدار α في البيان لدالة الكثافة الإحتمالية للإحصائية القرار، أما المساحة المتبقية المقدرة ب $1-\alpha$ تمثل منطقة القبول.

إن المنطقة الحرجة يتم تحديدها على أساس الفرضية البديلة H_1، وتسمى القيم المحددة لمنطقة الرفض بالقيم الحرجة. بحيث يتم:

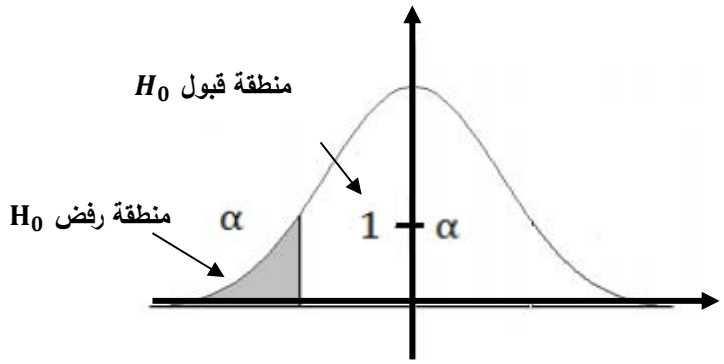
- تحديد منطقة رفض و قبول H_0 في حالة الإختبار ثنائي الجوانب:

$$\begin{cases} H_0: \theta = \theta_0 \\ H_1: \theta \neq \theta_0 \end{cases}$$



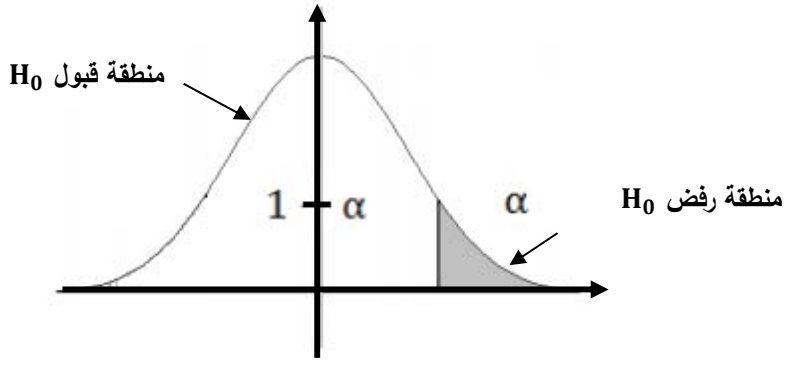
- تحديد منطقة رفض و قبول H_0 في حالة الإختبار أحادي جانب من اليسار:

$$\begin{cases} H_0: \theta = \theta_0 \\ H_1: \theta < \theta_0 \end{cases}$$



- تحديد منطقة رفض و قبول H_0 في حالة الإختبار أحادي جانب من اليمين:

$$\begin{cases} H_0: \theta = \theta_0 \\ H_1: \theta > \theta_0 \end{cases}$$



2. خطوات إجراء اختبار إحصائي

يتم إجراء جميع الاختبارات الإحصائية بالطريقة نفسها، بحيث يتم تحديد ما نريد القيام به، بعدها مراقبة العينة، ثم اتخاذ قرار في النهاية. ويتم الاختبار حسب الخطوات التالية:

أ- إنشاء فرضيات العمل وتحديد مستوى **α**.

ب- صياغة الفرضيات، بتحديد الفرضية الصفرية والفرضية البديلة.

ت- تعيين الإحصائية المستعملة في هذا الاختبار وذلك وفقا للعينة المسحوبة. فإذا كانت :

- الإحصائية المستعملة في الاختبار تتبع **التوزيع الطبيعي المعياري** فإن الاختبار يدعى **إختبار قوس Gauss** .
- الإحصائية المستعملة في الاختبار تتبع **التوزيع ستيودنت Student** فإن الاختبار يدعى **اختبار ستيودنت Student** .
- الإحصائية المستعملة في الاختبار تتبع **التوزيع كاي مربع Khi_deux** فإن الاختبار يدعى **اختبار كاي مربع Khi_deux** .
- الإحصائية المستعملة في الاختبار تتبع **التوزيع فيشر Fisher** فإن الاختبار يدعى **اختبار فيشر Fisher.**

ث- حساب القيمة التي تأخذها الإحصائية تحت الفرضية الصفرية

ج- تحديد المنطقة الحرجة بعد تعيين القيم الحرجة على حسب مستوى المعنوية **α**.

ح- تعيين قاعدة القرار

خ- اتخاذ القرار بناء على القيمة المحسوبة للإحصائية تحت الفرضية الصفرية وانتمائها أم لا إلى المنطقة الحرجة.

3. اختبارات متوسط مجتمع طبيعي التوزيع:

❖ **المجتمع يتبع التوزيع الطبيعي وتباينه σ^2 معلوم :**

عند سحب عينة حجمها n من مجتمع طبيعي متوسطه μ وتباينه معلوم σ^2.

ونفرض أننا سوف نقوم باختبار الفرضية الصفرية التالي:

$$H_0: \mu = \mu_0$$

أ- مقابل الفرضية البديلة :

$$H_1: \mu \neq \mu_0$$

و بما أن المقدر النقطي لمتوسط المجتمع $\boldsymbol{\mu}$ هو متوسط العينة $\overline{\boldsymbol{X}}$، والمجتمع طبيعي وتباينه معلوم فإن:

$$\overline{\boldsymbol{X}} \rightarrow \boldsymbol{N}(\boldsymbol{\mu}_{\overline{\boldsymbol{X}}}, \boldsymbol{\sigma}^{\boldsymbol{2}}_{\overline{\boldsymbol{X}}})$$

إذن سوف نستعمل في الاختبار الإحصائية التالية:

$$\boldsymbol{Z} = \frac{\overline{\boldsymbol{X}} - \boldsymbol{\mu}_{\overline{\boldsymbol{X}}}}{\boldsymbol{\sigma}_{\overline{\boldsymbol{X}}}} = \frac{\overline{\boldsymbol{X}} - \boldsymbol{\mu}}{\boldsymbol{\sigma}/\sqrt{\boldsymbol{n}}} \rightarrow \boldsymbol{N}(\boldsymbol{0}, \boldsymbol{1})$$

ونقوم بحساب $\boldsymbol{Z_{Cal}}$ والتي تمثل الاحصائية $\boldsymbol{Z}$ تحت الفرضية $\boldsymbol{H_0}$:

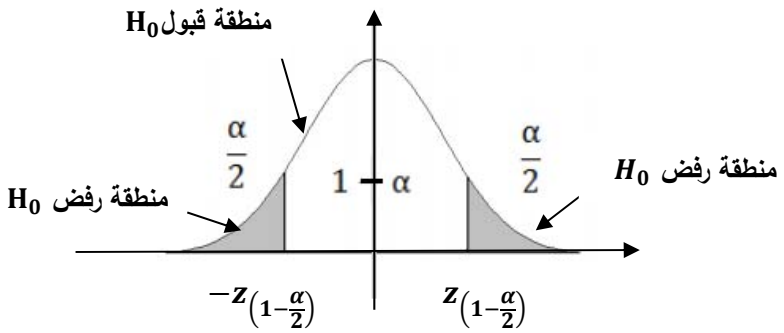
$$\boldsymbol{Z_{Cal}} = \frac{\overline{\boldsymbol{X}} - \boldsymbol{\mu_0}}{\boldsymbol{\sigma}/\sqrt{\boldsymbol{n}}} \rightarrow \boldsymbol{N}(\boldsymbol{0}, \boldsymbol{1})$$

بحيث $\boldsymbol{Z_{Cal}}$ تسمح لنا بحساب الفرق بين $(\overline{\boldsymbol{X}} - \boldsymbol{\mu_0})$، إذ يتم رفض الفرضية $\boldsymbol{H_0}$ إذا كان الفرق بالقيمة المطلقة كبير، أي يكون متوسط العينة $\overline{\boldsymbol{X}}$ بعيد عن متوسط المجتمع $\boldsymbol{\mu_0}$ تحت الفرضية $\boldsymbol{H_0}$. إذن يتم رفض $\boldsymbol{H_0}$ إذا $|\boldsymbol{Z_{Cal}}| > \boldsymbol{z_0}$ ، وبالتالي لتحديد منطقة الحرجة يتم تحديد أولا $\boldsymbol{z_0}$:

$$\boldsymbol{P}(|\boldsymbol{Z_{Cal}}| > \boldsymbol{z_0}) = \boldsymbol{\alpha}$$
$$\Leftrightarrow \boldsymbol{P}\left(\boldsymbol{Z_{Cal}} > \boldsymbol{z_0} \text{ أو } \boldsymbol{Z_{Cal}} < -\boldsymbol{z_0}\right) = \boldsymbol{\alpha}$$
$$\Leftrightarrow \boldsymbol{P}(\boldsymbol{Z_{Cal}} > \boldsymbol{z_0}) + \boldsymbol{P}(\boldsymbol{Z_{Cal}} < -\boldsymbol{z_0}) = \boldsymbol{\alpha}$$
$$\Leftrightarrow \boldsymbol{1} - \boldsymbol{P}(\boldsymbol{Z_{Cal}} < \boldsymbol{z_0}) + \boldsymbol{1} - \boldsymbol{P}(\boldsymbol{Z_{Cal}} < \boldsymbol{z_0}) = \boldsymbol{\alpha}$$
$$\Leftrightarrow \boldsymbol{2} - \boldsymbol{2}\,\boldsymbol{P}(\boldsymbol{Z_{Cal}} < \boldsymbol{z_0}) = \boldsymbol{\alpha} \Leftrightarrow \boldsymbol{P}(\boldsymbol{Z_{Cal}} < \boldsymbol{z_0}) = \boldsymbol{1} - \frac{\boldsymbol{\alpha}}{\boldsymbol{2}} \Rightarrow \boldsymbol{z_0} = \boldsymbol{z}_{\left(\boldsymbol{1}-\frac{\boldsymbol{\alpha}}{\boldsymbol{2}}\right)}$$

و بالتالي تكون قاعدة القرار كالأتي:

- يتم رفض $\boldsymbol{H_0}$ إذا كان $|\boldsymbol{Z_{Cal}}| > \boldsymbol{z}_{\left(\boldsymbol{1}-\frac{\boldsymbol{\alpha}}{\boldsymbol{2}}\right)} \Leftrightarrow \boldsymbol{Z_{Cal}} \notin \left[-\boldsymbol{z}_{\left(\boldsymbol{1}-\frac{\boldsymbol{\alpha}}{\boldsymbol{2}}\right)}, \boldsymbol{z}_{\left(\boldsymbol{1}-\frac{\boldsymbol{\alpha}}{\boldsymbol{2}}\right)}\right]$
- و يتم قبول $\boldsymbol{H_0}$ إذا كان $|\boldsymbol{Z_{Cal}}| < \boldsymbol{z}_{\left(\boldsymbol{1}-\frac{\boldsymbol{\alpha}}{\boldsymbol{2}}\right)} \Leftrightarrow \boldsymbol{Z_{Cal}} \in \left[-\boldsymbol{z}_{\left(\boldsymbol{1}-\frac{\boldsymbol{\alpha}}{\boldsymbol{2}}\right)}, \boldsymbol{z}_{\left(\boldsymbol{1}-\frac{\boldsymbol{\alpha}}{\boldsymbol{2}}\right)}\right]$



ب–في حالة ما إذا كانت الفرضية البديلة على شكل:

$$H_1: \mu > \mu_0$$

يتم تحديد منطقة الحرجة ب:

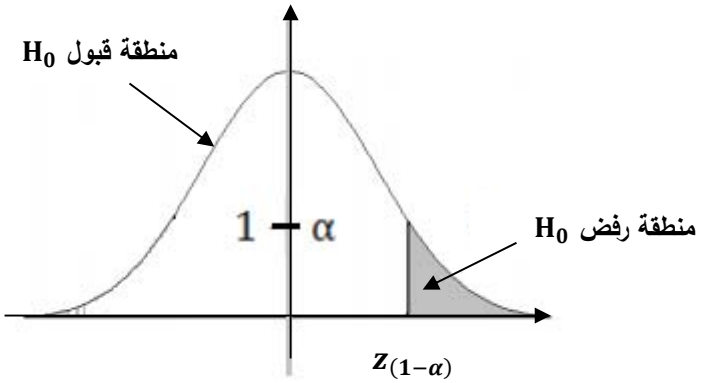
$$P(|Z_{Cal}| > z_0) = \alpha \Leftrightarrow P\left(Z_{Cal} > z_0 \text{ أو } Z_{Cal} < -z_0\right) = \alpha$$

$$\Leftrightarrow P(Z_{Cal} > z_0) + P(Z_{Cal} < -z_0) = \alpha \Leftrightarrow P(Z_{Cal} > z_0) = \alpha$$

$$\Leftrightarrow 1 - P(Z_{Cal} < z_0) = \alpha \Leftrightarrow P(Z_{Cal} < z_0) = 1 - \alpha \Rightarrow z_0 = z_{(1-\alpha)}.$$

و بالتالي تكون قاعدة القرار كالأتي:

يتم رفض H_0 إذا كان $Z_{Cal} > z_{(1-\alpha)}$ ويتم قبول H_0 إذا كان $Z_{Cal} < z_{(1-\alpha)}$.

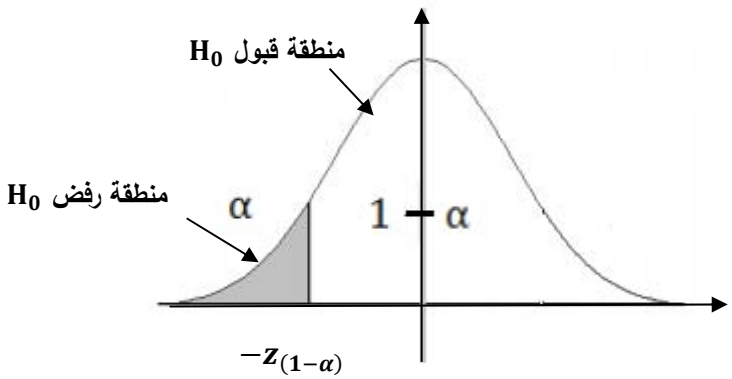


ج–في حالة ما إذا كانت الفرضية البديلة على شكل:

$$H_1: \mu < \mu_0$$

تكون قاعدة القرار كالأتي:

يتم رفض H_0 إذا كان $Z_{Cal} < -z_{(1-\alpha)}$ ويتم قبول H_0 إذا كان $Z_{Cal} > -z_{(1-\alpha)}$.



ملاحظة: إذا كان المجتمع الذي سحبت منه العينة غير طبيعي تباينه σ^2 معلوم وكان حجم العينة $(n \geq 30)$، فإن حسب نظرية النهاية المركزية $\overline{X}$ يتبع توزيع قريباً من التوزيع الطبيعي. وتستعمل في الاختبار الاحصائية التالية:

$$Z = \frac{\overline{X} - \mu}{\sigma/\sqrt{n}} \rightarrow N(0,1).$$

❖ **المجتمع يتبع التوزيع الطبيعي وتباينه σ^2 مجهول وحجم العينة $(n \geq 30)$.**

عند سحب عينة حجمها n من مجتمع طبيعي متوسطه μ وتباينه σ^2 مجهول. ونفرض أننا سوف نقوم باختبار الفرضية الصفرية التالي:

$$H_0: \mu = \mu_0$$

مقابل الفرضية البديلة على شكل:

$$H_1: \mu \neq \mu_0 \quad \text{أو} \quad H_1: \mu < \mu_0 \quad \text{أو} \quad H_1: \mu > \mu_0$$

وبما أن المقدر النقطي لمتوسط المجتمع μ هو متوسط العينة $\overline{X}$، والمجتمع طبيعي وتباينه مجهول، فإنه يتم تعويض الانحراف المعياري للمجتمع σ المجهول بالانحراف المعياري للعينة S، وبما أن حجم العينة$(n \geq 30)$ فيكون توزيع المتوسط $\overline{X}$ هو التوزيع القريب من التوزيع طبيعي و ذلك حسب نظرية النهاية المركزية. بحيث:

$$\overline{X} \rightarrow N(\mu_{\overline{X}}, \sigma^2_{\overline{X}}) \Rightarrow \overline{X} \rightarrow N\left(\mu, \frac{S^2}{n-1}\right)$$

إذن سوف نستعمل في الاختبار الإحصائية التالية:

$$Z = \frac{\overline{X} - \mu_{\overline{X}}}{\sigma_{\overline{X}}} = \frac{\overline{X} - \mu}{\frac{S}{\sqrt{n-1}}} \rightarrow N(0,1)$$

و نقوم بحساب Z_{Cal} والتي تمثل الاحصائية Z تحت الفرضية H_0:

$$Z_{Cal} = \frac{\overline{X} - \mu_0}{\frac{S}{\sqrt{n-1}}} \rightarrow N(0,1)$$

و بالتالي تكون قاعدة القرار كالأتي:

أ- إذا كانت الفرضية البديلة على شكل $H_1: \mu \neq \mu_0$

- يتم رفض H_0 إذا كان $|Z_{Cal}| > z_{\left(1-\frac{\alpha}{2}\right)} \Leftrightarrow Z_{Cal} \notin \left[-z_{\left(1-\frac{\alpha}{2}\right)}, z_{\left(1-\frac{\alpha}{2}\right)}\right]$.
- ويتم قبول H_0 إذا كان $|Z_{Cal}| < z_{\left(1-\frac{\alpha}{2}\right)} \Leftrightarrow Z_{Cal} \in \left[-z_{\left(1-\frac{\alpha}{2}\right)}, z_{\left(1-\frac{\alpha}{2}\right)}\right]$.

ب- في حالة ما إذا كانت الفرضية البديلة على شكل $H_1: \mu > \mu_0$

- يتم رفض H_0 إذا كان $Z_{Cal} > z_{(1-\alpha)}$.
- ويتم قبول H_0 إذا كان $Z_{Cal} < z_{(1-\alpha)}$.

ت- في حالة ما إذا كانت الفرضية البديلة على شكل $H_1: \mu < \mu_0$

- يتم رفض H_0 إذا كان $Z_{Cal} < -z_{(1-\alpha)}$.
- ويتم قبول H_0 إذا كان $Z_{Cal} > -z_{(1-\alpha)}$.

ملاحظة:

إذا كان المجتمع الذي سحبت منه العينة غير طبيعي متوسطه μ وتباينه σ^2 مجهول، ولكن كان حجم العينة $(n \geq 30)$، فإن حسب نظرية النهاية المركزية $\bar{X}$ يتبع توزيع قريباً من التوزيع الطبيعي. وتستعمل في الاختبار الاحصائية التالية:

$$Z = \frac{\bar{X} - \mu}{\frac{S}{\sqrt{n-1}}} \rightarrow N(0,1).$$

❖ المجتمع يتبع التوزيع الطبيعي وتباينه σ^2 مجهول وحجم العينة $(n \leq 30)$.

عند سحب عينة حجمها n من مجتمع طبيعي متوسطه μ وتباينه σ^2 مجهول. ونفرض أننا سوف نقوم باختبار الفرضية الصفرية التالي:

$$H_0: \mu = \mu_0$$

مقابل الفرضية البديلة على شكل:

$$H_1: \mu \neq \mu_0 \quad \text{أو} \quad H_1: \mu < \mu_0 \quad \text{أو} \quad H_1: \mu > \mu_0$$

بما أن المقدر النقطي لمتوسط المجتمع μ هو متوسط العينة $\bar{X}$، والمجتمع طبيعي وتباينه مجهول، فإنه يتم تعويض الانحراف المعياري للمجتمع σ المجهول بالانحراف المعياري للعينة S، وبما أن حجم العينة

(n ≤30) فيكون توزيع المتوسط $\overline{X}$ هو التوزيع ستيودنت بدرجة الحرية $(n-1)$. ونستعمل في الاختبار الإحصائية التالية:

$$T = \frac{\overline{X} - \mu}{\frac{S}{\sqrt{n-1}}} \rightarrow t(n-1)$$

و نقوم بحساب T_{Cal} والتي تمثل الاحصائية T تحت الفرضية H_0:

$$T_{Cal} = \frac{\overline{X} - \mu_0}{\frac{S}{\sqrt{n-1}}} \rightarrow t(n-1)$$

و بالتالي تكون قاعدة القرار كالأتي:

أ- إذا كانت الفرضية البديلة على شكل $H_1: \mu \neq \mu_0$

- يتم رفض H_0 إذا كان $|T_{Cal}| > t_{\left(n-1,\ 1-\frac{\alpha}{2}\right)} \Leftrightarrow T_{Cal} \notin \left[-t_{\left(n-1,\ 1-\frac{\alpha}{2}\right)}, t_{\left(n-1,\ 1-\frac{\alpha}{2}\right)}\right]$
- ويتم قبول H_0 إذا كان $|T_{Cal}| < t_{\left(n-1,\ 1-\frac{\alpha}{2}\right)} \Leftrightarrow T_{Cal} \in \left[-t_{\left(n-1,\ 1-\frac{\alpha}{2}\right)}, t_{\left(n-1,\ 1-\frac{\alpha}{2}\right)}\right]$

ب-في حالة ما إذا كانت الفرضية البديلة على شكل $H_1:\ \mu > \mu_0$

- يتم رفض H_0 إذا كان $T_{Cal} > t_{(n-1,\ 1-\alpha)}$.
- ويتم قبول H_0 إذا كان $T_{Cal} < t_{(n-1,\ 1-\alpha)}$.

ت-في حالة ما إذا كانت الفرضية البديلة على شكل $H_1:\ \mu < \mu_0$

- يتم رفض H_0 إذا كان $T_{Cal} < -t_{(n-1,\ 1-\alpha)}$.
- ويتم قبول H_0 إذا كان $T_{Cal} > -t_{(n-1,\ 1-\alpha)}$.

<u>مثال:</u>

سحبت عينة حجمها n من مجتمع طبيعي متوسطه μ وتباينه σ^2. فوجد أن متوسطها $\overline{x} = 20$ و إنحرافها المعياري $S = 0.9$ اختبر الإدعاء بأن متوسط المجتمع يساوي 18 عند مستوى المعنوية 5% في الحالات التالية:

1. إذا كانت الفرضية البديلة على شكل $H_1: \mu \neq 18$ وكان حجم العينة $n = 25$، $\sigma^2 = 1$.
2. إذا كانت الفرضية البديلة على شكل $H_1: \mu > 18$ وكان حجم العينة $n = 36$، σ^2 ***مجهول.***
3. إذا كانت الفرضية البديلة على شكل $H_1: \mu < 18$ وكان حجم العينة $n = 25$، σ^2 ***مجهول.***

حل:

لدينا مجتمع إحصائي طبيعي وتباينه σ^2.

سحبت منه عينة حجم n متوسطها $\bar{x} = 20$ وانحرافها المعياري $S = 0.9$.

اختبر الإدعاء بأن متوسط المجتمع يساوي 18 عند $\alpha = 0.05$ ولذلك نتبع خطوات إجراء الإختبار.

1. إذا كانت الفرضية البديلة على شكل $H_1: \mu \neq 18$ وكان حجم العينة $n = 25$، $\sigma^2 = 1$:

- **صياغة الفرضيات:**

$$\begin{cases} H_0: \mu = 18 \\ H_1: \mu \neq 18 \end{cases}$$

- **الاحصائية المستعملة:**

بما ان المجتمع طبيعي وتباينه معلوم $\sigma^2 = 1$ ، فإننا نستعمل في الاختبار الإحصائية التالية:

$$Z = \frac{\bar{X} - \mu}{\sigma/\sqrt{n}} \rightarrow N(0,1)$$

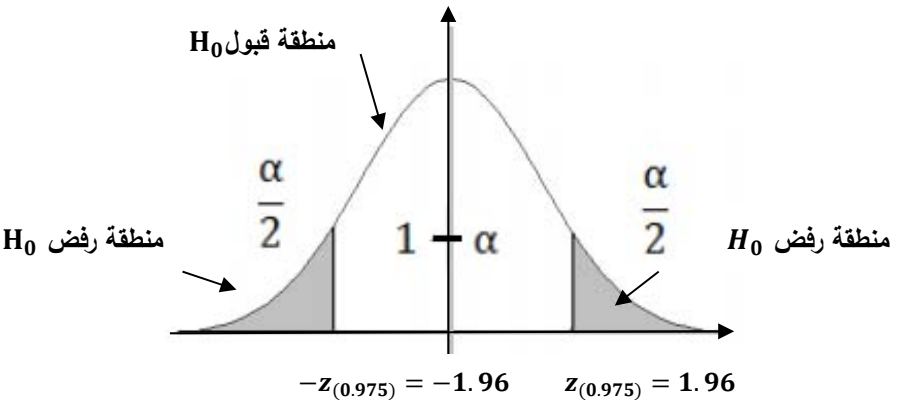
- **حساب Z_{Cal}:**

و نقوم بحساب Z_{Cal} والتي تمثل الاحصائية Z تحت الفرضية H_0:

$$Z_{Cal} = \frac{\bar{x} - \mu_0}{\sigma/\sqrt{n}} = \frac{20 - 18}{1/\sqrt{25}} = 10$$

- **تحديد المنطقة الحرجة :**

تحدد المنطقة الحرجة بتحديد القيم الحرجة: $\alpha = 0.05 \Rightarrow z_{\left(1-\frac{\alpha}{2}\right)} = z_{\left(1-\frac{0.05}{2}\right)} = z_{(0.975)} = 1.96$



وقاعدة القرار هي كالأتي:

- يتم رفض H_0 إذا كان $|Z_{Cal}| > 1.96 \Leftrightarrow Z_{Cal} \notin [-1.96, 1.96]$
- و يتم قبول H_0 إذا كان $|Z_{Cal}| < 1.96 \Leftrightarrow Z_{Cal} \in [-1.96, 196]$

- **إتخاذ القرار :**

بما أن $Z_{Cal} = 10 \notin [-1.96, 1.96]$ إذن H_0 **مرفوضة وبالتالي** H_1 **مقبولة أي** $\mu \neq 18$.

2. <u>إذا كانت الفرضية البديلة على شكل</u> $H_1: \mu > 18$ **<u>وكان حجم العينة</u>** $n = 36$، σ^2 ***<u>مجهول</u>***:

- **صياغة الفرضيات:**

$$\begin{cases} H_0: \mu = 18 \\ H_1: \mu > 18 \end{cases}$$

- **الاحصائية المستعملة:**

بما ان المجتمع طبيعي وتباينه مجهول، فإنه يتم تعويض الانحراف المعياري للمجتمع σ المجهول بالانحراف المعياري للعينة S، وبما أن حجم العينة $(n = 36 > 30)$ فيكون توزيع المتوسط $\overline{X}$ هو التوزيع القريب من التوزيع طبيعي و ذلك حسب نظرية النهاية المركزية. وسوف نستعمل في الاختبار الإحصائية التالية:

$$Z = \frac{\overline{X} - \mu}{\frac{S}{\sqrt{n-1}}} \rightarrow N(0,1)$$

- **حساب** Z_{Cal}:

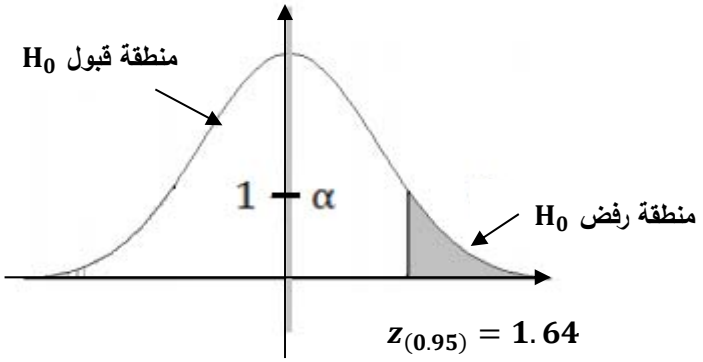
ونقوم بحساب Z_{Cal} والتي تمثل الاحصائية Z تحت الفرضية H_0:

$$Z_{Cal} = \frac{\overline{x} - \mu_0}{\frac{S}{\sqrt{n-1}}} = \frac{20 - 18}{\frac{0.9}{\sqrt{36-1}}} = 13.15$$

- **تحديد المنطقة الحرجة :**

تحدد المنطقة الحرجة بتحديد القيم الحرجة

$$\alpha = 0.05 \Rightarrow z_{(1-\alpha)} = z_{(1-0.05)} = z_{(0.95)} = 1.64$$



وقاعدة القرار هي كالأتي:

يتم رفض H_0 إذا كان $Z_{Cal} > 1.64$ ويتم قبول H_0 إذا كان $Z_{Cal} < 1.64$

- **إتخاذ القرار :**

بما أن $Z_{Cal} = 13.15 > 1.64$ إذن H_0 **مرفوضة و بالتالي** H_1 **مقبولة أي** $\mu > 18$.

3.*إذا كانت الفرضية البديلة على شكل* $H_1: \mu < 18$ ***وكان حجم العينة*** $n = 25$، σ^2 ***مجهول :***

- **صياغة الفرضيات:**

$$\begin{cases} H_0: \mu = 18 \\ H_1: \mu < 18 \end{cases}$$

- **الاحصائية المستعملة:**

بما ان المجتمع طبيعي وتباينه مجهول، فإنه يتم تعويض الانحراف المعياري للمجتمع σ المجهول بالانحراف المعياري للعينة S، وبما أن حجم العينة $(n = 25 < 30)$ فيكون توزيع المتوسط $\overline{X}$ هو التوزيع ستيودنت بدرجة الحرية $(n-1)$. ونستعمل في الاختبار الإحصائية التالية:

$$T = \frac{\overline{X} - \mu}{\frac{S}{\sqrt{n-1}}} \rightarrow t(n-1)$$

- **حساب** Z_{Cal}:

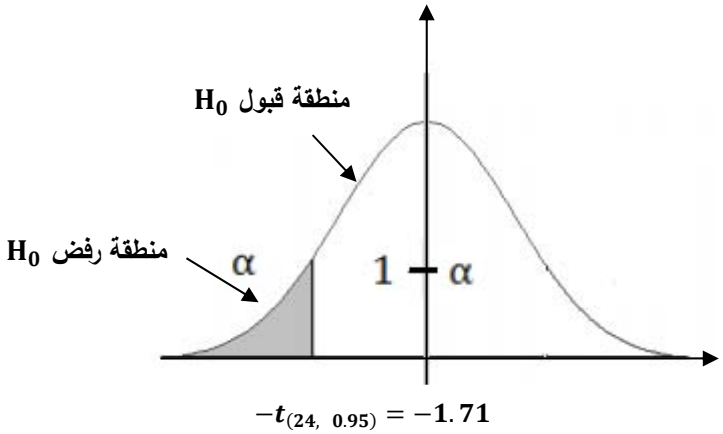
و نقوم بحساب T_{Cal} والتي تمثل الاحصائية T تحت الفرضية H_0:

$$T_{Cal} = \frac{\overline{x} - \mu_0}{\frac{S}{\sqrt{n-1}}} = \frac{20 - 18}{\frac{0.9}{\sqrt{25-1}}} = 10.88$$

- **تحديد المنطقة الحرجة :**

تحدد المنطقة الحرجة بتحديد القيم الحرجة

$$\alpha = 0.05 \Rightarrow t_{(n-1,\ 1-\alpha)} = t_{(25-1,\ 1-0.05)} = t_{(24,\ 0.95)} = 1.71$$



وقاعدة القرار هي كالأتي:

يتم رفض H_0 إذا كان $T_{Cal} < -1.71$ ويتم قبول H_0 إذا كان $T_{Cal} > -1.71$.

- **إتخاذ القرار :**

بما أن $T_{Cal} = 10.88 > -1.71$ إذن H_0 **مقبولة وبالتالي** $\mu = 18$.

4. <u>اختبارات الفرق بين متوسطي مجتمعين طبيعيين مستقلين:</u>

عند السحب لعينتين عشوائيتين مستقلتين حجمهما n_1 و n_2 على التوالي، من مجتمعين متوسطهما الحسابي μ_1 وμ_2 وتباينهما σ_1^2 و σ_2^2 على التوالي. فإذا كان $\bar{X}_1$ و $\bar{X}_2$ يمثلان المتوسط الحسابي للعينتين على التوالي و S_1^2 و S_2^2 تباينهما. وكانت الفرضية المراد إختبارها هي تأكيد أو نفي تساوي متوسطي مجتمعين: $\mu_1 = \mu_2$.

ولهذا يتم اختبار الفرضية الصفرية التالي:

$$H_0: \mu_1 - \mu_2 = 0$$

مقابل الفرضية البديلة على شكل:

$$H_1: \mu_1 - \mu_2 \neq 0 \quad \text{أو} \quad H_1: \mu_1 - \mu_2 > 0 \quad \text{أو} \quad H_1: \mu_1 - \mu_2 < 0$$

والمقدر النقطي للفرق بين متوسطي مجتمعين $(\mu_1 - \mu_2)$ هو الفرق بين متوسطي العينتين $(\bar{X}_1 - \bar{X}_2)$.

❖ في حالة معلومية تباين مجتمعيين طبيعيين (σ_1^2 و σ_2^2 معلومين)

بما أن المجتمعان طبيعيان وتباينهما σ_1^2 و σ_2^2 معلومان فإن توزيع المعاينة للفرق بين متوسطين $(\bar{X}_1 - \bar{X}_2)$ يتبع التوزيع الطبيعي، بحيث:

$$\begin{cases} \bar{X}_1 \to N\left(\mu_1, \dfrac{\sigma_1^2}{n_1}\right) \\ \bar{X}_2 \to N\left(\mu_2, \dfrac{\sigma_2^2}{n_2}\right) \end{cases} \Rightarrow \quad \bar{X}_1 - \bar{X}_2 \to N\left(\mu_1 - \mu_2, \frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}\right)$$

وسوف نستعمل في الاختبار الإحصائية التالية:

$$\Rightarrow \quad Z = \frac{(\bar{X}_1 - \bar{X}_2) - (\mu_1 - \mu_2)}{\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}}} \quad \to \quad N(0,1)$$

ونقوم بحساب Z_{Cal} والتي تمثل الاحصائية Z تحت الفرضية $H_0: \mu_1 - \mu_2 = 0$:

$$Z_{Cal} = \frac{(\bar{X}_1 - \bar{X}_2)}{\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}}} \to N(0,1)$$

و بالتالي تكون قاعدة القرار كالأتي:

أ- إذا كانت الفرضية البديلة على شكل $H_1: \mu_1 - \mu_2 \neq 0$

- يتم رفض H_0 إذا كان $|Z_{Cal}| > z_{\left(1-\frac{\alpha}{2}\right)} \Leftrightarrow Z_{Cal} \notin \left[-z_{\left(1-\frac{\alpha}{2}\right)}, z_{\left(1-\frac{\alpha}{2}\right)}\right]$.
- ويتم قبول H_0 إذا كان $|Z_{Cal}| < z_{\left(1-\frac{\alpha}{2}\right)} \Leftrightarrow Z_{Cal} \in \left[-z_{\left(1-\frac{\alpha}{2}\right)}, z_{\left(1-\frac{\alpha}{2}\right)}\right]$.

ب- في حالة ما إذا كانت الفرضية البديلة على شكل $H_1: \mu_1 - \mu_2 > 0$

- يتم رفض H_0 إذا كان $Z_{Cal} > z_{(1-\alpha)}$.
- ويتم قبول H_0 إذا كان $Z_{Cal} < z_{(1-\alpha)}$.

ت- في حالة ما إذا كانت الفرضية البديلة على شكل $H_1: \mu_1 - \mu_2 < 0$

- يتم رفض H_0 إذا كان $Z_{Cal} < -z_{(1-\alpha)}$.
- ويتم قبول H_0 إذا كان $Z_{Cal} > -z_{(1-\alpha)}$.

ملاحظة: إذا كان المجتمعان اللذان سحبت منهما العينتان **غير طبيعيين أو مجهولي التوزيع** تباينهما σ_1^2 و σ_2^2 **معلومين** وحجم العينتين $n_1, n_2 \geq 30$ ، فحسب نظرية النهاية المركزية الإحصاءة $(\bar{X}_1 - \bar{X}_2)$ تتبع توزيع قريباً من التوزيع الطبيعي. وتستعمل في الاختبار الاحصائية التالية أيضا:

$$Z = \frac{(\bar{X}_1 - \bar{X}_2) - (\mu_1 - \mu_2)}{\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}}} \quad \rightarrow \quad N(0,1)$$

❖ **في حالة مجهولية تباين المجتمعين الطبيعيين (σ_1^2 و σ_2^2 مجهولين) و حجم العينتين $n_1, n_2 \geq 30$.**

يتم تعويض تباين المجتمع الأول σ_1^2 المجهول بالتباين للعينة الأولى S_1^2 ويتم تعويض تباين المجتمع الثاني σ_2^2 المجهول بالتباين للعينة الثانية S_2^2، ويكون توزيع للفرق بين متوسطي العينتين $(\bar{X}_1 - \bar{X}_2)$ يتبع التوزيع الطبيعي لأن حجم العينتين $n_1, n_2 \geq 30$. بحيث:

$$\begin{cases} \bar{X}_1 \rightarrow N\left(\mu_1, \frac{S_1^2}{n_1 - 1}\right) \\ \bar{X}_2 \rightarrow N\left(\mu_2, \frac{S_2^2}{n_2 - 1}\right) \end{cases} \Rightarrow \bar{X}_1 - \bar{X}_2 \rightarrow N\left(\mu_1 - \mu_2, \frac{S_1^2}{n_1 - 1} + \frac{S_2^2}{n_2 - 1}\right)$$

وسوف نستعمل في الاختبار الإحصائية التالية:

$$\Rightarrow \quad Z = \frac{(\bar{X}_1 - \bar{X}_2) - (\mu_1 - \mu_2)}{\sqrt{\frac{S_1^2}{n_1 - 1} + \frac{S_2^2}{n_2 - 1}}} \quad \rightarrow \quad N(0,1)$$

ونقوم بحساب Z_{Cal} والتي تمثل الاحصائية Z تحت الفرضية $H_0: \mu_1 - \mu_2 = 0$:

$$Z_{Cal} = \frac{(\bar{X}_1 - \bar{X}_2)}{\sqrt{\frac{S_1^2}{n_1 - 1} + \frac{S_2^2}{n_2 - 1}}} \rightarrow N(0,1)$$

و بالتالي تكون قاعدة القرار كالأتي:

أ- إذا كانت الفرضية البديلة على شكل $H_1: \mu_1 - \mu_2 \neq 0$

- يتم رفض H_0 إذا كان $|Z_{Cal}| > z_{\left(1-\frac{\alpha}{2}\right)} \Leftrightarrow Z_{Cal} \notin \left[-z_{\left(1-\frac{\alpha}{2}\right)}, z_{\left(1-\frac{\alpha}{2}\right)}\right]$.
- ويتم قبول H_0 إذا كان $|Z_{Cal}| < z_{\left(1-\frac{\alpha}{2}\right)} \Leftrightarrow Z_{Cal} \in \left[-z_{\left(1-\frac{\alpha}{2}\right)}, z_{\left(1-\frac{\alpha}{2}\right)}\right]$.

ب–في حالة ما إذا كانت الفرضية البديلة على شكل $H_1: \mu_1 - \mu_2 > 0$

- يتم رفض H_0 إذا كان $Z_{Cal} > z_{(1-\alpha)}$.
- ويتم قبول H_0 إذا كان $Z_{Cal} < z_{(1-\alpha)}$.

ت–في حالة ما إذا كانت الفرضية البديلة على شكل $H_1: \mu_1 - \mu_2 < 0$

- يتم رفض H_0 إذا كان $Z_{Cal} < -z_{(1-\alpha)}$.
- ويتم قبول H_0 إذا كان $Z_{Cal} > -z_{(1-\alpha)}$.

ملاحظة: في حالة مجتمعيين غير طبيعيين أو مجهولي التوزيع تباينهما σ_1^2 و σ_2^2 مجهولين وحجم العينتين $n_1, n_2 \geq 30$ و ذلك بتطبيق نظرية النهاية المركزية. وسوف نستعمل في الاختبار الإحصائية التالية أيضا:

$$\Rightarrow \quad Z = \frac{(\bar{X}_1 - \bar{X}_2) - (\mu_1 - \mu_2)}{\sqrt{\frac{S_1^2}{n_1 - 1} + \frac{S_2^2}{n_2 - 1}}} \quad \rightarrow \quad N(0,1)$$

❖ **في حالة مجهولية تباين المجتمعيين الطبيعيين (σ_1^2 و σ_2^2 مجهولين) و حجم العينتين** $n_1 < 30$ أو $n_2 < 30$.

هنا نميز حالتين:

- إذا كان $\sigma_1^2 = \sigma_2^2 = \sigma^2$ تباين المجتمعين الطبيعيين متساويين فإن في هذه الحالة نعوض σ^2 بتباين المشترك المرجح S_P^2 ويكون توزيع الفرق بين متوسطي العينتين $(\bar{X}_1 - \bar{X}_2)$ يتبع التوزيع الستيودنت بدرجة الحرية $(n_1 + n_2 - 2)$، نستعمل في الاختبار الإحصائية التالية:

$$T = \frac{(\bar{X}_1 - \bar{X}_2) - (\mu_1 - \mu_2)}{\sqrt{\frac{S_p^2}{n_1} + \frac{S_p^2}{n_2}}} \quad \rightarrow \quad t(n_1 + n_2 - 2)$$

بحيث:

$$S_p^2 = \frac{n_1 S_1^2 + n_2 S_2^2}{n_1 + n_2 - 2}$$

ونقوم بحساب T_{Cal} والتي تمثل الاحصائية T تحت الفرضية $H_0: \mu_1 - \mu_2 = 0$:

$$T_{Cal} = \frac{(\bar{X}_1 - \bar{X}_2)}{\sqrt{\frac{S_p^2}{n_1} + \frac{S_p^2}{n_2}}} \quad \rightarrow \quad t(n_1 + n_2 - 2)$$

وبالتالي تكون قاعدة القرار كالأتي:

أ- إذا كانت الفرضية البديلة على شكل $H_1: \mu_1 - \mu_2 \neq 0$

- يتم رفض H_0 إذا كان

$$|T_{Cal}| > t_{\left(n_1+n_2-2,\ 1-\frac{\alpha}{2}\right)} \Leftrightarrow T_{Cal} \notin \left[-t_{\left(n_1+n_2-2,\ 1-\frac{\alpha}{2}\right)}, t_{\left(n_1+n_2-2,\ 1-\frac{\alpha}{2}\right)}\right]$$

- ويتم قبول H_0 إذا كان

$$|T_{Cal}| < t_{\left(n_1+n_2-2,\ 1-\frac{\alpha}{2}\right)} \Leftrightarrow T_{Cal} \in \left[-t_{\left(n_1+n_2-2,\ 1-\frac{\alpha}{2}\right)}, t_{\left(n_1+n_2-2,\ 1-\frac{\alpha}{2}\right)}\right]$$

ب-في حالة ما إذا كانت الفرضية البديلة على شكل $H_1: \mu_1 - \mu_2 > 0$

- يتم رفض H_0 إذا كان $T_{Cal} > t_{(n_1+n_2-2,\ 1-\alpha)}$.
- ويتم قبول H_0 إذا كان $T_{Cal} < t_{(n_1+n_2-2,\ 1-\alpha)}$.

ت-في حالة ما إذا كانت الفرضية البديلة على شكل $H_1: \mu_1 - \mu_2 < 0$

- يتم رفض H_0 إذا كان $T_{Cal} < -t_{(n_1+n_2-2,\ 1-\alpha)}$.
- ويتم قبول H_0 إذا كان $T_{Cal} > -t_{(n_1+n_2-2,\ 1-\alpha)}$.

- إذا كان $\sigma_1^2 \neq \sigma_2^2$ تباين المجتمعين مختلفين فإن في هذه الحالة نعوض تباين المجتمع الأول σ_1^2 المجهول بالتباين العينة الأولى S_1^2 ونعوض تباين المجتمع الثاني σ_2^2 المجهول بالتباين للعينة الثانية S_2^2، ويكون توزيع الفرق بين متوسطي العينتين $(\bar{X}_1 - \bar{X}_2)$ يتبع التوزيع الستيودنت بدرجة الحرية (v):

$$T = \frac{(\bar{X}_1 - \bar{X}_2) - (\mu_1 - \mu_2)}{\sqrt{\frac{S_1^2}{n_1 - 1} + \frac{S_2^2}{n_2 - 1}}} \rightarrow t(v)$$

بحيث

$$v = \frac{\left(\frac{S_1^2}{n_1 - 1} + \frac{S_2^2}{n_2 - 1}\right)^2}{\left(\frac{S_1^2}{n_1 - 1}\right)^2 + \left(\frac{S_2^2}{n_2 - 1}\right)^2}$$

ونقوم بحساب T_{Cal} والتي تمثل الاحصائية T تحت الفرضية $H_0: \mu_1 - \mu_2 = 0$:

$$T_{Cal} = \frac{(\bar{X}_1 - \bar{X}_2)}{\sqrt{\frac{S_1^2}{n_1 - 1} + \frac{S_2^2}{n_2 - 1}}} \rightarrow t(v)$$

و بالتالي تكون قاعدة القرار كالأتي:

أ- إذا كانت الفرضية البديلة على شكل $H_1: \mu_1 - \mu_2 \neq 0$

- يتم رفض H_0 إذا كان $|T_{Cal}| > t_{\left(v,\ 1-\frac{\alpha}{2}\right)} \Leftrightarrow T_{Cal} \notin \left[-t_{\left(v,\ 1-\frac{\alpha}{2}\right)}, t_{\left(v,\ 1-\frac{\alpha}{2}\right)}\right]$.
- ويتم قبول H_0 إذا كان $|T_{Cal}| < t_{\left(v,\ 1-\frac{\alpha}{2}\right)} \Leftrightarrow T_{Cal} \in \left[-t_{\left(v,\ 1-\frac{\alpha}{2}\right)}, t_{\left(v,\ 1-\frac{\alpha}{2}\right)}\right]$.

ب-في حالة ما إذا كانت الفرضية البديلة على شكل $H_1: \mu_1 - \mu_2 > 0$

- يتم رفض H_0 إذا كان $T_{Cal} > t_{(v,\ 1-\alpha)}$.
- ويتم قبول H_0 إذا كان $T_{Cal} < t_{(v,\ 1-\alpha)}$.

ت-في حالة ما إذا كانت الفرضية البديلة على شكل $H_1: \mu_1 - \mu_2 < 0$

- يتم رفض H_0 إذا كان $T_{Cal} < -t_{(v,\ 1-\alpha)}$.
- ويتم قبول H_0 إذا كان $T_{Cal} > -t_{(v,\ 1-\alpha)}$.

<u>مثال:</u>

إذا كان لدينا مجتمعان إحصائيان طبيعيان مستقلان الأول والثاني، وكانا متوسطاهما μ_1 و μ_2 وتباينهما σ_1^2 و σ_2^2 على التوالي، سحبت منهما عينتان عشوائيتان على التوالي:

- العينة الأولى: حجمها $n_1 = 40$ ، متوسطها الحسابي $\bar{x}_1 = 58$ وتباينها $S_1^2 = 4$.

- العينة الثانية : حجمها $n_2 = 35$ ، متوسطها الحسابي $\bar{x}_2 = 47$ و تباينها $S_2^2 = 3$.

1. يقال أن متوسط المجتمع الأول μ_1 أكبر من متوسط المجتمع الثاني μ_2، هل نستطيع أن نتأكد من هذا القول عند مستوى المعنوية **5%** :

- في حالة $\sigma_1^2 = 10$ و σ_2^2 =5 .

- وفي حالة σ_1^2 و σ_2^2 مجهولان.

2. اختبر عند مستوى المعنوية **5%** الفرضية $H_0: \mu_1 = \mu_2$ مقابل الفرضية $H_1: \mu_1 \neq \mu_2$، علما أن حجم العينتين $n_1 = 20$ و $n_2 = 14$ إذا كان:

- المجتمعان تباينيهما σ_1^2 و σ_2^2 متساويين ومجهولين

- المجتمعان تباينيهما σ_1^2 و σ_2^2 غير متساويين ومجهولين.

الحل:

المجتمع 1 : غير محدود وتوزيعه طبيعي، سحبت منه العينة الأولى: $\begin{cases} n_1 = 40 \\ \bar{x}_1 = 58 \\ S_1^2 = 4 \end{cases}$

المجتمع 2 : غير محدود وتوزيعه طبيعي، سحبت منه العينة اثانية: $\begin{cases} n_2 = 35 \\ \bar{x}_2 = 47 \\ S_2^2 = 3 \end{cases}$

1. التأكد من أن متوسط المجتمع الأول μ_1 أكبر من متوسط المجتمع الثاني μ_2 عند مستوى المعنوية 5%:

سوف نقوم باختبار لتأكد من أن $\mu_1 > \mu_2$ أي أن $\mu_1 - \mu_2 > 0$.

- **في حالة $\sigma_1^2 = 10$ و $\sigma_2^2 = 5$** :

- **صياغة الفرضيات:**

$$\begin{cases} H_0: \mu_1 - \mu_2 = 0 \\ H_1: \mu_1 - \mu_2 > 0 \end{cases}$$

- **الاحصائية المستعملة:**

بما أن المجتمعان طبيعيان وتباينهما σ_1^2 و σ_2^2 معلومان فإن توزيع المعاينة للفرق بين متوسطين $(\bar{X}_1 - \bar{X}_2)$ يتبع التوزيع الطبيعي، وسوف نستعمل في الاختبار الإحصائية التالية:

$$Z = \frac{(\bar{X}_1 - \bar{X}_2) - (\mu_1 - \mu_2)}{\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}}} \quad \rightarrow \quad N(0,1)$$

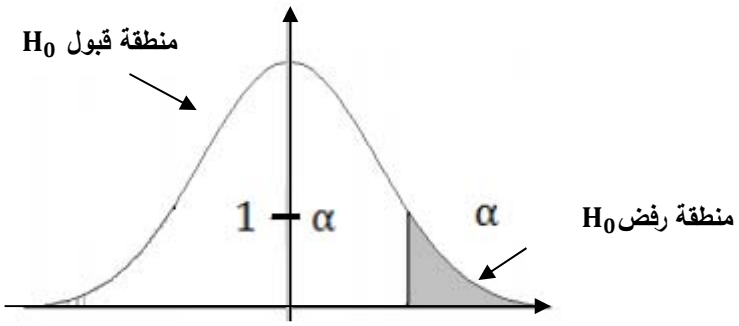
- **حساب Z_{Cal}:**

ونقوم بحساب Z_{Cal} والتي تمثل الاحصائية Z تحت الفرضية $H_0: \mu_1 - \mu_2 = 0$:

$$Z_{Cal} = \frac{(\bar{x}_1 - \bar{x}_2)}{\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}}} = \frac{(58 - 47)}{\sqrt{\frac{10}{40} + \frac{5}{35}}} = 17.55$$

- **تحديد المنطقة الحرجة :**

تحدد المنطقة الحرجة بتحديد القيم الحرجة $\alpha = 0.05 \Rightarrow z_{(1-\alpha)} = z_{(1-0.05)} = z_{(0.95)} = 1.64$



$z_{(0.95)} = 1.64$

وقاعدة القرار هي كالأتي:

يتم رفض H_0 إذا كان $Z_{Cal} > 1.64$ ويتم قبول H_0 إذا كان $Z_{Cal} < 1.64$

- **إتخاذ القرار :**

بما أن $Z_{Cal} = 17.55 > 1.64$ إذن H_0 **مرفوضة و بالتالي** H_1 **مقبولة أي** $\mu_1 - \mu_2 > 0$.

- <u>في حالة σ_1^2 و σ_2^2 مجهولان</u> :

- **صياغة الفرضيات:**

$$\begin{cases} H_0: \mu_1 - \mu_2 = 0 \\ H_1: \mu_1 - \mu_2 > 0 \end{cases}$$

- **الاحصائية المستعملة:**

بما أن المجتمعان طبيعيان وتباينهما σ_1^2 و σ_2^2 مجهولان فيتم تعويض تباين المجتمع الأول σ_1^2 المجهول بالتباين للعينة الأولى S_1^2 ويتم تعويض تباين المجتمع الثاني σ_2^2 المجهول بالتباين للعينة الثانية S_2^2، ويكون توزيع الفرق بين متوسطي العينتين $(\bar{X}_1 - \bar{X}_2)$ يتبع التوزيع الطبيعي لأن حجم العينتين $n_1 = 40 \geq 30, n_2 = 35 \geq 30$ وذلك حسب نظرية النهاية المركزية، وسوف نستعمل في الاختبار الإحصائية التالية:

$$Z = \frac{(\bar{X}_1 - \bar{X}_2) - (\mu_1 - \mu_2)}{\sqrt{\frac{S_1^2}{n_1 - 1} + \frac{S_2^2}{n_2 - 1}}} \quad \rightarrow \quad N(0,1)$$

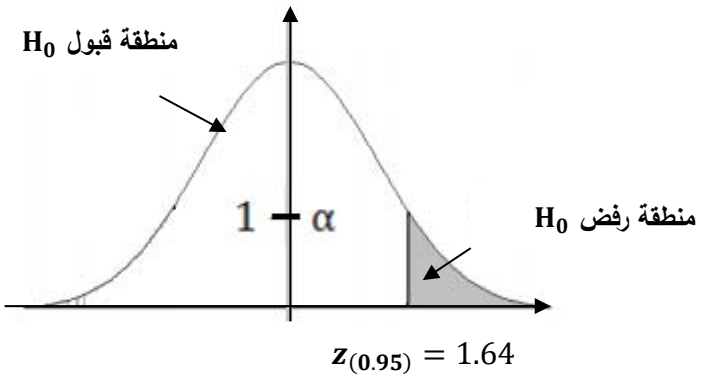
- **حساب Z_{Cal}:**

ونقوم بحساب Z_{Cal} والتي تمثل الاحصائية Z تحت الفرضية $H_0: \mu_1 - \mu_2 = 0$:

$$Z_{Cal} = \frac{(\bar{x}_1 - \bar{x}_2)}{\sqrt{\frac{S_1^2}{n_1 - 1} + \frac{S_2^2}{n_2 - 1}}} = \frac{(58 - 47)}{\sqrt{\frac{4}{40 - 1} + \frac{3}{35 - 1}}} = 25.18$$

- **تحديد المنطقة الحرجة :**

تحدد المنطقة الحرجة بتحديد القيم الحرجة $\alpha = 0.05 \Rightarrow z_{(1-\alpha)} = z_{(1-0.05)} = z_{(0.95)} = 1.64$



وقاعدة القرار هي كالأتي:

يتم رفض H_0 إذا كان $Z_{Cal} > 1.64$ ويتم قبول H_0 إذا كان $Z_{Cal} < 1.64$

- **إتخاذ القرار :**

بما أن $Z_{Cal} = 25.18 > 1.64$ إذن H_0 **مرفوضة وبالتالي** H_1 **مقبولة أي** $\mu_1 - \mu_2 > 0$.

2. <u>اختبر عند مستوى المعنوية 5% الفرضية $H_0: \mu_1 = \mu_2$ مقابل الفرضية $H_1: \mu_1 \neq \mu_2$، علما أن حجم العينتين $n_1 = 20$ و $n_2 = 14$ إذا كان:</u>

– <u>المجتمعان تباينيهما σ_1^2 و σ_2^2 متساويين ومجهولين</u>

- **صياغة الفرضيات:**

$$\begin{cases} H_0: \mu_1 = \mu_2 \\ H_1: \mu_1 \neq \mu_2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} H_0: \mu_1 - \mu_2 = 0 \\ H_1: \mu_1 - \mu_2 \neq 0 \end{cases}$$

- **الاحصائية المستعملة:**

بما أن المجتمعان طبيعيان وتباينهما σ_1^2 و σ_2^2 مجهولان ومتساويان$(\sigma_1^2 = \sigma_2^2 = \sigma^2)$ وحجم العينتين $n_1 = 20 < 30$ أو $n_2 = 14 < 30$ فإن في هذه الحالة نعوض σ^2 بتباين المشترك المرجح S_P^2 ويكون توزيع الفرق بين متوسطي العينتين $(\bar{X}_1 - \bar{X}_2)$ يتبع التوزيع الستيودنت بدرجة الحرية $(n_1 + n_2 - 2)$، نستعمل في الاختبار الإحصائية التالية:

$$T = \frac{(\bar{X}_1 - \bar{X}_2) - (\mu_1 - \mu_2)}{\sqrt{\frac{S_p^2}{n_1} + \frac{S_p^2}{n_2}}} \quad \rightarrow \quad t(n_1 + n_2 - 2)$$

حيث:

$$S_p^2 = \frac{n_1 S_1^2 + n_2 S_2^2}{n_1 + n_2 - 2}$$

- **حساب T_{Cal}:**

ونقوم بحساب T_{Cal} والتي تمثل الاحصائية T تحت الفرضية $H_0: \mu_1 - \mu_2 = 0$:

$$T_{Cal} = \frac{(\bar{x}_1 - \bar{x}_2)}{\sqrt{\frac{S_p^2}{n_1} + \frac{S_p^2}{n_2}}} = \frac{(58 - 47)}{\sqrt{\frac{3.81}{20} + \frac{3.81}{14}}} = 16.17$$

بحيث:

$$S_p^2 = \frac{n_1 S_1^2 + n_2 S_2^2}{n_1 + n_2 - 2} = \frac{20 * 4 + 14 * 3}{20 + 14 - 2} = 3.81$$

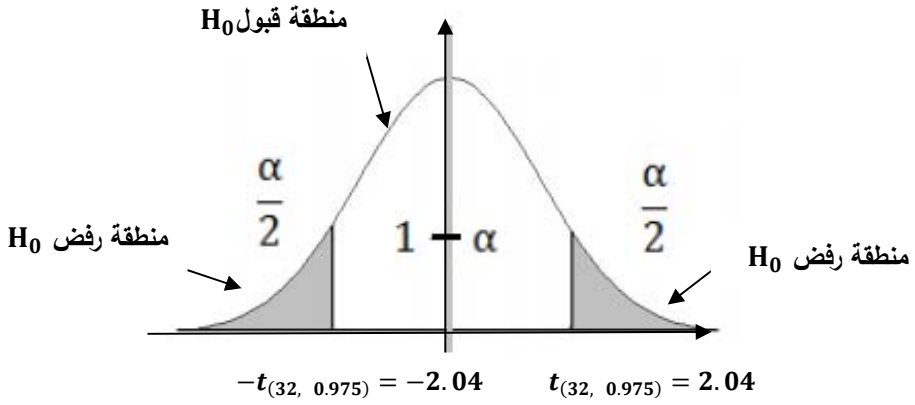
ودرجة الحرية:

$$(n_1 + n_2 - 2) = 20 + 14 - 2 = 32$$

- **تحديد المنطقة الحرجة :**

تحدد المنطقة الحرجة بتحديد القيم الحرجة

$$\alpha = 0.05 \Rightarrow t_{\left(n_1+n_2-2,\ 1-\frac{\alpha}{2}\right)} = t_{\left(20+14-2,\ 1-\frac{0.05}{2}\right)} = t_{(32,\ 0.975)} = 2.04$$



و بالتالي تكون قاعدة القرار كالأتي:

يتم رفض H_0 إذا كان $|T_{Cal}| > 2.04 \Leftrightarrow T_{Cal} \notin [-2.04, 2.04]$.

ويتم قبول H_0 إذا كان $|T_{Cal}| < 2.04 \Leftrightarrow T_{Cal} \in [-2.04,\ 2.04]$.

- **إتخاذ القرار :**

بما أن $T_{Cal} = 16.17 \notin [-2.04, 2.04]$ إذن H_0 **مرفوضة وبالتالي** H_1 **مقبولة أي** $\mu_1 \neq \mu_2$.

المجتمعان تباينيهما σ_1^2 و σ_2^2 غير متساويين ومجهولين

- **صياغة الفرضيات:**

$$\begin{cases} H_0: \mu_1 = \mu_2 \\ H_1: \mu_1 \neq \mu_2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} H_0: \mu_1 - \mu_2 = 0 \\ H_1: \mu_1 - \mu_2 \neq 0 \end{cases}$$

- **الاحصائية المستعملة:**

بما أن المجتمعان طبيعيان وتباينهما σ_1^2 و σ_2^2 مجهولان وغير متساويان$(\sigma_1^2 \neq \sigma_2^2)$ وحجم العينتين $n_1 = 20 < 30$ أو $n_2 = 14 <$ فإن في هذه الحالة نعوض تباين المجتمع الأول σ_1^2 المجهول بالتباين العينة الأولى S_1^2 ونعوض تباين المجتمع الثاني σ_2^2 المجهول بالتباين للعينة الثانية S_2^2، ويكون توزيع الفرق بين متوسطي العينتين $(\bar{X}_1 - \bar{X}_2)$ يتبع التوزيع الستيودنت بدرجة الحرية (v)، نستعمل في الاختبار الإحصائية التالية:

$$T = \frac{(\bar{X}_1 - \bar{X}_2) - (\mu_1 - \mu_2)}{\sqrt{\frac{S_1^2}{n_1 - 1} + \frac{S_2^2}{n_2 - 1}}} \rightarrow t(v)$$

بحيث

$$v = \frac{\left(\frac{S_1^2}{n_1 - 1} + \frac{S_2^2}{n_2 - 1}\right)^2}{\left(\frac{S_1^2}{n_1 - 1}\right)^2 + \left(\frac{S_2^2}{n_2 - 1}\right)^2}$$

- **حساب T_{Cal}:**

ونقوم بحساب T_{Cal} والتي تمثل الاحصائية T تحت الفرضية $H_0: \mu_1 - \mu_2 = 0$:

$$T_{Cal} = \frac{(\bar{x}_1 - \bar{x}_2)}{\sqrt{\frac{S_1^2}{n_1 - 1} + \frac{S_2^2}{n_2 - 1}}} = \frac{(58 - 47)}{\sqrt{\frac{4}{20 - 1} + \frac{3}{14 - 1}}} = 16.56$$

بحيث:

$$v = \frac{\left(\frac{S_1^2}{n_1 - 1} + \frac{S_2^2}{n_2 - 1}\right)^2}{\left(\frac{S_1^2}{n_1 - 1}\right)^2 + \left(\frac{S_2^2}{n_2 - 1}\right)^2} = \frac{\left(\frac{4}{20 - 1} + \frac{3}{14 - 1}\right)^2}{\left(\frac{4}{20 - 1}\right)^2 + \left(\frac{3}{14 - 1}\right)^2} = 1.9958 \approx 2$$

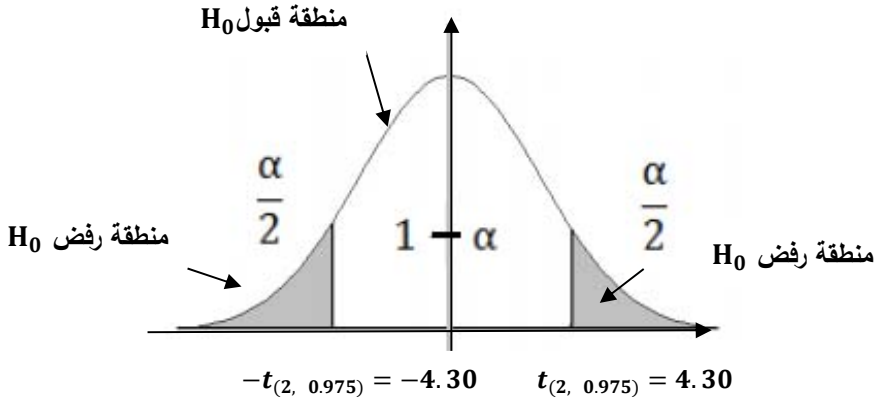
إذن درجة الحرية:

$$v = 2$$

- **تحديد المنطقة الحرجة :**

تحدد المنطقة الحرجة بتحديد القيم الحرجة

$$\alpha = 0.05 \Rightarrow t_{\left(v,\ 1-\frac{\alpha}{2}\right)} = t_{\left(2,\ 1-\frac{0.05}{2}\right)} = t_{(2,\ 0.975)} = 4.30$$



و بالتالي تكون قاعدة القرار كالأتي:

يتم رفض H_0 إذا كان $|T_{Cal}| > 4.30 \Leftrightarrow T_{Cal} \notin [-4.30,\ 4.30]$.

ويتم قبول H_0 إذا كان $|T_{Cal}| < 4.30 \Leftrightarrow T_{Cal} \in [-4.30,\ 4.30]$.

- **إتخاذ القرار :**

بما أن $T_{Cal} = 16.56 \notin [-4.30,\ 4.30]$ إذن H_0 **مرفوضة وبالتالي** H_1 **مقبولة أي** $\mu_1 \neq \mu_2$.

5. <u>إختبار نسبة خاصية في المجتمع:</u>

ليكن لدينا مجتمع إحصائي ولتكن p نسبة الأفراد الذين يحملون صفة معينة مراد اختبارها في هذا المجتمع، و نسبة q نسبة باقي أفراد المجتمع الذين لا يحملون هذه صفة بحيث $(q=1-p)$. وإذا تم سحب عينة حجمها n من هذا المجتمع، فإن p' تمثل نسبة الأفراد في العينة الذي يحملون الصفة المراد دراستها. ونفرض أننا سوف نقوم باختبار الفرضية الصفرية عند درجة المعنوية α التالي:

$$H_0: p = p_0$$

مقابل الفرضية البديلة على شكل:

$$H_1: p \neq p_0 \quad \text{أو} \quad H_1: p < p_0 \quad \text{أو} \quad H_1: p > p_0$$

وبما أن المقدر النقطي لنسبة المجتمع p هي نسبة العينة p' ، فإذا كانت العينة حجمها $n \geq 30$ ، فحسب نظرية النهاية المركزية فإن توزيع المتغير العشوائي p' هو توزيع يقارب التوزيع طبيعي و بالتالي :

$$p' \rightarrow N\left(\mu_{p'}, \sigma^2_{p'}\right)$$

و بتطبيق نظرية النهاية المركزية فإن.

$$Z = \frac{p' - \mu_{p'}}{\sigma_{p'}} = \frac{p' - p}{\sqrt{\frac{pq}{n}}} \rightarrow N(0,1)$$

إذن سوف نستعمل في الاختبار الإحصائية التالية:

$$Z = \frac{p' - p}{\sqrt{\frac{pq}{n}}} \rightarrow N(0,1)$$

ونقوم بحساب Z_{Cal} والتي تمثل الاحصائية Z تحت الفرضية: $H_0: p = p_0$:

$$Z_{Cal} = \frac{p' - p_0}{\sqrt{\frac{p_0(1-p_0)}{n}}} \rightarrow N(0,1)$$

و بالتالي تكون قاعدة القرار كالأتي:

أ- إذا كانت الفرضية البديلة على شكل $H_1: p \neq p_0$

- يتم رفض H_0 إذا كان $|Z_{Cal}| > z_{\left(1-\frac{\alpha}{2}\right)} \Leftrightarrow Z_{Cal} \notin \left[-z_{\left(1-\frac{\alpha}{2}\right)}, z_{\left(1-\frac{\alpha}{2}\right)}\right]$.
- ويتم قبول H_0 إذا كان $|Z_{Cal}| < z_{\left(1-\frac{\alpha}{2}\right)} \Leftrightarrow Z_{Cal} \in \left[-z_{\left(1-\frac{\alpha}{2}\right)}, z_{\left(1-\frac{\alpha}{2}\right)}\right]$.

ب-في حالة ما إذا كانت الفرضية البديلة على شكل $H_1: p > p_0$

- يتم رفض H_0 إذا كان $Z_{Cal} > z_{(1-\alpha)}$.
- ويتم قبول H_0 إذا كان $Z_{Cal} < z_{(1-\alpha)}$.

ت-في حالة ما إذا كانت الفرضية البديلة على شكل $H_1: p < p_0$

- يتم رفض H_0 إذا كان $Z_{Cal} < -z_{(1-\alpha)}$.
- ويتم قبول H_0 إذا كان $Z_{Cal} > -z_{(1-\alpha)}$.

مثال:

أخذت عينة عشوائية مكونة من 400 طالب في السنة الثانية في مدرسة عليا فوجد أن 342 طالب منهم قد نجحوا في جميع المقاييس. اختبر الفرضية أن نسبة الطلبة الناجحين في جميع المقاييس أقل من 80% عند مستوى المعنوية 1%.

الحل:

p : تمثل نسبة الطلبة الناجحين في جميع المقاييس في المجتمع الإحصائي .

p' : تمثل نسبة الطلبة الناجحين في جميع المقاييس في العينة.

$$p' = \frac{342}{400} = 0.855$$

- **اختبار الفرضية أن نسبة الطلبة الناجحين في جميع المقاييس أقل من 80% عند مستوى المعنوية $\alpha = 1\%$:**

- **صياغة الفرضيات:**

$$\begin{cases} H_0: p = 0.8 \\ H_1: p < 0.8 \end{cases}$$

- **الاحصائية المستعملة:**

بما أن المقدر النقطي لنسبة p هو نسبة العينة p' . وبما أن حجم العينة $n = 400 \geq 30$ فحسب نظرية النهاية المركزية فإن توزيع النسبة p' هو توزيع يقارب التوزيع طبيعي ونستعمل في الاختبار الإحصائية التالية:

$$Z = \frac{p' - p}{\sqrt{\frac{pq}{n}}} \rightarrow N(0,1)$$

- **حساب Z_{Cal}:**

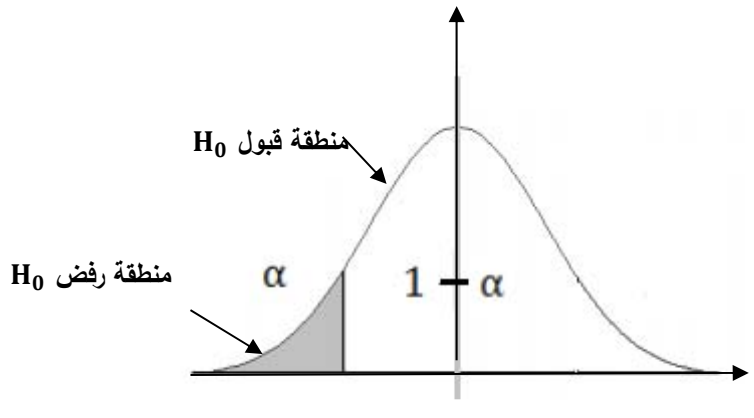
ونقوم بحساب Z_{Cal} والتي تمثل الاحصائية Z تحت الفرضية $H_0: p = p_0$:

$$Z_{Cal} = \frac{p' - p_0}{\sqrt{\frac{p_0(1-p_0)}{n}}} = \frac{0.855 - 0.8}{\sqrt{\frac{0.8\,(1-0.8)}{400}}} = 2.75$$

- **تحديد المنطقة الحرجة :**

تحدد المنطقة الحرجة بتحديد القيم الحرجة

$$\alpha = 0.01 \Rightarrow z_{(1-\alpha)} = z_{(1-0.01)} = z_{(0.99)} = 2.33$$



و بالتالي تكون قاعدة القرار كالأتي:

بما أن الفرضية البديلة على شكل $\mathbf{H_1}: \mathbf{p} < \mathbf{p_0}$:

فيتم رفض $\mathbf{H_0}$ إذا كان $\mathbf{Z_{Cal}} < -\mathbf{2.33}$ ويتم قبول $\boldsymbol{H_0}$ إذا كان $Z_{Cal} > -2.33$.

- **إتخاذ القرار :**

بما أن $Z_{Cal} = 2.75 > -2.33$ إذن H_0 ***مقبولة*** **وبالتالي** $\mathbf{p = 0.8}$ أي أن نسبة الطلبة الناجحين في جميع المقاييس هي تقدر ب 80%.

6. <u>إختبار تباين المجتمع:</u>

عند سحب عينة حجمها n من مجتمع طبيعي متوسطهμ مجهول وتباينهσ^2، فكان متوسطها $\overline{X}$ وتباينها S^2.

ونفرض أننا سوف نقوم باختبار الفرضية الصفرية التالي:

$$H_0: \sigma^2 = \sigma_0^2$$

مقابل الفرضية البديلة على شكل:

$$H_1: \sigma^2 \neq \sigma_0^2 \quad \text{أو} \quad H_1: \sigma^2 > \sigma_0^2 \quad \text{أو} \quad H_1: \sigma^2 < \sigma_0^2$$

مع العلم أن المقدر النقطي لتباين المجتمعσ^2 هو تباين العينة S^2، والإحصائية التي سوف تستعمل في الاختبار هي $\frac{nS^2}{\sigma^2}$ و التي تعتبر مقدر غير متحيز لσ^2 وتخضع إلى التوزيع كاي مربع بدرجة الحرية $(n-1)$ بحيث :

$$\chi^2 = \frac{nS^2}{\sigma^2} = \frac{\sum_{i=1}^{n}(X_i - \overline{X})^2}{\sigma^2} \rightarrow \chi^2_{n-1}$$

و نقوم بحساب χ^2_{Cal} والتي تمثل الاحصائية χ^2 تحت الفرضية $H_0: \sigma^2 = \sigma_0^2$:

$$\chi^2_{Cal} = \frac{nS^2}{\sigma_0^2} \rightarrow \chi^2_{n-1}$$

و بالتالي تكون قاعدة القرار كالأتي:

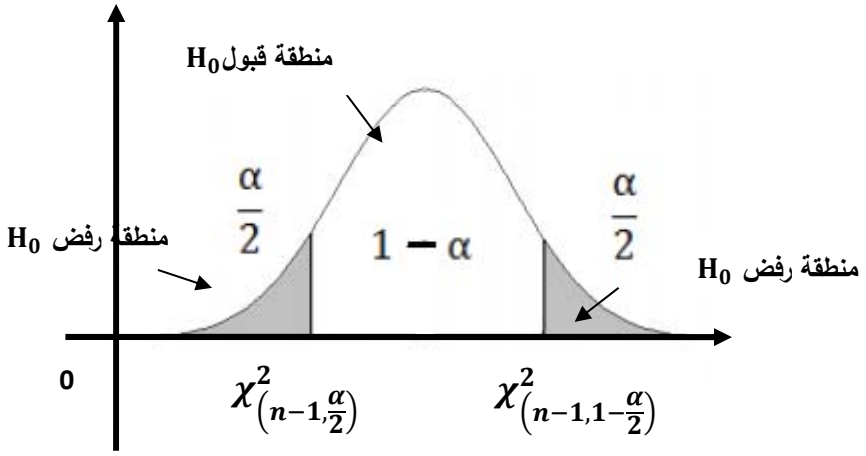
أ- في حالة ما إذا كانت الفرضية البديلة على شكل:

$$H_1: \sigma^2 \neq \sigma_0^2$$

- يتم رفض H_0 إذا كان

$$\chi^2_{Cal} \notin \left[\chi^2_{\left(n-1,\frac{\alpha}{2}\right)}, \chi^2_{\left(n-1,1-\frac{\alpha}{2}\right)}\right] \Leftrightarrow \chi^2_{Cal} \in \left[0, \chi^2_{\left(n-1,\frac{\alpha}{2}\right)}\right[\cup \left[\chi^2_{\left(n-1,1-\frac{\alpha}{2}\right)}, +\infty\right[$$

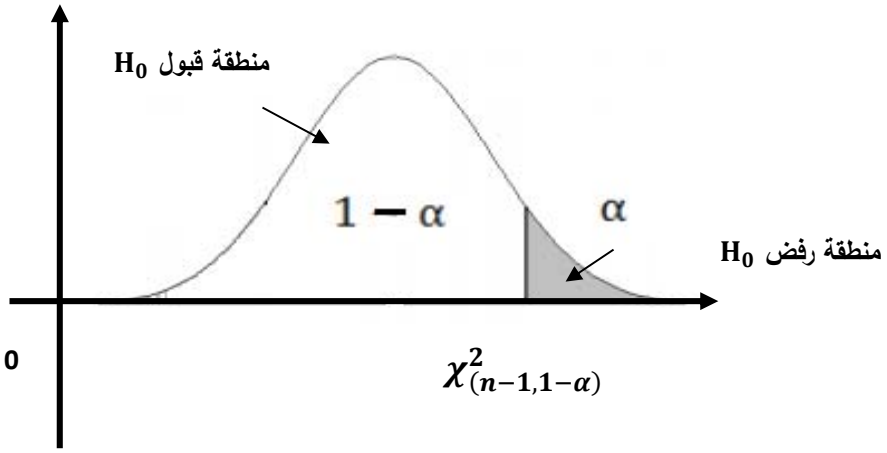
- و يتم قبول H_0 إذا كان $\chi^2_{Cal} \in \left[\chi^2_{\left(n-1,\frac{\alpha}{2}\right)}, \chi^2_{\left(n-1,1-\frac{\alpha}{2}\right)}\right]$



ب-في حالة ما إذا كانت الفرضية البديلة على شكل:

$$H_1: \sigma^2 > \sigma_0^2$$

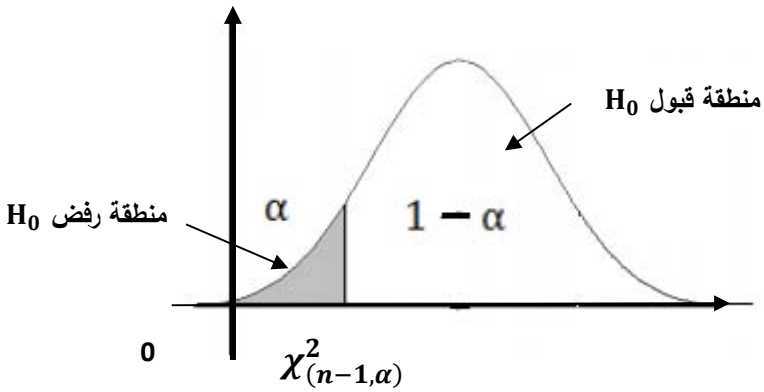
يتم رفض H_0 إذا كان $\chi^2_{Cal} > \chi^2_{(n-1,1-\alpha)}$ ويتم قبول H_0 إذا كان $\chi^2_{Cal} < \chi^2_{(n-1,1-\alpha)}$.



ت-في حالة ما إذا كانت الفرضية البديلة على شكل:

$$H_1: \sigma^2 < \sigma_0^2$$:

يتم رفض H_0 إذا كان $\chi^2_{Cal} < \chi^2_{(n-1,\alpha)}$ ويتم قبول H_0 إذا كان $\chi^2_{Cal} > \chi^2_{(n-1,\alpha)}$.



مثال:

يدعي مدير أحد المصانع لإنتاج المصابيح، أن عمر مصابيحه الذي يتبع التوزيع الطبيعي لا يزيد انحرافه المعياري عن 10 ساعات، أرادت مفتشية للمراقبة التأكد من هذا الإدعاء. فسحبت عينة مكونة من 20 مصباح، فوجد أن الإنحراف المعياري لعمر مصابيح العينة هو 8 ساعات. هل يدل هذا على أن ما صرح به صاحب المصنع صحيح؟ إختبر هذا الادعاء عند مستوى المعنوية 0.01 .

حل:

- المجتمع غير محدود، يتبع التوزيع الطبيعي. يدعي صاحب المصنع أن σ^2 لا يزيد عن :

$$\sigma_0^2 = (10)^2 = 100$$

- سحبت منه عينة حجمها $n = 20$ ، انحرافها المعياري $S = 8$.

اختبار الفرضية أن الانحراف المعياري للعمر المصابيح لا يزيد عن 10 ساعات عند مستوى المعنوية $\alpha = 1\%$:

و لهذا فالمفتشية سوف تختبر الفرضية المعاكسة لتصريحات صاحب المصنع.

- **صياغة الفرضيات:**

$$\begin{cases} H_0: \sigma^2 = 100 \\ H_1: \sigma^2 > 100 \end{cases}$$

- **الاحصائية المستعملة:**

بما أن المقدر النقطي لتباين المجتمع σ^2 هو تباين العينة S^2، فالإحصائية التي سوف تستعمل في الاختبار هي $\frac{n S^2}{\sigma^2}$ والتي تخضع إلى التوزيع كاي مربع بدرجة الحرية $(n-1)$ بحيث :

$$\chi^2 = \frac{n S^2}{\sigma^2} \rightarrow \chi^2_{n-1}$$

- **حساب χ^2_{Cal}:**

ونقوم بحساب χ^2_{Cal} والتي تمثل الاحصائية χ^2 تحت الفرضية H_0 :

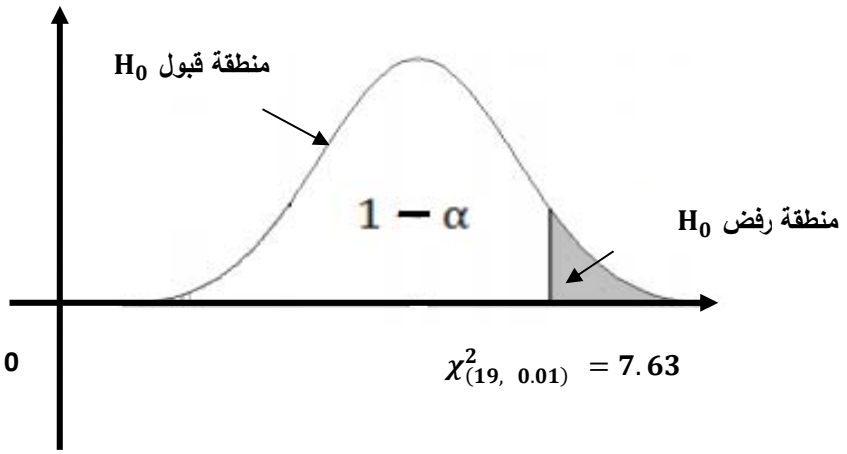
$$\chi^2_{Cal} = \frac{n S^2}{\sigma_0^2} = \frac{20 \,.\, (8)^2}{(10)^2} = 12.8$$

- **تحديد المنطقة الحرجة :**

تحدد المنطقة الحرجة بتحديد القيم الحرجة

$$\alpha = 0.01 \Rightarrow \chi^2_{(n-1,\alpha)} = \chi^2_{(20-1,\ 0.01)} = \chi^2_{(19,\ 0.01)} = 7.63$$

يتم رفض H_0 إذا كان $\chi^2_{Cal} > 7.63$ ويتم قبول H_0 إذا كان $\chi^2_{Cal} < 7.63$.



- **إتخاذ القرار :**

بما أن $Z_{Cal} = 12.8 > 7.63$ إذن H_0 ***مرفوضة و بالتالي*** H_1 ***مقبولة أي أن*** $\sigma^2 > 100$ إذن ما صرح به صاحب المصنع خطأ.

7. <u>إختبار للمقارنة بين تباينين مجتمعين:</u>

عند السحب لعينتين عشوائيتين مستقلتين حجمهما n_1 و n_2 على التوالي، من مجتمعين طبيعيين مختلفين و غير محدودين، متوسطهما الحسابي μ_1 و μ_2 مجهولين وتباينهما σ_1^2 و σ_2^2 مجهولين على التوالي. وكان S_1^2 و S_2^2 يمثلان تباييني العينتين على التوالي. نفرض أننا سوف نقوم باختبار الفرضية الصفرية التالي:

$$H_0: \sigma_1^2 = \sigma_2^2$$

مقابل الفرضية البديلة على شكل:

$$H_1: \sigma_1^2 \neq \sigma_2^2 \quad \text{أو} \quad H_1: \sigma_1^2 > \sigma_2^2 \quad \text{أو} \quad H_1: \sigma_1^2 < \sigma_2^2$$

مع العلم أن المقدران النقطيان لتباييني المجتمعين σ_1^2 و σ_2^2 هما تباييني العينتان S_1^2 و S_2^2، والإحصائية التي سوف تستعمل في الاختبار النسبة بين تباييني مجتمعين $\frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2}$ هي النسبة بين تباييني العينتين $\frac{S_2^2}{S_1^2}$ التي تتبع التوزيع فيشر، بحيث لدينا:

$$F = \frac{\frac{\left(\frac{n_2 S_2^2}{\sigma_2^2}\right)}{n_2 - 1}}{\frac{\left(\frac{n_1 S_1^2}{\sigma_1^2}\right)}{n_1 - 1}} = \frac{\left(\frac{n_2}{n_2 - 1}\right)}{\left(\frac{n_1}{n_1 - 1}\right)} \cdot \frac{S_2^2}{S_1^2} \cdot \frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2} \rightarrow F(n_2 - 1, n_1 - 1)$$

و نقوم بحساب F_{Cal} والتي تمثل الاحصائية F تحت الفرضية H_0 :

$$H_0: \sigma_1^2 = \sigma_2^2 \quad \Leftrightarrow H_0: \frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2} = 1$$

$$F_{Cal} = \frac{\left(\frac{n_2}{n_2 - 1}\right)}{\left(\frac{n_1}{n_1 - 1}\right)} \cdot \frac{S_2^2}{S_1^2} \cdot \frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2} \rightarrow F(n_2 - 1, n_1 - 1)$$

و بالتالي تكون قاعدة القرار كالأتي:

أ- **في حالة ما إذا كانت الفرضية البديلة على شكل:**

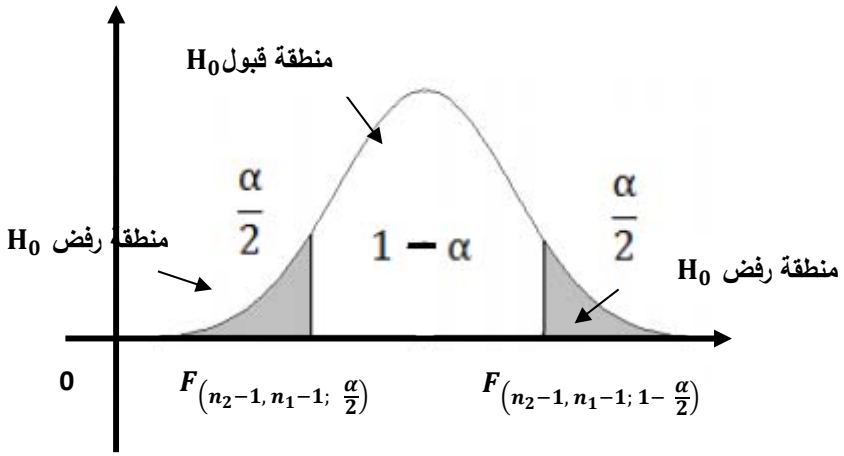
$$H_1: \sigma_1^2 \neq \sigma_2^2$$

- يتم رفض H_0 إذا كان

$$F_{Cal} \notin \left[F_{\left(n_2-1, n_1-1;\ \frac{\alpha}{2}\right)}, F_{\left(n_2-1, n_1-1;\ 1-\frac{\alpha}{2}\right)}\right]$$

$$\Leftrightarrow F_{Cal} \in \left[0, F_{\left(n_2-1, n_1-1;\ \frac{\alpha}{2}\right)}\right[\cup \left[F_{\left(n_2-1, n_1-1;\ 1-\frac{\alpha}{2}\right)}, +\infty\right[$$

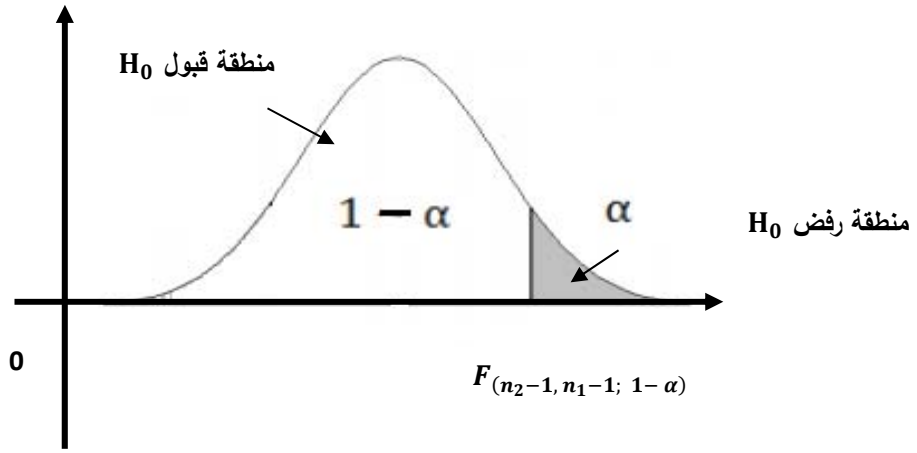
- و يتم قبول H_0 إذا كان $F_{Cal} \in \left[F_{\left(n_2-1, n_1-1;\ \frac{\alpha}{2}\right)}, F_{\left(n_2-1, n_1-1;\ 1-\frac{\alpha}{2}\right)}\right]$



ب-في حالة ما إذا كانت الفرضية البديلة على شكل:

$$H_1: \sigma_1^2 > \sigma_2^2$$

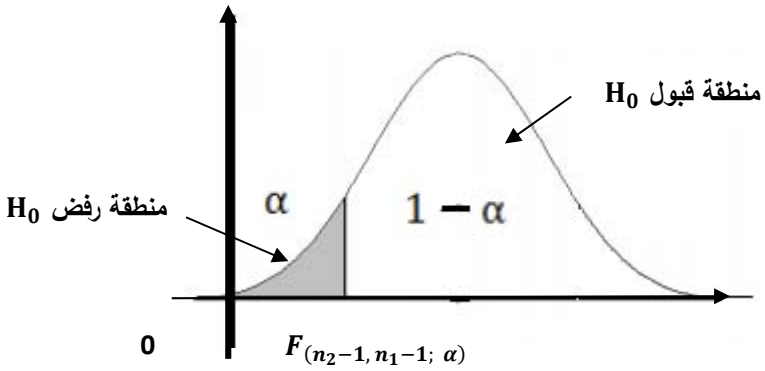
- يتم رفض H_0 إذا كان $F_{Cal} > F_{(n_2-1, n_1-1;\ 1-\alpha)}$
- ويتم قبول H_0 إذا كان $F_{Cal} < F_{(n_2-1, n_1-1;\ 1-\alpha)}$



ت-في حالة ما إذا كانت الفرضية البديلة على شكل:

$$H_1: \sigma_1^2 < \sigma_2^2$$

- يتم رفض H_0 إذا كان $F_{Cal} < F_{(n_2-1, n_1-1;\ \alpha)}$
- ويتم قبول H_0 إذا كان $F_{Cal} > F_{(n_2-1, n_1-1;\ \alpha)}$



<u>مثال:</u>

تم سحب عينتين عشوائيتين مستقلتين حجمهما على التوالي $n_1 = 25$ و $n_2 = 21$ ، من مجتمعين طبيعيين مختلفين. فوجد أن تباييني العينتين هو على التوالي $S_1^2 = 64$ و $S_2^2 = 36$.

إختبر الفرضية لتحقق من أن تباييني المجتمعين التي سحبت منهما العينتين مختلفين عند درجة المعنوية 5 % .

الحل:

- المجتمع الاول الطبيعي وغير محدود، سحبت منه عينة حجمها $n_1 = 25$ وتباينها $S_1^2 = 64$.
- المجتمع الثاني الطبيعي وغير محدود، سحبت منه عينة حجمها $n_2 = 21$ وتباينها $S_2^2 = 36$.

إختبار الفرضية لتحقق من أن تباييني المجتمعين مختلفين عند درجة المعنوية 5 %:

- **صياغة الفرضيات:**

$$\begin{cases} H_0: \sigma_1^2 = \sigma_2^2 \\ H_1: \sigma_1^2 \neq \sigma_2^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} H_0: \dfrac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2} = 1 \\ H_1: \dfrac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2} \neq 1 \end{cases}$$

- **الاحصائية المستعملة:**

بما أن المقدران النقطيان لتبايني المجتمعين σ_2^2 و σ_1^2 هما تبايني العينتان S_2^2 و S_1^2، والإحصائية التي سوف تستعمل في الاختبار النسبة بين تبايني مجتمعين $\frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2}$ هي النسبة بين تبايني العينتين $\frac{S_2^2}{S_1^2}$ التي تتبع التوزيع فيشر، بحيث لدينا:

$$F = \frac{\dfrac{\left(\dfrac{n_2 S_2^2}{\sigma_2^2}\right)}{n_2 - 1}}{\dfrac{\left(\dfrac{n_1 S_1^2}{\sigma_1^2}\right)}{n_1 - 1}} = \frac{\left(\dfrac{n_2}{n_2 - 1}\right)}{\left(\dfrac{n_1}{n_1 - 1}\right)} \cdot \frac{S_2^2}{S_1^2} \cdot \frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2} \rightarrow F(n_2 - 1, n_1 - 1)$$

- **حساب F_{Cal}:**

و نقوم بحساب F_{Cal} والتي تمثل الاحصائية F تحت الفرضية H_0 :

$$H_0: \sigma_1^2 = \sigma_2^2 \Leftrightarrow H_0: \frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2} = 1$$

$$F_{Cal} = \frac{\left(\dfrac{n_2}{n_2 - 1}\right)}{\left(\dfrac{n_1}{n_1 - 1}\right)} \cdot \frac{S_2^2}{S_1^2} \frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2} = \frac{\left(\dfrac{21}{21 - 1}\right)}{\left(\dfrac{25}{25 - 1}\right)} \cdot \frac{36}{64} \cdot 1 = 0.567$$

- **تحديد المنطقة الحرجة :**

تحدد المنطقة الحرجة بتحديد القيم الحرجة

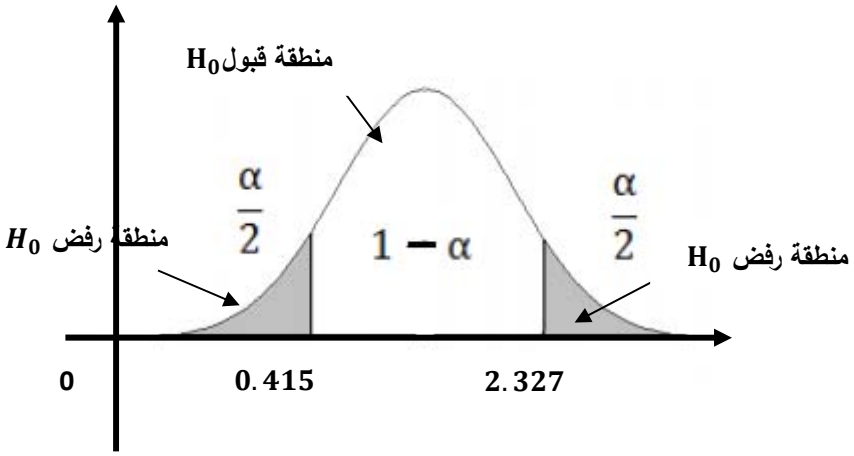
$$\alpha = 0.05 \Rightarrow F_{\left(n_2 - 1, n_1 - 1;\ \frac{\alpha}{2}\right)} = F_{\left(21-1, 25-1;\ \frac{0.05}{2}\right)} = F_{(20,24;\ 0.025)} = 0.415$$

$$\Rightarrow F_{\left(n_2 - 1, n_1 - 1; 1 - \frac{\alpha}{2}\right)} = F_{\left(21-1, 25-1; 1 - \frac{0.05}{2}\right)} = F_{(20,24;\ 0.975)} = 2.327$$

- يتم رفض H_0 إذا كان

$$F_{Cal} \notin [0.415\ ,\ 2.327] \Leftrightarrow F_{Cal} \in [0,\ 0.415[\cup [2.327,\ +\infty[$$

- و يتم قبول H_0 إذا كان $F_{Cal} \in [0.415\ ,\ 2.327]$



- **إتخاذ القرار :**

بما أن $F_{Cal} = 0.567 \in [0.415\ ,\ 2.327]$ إذن H_0 **مقبولة** ***وبالتالي*** $\sigma_1^2 = \sigma_2^2$.

المراجع

❖ **المراجع باللغة العربية:**

1- بوعبد الله صالح، **محاضرات الإحصاء الرياضي**، كلية العلوم الاقتصادية، جامعة مسيلة، 2006.

2- سمير سليم فاضل العبيدي، وجمال إبراهيم داود البياتي، **الإحصاء التطبيقي- طرق اختبارات الفروض وموضوعات أخرى في الاستدلال الإحصائي**، دار شموع الثقافة، بنغازي -ليبيا، 2002.

3- عدنان عباس حميدان، مطانيوس مخول، فريد جاعوني، وعمار ناصر آغا، **الإحصاء التطبيقي**، منشورات جامعة دمشق، كلية الاقتصاد، سوريا،2006 .

4- معتوق احمد، الإحصاء الرياضي و النماذج الإحصائية، ديوان المطبوعات الجامعية، 2007.

❖ **المراجع باللغة الأجنبية:**

5- Abdesselam, R., **Statistique inférentielle: Exercices d'application et problèmes corrigés avec rappels de cours,** Collection Références sciences, edition Ellipses, 2020.

6- Dusart, P., **Cours de Statistiques inférentielles,** Universiré de Limoges, 2018.

7- Montgomery, D,C., Runger, G, C., **Applied Statistics and Probability for Engineers,** Third Edition, Wiley, 2003.

8- Protassov, K., **Analyse statistique des données expérimentales**, Collection Grenoble Sciences, EDP Sciences, 2002.

9- Rothen, S., Baggio, S., Deline,S., **Statistique inférentielle**, Collection Sup en Poche, 2018.

10- Rousson, V., **Statistique appliquée aux sciences de la vie**, Collection Statistique et probabilités appliquées, Springer, 2013.

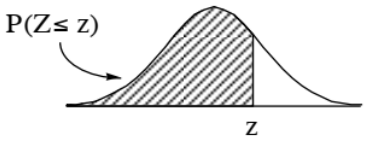
11- Saporta, G., **Probabilités, analyse des données et statistique**, Edition, Technip, 2006.

12- Phan, T., Rowenczyk, J-P., **Exercices et problèmes de statistique et probabilités**, Dunod, 2012.

الملحق رقم 1 : جدول التوزيع الطبيعي المعياري

Table de la variable aléatoire Normale réduite

Fournit la probabilité $P(Z \leq z)$
pour $Z \sim N(0,1)$

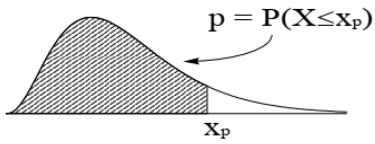


z	.00	.01	.02	.03	.04	.05	.06	.07	.08	.09
0.0	0.5000	0.5040	0.5080	0.5120	0.5160	0.5199	0.5239	0.5279	0.5319	0.5359
0.1	0.5398	0.5438	0.5478	0.5517	0.5557	0.5596	0.5636	0.5675	0.5714	0.5753
0.2	0.5793	0.5832	0.5871	0.5910	0.5948	0.5987	0.6026	0.6064	0.6103	0.6141
0.3	0.6179	0.6217	0.6255	0.6293	0.6331	0.6368	0.6406	0.6443	0.6480	0.6517
0.4	0.6554	0.6591	0.6628	0.6664	0.6700	0.6736	0.6772	0.6808	0.6844	0.6879
0.5	0.6915	0.6950	0.6985	0.7019	0.7054	0.7088	0.7123	0.7157	0.7190	0.7224
0.6	0.7257	0.7291	0.7324	0.7357	0.7389	0.7422	0.7454	0.7486	0.7517	0.7549
0.7	0.7580	0.7611	0.7642	0.7673	0.7704	0.7734	0.7764	0.7794	0.7823	0.7852
0.8	0.7881	0.7910	0.7939	0.7967	0.7995	0.8023	0.8051	0.8078	0.8106	0.8133
0.9	0.8159	0.8186	0.8212	0.8238	0.8264	0.8289	0.8315	0.8340	0.8365	0.8389
1.0	0.8413	0.8438	0.8461	0.8485	0.8508	0.8531	0.8554	0.8577	0.8599	0.8621
1.1	0.8643	0.8665	0.8686	0.8708	0.8729	0.8749	0.8770	0.8790	0.8810	0.8830
1.2	0.8849	0.8869	0.8888	0.8907	0.8925	0.8944	0.8962	0.8980	0.8997	0.9015
1.3	0.9032	0.9049	0.9066	0.9082	0.9099	0.9115	0.9131	0.9147	0.9162	0.9177
1.4	0.9192	0.9207	0.9222	0.9236	0.9251	0.9265	0.9279	0.9292	0.9306	0.9319
1.5	0.9332	0.9345	0.9357	0.9370	0.9382	0.9394	0.9406	0.9418	0.9429	0.9441
1.6	0.9452	0.9463	0.9474	0.9484	0.9495	0.9505	0.9515	0.9525	0.9535	0.9545
1.7	0.9554	0.9564	0.9573	0.9582	0.9591	0.9599	0.9608	0.9616	0.9625	0.9633
1.8	0.9641	0.9649	0.9656	0.9664	0.9671	0.9678	0.9686	0.9693	0.9699	0.9706
1.9	0.9713	0.9719	0.9726	0.9732	0.9738	0.9744	0.9750	0.9756	0.9761	0.9767
2.0	0.9772	0.9778	0.9783	0.9788	0.9793	0.9798	0.9803	0.9808	0.9812	0.9817
2.1	0.9821	0.9826	0.9830	0.9834	0.9838	0.9842	0.9846	0.9850	0.9854	0.9857
2.2	0.9861	0.9864	0.9868	0.9871	0.9875	0.9878	0.9881	0.9884	0.9887	0.9890
2.3	0.9893	0.9896	0.9898	0.9901	0.9904	0.9906	0.9909	0.9911	0.9913	0.9916
2.4	0.9918	0.9920	0.9922	0.9925	0.9927	0.9929	0.9931	0.9932	0.9934	0.9936
2.5	0.9938	0.9940	0.9941	0.9943	0.9945	0.9946	0.9948	0.9949	0.9951	0.9952
2.6	0.9953	0.9955	0.9956	0.9957	0.9959	0.9960	0.9961	0.9962	0.9963	0.9964
2.7	0.9965	0.9966	0.9967	0.9968	0.9969	0.9970	0.9971	0.9972	0.9973	0.9974
2.8	0.9974	0.9975	0.9976	0.9977	0.9977	0.9978	0.9979	0.9979	0.9980	0.9981
2.9	0.9981	0.9982	0.9982	0.9983	0.9984	0.9984	0.9985	0.9985	0.9986	0.9986
3.0	0.9987	0.9987	0.9987	0.9988	0.9988	0.9989	0.9989	0.9989	0.9990	0.9990
3.1	0.9990	0.9991	0.9991	0.9991	0.9992	0.9992	0.9992	0.9992	0.9993	0.9993
3.2	0.9993	0.9993	0.9994	0.9994	0.9994	0.9994	0.9994	0.9995	0.9995	0.9995
3.3	0.9995	0.9995	0.9995	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9997
3.4	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9998

الملحق رقم 2 : جدول التوزيع الكاي مربع

Table des quantiles de la v.a. Chi-Carré

Fournit les quantiles x_p tels que $P(X \leq x_p) = p$
pour $X \sim \chi^2_{dl}$

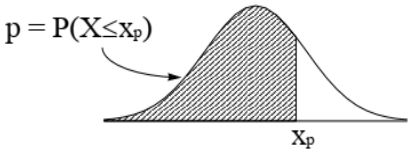


p	0.005	0.010	0.025	0.050	0.100	0.250	0.500	0.750	0.900	0.95	0.975	0.990	0.995
dl													
1	0.00	0.00	0.00	0.00	0.02	0.10	0.45	1.32	2.71	3.84	5.02	6.64	7.88
2	0.01	0.02	0.05	0.10	0.21	0.58	1.39	2.77	4.61	5.99	7.38	9.21	10.60
3	0.07	0.11	0.22	0.35	0.58	1.21	2.37	4.11	6.25	7.82	9.35	11.35	12.84
4	0.21	0.30	0.48	0.71	1.06	1.92	3.36	5.39	7.78	9.49	11.14	13.28	14.86
5	0.41	0.55	0.83	1.15	1.61	2.67	4.35	6.63	9.24	11.07	12.83	15.09	16.75
6	0.68	0.87	1.24	1.64	2.20	3.45	5.35	7.84	10.64	12.59	14.45	16.81	18.55
7	0.99	1.24	1.69	2.17	2.83	4.25	6.35	9.04	12.02	14.07	16.01	18.48	20.28
8	1.34	1.65	2.18	2.73	3.49	5.07	7.34	10.22	13.36	15.51	17.53	20.09	21.95
9	1.74	2.09	2.70	3.33	4.17	5.90	8.34	11.39	14.68	16.92	19.02	21.67	23.59
10	2.16	2.56	3.25	3.94	4.87	6.74	9.34	12.55	15.99	18.31	20.48	23.21	25.19
11	2.60	3.05	3.82	4.58	5.58	7.58	10.34	13.70	17.28	19.68	21.92	24.72	26.76
12	3.07	3.57	4.40	5.23	6.30	8.44	11.34	14.85	18.55	21.03	23.34	26.22	28.30
13	3.57	4.11	5.01	5.89	7.04	9.30	12.34	15.98	19.81	22.36	24.74	27.69	29.82
14	4.08	4.66	5.63	6.57	7.79	10.17	13.34	17.12	21.06	23.68	26.12	29.14	31.32
15	4.60	5.23	6.26	7.26	8.55	11.04	14.34	18.25	22.31	25.00	27.49	30.58	32.80
16	5.14	5.81	6.91	7.96	9.31	11.91	15.34	19.37	23.54	26.30	28.85	32.00	34.27
17	5.70	6.41	7.56	8.67	10.09	12.79	16.34	20.49	24.77	27.59	30.19	33.41	35.72
18	6.27	7.02	8.23	9.39	10.87	13.68	17.34	21.61	25.99	28.87	31.53	34.81	37.16
19	6.84	7.63	8.91	10.12	11.65	14.56	18.34	22.72	27.20	30.14	32.85	36.19	38.58
20	7.43	8.26	9.59	10.85	12.44	15.45	19.34	23.83	28.41	31.41	34.17	37.57	40.00
21	8.03	8.90	10.28	11.59	13.24	16.34	20.34	24.94	29.62	32.67	35.48	38.93	41.40
22	8.64	9.54	10.98	12.34	14.04	17.24	21.34	26.04	30.81	33.92	36.78	40.29	42.80
23	9.26	10.20	11.69	13.09	14.85	18.14	22.34	27.14	32.01	35.17	38.08	41.64	44.18
24	9.89	10.86	12.40	13.85	15.66	19.04	23.34	28.24	33.20	36.42	39.36	42.98	45.56
25	10.52	11.52	13.12	14.61	16.47	19.94	24.34	29.34	34.38	37.65	40.65	44.31	46.93
26	11.16	12.20	13.84	15.38	17.29	20.84	25.34	30.43	35.56	38.89	41.92	45.64	48.29
27	11.81	12.88	14.57	16.15	18.11	21.75	26.34	31.53	36.74	40.11	43.19	46.96	49.64
28	12.46	13.56	15.31	16.93	18.94	22.66	27.34	32.62	37.92	41.34	44.46	48.28	50.99
29	13.12	14.26	16.05	17.71	19.77	23.57	28.34	33.71	39.09	42.56	45.72	49.59	52.34
30	13.79	14.95	16.79	18.49	20.60	24.48	29.34	34.80	40.26	43.77	46.98	50.89	53.67
40	20.71	22.16	24.43	26.51	29.05	33.66	39.34	45.62	51.81	55.76	59.34	63.69	66.77
50	27.99	29.71	32.36	34.76	37.69	42.94	49.33	56.33	63.17	67.50	71.42	76.15	79.49
60	35.53	37.48	40.48	43.19	46.46	52.29	59.33	66.98	74.40	79.08	83.30	88.38	91.95
70	43.28	45.44	48.76	51.74	55.33	61.70	69.33	77.58	85.53	90.53	95.02	100.4	104.2
80	51.17	53.54	57.15	60.39	64.28	71.14	79.33	88.13	96.58	101.9	106.6	112.3	116.3
90	59.20	61.75	65.65	69.13	73.29	80.62	89.33	98.65	107.6	113.1	118.1	124.1	128.3
100	67.33	70.06	74.22	77.93	82.36	90.13	99.33	109.1	118.5	124.3	129.6	135.8	140.2

الملحق رقم 3 : جدول التوزيع ستيودنت

Table des quantiles de la v.a. de Student

Fournit les quantiles x_p tels que $P(X \leq x_p) = p$
pour $X \sim t_{dl}$

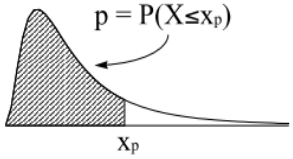


p	0.7500	0.9000	0.9500	0.9750	0.9900	0.9950	0.9975	0.9990
dl								
1	1.0000	3.0780	6.3140	12.7060	31.8210	63.6570	127.3213	318.3088
2	0.8160	1.8860	2.9200	4.3030	6.9650	9.9250	14.0891	22.3271
3	0.7650	1.6380	2.3530	3.1820	4.5410	5.8410	7.4533	10.2145
4	0.7410	1.5330	2.1320	2.7760	3.7470	4.6040	5.5976	7.1732
5	0.7270	1.4760	2.0150	2.5710	3.3650	4.0320	4.7733	5.8934
6	0.7180	1.4400	1.9430	2.4470	3.1430	3.7070	4.3168	5.2076
7	0.7110	1.4150	1.8950	2.3650	2.9980	3.4990	4.0293	4.7853
8	0.7060	1.3970	1.8600	2.3060	2.8960	3.3550	3.8325	4.5008
9	0.7030	1.3830	1.8330	2.2620	2.8210	3.2500	3.6897	4.2968
10	0.7000	1.3720	1.8120	2.2280	2.7640	3.1690	3.5814	4.1437
11	0.6970	1.3630	1.7960	2.2010	2.7180	3.1060	3.4966	4.0247
12	0.6950	1.3560	1.7820	2.1790	2.6810	3.0550	3.4284	3.9296
13	0.6940	1.3500	1.7710	2.1600	2.6500	3.0120	3.3725	3.8520
14	0.6920	1.3450	1.7610	2.1450	2.6240	2.9770	3.3257	3.7874
15	0.6910	1.3410	1.7530	2.1310	2.6020	2.9470	3.2860	3.7328
16	0.6900	1.3370	1.7460	2.1200	2.5830	2.9210	3.2520	3.6862
17	0.6890	1.3330	1.7400	2.1100	2.5670	2.8980	3.2225	3.6458
18	0.6880	1.3300	1.7340	2.1010	2.5520	2.8780	3.1966	3.6105
19	0.6880	1.3280	1.7290	2.0930	2.5390	2.8610	3.1737	3.5794
20	0.6870	1.3250	1.7250	2.0860	2.5280	2.8450	3.1534	3.5518
21	0.6860	1.3230	1.7210	2.0800	2.5180	2.8310	3.1352	3.5272
22	0.6860	1.3210	1.7170	2.0740	2.5080	2.8190	3.1188	3.5050
23	0.6850	1.3190	1.7140	2.0690	2.5000	2.8070	3.1040	3.4850
24	0.6850	1.3180	1.7110	2.0640	2.4920	2.7970	3.0905	3.4668
25	0.6840	1.3160	1.7080	2.0600	2.4850	2.7870	3.0782	3.4502
26	0.6840	1.3150	1.7060	2.0560	2.4790	2.7790	3.0669	3.4350
27	0.6840	1.3140	1.7030	2.0520	2.4730	2.7710	3.0565	3.4210
28	0.6830	1.3130	1.7010	2.0480	2.4670	2.7630	3.0469	3.4082
29	0.6830	1.3110	1.6990	2.0450	2.4620	2.7560	3.0380	3.3962
30	0.6830	1.3100	1.6970	2.0420	2.4570	2.7500	3.0298	3.3852
35	0.6820	1.3060	1.6900	2.0300	2.4380	2.7240	2.9960	3.3400
40	0.6810	1.3030	1.6840	2.0210	2.4230	2.7040	2.9712	3.3069
45	0.6800	1.3010	1.6790	2.0140	2.4120	2.6900	2.9521	3.2815
50	0.6790	1.2990	1.6760	2.0090	2.4030	2.6780	2.9370	3.2614
100	0.6770	1.2900	1.6600	1.9840	2.3640	2.6260	2.8713	3.1737
inf	0.6745	1.2816	1.6449	1.9600	2.3263	2.5758	2.8070	3.0902

الملحق رقم 4 : جدول التوزيع فيشر

Table des quantiles de la v.a. de Fisher

Fournit les quantiles x_p tels que $P(X \leq x_p) = p$
pour $X \sim F_{dl1;dl2}$



p = 0.025

dl1	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	20	30	50	100	inf
dl2															
1	0.0015	0.0260	0.0573	0.082	0.100	0.113	0.124	0.132	0.139	0.144	0.170	0.180	0.187	0.193	0.199
2	0.0013	0.0256	0.0623	0.094	0.119	0.138	0.153	0.165	0.175	0.183	0.224	0.239	0.252	0.261	0.271
3	0.0012	0.0255	0.0648	0.100	0.129	0.152	0.170	0.185	0.197	0.207	0.259	0.279	0.295	0.308	0.321
4	0.0011	0.0255	0.0662	0.104	0.135	0.161	0.181	0.198	0.212	0.224	0.285	0.308	0.327	0.343	0.359
5	0.0011	0.0255	0.0672	0.107	0.140	0.167	0.189	0.208	0.223	0.236	0.304	0.330	0.353	0.371	0.390
6	0.0011	0.0254	0.0679	0.109	0.143	0.172	0.195	0.215	0.232	0.246	0.320	0.349	0.374	0.394	0.415
7	0.0011	0.0254	0.0684	0.110	0.146	0.176	0.200	0.221	0.238	0.253	0.333	0.364	0.392	0.414	0.437
8	0.0011	0.0254	0.0688	0.111	0.148	0.179	0.204	0.226	0.244	0.259	0.343	0.377	0.407	0.431	0.456
9	0.0010	0.0254	0.0691	0.112	0.150	0.181	0.207	0.230	0.248	0.265	0.353	0.388	0.420	0.446	0.473
10	0.0010	0.0254	0.0694	0.113	0.151	0.183	0.210	0.233	0.252	0.269	0.361	0.398	0.432	0.459	0.488
11	0.0010	0.0254	0.0696	0.114	0.152	0.185	0.212	0.236	0.256	0.273	0.368	0.407	0.442	0.471	0.502
12	0.0010	0.0254	0.0698	0.114	0.153	0.186	0.214	0.238	0.259	0.276	0.374	0.415	0.451	0.481	0.514
13	0.0010	0.0254	0.0699	0.115	0.154	0.188	0.216	0.240	0.261	0.279	0.379	0.422	0.460	0.491	0.526
14	0.0010	0.0254	0.0700	0.115	0.155	0.189	0.218	0.242	0.263	0.282	0.384	0.428	0.467	0.500	0.536
15	0.0010	0.0254	0.0702	0.116	0.156	0.190	0.219	0.244	0.265	0.284	0.389	0.433	0.474	0.508	0.546
16	0.0010	0.0254	0.0703	0.116	0.156	0.191	0.220	0.245	0.267	0.286	0.393	0.439	0.481	0.516	0.555
17	0.0010	0.0254	0.0704	0.116	0.157	0.192	0.221	0.247	0.269	0.288	0.396	0.443	0.486	0.523	0.563
18	0.0010	0.0254	0.0704	0.116	0.157	0.192	0.222	0.248	0.270	0.290	0.400	0.448	0.492	0.529	0.571
19	0.0010	0.0254	0.0705	0.117	0.158	0.193	0.223	0.249	0.271	0.291	0.403	0.452	0.497	0.535	0.578
20	0.0010	0.0254	0.0706	0.117	0.158	0.193	0.224	0.250	0.273	0.293	0.406	0.456	0.502	0.541	0.585
25	0.0010	0.0253	0.0708	0.118	0.160	0.196	0.227	0.254	0.278	0.298	0.417	0.471	0.521	0.565	0.615
30	0.0010	0.0253	0.0710	0.118	0.161	0.197	0.229	0.257	0.281	0.302	0.426	0.482	0.536	0.583	0.639
35	0.0010	0.0253	0.0712	0.119	0.161	0.199	0.231	0.259	0.283	0.305	0.432	0.491	0.547	0.598	0.658
40	0.0010	0.0253	0.0712	0.119	0.162	0.200	0.232	0.260	0.285	0.307	0.437	0.498	0.557	0.610	0.674
45	0.0010	0.0253	0.0713	0.119	0.162	0.200	0.233	0.262	0.287	0.309	0.441	0.503	0.564	0.620	0.688
50	0.0010	0.0253	0.0714	0.119	0.163	0.201	0.234	0.263	0.288	0.310	0.445	0.508	0.571	0.628	0.700
60	0.0010	0.0253	0.0715	0.120	0.163	0.202	0.235	0.264	0.290	0.313	0.450	0.515	0.581	0.642	0.720
70	0.0010	0.0253	0.0715	0.120	0.164	0.202	0.236	0.265	0.291	0.314	0.454	0.521	0.589	0.653	0.737
80	0.0010	0.0253	0.0716	0.120	0.164	0.203	0.237	0.266	0.292	0.316	0.457	0.525	0.595	0.661	0.750
90	0.0010	0.0253	0.0716	0.120	0.164	0.203	0.237	0.267	0.293	0.317	0.459	0.529	0.600	0.668	0.762
100	0.0010	0.0253	0.0717	0.120	0.164	0.203	0.238	0.267	0.294	0.317	0.461	0.531	0.604	0.674	0.772
150	0.0010	0.0253	0.0717	0.121	0.165	0.204	0.239	0.269	0.296	0.320	0.467	0.540	0.617	0.693	0.807
200	0.0010	0.0253	0.0718	0.121	0.165	0.205	0.239	0.270	0.297	0.321	0.470	0.545	0.624	0.704	0.830
inf	0.0010	0.0253	0.0719	0.1211	0.1662	0.2062	0.2414	0.2725	0.3000	0.3247	0.4795	0.5597	0.6471	0.7422	1.000

P = 0.90

$n_2 \setminus n_1$	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	12	15	20	24	30	40	60	120	∞
1	39.86	49.50	53.59	55.83	57.24	58.20	58.91	59.44	59.86	60.19	60.71	61.22	61.74	62.00	62.26	62.53	62.79	63.06	63.33
2	8.53	9.00	9.16	9.24	9.29	9.33	9.35	9.37	9.38	9.39	9.41	9.42	9.44	9.45	9.46	9.47	9.47	9.48	9.49
3	5.54	5.46	5.39	5.34	5.31	5.28	5.27	5.25	5.24	5.23	5.22	5.20	5.18	5.18	5.17	5.16	5.15	5.14	5.13
4	4.54	4.32	4.19	4.11	4.05	4.01	3.98	3.95	3.94	3.92	3.90	3.87	3.84	3.83	3.82	3.80	3.79	3.78	3.76
5	4.06	3.78	3.62	3.52	3.45	3.40	3.37	3.34	3.32	3.30	3.27	3.24	3.21	3.19	3.17	3.16	3.14	3.12	3.10
6	3.78	3.46	3.29	3.18	3.11	3.05	3.01	2.98	2.96	2.94	2.90	2.87	2.84	2.82	2.80	2.78	2.76	2.74	2.72
7	3.59	3.26	3.07	2.96	2.88	2.83	2.78	2.75	2.72	2.70	2.67	2.63	2.59	2.58	2.56	2.54	2.51	2.49	2.47
8	3.46	3.11	2.92	2.81	2.73	2.67	2.62	2.59	2.56	2.54	2.50	2.46	2.42	2.40	2.38	2.36	2.34	2.32	2.29
9	3.36	3.01	2.81	2.69	2.61	2.55	2.51	2.47	2.44	2.42	2.38	2.34	2.30	2.28	2.25	2.23	2.21	2.18	2.16
10	3.29	2.92	2.73	2.61	2.52	2.46	2.41	2.38	2.35	2.32	2.28	2.24	2.20	2.18	2.16	2.13	2.11	2.08	2.06
11	3.23	2.86	2.66	2.54	2.45	2.39	2.34	2.30	2.27	2.25	2.21	2.17	2.12	2.10	2.08	2.05	2.03	2.00	1.97
12	3.18	2.81	2.61	2.48	2.39	2.33	2.28	2.24	2.21	2.19	2.15	2.10	2.06	2.04	2.01	1.99	1.96	1.93	1.90
13	3.14	2.76	2.56	2.43	2.35	2.28	2.23	2.20	2.16	2.14	2.10	2.05	2.01	1.98	1.96	1.93	1.90	1.88	1.85
14	3.10	2.73	2.52	2.39	2.31	2.24	2.19	2.15	2.12	2.10	2.05	2.01	1.96	1.94	1.91	1.89	1.86	1.83	1.80
15	3.07	2.70	2.49	2.36	2.27	2.21	2.16	2.12	2.09	2.06	2.02	1.97	1.92	1.90	1.87	1.85	1.82	1.79	1.76
16	3.05	2.67	2.46	2.33	2.24	2.18	2.13	2.09	2.06	2.03	1.99	1.94	1.89	1.87	1.84	1.81	1.78	1.75	1.72
17	3.03	2.64	2.44	2.31	2.22	2.15	2.10	2.06	2.03	2.00	1.96	1.91	1.86	1.84	1.81	1.78	1.75	1.72	1.69
18	3.01	2.62	2.42	2.29	2.20	2.13	2.08	2.04	2.00	1.98	1.93	1.89	1.84	1.81	1.78	1.75	1.72	1.69	1.66
19	2.99	2.61	2.40	2.27	2.18	2.11	2.06	2.02	1.98	1.96	1.91	1.86	1.81	1.79	1.76	1.73	1.70	1.67	1.63
20	2.97	2.59	2.38	2.25	2.16	2.09	2.04	2.00	1.96	1.94	1.89	1.84	1.79	1.77	1.74	1.71	1.68	1.64	1.61
21	2.96	2.57	2.36	2.23	2.14	2.08	2.02	1.98	1.95	1.92	1.87	1.83	1.78	1.75	1.72	1.69	1.66	1.62	1.59
22	2.95	2.56	2.35	2.22	2.13	2.06	2.01	1.97	1.93	1.90	1.86	1.81	1.76	1.73	1.70	1.67	1.64	1.60	1.57
23	2.94	2.55	2.34	2.21	2.11	2.05	1.99	1.95	1.92	1.89	1.84	1.80	1.74	1.72	1.69	1.66	1.62	1.59	1.55
24	2.93	2.54	2.33	2.19	2.10	2.04	1.98	1.94	1.91	1.88	1.83	1.78	1.73	1.70	1.67	1.64	1.61	1.57	1.53
25	2.92	2.53	2.32	2.18	2.09	2.02	1.97	1.93	1.89	1.87	1.82	1.77	1.72	1.69	1.66	1.63	1.59	1.56	1.52
26	2.91	2.52	2.31	2.17	2.08	2.01	1.96	1.92	1.88	1.86	1.81	1.76	1.71	1.68	1.65	1.61	1.58	1.54	1.50
27	2.90	2.51	2.30	2.17	2.07	2.00	1.95	1.91	1.87	1.85	1.80	1.75	1.70	1.67	1.64	1.60	1.57	1.53	1.49
28	2.89	2.50	2.29	2.16	2.06	2.00	1.94	1.90	1.87	1.84	1.79	1.74	1.69	1.66	1.63	1.59	1.56	1.52	1.48
29	2.89	2.50	2.28	2.15	2.06	1.99	1.93	1.89	1.86	1.83	1.78	1.73	1.68	1.65	1.62	1.58	1.55	1.51	1.47
30	2.88	2.49	2.28	2.14	2.05	1.98	1.93	1.88	1.85	1.82	1.77	1.72	1.67	1.64	1.61	1.57	1.54	1.50	1.46
40	2.84	2.44	2.23	2.09	2.00	1.93	1.87	1.83	1.79	1.76	1.71	1.66	1.61	1.57	1.54	1.51	1.47	1.42	1.38
60	2.79	2.39	2.18	2.04	1.95	1.87	1.82	1.77	1.74	1.71	1.66	1.60	1.54	1.51	1.48	1.44	1.40	1.35	1.29
120	2.75	2.35	2.13	1.99	1.90	1.82	1.77	1.72	1.68	1.65	1.60	1.55	1.48	1.45	1.41	1.37	1.32	1.26	1.19
∞	2.71	2.30	2.08	1.94	1.85	1.77	1.72	1.67	1.63	1.60	1.55	1.49	1.42	1.38	1.34	1.30	1.24	1.17	1.00

p= 0.95

dl1	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	20	30	50	100	inf
dl2															
1	161	200	216	225	230	234	237	239	241	242	248	250	252	253	254
2	18.5	19.0	19.2	19.3	19.3	19.3	19.4	19.4	19.4	19.4	19.5	19.5	19.5	19.5	19.5
3	10.1	9.6	9.3	9.1	9.0	8.9	8.9	8.8	8.8	8.8	8.7	8.6	8.6	8.5	8.5
4	7.71	6.94	6.59	6.39	6.26	6.16	6.09	6.04	6.00	5.96	5.80	5.75	5.70	5.66	5.63
5	6.61	5.79	5.41	5.19	5.05	4.95	4.88	4.82	4.77	4.74	4.56	4.50	4.44	4.41	4.37
6	5.99	5.14	4.76	4.53	4.39	4.28	4.21	4.15	4.10	4.06	3.87	3.81	3.75	3.71	3.67
7	5.59	4.74	4.35	4.12	3.97	3.87	3.79	3.73	3.68	3.64	3.45	3.38	3.32	3.28	3.23
8	5.32	4.46	4.07	3.84	3.69	3.58	3.50	3.44	3.39	3.35	3.15	3.08	3.02	2.98	2.93
9	5.12	4.26	3.86	3.63	3.48	3.37	3.29	3.23	3.18	3.14	2.94	2.86	2.80	2.76	2.71
10	4.97	4.10	3.71	3.48	3.33	3.22	3.14	3.07	3.02	2.98	2.77	2.70	2.64	2.59	2.54
11	4.84	3.98	3.59	3.36	3.20	3.10	3.01	2.95	2.90	2.85	2.65	2.57	2.51	2.46	2.40
12	4.75	3.89	3.49	3.26	3.11	3.00	2.91	2.85	2.80	2.75	2.54	2.47	2.40	2.35	2.30
13	4.67	3.81	3.41	3.18	3.03	2.92	2.83	2.77	2.71	2.67	2.46	2.38	2.31	2.26	2.21
14	4.60	3.74	3.34	3.11	2.96	2.85	2.76	2.70	2.65	2.60	2.39	2.31	2.24	2.19	2.13
15	4.54	3.68	3.29	3.06	2.90	2.79	2.71	2.64	2.59	2.54	2.33	2.25	2.18	2.12	2.07
16	4.49	3.63	3.24	3.01	2.85	2.74	2.66	2.59	2.54	2.49	2.28	2.19	2.12	2.07	2.01
17	4.45	3.59	3.20	2.97	2.81	2.70	2.61	2.55	2.49	2.45	2.23	2.15	2.08	2.02	1.96
18	4.41	3.56	3.16	2.93	2.77	2.66	2.58	2.51	2.46	2.41	2.19	2.11	2.04	1.98	1.92
19	4.38	3.52	3.13	2.90	2.74	2.63	2.54	2.48	2.42	2.38	2.16	2.07	2.00	1.94	1.88
20	4.35	3.49	3.10	2.87	2.71	2.60	2.51	2.45	2.39	2.35	2.12	2.04	1.97	1.91	1.84
25	4.24	3.39	2.99	2.76	2.60	2.49	2.41	2.34	2.28	2.24	2.01	1.92	1.84	1.78	1.71
30	4.17	3.32	2.92	2.69	2.53	2.42	2.33	2.27	2.21	2.17	1.93	1.84	1.76	1.70	1.62
35	4.12	3.27	2.87	2.64	2.49	2.37	2.29	2.22	2.16	2.11	1.88	1.79	1.70	1.64	1.56
40	4.09	3.23	2.84	2.61	2.45	2.34	2.25	2.18	2.12	2.08	1.84	1.74	1.66	1.59	1.51
45	4.06	3.20	2.81	2.58	2.42	2.31	2.22	2.15	2.10	2.05	1.81	1.71	1.63	1.55	1.47
50	4.03	3.18	2.79	2.56	2.40	2.29	2.20	2.13	2.07	2.03	1.78	1.69	1.60	1.53	1.44
60	4.00	3.15	2.76	2.53	2.37	2.25	2.17	2.10	2.04	1.99	1.75	1.65	1.56	1.48	1.39
70	3.98	3.13	2.74	2.50	2.35	2.23	2.14	2.07	2.02	1.97	1.72	1.62	1.53	1.45	1.35
80	3.96	3.11	2.72	2.49	2.33	2.21	2.13	2.06	2.00	1.95	1.70	1.60	1.51	1.43	1.32
90	3.95	3.10	2.71	2.47	2.32	2.20	2.11	2.04	1.99	1.94	1.69	1.59	1.49	1.41	1.30
100	3.94	3.09	2.70	2.46	2.31	2.19	2.10	2.03	1.98	1.93	1.68	1.57	1.48	1.39	1.28
150	3.90	3.06	2.67	2.43	2.27	2.16	2.07	2.00	1.94	1.89	1.64	1.54	1.44	1.35	1.22
200	3.89	3.04	2.65	2.42	2.26	2.14	2.06	1.99	1.93	1.88	1.62	1.51	1.41	1.32	1.19
inf	3.84	3.00	2.60	2.37	2.21	2.10	2.01	1.94	1.88	1.83	1.57	1.46	1.35	1.24	1.00

p = 0.975

dl1	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	20	30	50	100	inf
dl2															
1	648	800	864	900	922	937	948	957	963	969	993	1001	1008	1013	1018
2	38.51	39.00	39.17	39.25	39.30	39.33	39.36	39.37	39.39	39.40	39.45	39.46	39.48	39.49	39.50
3	17.44	16.04	15.44	15.10	14.88	14.73	14.62	14.54	14.47	14.42	14.17	14.08	14.01	13.96	13.90
4	12.22	10.65	9.98	9.60	9.36	9.20	9.07	8.98	8.90	8.84	8.56	8.46	8.38	8.32	8.26
5	10.01	8.43	7.76	7.39	7.15	6.98	6.85	6.76	6.68	6.62	6.33	6.23	6.14	6.08	6.02
6	8.81	7.26	6.60	6.23	5.99	5.82	5.70	5.60	5.52	5.46	5.17	5.07	4.98	4.92	4.85
7	8.07	6.54	5.89	5.52	5.29	5.12	4.99	4.90	4.82	4.76	4.47	4.36	4.28	4.21	4.14
8	7.57	6.06	5.42	5.05	4.82	4.65	4.53	4.43	4.36	4.30	4.00	3.89	3.81	3.74	3.67
9	7.21	5.71	5.08	4.72	4.48	4.32	4.20	4.10	4.03	3.96	3.67	3.56	3.47	3.40	3.33
10	6.94	5.46	4.83	4.47	4.24	4.07	3.95	3.85	3.78	3.72	3.42	3.31	3.22	3.15	3.08
11	6.72	5.26	4.63	4.28	4.04	3.88	3.76	3.66	3.59	3.53	3.23	3.12	3.03	2.96	2.88
12	6.55	5.10	4.47	4.12	3.89	3.73	3.61	3.51	3.44	3.37	3.07	2.96	2.87	2.80	2.72
13	6.41	4.97	4.35	4.00	3.77	3.60	3.48	3.39	3.31	3.25	2.95	2.84	2.74	2.67	2.60
14	6.30	4.86	4.24	3.89	3.66	3.50	3.38	3.29	3.21	3.15	2.84	2.73	2.64	2.56	2.49
15	6.20	4.77	4.15	3.80	3.58	3.41	3.29	3.20	3.12	3.06	2.76	2.64	2.55	2.47	2.40
16	6.12	4.69	4.08	3.73	3.50	3.34	3.22	3.12	3.05	2.99	2.68	2.57	2.47	2.40	2.32
17	6.04	4.62	4.01	3.66	3.44	3.28	3.16	3.06	2.98	2.92	2.62	2.50	2.41	2.33	2.25
18	5.98	4.56	3.95	3.61	3.38	3.22	3.10	3.01	2.93	2.87	2.56	2.44	2.35	2.27	2.19
19	5.92	4.51	3.90	3.56	3.33	3.17	3.05	2.96	2.88	2.82	2.51	2.39	2.30	2.22	2.13
20	5.87	4.46	3.86	3.51	3.29	3.13	3.01	2.91	2.84	2.77	2.46	2.35	2.25	2.17	2.09
25	5.69	4.29	3.69	3.35	3.13	2.97	2.85	2.75	2.68	2.61	2.30	2.18	2.08	2.00	1.91
30	5.57	4.18	3.59	3.25	3.03	2.87	2.75	2.65	2.57	2.51	2.20	2.07	1.97	1.88	1.79
35	5.48	4.11	3.52	3.18	2.96	2.80	2.68	2.58	2.50	2.44	2.12	2.00	1.89	1.80	1.70
40	5.42	4.05	3.46	3.13	2.90	2.74	2.62	2.53	2.45	2.39	2.07	1.94	1.83	1.74	1.64
45	5.38	4.01	3.42	3.09	2.86	2.70	2.58	2.49	2.41	2.35	2.03	1.90	1.79	1.69	1.59
50	5.34	3.97	3.39	3.05	2.83	2.67	2.55	2.46	2.38	2.32	1.99	1.87	1.75	1.66	1.55
60	5.29	3.93	3.34	3.01	2.79	2.63	2.51	2.41	2.33	2.27	1.94	1.82	1.70	1.60	1.48
70	5.25	3.89	3.31	2.97	2.75	2.59	2.47	2.38	2.30	2.24	1.91	1.78	1.66	1.56	1.44
80	5.22	3.86	3.28	2.95	2.73	2.57	2.45	2.35	2.28	2.21	1.88	1.75	1.63	1.53	1.40
90	5.20	3.84	3.26	2.93	2.71	2.55	2.43	2.34	2.26	2.19	1.86	1.73	1.61	1.50	1.37
100	5.18	3.83	3.25	2.92	2.70	2.54	2.42	2.32	2.24	2.18	1.85	1.71	1.59	1.48	1.35
150	5.13	3.78	3.20	2.87	2.65	2.49	2.37	2.28	2.20	2.13	1.80	1.67	1.54	1.42	1.27
200	5.10	3.76	3.18	2.85	2.63	2.47	2.35	2.26	2.18	2.11	1.78	1.64	1.51	1.39	1.23
inf	5.02	3.69	3.12	2.79	2.57	2.41	2.29	2.19	2.11	2.05	1.71	1.57	1.43	1.30	1.00

p= 0.99

dl1	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	20	30	50	100	inf
dl2															
1	4052	5000	5403	5625	5764	5859	5928	5981	6022	6056	6209	6261	6303	6334	6366
2	98.50	99.00	99.17	99.25	99.30	99.33	99.36	99.37	99.39	99.40	99.45	99.47	99.48	99.49	99.50
3	34.1	30.8	29.5	28.7	28.2	27.9	27.7	27.5	27.3	27.2	26.7	26.5	26.4	26.2	26.1
4	21.2	18.0	16.7	16.0	15.5	15.2	15.0	14.8	14.7	14.5	14.02	13.84	13.69	13.58	13.46
5	16.26	13.27	12.06	11.39	10.97	10.67	10.46	10.29	10.16	10.05	9.55	9.38	9.24	9.13	9.02
6	13.75	10.92	9.78	9.15	8.75	8.47	8.26	8.10	7.98	7.87	7.40	7.23	7.09	6.99	6.88
7	12.25	9.55	8.45	7.85	7.46	7.19	6.99	6.84	6.72	6.62	6.16	5.99	5.86	5.75	5.65
8	11.26	8.65	7.59	7.01	6.63	6.37	6.18	6.03	5.91	5.81	5.36	5.20	5.07	4.96	4.86
9	10.56	8.02	6.99	6.42	6.06	5.80	5.61	5.47	5.35	5.26	4.81	4.65	4.52	4.41	4.31
10	10.04	7.56	6.55	5.99	5.64	5.39	5.20	5.06	4.94	4.85	4.41	4.25	4.12	4.01	3.91
11	9.65	7.21	6.22	5.67	5.32	5.07	4.89	4.74	4.63	4.54	4.10	3.94	3.81	3.71	3.60
12	9.33	6.93	5.95	5.41	5.06	4.82	4.64	4.50	4.39	4.30	3.86	3.70	3.57	3.47	3.36
13	9.07	6.70	5.74	5.21	4.86	4.62	4.44	4.30	4.19	4.10	3.66	3.51	3.38	3.27	3.17
14	8.86	6.51	5.56	5.04	4.69	4.46	4.28	4.14	4.03	3.94	3.51	3.35	3.22	3.11	3.00
15	8.68	6.36	5.42	4.89	4.56	4.32	4.14	4.00	3.89	3.80	3.37	3.21	3.08	2.98	2.87
16	8.53	6.23	5.29	4.77	4.44	4.20	4.03	3.89	3.78	3.69	3.26	3.10	2.97	2.86	2.75
17	8.40	6.11	5.19	4.67	4.34	4.10	3.93	3.79	3.68	3.59	3.16	3.00	2.87	2.76	2.65
18	8.29	6.01	5.09	4.58	4.25	4.01	3.84	3.71	3.60	3.51	3.08	2.92	2.78	2.68	2.57
19	8.18	5.93	5.01	4.50	4.17	3.94	3.77	3.63	3.52	3.43	3.00	2.84	2.71	2.60	2.49
20	8.10	5.85	4.94	4.43	4.10	3.87	3.70	3.56	3.46	3.37	2.94	2.78	2.64	2.54	2.42
25	7.77	5.57	4.68	4.18	3.85	3.63	3.46	3.32	3.22	3.13	2.70	2.54	2.40	2.29	2.17
30	7.56	5.39	4.51	4.02	3.70	3.47	3.30	3.17	3.07	2.98	2.55	2.39	2.25	2.13	2.01
35	7.42	5.27	4.40	3.91	3.59	3.37	3.20	3.07	2.96	2.88	2.44	2.28	2.14	2.02	1.89
40	7.31	5.18	4.31	3.83	3.51	3.29	3.12	2.99	2.89	2.80	2.37	2.20	2.06	1.94	1.81
45	7.23	5.11	4.25	3.77	3.45	3.23	3.07	2.94	2.83	2.74	2.31	2.14	2.00	1.88	1.74
50	7.17	5.06	4.20	3.72	3.41	3.19	3.02	2.89	2.78	2.70	2.27	2.10	1.95	1.82	1.68
60	7.08	4.98	4.13	3.65	3.34	3.12	2.95	2.82	2.72	2.63	2.20	2.03	1.88	1.75	1.60
70	7.01	4.92	4.07	3.60	3.29	3.07	2.91	2.78	2.67	2.59	2.15	1.98	1.83	1.70	1.54
80	6.96	4.88	4.04	3.56	3.26	3.04	2.87	2.74	2.64	2.55	2.12	1.94	1.79	1.65	1.49
90	6.93	4.85	4.01	3.53	3.23	3.01	2.84	2.72	2.61	2.52	2.09	1.92	1.76	1.62	1.46
100	6.90	4.82	3.98	3.51	3.21	2.99	2.82	2.69	2.59	2.50	2.07	1.89	1.74	1.60	1.43
150	6.81	4.75	3.91	3.45	3.14	2.92	2.76	2.63	2.53	2.44	2.00	1.83	1.66	1.52	1.33
200	6.76	4.71	3.88	3.41	3.11	2.89	2.73	2.60	2.50	2.41	1.97	1.79	1.63	1.48	1.28
inf	6.64	4.61	3.78	3.32	3.02	2.80	2.64	2.51	2.41	2.32	1.88	1.70	1.52	1.36	1.00